

Relações de recorrência e algumas aplicações

Moiseis S. Cecconello

moiseis@gmail.com

Geraldo Lúcio Diniz

geraldo@ufmt.com

Brasília, 15 de Agosto de 2015



Resumo

Em diversas situações estamos interessados em observar como uma determinada quantidade evolui com o tempo. Em alguns casos, as relações de recorrência podem ser usadas como modelo para descrever a evolução de tais quantidades. Neste minicurso, temos como objetivo usar as relações de recorrência como ferramenta de análise de diversos problemas de aplicação nas mais variadas áreas de conhecimento bem como discutir alguns aspectos teóricos necessários em tais análises.



Este curso foi elaborado para trazer uma abordagem para a perspectiva do ensino de matemática, através de uma “leitura” da realidade sob o olhar da matemática.

Neste contexto, será feito um estudo de equações de diferenças, através de aplicações biológicas.

O ponto de partida será a modelagem dos processos discretos, que são predominantes nos sistemas da natureza.



Para isto, foi feita a opção de trabalhar os conceitos essenciais das equações de diferenças, mais adequadas para a modelagem dos processos discretos.

O curso foi elaborado de forma a despertar uma nova visão dos fenômenos que ocorrem na natureza, através do olhar matemático, mas sem perder o foco do fenômeno que se deseja estudar.

Desta forma, ao solucionar o problema matemático que se originou de um fenômeno real, é importante entender a solução do ponto de vista da realidade, em termos de validade e aproximação de resultados reais.



Tópicos que serão abordados

- Modelagem matemática
 - Primeiros modelos
 - Do problema real ao modelo matemático

- Modelagem através de equações de diferenças
 - Equações de primeira ordem
 - * Divisão celular
 - * População de insetos
 - * Procriação de lebres



- Equações de segunda ordem
 - * Propagação anual de plantas
- Equação característica e autovalores
- Equação não homogênea

- Sistemas de equações de diferenças
 - Dinâmica populacional com 3 classes etárias
 - O problema da tartaruga-da-amazônia

- Equações com autovalores complexos



- Equações de diferenças não-lineares
 - Equação logística discreta
 - Sistemas não lineares
 - Conceito de estabilidade



Modelagem matemática

- A modelagem matemática pode ser definida como a descrição através do ferramental matemático de um evento, processo ou elemento do universo, seja ele ser vivo ou não.
- A concepção do modelo, em geral, é feita a partir de simplificações da situação original para buscar elementos matemáticos que possam descrever ou pelo menos se aproximar da realidade sobre a qual se deseja estudar.
- Nenhum modelo deve ser proposto de forma fechada ou definitiva, busca-se, através de melhorias ou adequações cada vez mais complexas, aproximar cada vez mais o modelo e a realidade.



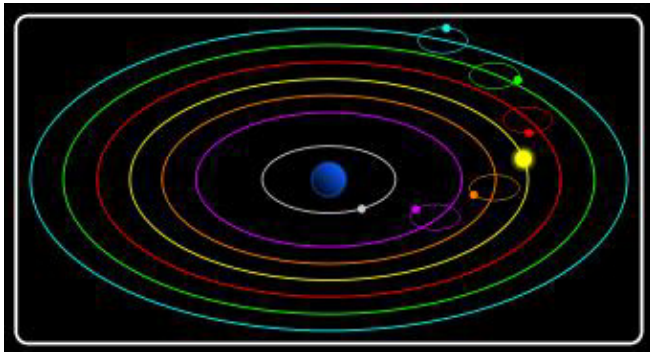
Primeiros modelos

Um dos primeiros modelos foi proposto pelo matemático, geógrafo, astrólogo e astrônomo, Cláudio Ptolomeu (90-170 d.C.).

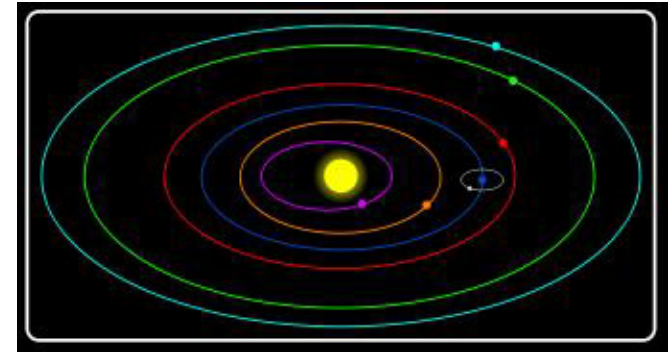
O modelo geocêntrico foi concebido no século II d.C. e tido como verdadeiro por 14 séculos, até que Nicolau Copérnico (1473-1543), no século XVI, formulou e apresentou o modelo heliocêntrico.



