2º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática
Brasília-DF, 14 à 16/08/2015

Minicurso Séries Infinitas

Jesus Carlos da Mota
Universidade Federal de Goiás
jesus@ufg.br

1 Introdução

O objetivo deste minicurso não é fazer um estudo formal das séries infinitas. Isto é feito em um curso regular de graduação em matemática, onde são estudadas as propriedades e os diversos métodos de convergência de uma série. O objetivo aqui é mostrar através de exemplos algumas curiosidades e dificuldades sobre a convergência das séries infinitas. Alguns destes exemplos serão mostrados através de simulações numéricas.

As séries numéricas são estudadas em qualquer curso de gradução em matemática. Séries simples como as geométricas são estudadas ainda no ensino médio através das progressões geométricas.

Em geral é uma questão difícil calcular a soma de uma série infinita. Uma questão que poderia ser mais fácil é a de determinar se a série converge ou não, isto é, se a soma infinita é igual a um determinado número ou não.

Neste minicurso, discutiremos a convergência de algumas séries numéricas, onde veremos que a convergência também pode ser um problema difícil. Por exemplo, as séries $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$ ou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\, sen^2\, n}$ convergem ou não? Sabemos que a primeira é uma série geométrica de razão igual a $\frac{1}{2}$, e portanto sua soma é facilmente calculada. Já a segunda, não se enquadra em nenhum dos métodos tradicionais de convergência, como Teste da Comparação, Teste da Razão ou de D'Alambert, Teste da Integral, etc. Portanto, estudar sua convergência é um problema difícil.

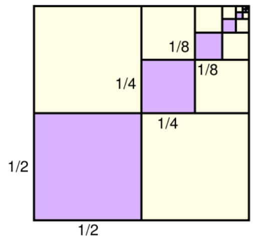

Figura 1:

2 Conceitos Básicos

Os conceitos e resultados básicos serão dados de acordo com a necessidade para o estudo dos exemplo apresentados.

Exemplo 1 *Calcular a soma das áreas dos quadrados em destaque da Figura 1.*

Solução: O cálculo resume-se em,

$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{2n}} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2k}}.$$

A sequência $\{S_n\}$, onde $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2k}}$ é a sequência das somas parciais da série envolvida. É evidente que esta sequência converge, pois é uma sequência crescente e limitada superiormente por 1 (valor da área do quadrado de lado 1).

Para calcularmos o valor exato da soma infinita, devemos primeiramente achar uma fórmula fechada para a soma parcial de ordem n, e depois calcular o limite $\lim_{n\to\infty} S_n$. Neste caso, como os termos de S_n formam uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{4}$, temos que

$$S_n = \frac{a_1\,(r^n - 1)}{r-1} = \frac{\frac{1}{4}((\frac{1}{4})^n - 1)}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{\frac{1}{4} - (\frac{1}{4})^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}.$$

Portanto, a soma das áreas dos quadrados é dada por,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}. \quad \bigcirc$$

Exemplo 2

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots.$$

Figura 2:

Guido Castelnuovo (Venezia, 14 agosto 1865 – Roma, 27 abril 1952), em 1903 fez $x = 1$*, e escreveu:*

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 ... = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

$$\frac{1}{2} = \underbrace{1-1} + \underbrace{1-1} + \underbrace{1-1} + ... = 0 + 0 + 0 + ...$$

$$\begin{aligned} & S_{2k} = 0, \quad S_{2k-1} = 1, \quad \text{portanto}, \\ & S = \frac{S_{2k} + S_{2k-1}}{2} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Exemplo 3

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Leonhard Euler (Basilea-Suiça, 15 abril 1707 – San Pietroburgo-Ru, 18 setembro 1783

$$Se \;\; x = \frac{1}{y} \quad implica \; que \quad \frac{1}{1-1/y} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{y^n}, \qquad y \neq 0.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y^n = y + y^2 + y^3 + ... = y(1 + y + y^2 + ...) = \frac{y}{1-y}\,.$$

Então

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{y^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} y^n = \frac{1}{1-1/y} + \frac{y}{1-y} = \frac{y}{y-1} - \frac{y}{y-1} = 0.$$

Exemplo: $y = 1 \Rightarrow 1 + 1 + 1 + ... = 0\,.$

A seguir descrevemos os principais resultados teóricos referidos na solução do Exemplo 1.