Comparando os modelos



(a) Modelo geocêntrico



(b) Modelo heliocêntrico

Figura 1: Modelos para mecânica celeste



Do problema real ao modelo matemático

- A concepção do modelo matemático, nem sempre é uma tarefa fácil, a grande dificuldade está na identificação das características relevantes da realidade, que devem ser consideradas e expressas no modelo a ser proposto.
- Ao se deparar com a questão fundamental que se procura apreender da realidade é que se começa a construir o modelo, a partir de premissas que possam ser traduzidas para a linguagem matemática, que em última instância, nada mais é do que uma linguagem (ou ferramental) com a qual se pode abstrair (ou descrever) a realidade.
- Devemos pensar em um modelo matemático como sendo uma caricatura para descrever um determinado fenômeno.



Formulação mais específica

Suponha que seja observada uma determinada medida em espaços regulares de tempo e obtemos uma sequência

$$\{x_n\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}.$$

O problema de modelagem então se resume em:

- Existe alguma relação entre os elementos da sequência?
- É possível encontrar uma lei de formação que permita reproduzir a sequência?
- É possível fazer previsões?



- Existe alguma relação entre os elementos da sequência?
- É possível encontrar uma lei de formação que permita reproduzir a sequência?
- É possível fazer previsões?

O que eu não posso criar, eu não compreendo. (R. Feynman)



Modelagem através de equações de diferenças

- Conceitos básicos:
 - Processos discretos no tempo, ou seja, que ocorrem em intervalos regulares, tais como: uma vez ao dia, ou em ciclos mensais, em que o estágio seguinte depende do estágio anterior.
Tais processos podem ser descritos matematicamente por equações de diferenças (ou fórmulas de recorrência), que estabelecem uma relação entre os termos de uma sucessão.



O padrão dos padrões

Vamos começar com algo familiar?

Definição 1. *A forma geral de uma equação de diferenças linear, de primeira ordem, é dada por*

$$a_1x_{n+1} + a_2x_n = a_3 \quad (1)$$

onde a_i são coeficientes ou parâmetros da equação e x_j são os termos da sequência.

No caso em que $a_3 = 0$, a equação é denominada homogênea.

Quais são os exemplos clássicos?



Entre uma PA e um PG

Rescrevendo, obtemos:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

Isto é, o termo seguinte da sequência é composto do termo anterior adicionado de uma constante. É um modelo simples para:

- Dinâmica populacional, transmissão doenças infecciosas, poluição em lagos, medicação, temperatura de um corpo, depreciação de equipamento, reflorestamento e investimento financeiro entre outros.



Definição 2. *Para a equação de diferenças linear, de segunda ordem, a forma geral é dada por*

$$a_1x_{n+2} + a_2x_{n+1} + a_3x_n = a_4 \quad (2)$$

Note que $n + 2 - n = 2$

Definição 3. *Assim, sucessivamente, se define uma equação de diferenças linear, de ordem m , como sendo toda equação da forma*

$$a_1x_{n+m} + a_2x_{n+m-1} + \dots + a_{m+1}x_n = a_{m+2} \quad (3)$$

No caso em que os parâmetros a_i são constantes (reais ou complexos), a equação recebe a classificação adicional de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes.



Definição 4. *Dada uma equação de diferenças, se denomina **solução geral** de uma equação de diferenças, a forma geral do termo de ordem n que satisfaz a equação de diferenças.*

A solução geral de uma equação de diferenças pode ser obtida por algumas técnicas específicas, sem recorrer ao cálculo de todos os n termos antecedentes. Uma abordagem mais completa deste tema pode ser encontrada em Farlow¹.

Para $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$ tem-se

$$x_n = \alpha^n x_0 + \beta \frac{1 - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha}$$

¹S. J. Farlow, "Differential Equations and Their Applications", McGraw-Hill, N. York, 1994.



Uma outra alternativa

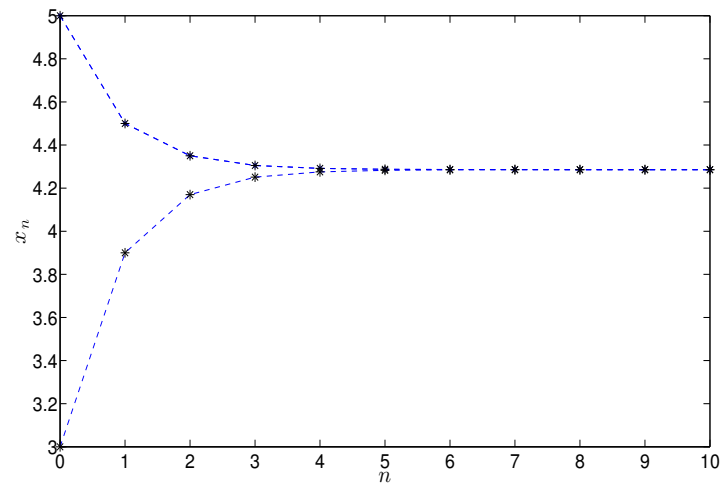
Imaginemos que x_n seja convergente (?). Então tem-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

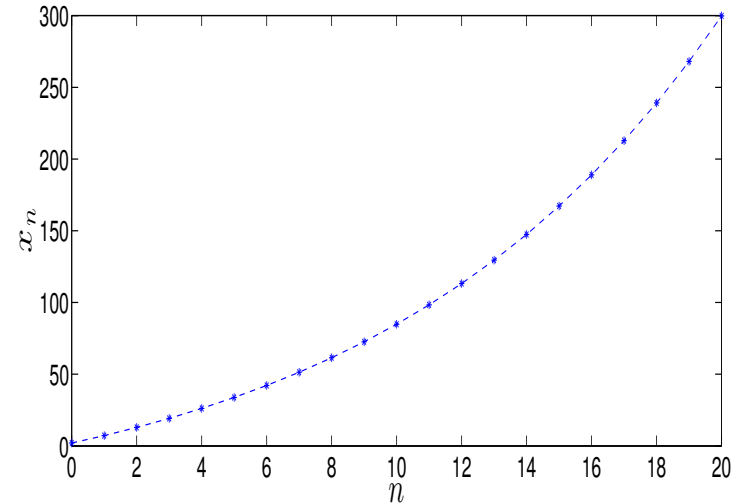
- Para a linear de primeira ordem: $\bar{x} = \frac{\beta}{1 - \alpha}$.
- Para a linear de segunda ordem: $\bar{x} = \frac{a_4}{a_1 + a_2 + a_3}$.



Comportamento típico



(a) $0 < r < 1$



(b) $r > 1$

Figura 2: Simulação numérica da recorrência.



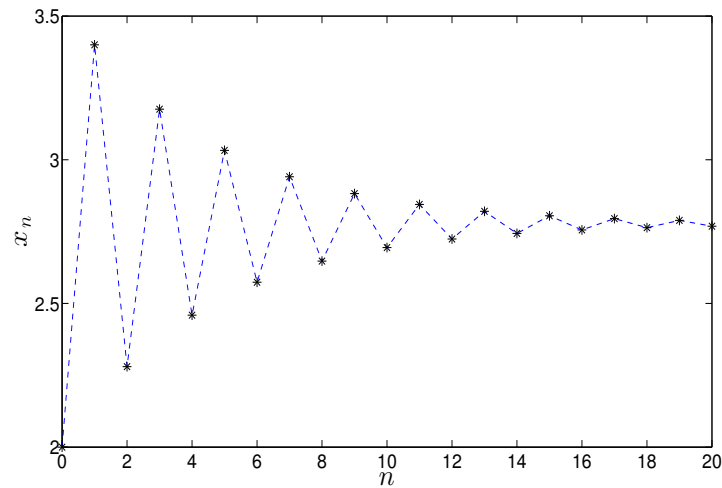
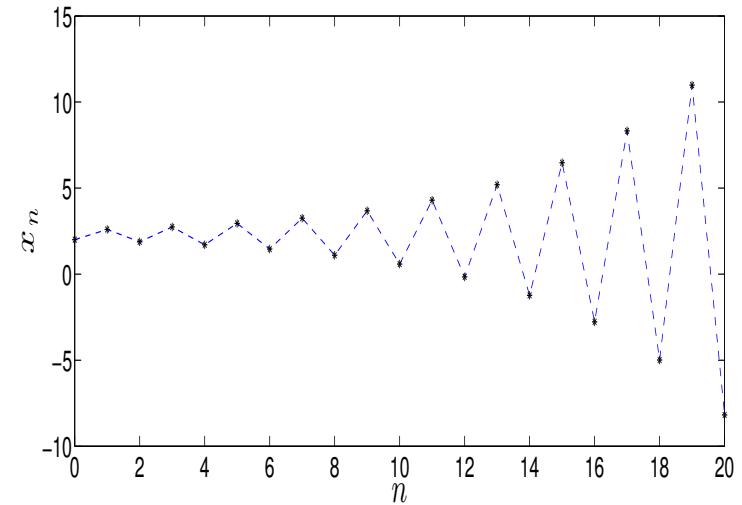
(a) $-1 < r < 0$ (b) $r < -1$

Figura 3: Simulação numérica da recorrência.