Definição 2.1 *Uma sequência de números reais é uma função que associa cada número natural* n *a um número real* a_n*. Denotando a sequência por* (a_n)*, diz-se que ela é convergente para um número real* L*, escreve-se* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$*, se*

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \ \exists\ n_0 \in N\ \ \textit{tal que, se}\ \ n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

Caso contrário diz-se que a sequência é divergente.

Pode-se definir outros tipos de sequências, como sequências de números complexos, sequências de funções, etc.

Definição 2.2 *Se* (a_n) *é uma sequência, a soma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

é chamada de série infinita com termo geral a_n*. Diz que a série converge ou é convergente, se a sequência de suas somas parciais* (S_n)*, onde* $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$*, for convergente. Caso contrário diz-se que a série diverge ou é divergente.*

A série do Exemplo 1 é convergente e sua soma é igual a $\frac{1}{3}$. A do Exemplo 2 é divergente, e a do Exemplo 3 é convergente se $x < 1$ e divergente se $x \geq 1$.

Exemplo 4 *Calcule a soma* S *das áreas dos retângulos sob o gráfico da função* $f(x) = \frac{1}{x^2}$*, para* $x \geq 1$*, conforme Figura 3.*

$$\textbf{Solução:}\quad S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

A primeira pergunta é se esta série converge ou diverge. Se ela for divergente, seu "valor" será infinito. Por definição devemos calcular o limite das somas parciais (S_n), onde $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$.

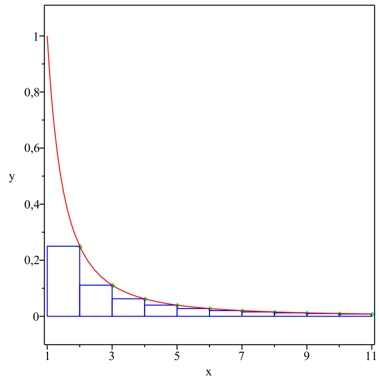

Figura 3:

Neste caso, uma fórmula fechada para S_n não é simples. Mas é possível achar uma cota superior para esta soma, que será a área sob o gráfico da $f(x) = \frac{1}{x^2}$, para $x \geq 1$.

$$A = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{B\to\infty} \int_1^B \frac{1}{x^2}dx = \lim_{B\to\infty} (-\frac{1}{x})|_1^B = \lim_{B\to\infty} (\frac{-1}{B} + 1) = 1.$$

Como as somas parciais é uma sequência monótona crescente e limitada por $A = 1$, a conclusão é que a área S é finita, e ainda, menor do que 1. ◯

Problema de Basel: Solução de Leonhard Euler: Calcule a soma dos inversos dos quadrados dos inteiros,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

A solução abaixo foi retirada do seguinte artigo:

Carlos Mateus, outubro 2008, https://cmssmatheus.wordpress.com/tag/soma-dos-inversos-dos-quadrados-dos-inteiros.

A idéia de Euler, 1735

Ele começa com a idéia de que todo polinômio em x pode ser fatorado por fatores da forma $x - \alpha$, onde α é uma raiz do polinômio, e assume que o mesmo pode ser feito por séries infinitas, portanto, essa prova não é rigorosa (prova rigorosa somente em 1941).

Euler olha para a expansão em série (1712) de Taylor do seno.