Dinâmica populacional

Seja x_n a quantidade de indivíduos no instante n .

- O que provoca alterações na quantidade de indivíduos população?
- O que seria uma aproximação razoável para a mortalidade e natalidade?

$$x_{n+1} - x_n = \alpha x_n - \beta x_n.$$



Divisão celular ou reprodução assexuada

- Fixado um intervalo de tempo, cada indivíduo produz, em média, “ α ” indivíduos.
 - Definindo $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ como sendo o número total de indivíduos nas gerações 1, 2, 3, \dots, n ; então, uma equação simples que relaciona duas gerações sucessivas, por exemplo, para as gerações $n + 1$ e n , pode ser escrita na forma

$$x_{n+1} = \alpha x_n \quad (\alpha > 0) \quad (4)$$

- Qual seria o tamanho da população após n gerações?
Para uma geração n qualquer, o número de células (supondo existirem x_0



indivíduos inicialmente) será dada por:

$$x_n = \alpha^n x_0 \quad (5)$$

- A magnitude de “ α ” é que irá determinar se a população aumenta ou diminui nas gerações sucessivas, da seguinte forma:
 - * Se $\alpha > 1$, então x_n aumenta nas gerações sucessivas;
 - * Se $\alpha = 1$, então x_n será constante em todas as gerações;
 - * Se $\alpha < 1$, então x_n decresce nas gerações sucessivas.



Populações de insetos

- Considerações iniciais:
 - Insetos geralmente têm mais de um estágio de desenvolvimento no seu ciclo de vida, desde o nascimento até atingir a maturidade.
 - O ciclo completo pode ter semanas, meses ou até mesmo anos.
 - É comum usar uma única geração como unidade de tempo para descrever um modelo de crescimento de populações de insetos.
 - Alguns estágios podem ser descritos através de equações de diferenças.
 - Um sistema de equações pode ser condensado a uma única equação que combine os parâmetros que aparecem no sistema.



Como exemplo, será considerada a reprodução de um afídio² do álamo³.

- Hipóteses:

De acordo com Whitham⁴, esta espécie possui as seguintes características

1. A fêmea adulta ovipõe nas folhas do álamo, neste local irá se desenvolver a galha;
2. toda prole de um único afídio está contida em uma galha;
3. uma fração desta prole irá eclodir e sobreviverá como adulto;
4. A capacidade de produção de prole (fecundidade) e a sobrevivência até a reprodução dependem das condições ambientais, da qualidade de sua alimentação e do tamanho de sua população.

²Insetos também conhecidos como pulgões de plantas

³Espécie de olmeiro ou choupo da família das salináceas, planta nativa da América do Norte.

⁴T. G. Whitham, The theory of habitat selection: examined and extended using Pemphigus aphids. *Am. Nat.*, **115**, (1980), 449–466.



Os fatores apresentados no item 4, momentaneamente, serão negligenciados para se estudar um modelo simplificado, no qual todos os parâmetros são constantes.

Primeiro, será definido:

a_n = o número de fêmeas adultas na geração n ;

p_n = o número de prole na geração n ;

μ = a fração de mortalidade de afídios jovens;

f = a fecundidade por fêmea, isto é, o número de prole produzido por cada fêmea;

r = razão de fêmeas do total de afídios adultos.



- A equação que modela este caso pode ser formulada por:

$$p_{n+1} = f a_n \quad (6)$$

onde a_n é o número de fêmeas na geração prévia; f é o número de prole por fêmea de afídio e p_{n+1} é o número de prole na geração $n + 1$. Como do total desta prole, apenas a fração $(1 - \mu)$ sobrevive para a fase adulta, apenas uma proporção final “ r ” será de fêmeas. Daí, se obtém

$$a_{n+1} = r (1 - \mu) p_{n+1} \quad (7)$$

- As equações (6) e (7) descrevem a população de afídios na geração $n + 1$, em função do total de fêmeas na geração n . A combinação delas leva a

$$a_{n+1} = f r (1 - \mu) a_n \quad (8)$$



- Para simplificar do modelo, suponha que os parâmetros bióticos f , r e μ sejam constantes. Desta forma, a solução⁵ da equação (8) que se obtém para uma geração n qualquer é dada por:

$$a_n = [f r (1 - \mu)]^n a_0 \quad (9)$$

onde a_0 é o número inicial de fêmeas adultas.

- Fazendo $\lambda = f r (1 - \mu)$, este coeficiente representa o número per capita de fêmeas adultas que cada mãe produz, daí a solução pode ser escrita na forma:

$$a_n = \lambda^n a_0 \quad (10)$$

⁵Como no caso da divisão celular a solução pode ser obtida por recursividade a partir da população inicial a_0



Limitações?

- População tende ao infinito ou a zero.
- O que está faltando?

Outro modelo:

$$x_{n+1} - x_n = \alpha (K - x_n)$$

- O parâmetro K é a *capacidade suporte*.



Limitações?

- População tende ao infinito ou a zero.
- O que está faltando?

Outro modelo:

$$x_{n+1} = (1 - \alpha)x_n + \alpha K.$$

- O parâmetro K é a *capacidade suporte*.



Medicação

- Hipóteses:
 - Em intervalos de tempos regulares, uma quantidade $\beta > 0$ (mg/l) é administrada.
 - A substância tem um decaimento $\alpha \in (0, 1)$.
- O modelo então é: $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$
- Qual dosagem é efetiva?
- $\bar{x} = \beta / (1 - \alpha)$.



Reflorestamento

- Considerando que:
 - Em intervalos de tempos regulares, são plantadas $\beta > 0$ árvores.
 - Um percentual $\alpha \in (0, 1)$ é aproveitada para corte.
- O modelo então é: $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$
- Planejamento?
- $\bar{x} = \beta / (1 - \alpha)$.



Recorrências lineares de segunda ordem

Este problema foi proposto e solucionado em 1202 por Fibonacci (Leonardo di Pisa). Trata-se de uma aplicação interessante da razão áurea, proposto como exercício por Edelstein-Keshet⁶.

- **Estabelecendo o problema:**

- Suponha que um criador de lebres, estabeleça seu sistema de produção, de modo que todo casal de lebres possa reproduzir-se somente duas vezes, quando eles estão com 1 e 2 meses de idade (ver figura 4).
- Além disso, suponha que cada casal produza exatamente um novo casal de lebres a cada reprodução e que todos sobrevivam para se reproduzir por duas vezes.

⁶L. Edelstein-Keshet, “Mathematical models in Biology”, Ed. SIAM, Philadelphia, 2005.