(Brook Taylor, Edmonton-Ing, 18 agosto 1685 - Londres-Ing, 29 dezembro 1731):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

Dividindo por x, tem-se que

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - ...$$

Os zeros de $\frac{\sin x}{x}$ ocorrem em $x = \pm n\pi$, $n = 1, 2, \cdots$. Supondo que podemos fatorar esta expansão em fatores lineares obtem-se,

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x}{n\pi})(1 + \frac{x}{n\pi}) = \prod_{n=1}^{\infty}\big(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\big).$$

O coeficiente de x^2 na última expressão é $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2} = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Por outro lado, o coeficiente de x^2 na expansão de Taylor é $-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$. Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \qquad \bigcirc$$

Demonstração rigorosa do problema de Basel:

Temos que

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^1\int_0^1 x^{n-1}y^{n-1}dx\,dy.$$

O Teorema da convergência monótona implica que,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \int_0^1\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}(xy)^{n-1}dx\,dy = \int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dx\,dy.$$

Fazendo a mudança de variaveis $x = u - v$ e $y = u + v$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 2\int\int_Q\frac{1}{1-u^2+v^2}du\,dv \tag{1}$$

onde Q é o losângulo de vertices (0,0), (1/2,1/2), (1/2,-1/2) e (1,0), Usando as simetrias desse losângulo, vemos que

$$\int\int_Q\frac{du\,dv}{1-u^2+v^2} = 2\int_0^{1/2}\int_0^{u}\frac{dv\,du}{1-u^2+v^2} + 2\int_{1/2}^{1}\int_0^{1-u}\frac{dv\,du}{1-u^2+v^2}.$$

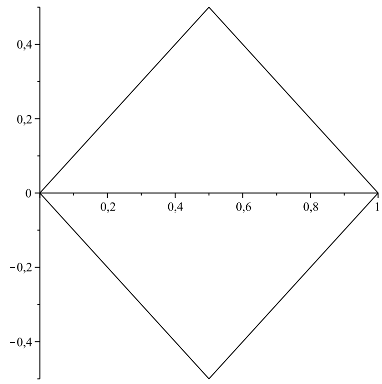

Figura 4:

Integrando com relação a v cada integral do segundo membro, temos

$$\int\int_Q \frac{du\,dv}{1-u^2+v^2} = 2\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}}du + 2\int_{1/2}^{1} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}}du. \qquad (2)$$

Para a primeira integral usamos que $\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \operatorname{arcsen} u$, donde

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du = \int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arcsen} u}{\sqrt{1-u^2}}du = \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} u)^2|_{u=0}^{u=1/2} = \frac{\pi^2}{72} \qquad (3)$$

Para a segunda integral, fazemos a mudança $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$, segue que $(\mathrm{tg}\theta)^2 = (1-u)/(1+u)$ e $(\sec\theta)^2 = 2/(1+u)$, ou seja, $u = 2(\cos\theta)^2 - 1 = \cos(2\theta)$ e, donde $\theta = \frac{1}{2}\arccos u = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} u$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du}{\sqrt{1-u^2}} &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin u\right) du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \left(\frac{\pi \operatorname{arcsen} u}{4} - \frac{(\operatorname{arcsen} u)^2}{4}\right)|_{u=\frac{1}{2}}^{u=1} = \frac{\pi^2}{36} \qquad (4)\end{aligned}$$

Substituindo (3) e (4) em (2), obtemos que

$$\int\int_Q \frac{du\,dv}{1-u^2+v^2} = 2\frac{\pi^2}{72} + 2\frac{\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{12}.$$

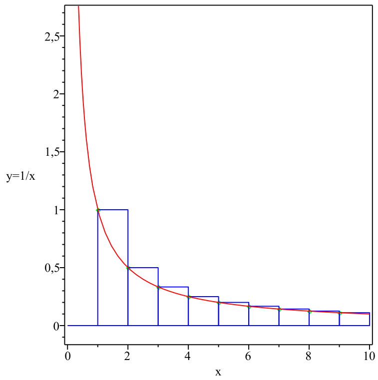

Figura 5:

Colocando essa informação em (1), concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \qquad \bigcirc$$