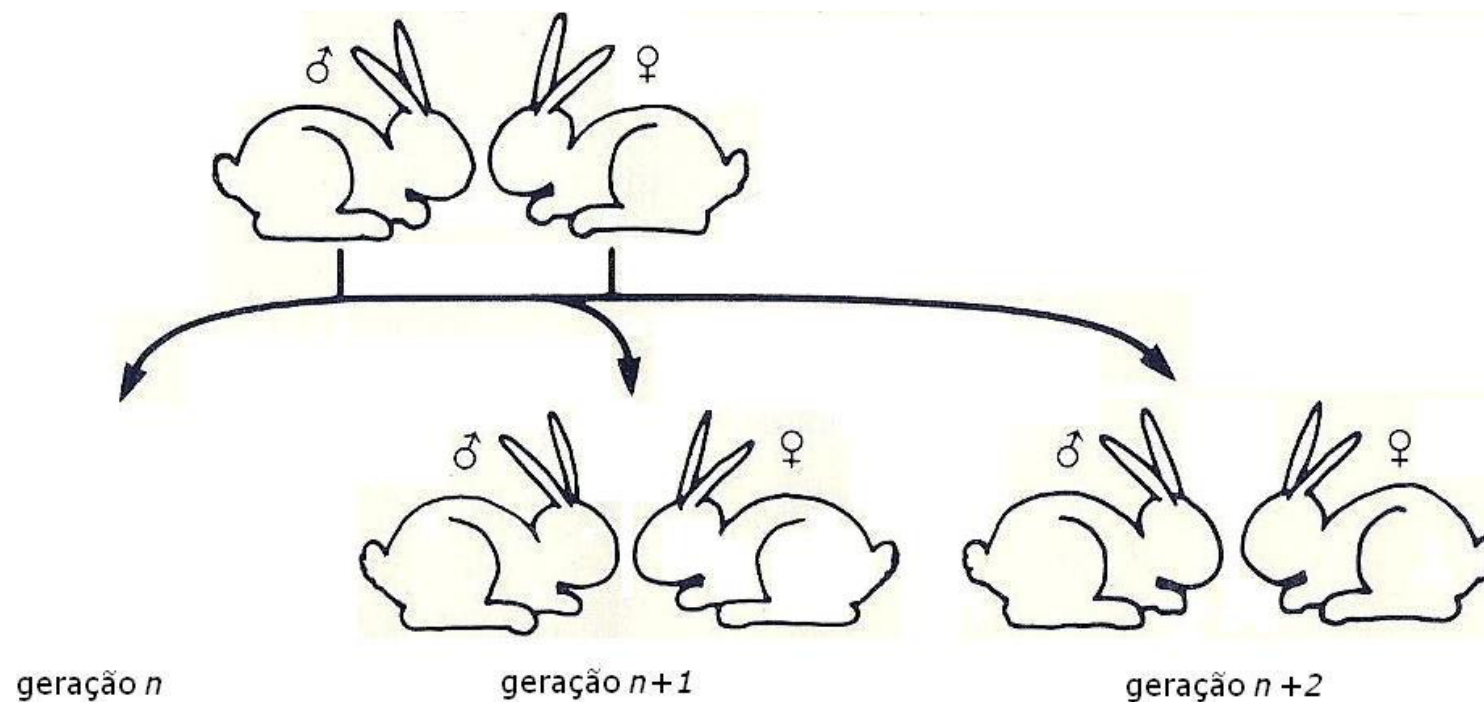


Figura 4: Diagrama para a procriação de lebres – fonte: Edelstein-Keshet (pág. 32).



- Quantos casais o criador terá após n gerações?

$$R_{n+1} = R_n + R_{n-1} \quad (11)$$

que é uma equação de diferenças de segunda ordem, linear e homogênea, que pode ser reescrita na forma:

$$R_{n+2} - R_{n+1} - R_n = 0 \quad (12)$$



Solução da equação de 2^a ordem

- Suponha que $R_n = \lambda^n K$, em que K é o número inicial de casais de lebres.
- Daí, levando em (12), vem

$$\lambda^{n+2}K - \lambda^{n+1}K - \lambda^n K = 0 \quad (13)$$

- Fatorando a equação (13) para $\lambda^n K$, se obtém

$$(\lambda^2 - \lambda - 1)\lambda^n K = 0 \quad (14)$$



- Supondo $K \neq 0$ e $\lambda \neq 0$ então

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad (15)$$

- Do qual tem-se:

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (16)$$

- E a solução não nula da recorrência é

$$R_n = K_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + K_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (17)$$

- Levando em consideração que $R_0 = R_1 = 1$ então o número de casais é:



$$R_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (18)$$

1. Apesar da aparência, a solução apresentada pela equação (18) gera a conhecida sequência de Fibonacci, ou seja, para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ se tem

$$\{R_n\} = \{1, 1, 3, 5, \dots\}.$$

2. O valor de $\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é também conhecido como número de ouro (ϕ)⁷, assim como proporção áurea ou a divina proporção, que tem uma propriedade interessante, pois seu inverso $\left(\frac{1}{\phi}\right)$ satisfaz a seguinte relação: $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$.

⁷Em homenagem ao arquiteto grego Phidias



Propagação anual de plantas

Informações iniciais:

Algumas plantas produzem sementes todo ano no final do verão. A floração desaparece, deixando a prole numa dormência, na forma de sementes.

Após o final da seca uma fração destas sementes irá germinar. No entanto, algumas sementes podem ficar dormentes por um ano ou mais até germinar, enquanto outras poderão sucumbir (calor, frio, incêndio, etc.).

Para formular um modelo que descreva a propagação anual de plantas existe um complicador: plantas produzirem anualmente sementes que poderão estar dormentes antes da germinação.

Neste caso, não se pode perder de vista, tanto a população de plantas quanto a reserva de sementes de várias idades no banco de sementes.



Estabelecendo o problema:

As plantas produzem sementes no final de sua estação de crescimento (final do verão) após o qual elas morrem. Uma fração destas sementes sobrevivem ao inverno (seca), e destas, algumas germinarão no início de sua estação (começo das chuvas), produzindo uma nova geração de plantas. A fração que germinou depende da idade das sementes.



Definições e hipóteses:

Parâmetros:

- γ : número de sementes produzidas por planta;
- α : fração de sementes de 1 ano que germinarão;
- β : fração de sementes de 2 anos que germinarão;
- σ : fração de sementes que sobrevivem a cada inverno.



... cont. Definições e hipóteses:

Na definição das variáveis, se deve notar que o banco de sementes irá mudar algumas vezes durante o ano devido a:

- I – germinação de algumas sementes;
- II – produção de novas sementes;
- III – envelhecimento de sementes e mortalidade.