Exemplo 5 *Como no exemplo 4, calcule a soma das áreas dos retângulos sob o gráfico da função* $f(x) = \frac{1}{x}$*, para* $x \geq 1$*, conforme Figura 5.*

Solução: $$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Esta série é a famosa série harmônica. Com certeza, o exemplo mais importante na matemática de uma série divergente é o da série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \tag{5}$$

O nome harmônica é devido à semelhança com a proporcionalidade dos comprimentos de onda de uma corda a vibrar: 1, 1/2, 1/3, 1/4, ... Usando o teste da comparação é fácil verificar que a série harmônica diverge para infinito, pois:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty\,.$$

Voltando ao cálculo de S, a conclusão é que $S = \infty$. $\bigcirc$

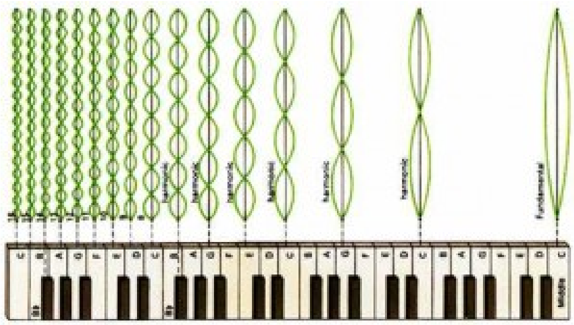

Figura 6:

Generalizações da série harmônica:

Série harmônica alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = ln\, 2.$$

Este resultado é uma consequência do desenvolvimento de Taylor da função $f(x) = ln(1+x)$ em potências de x.

Série-p:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

onde p é um número real positivo. A série é divergente se $p \leq 1$. Se $p = 1$, a série é a harmônica. Se $p > 1$ a série é convergente, e sua soma denotada por $\zeta(p)$, define a função zeta de Riemann.

(Georg Friedrich Bernhard Riemann, Hanover-Alemanha, 17 setembro 1826 - Selasca-Itália, 20 julho 1866.)

Série dos inversos dos números primos :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots ,$$

Usando passos de indução, soma da série geométrica, e a série de Taylor, pode-se provar que a série dos inversos dos primos diverge para infinito, ver [5].

Curiosidade:

Velocidade que série harmônica diverge

Agora vamos discutir um pouco a velocidade que série harmônica diverge para infinito.

A soma parcial de ordem n da série harmônica, denominada de n-ésimo número harmônico, é dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

A sequência (S_n) cresce tão rapidamente quanto o logaritmo natural de n. Isto porque a soma é aproximada ao valor da integral, veja Figura 5.

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = ln\,n.$$

Pode-se provar que

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - ln\,n) = \int_1^\infty \Big(\frac{1}{E(x)} - \frac{1}{x}\Big)dx = \gamma,$$

onde $E(x)$ é a parte inteira de x e γ é uma constante real, denominada constante Euler-Mascheroni.

(Lorenzo Mascheroni, Bergamo-Itália, 13 maio 1750 – Parigi-Itália, 14 julho 1800).

Euler calculou o valor de γ com 16 casas decimais e Mascheroni calculou com 32. Hoje tem-se esse valor com dezenas de casas decimais, por exemplo com 100 casas decimais o valor é:

$$\gamma \approx 0,5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672348848677267776646709369470632917467495$$

Portanto, para n grande o valor da soma parcial S_n pode ser aproximado por

$$S_n \approx ln\,n + \gamma, \quad \text{ou} \quad n \approx e^{S_n - \gamma}.$$

Por exemplo para $S_n = 17$ são necessários somar aproximadamente

$$n = e^{17-\gamma} \approx 31.557.600 \quad \text{termos}.$$

Se quesermos que a soma chegue em 100, teremos que somar aproximadamente

$$n = e^{100-\gamma} \approx \text{ número muito grande de termos}.$$

Como curiosidade, segue abaixo um texto tirado do Wikipedia sobre a série harmônica:

"Suponha que exista um computador que pode fazer uma soma em 10^{-23} segundos, que é o tempo gasto pela luz para percorrer a distância igual ao diâmetro de um elétron. Tal computador seria o mais rápido do universo, pois a velocidade da luz é a máxima neste. Se tal computador fosse somar todas as partes que pudesse da série harmônica em um ano, teria somado $315,576 \times 10^{25}$ termos; em mil anos $315,576 \times 10^{28}$; e em um bilhão de anos $315,576 \times 10^{34}$ termos! Os resultados aproximados que obteríamos, em cada um dos casos, respectivamente seria: 70,804; 77,712 e 91,527. Imagine agora que esse computador estivesse ligado desde a origem do universo, há cerca de 15 bilhões de anos. Ele estaria hoje obtendo o valor aproximado de 94,235 para a soma da série harmônica. Vamos além! O número 10^{80} é maior do que todos os valores anteriores, superando até mesmo a quantidade de átomos de todo o universo conhecido. Pois bem, para essa quantidade de termos a soma de todos eles é aproximadamente: 184,784 e permanece nesse mesmo valor aumentando-se drasticamente a quantidade de termos, como $10^{80} + 10^9$ ou $10^{80} + 10^{12}$. Veja que a cada passo estamos aumentando enormemente a quantidade de termos, no entanto, a soma S_n permanece a mesma. Em vista disso nada mais natural do que concluir que a série seja convergente. Mas, verificamos acima que isso é falso. Vemos então que jamais descobriríamos a divergência da série harmônica por meios puramente experimentais."

Exemplo 6 *Estudar a convergência da série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3\, sen^2\, n},$$

denominada de Série Flint Hills (Colinas Pederneiras do Kansas), ver Figura 7.

Solução: A convergência desta série ainda é um problema em aberto. Existem vários estudos relacionados com o assunto. A discussão a seguir foi retirada da referência [5], e mostra que a convergência está intimamente relacionada com a medida de irracionalidade do número π, denotada por $\mu(\pi)$. Em particular, a convergência da série Flint Hills implica que $\mu(\pi) \leq 2,5$. Mas, o menor limite superior para $\mu(\pi)$ conhecido hoje, é $\mu(\pi) \leq 7,6063...$, obtido em [7]. Portanto, os matemáticos especialistas na área de Teoria do Números, acham o problema da convergência desta série não será resolvido num futuro muito próximo.

Definição 2.3 *A medida de irracionalidade $\mu(x)$ de um número positivo x é definida como o ínfimo em m, tal que a desigualdade*

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^m} \tag{6}$$

Figura 7:

é válida somente para um número finito de co-primos inteiros positivos p e q. Se não existe uma tal m, então $\mu(x) = +\infty$.

Observamos aqui que números co-primos ou primos entre si, são os números de um conjunto onde o único divisor comum a todos eles é o número 1. Dois números a e b são co-primos se, e somente se, $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$. Exemplos de números co-primos: 7, 6 e 9; 3, 7 e 22; 11 e 27. Dois números pares nunca podem ser co-primos, pois se são pares, são divisíveis por 2.

Exercício 1 Mostre que se x é racional, então $\mu(x) = 1$.

Convergência da Série de Flint Hills

Lema 2.4 *Para todo número real x,*

$$|sen\, x| \leq |x|,$$

além do mais se $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, então

$$|sen\, x| \geq \frac{2}{\pi}\,|x|.$$

Dem. *A primeira desigualdade segue das seguintes estimativas:*

$$|sen\, x| = \left| \int_0^x cos\, y\, dy \right| \leq \int_0^{|x|} |cos\, y|\, dy \leq \int_0^{|x|} 1\, dy = |x|.$$