Diagrama do processo:

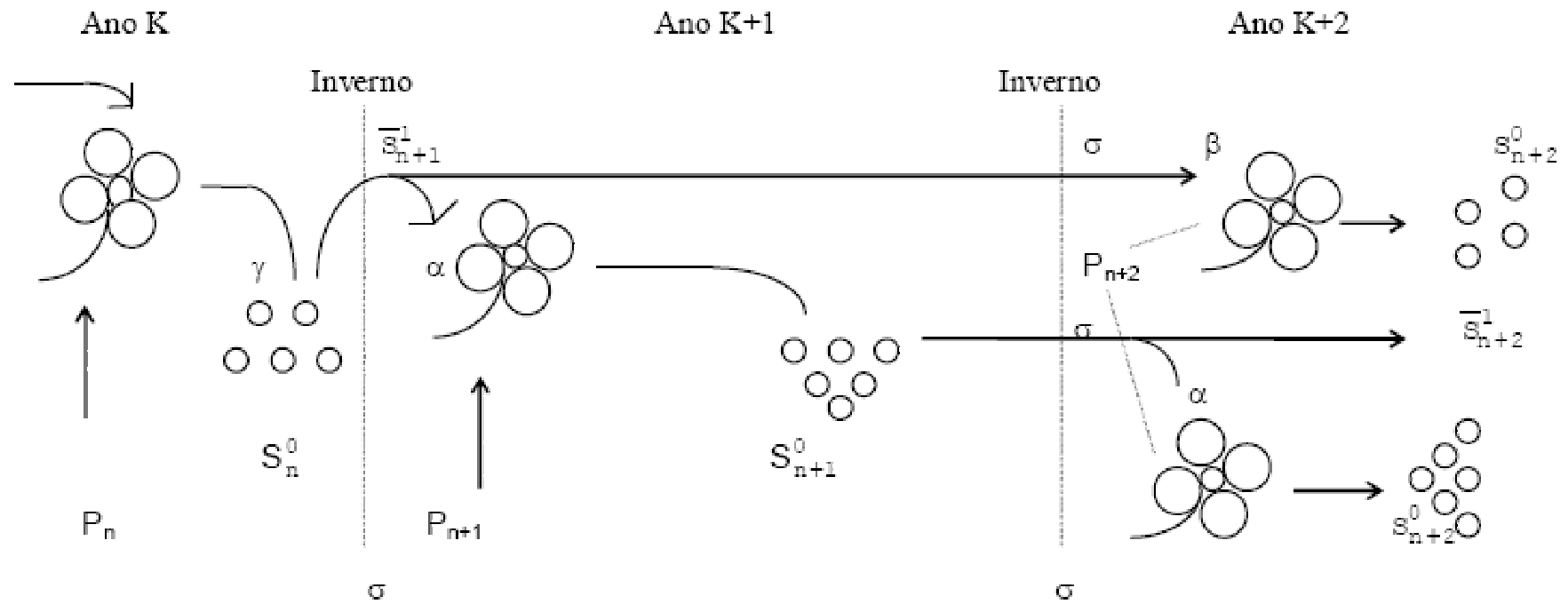


Figura 5: Diagrama da propagação anual de plantas.



Construção do modelo:

Com base no diagrama (figura 5), são definidas as seguintes variáveis:

- P_n = número de plantas na geração n ;
- S_n^0 = número de sementes novas produzidas;
- S_n^1 = número de sementes de 1 ano antes da germinação;
- S_n^2 = número de sementes de 2 anos antes da germinação;
- \bar{S}_n^1 = número de sementes de 1 ano após a germinação;
- \bar{S}_n^2 = número de sementes de 2 anos após a germinação.



As equações:

$$P_n = \alpha S_n^1 + \beta S_n^2 \quad (19)$$

$$\bar{S}_n^1 = (1 - \alpha) S_n^1 \quad (20)$$

$$\bar{S}_n^2 = (1 - \beta) S_n^2 \quad (21)$$

$$S_n^0 = \gamma P_n \quad (22)$$

$$S_{n+1}^1 = \sigma S_n^0 \quad (23)$$

$$S_{n+1}^2 = \sigma \bar{S}_n^1 \quad (24)$$



Agrupando as equações:

Levando (22) em (23) se tem que

$$S_{n+1}^1 = \sigma(\gamma P_n) \quad (25)$$

Da mesma forma, substituindo (20) em (24), vem

$$S_{n+1}^2 = \sigma(1 - \alpha)S_n^1 \quad (26)$$

Daí, a equação (19) na geração $n+1$, pode ser reescrita como

$$P_{n+1} = \alpha S_{n+1}^1 + \beta S_{n+1}^2 \quad (27)$$



Agora, levando (25) e (26) em (27), junto com a equação (25) na equação (23) se obtém o seguinte sistema de equações de diferenças

$$P_{n+1} = \alpha\sigma(\gamma P_n) + \beta\sigma(1 - \alpha)S_n^1 \quad (28)$$

$$S_n^1 = \sigma(\gamma P_{n-1}) \quad (29)$$

Finalmente, levando (29) em (28), se obtém

$$P_{n+1} = \alpha\sigma(\gamma P_n) + \beta\sigma^2(1 - \alpha)\gamma P_{n-1} \quad (30)$$

Assim, o total de plantas na geração $n + 1$ é dada em função do total de plantas nas gerações n e $n - 1$, ou seja, o total de plantas numa geração depende do total de plantas nas duas gerações imediatamente anteriores.