Para provar a segunda desigualdade, observe que $|sen\, x| = sen\, |x|$ *e sem perda de generalidade vamos assumir que* $0 \leq x \leq \pi/2$. *Se* $x_0 = arccos(\frac{2}{\pi})$, *então para* $x \leq x_0$ *temos que* $cos\, x \geq \frac{2}{\pi}$, *e assim*

$$sen\, x = \int_0^x cos\, y\, dy \geq \int_0^x \frac{2}{\pi}\, dy = \frac{2}{\pi}\, x.$$

Por outro lado, para $x \geq x_0$ *temos que* $cos\, x \leq \frac{2}{\pi}$, *e assim*

$$sen\, x = 1 - \int_x^{\pi/2} cos\, y\, dy \geq 1 - \int_x^{\pi/2} \frac{2}{\pi}\, dy = 1 - \frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{2}{\pi}\, x. \qquad \bigcirc$$

Teorema 2.5 *Para quaisquer dois números positivos u e v,*

$$\frac{1}{n^u |sen\, n|^v} = O\left(\frac{1}{n^{u-(\mu(\pi)-1)v-\epsilon}} \right) \quad para\ todo \quad \epsilon > 0.$$

Além do mais,

1. *Se* $\mu(\pi) < 1 + \dfrac{u}{v}$, *a sequência* $\dfrac{1}{n^u |sen\, n|^v}$ *converge para zero*;
2. *Se* $\mu(\pi) > 1 + \dfrac{u}{v}$, *a sequência* $\dfrac{1}{n^u |sen\, n|^v}$ *diverge.*

Dem. Seja $\epsilon > 0$ e $k = \mu(\pi) + \frac{\epsilon}{v}$. Então a desigualdade

$$\left| \pi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^k}$$

vale somente para um número finito de co-primos inteiros positivos p e q.

Para um inteiro positivo n, seja $m = \lfloor \frac{n}{\pi} \rfloor$ tal que $|\frac{n}{\pi} - m| < \frac{1}{2}$ e assim $|n - m\pi| \leq \frac{\pi}{2}$. Então pelo Lema 2.4,

$$|sen\, n| = |sen(n - m\pi)| \geq \frac{2}{\pi}|n - m\pi| = \frac{2}{\pi}\, m \left| \frac{n}{m} - \pi \right|.$$

Por outro lado, para n e m suficientemente grandes, temos que $|\frac{n}{m} - \pi| \geq \frac{1}{m^k}$, o que implica que

$$|sen\, n| \geq \frac{2}{\pi}\, m\, |\frac{n}{m} - \pi| \geq \frac{2}{\pi} \frac{1}{m^{k-1}} \geq c\, \frac{1}{n^{k-1}},$$

para algum $c > 0$ dependendo somente de k mas não de n (desde que $n/m \to \pi$ quando $n \to \infty$).

Portanto, para todo n suficientemente grande, temos

$$\frac{1}{n^u |sen\, n|^v} \leq \frac{1}{c^v\, n^{u-(k-1)v}} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{u-(\mu(\pi)-1)v-\epsilon}}\right).$$

Agora, se $\mu(\pi) < 1 + \frac{u}{v}$, considere $\epsilon = \frac{v}{2}(1 + \frac{u}{v} - \mu(\pi))$, e a afirmação 1 segue, pois

$$\frac{1}{n^u |sen\, n|^v} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{u-(\mu(\pi)-1)v-\epsilon}}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\epsilon}\right).$$

Vamos provar agora a afirmação 2. Se $\mu(\pi) > 1 + \frac{u}{v}$, então para $k = 1 + \frac{u}{v}$ a desigualdade (6) vale para um número infinito de co-primos inteiros positivos p e q. Isto é, existe uma sequência de racionais $(\frac{p_i}{q_i})$ tais que $|p_i - \pi\, q_i| < \frac{1}{q_i^{k-1}}$. Então,

$$|sen(p_i)| = |sen(p_i - q_i\, \pi| \leq |p_i - q_i\, \pi| < \frac{1}{q_i^{k-1}} < C\, \frac{1}{p_i^{k-1}},$$

para alguma constante $C > 0$ que depende somente de k.

Portanto, para $n = p_i$ temos

$$\frac{1}{n^u |sen\, n|^v} > C^v\, n^{v(k-1)-u} = C^v.$$

Por outro lado, temos

$$|sen(1 + p_i)| = |sen(1 + p_i - q_i\, \pi)| \to sen(1), \text{ quando } i \to \infty,$$

e assim

$$\frac{1}{(1 + p_i)^u |sen(1 + p_i)|^v} \to 0.$$

Concluimos que a sequência $\frac{1}{n^u |sen\, n|^v}$ diverge, pois ela contém duas subsequências, uma limitada inferiormente por uma constante, e a outra que tende a zero. $\bigcirc$

Corolário 2.6 *Para quaisquer números reais positivos u e v,*

1. *Se a sequência* $\left(\frac{1}{n^u |sen\, n|^v}\right)$ *converge, então* $\mu(\pi) \leq 1 + \dfrac{u}{v}$;
2. *Se a sequência* $\left(\frac{1}{n^u |sen\, n|^v}\right)$ *diverge, então* $\mu(\pi) \geq 1 + \dfrac{u}{v}$.

Dem. A prova de cada item é dada por contradição, como consequência imediata do Teorema 2.5. $\bigcirc$

Corolário 2.7 *Se a série Flint Hills* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 sen^2\, n}$ *converge, então* $\mu(\pi) \leq \frac{5}{2}$.

Dem. A convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 sen^2\, n}$ implica que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3 sen^2\, n} = 0$, portanto pelo Corolário 2.6 $\mu(\pi) \leq \frac{5}{2}$. ◯

Teorema 2.8 *Para quaisquer números reais positivos u e v, se* $\mu(\pi) < \frac{u-1}{v}$, *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u |sen\, n|^v}$ *converge.*

Dem. A desigualdade $\mu(\pi) < \frac{u-1}{v}$ implica que $u - v(\mu(\pi) - 1) > 1$. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que $w = u - v(\mu(\pi) - 1) - \epsilon > 1$. Pelo Teorema 2.5, $\frac{1}{n^u |sen\, n|^v} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^w}\right)$. Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u |sen\, n|^v} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^w}\right) = \mathrm{O}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^w}\right) = \mathrm{O}(\zeta(w)) = \mathrm{O}(1). \quad \bigcirc$$

Corolário 2.9 *Para quaisquer números reais positivos u e v, se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u |sen\, n|^v}$ *diverge, então* $\mu(\pi) \geq \frac{u-1}{v}$.

Dem. A demonstração é uma consequência imediata do teorema. ◯

O Corolário 2.9 implica que se a série Flint Hills diverge, então $\mu(\pi) \geq 1 + \frac{3-1}{2} = 2$. Mas esta desigualdade já é conhecida como verdadeira. Portanto, como resultado deste corolário nada podemos afirmar sobre a divergência da série Flint Hills.

Exercício 2 Discutir a convergência da seguinte série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\, sen\, n)^n}{n}.$$

Obs. Se o leitor tentar e não conseguir, não deve ficar triste, pois muitos já tentaram e também não conseguiram. Pesquisando a literatura, até hoje não vimos nenhum resultado concluindo que esta série converge ou diverge, ou seja permanece ainda como um problema em aberto.

References

[1] Robin Chapman, http://mathoverflow.net/questions/24579/convergence-of-sumn3-sin2n-1, mathoverflow, 1999

[2] Weisstein, Eric W. , *Harmonic Series*, From MathWorld–A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/HarmonicSeries.html

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Series-mathematics

[4] Max A. Alekseyev, *On convergence of the Flint Hills series*, arXiv:1104.5100v1 [math.CA], 2011

[5] https://pt.wikipedia.org/wiki/Série_dos_inversos_dos_primos

[6] https://www.google.com.br/search?q=flint+hills+kansas

[7] V. Kh. Salikhov. On the Irrationality Measure of pi. Russ. Math. Surv, 63(3):570–572, 2008.