Solução da equação para a propagação de plantas

- Supondo $P_n = \lambda^n P_0$ tem-se que:

$$\lambda^2 - b\lambda - c = 0 \quad (31)$$

no qual $b = \alpha\sigma\gamma$ e $c = \beta\sigma^2(1 - \alpha)\gamma$,

- Possui raízes $\lambda_{1,2} = \frac{\alpha\sigma\gamma}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \delta} \right)$, em que

$$\delta = \frac{4\beta(1 - \alpha)}{\gamma\alpha^2} = \frac{4\beta}{\gamma\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)$$



Solução geral

Usando os autovalores anteriormente encontrados, a solução geral então pode ser expressa por:

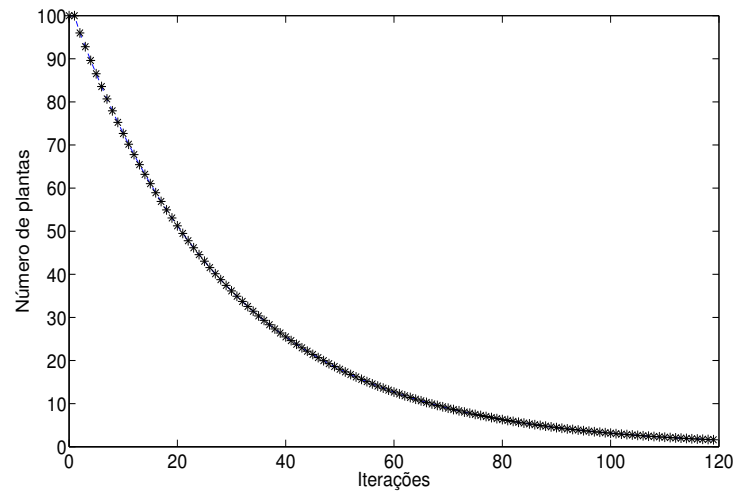
$$P_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n$$

em que C_1 e C_2 depende das condições iniciais do problema.

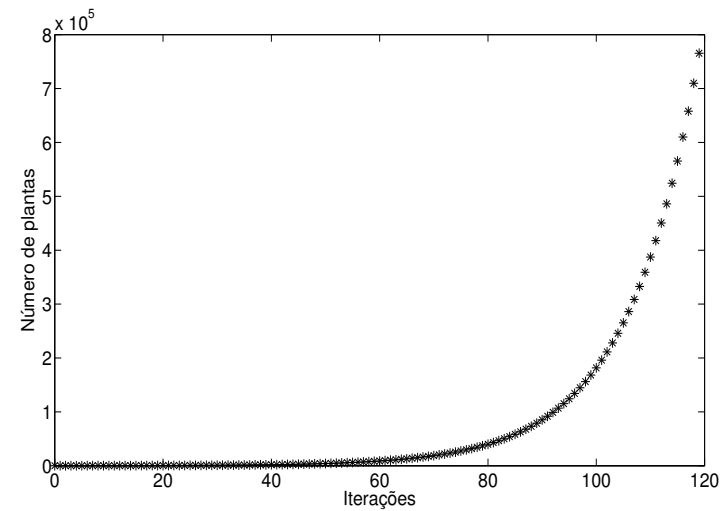
- Sob que condições esta recorrência pode representar o problema?
- Sob que condições de parâmetros a espécie de plantas está livre de risco extinção?
- Existem parâmetros que fazem a sequência permanecer constante?



Algumas simulações



(a) $\alpha = 0.5$



(b) $r\alpha = 0.6$

Figura 6: Simulação numérica: $\beta = 0.25$, $\gamma = 2.0$ e $\sigma = 0.8$;



Sistemas de equações de diferenças com aplicações

O problema anterior pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{cases} P_{n+1} &= \alpha\sigma\gamma P_n + \beta\sigma(1 - \alpha)S_n^1 \\ S_{n+1}^1 &= \sigma\gamma P_n \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma matricial por

$$\begin{pmatrix} P_{n+1} \\ S_{n+1}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\sigma\gamma & \beta\sigma(1 - \alpha) \\ \sigma\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_n \\ S_n^1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Para simplificar a notação, fazendo $a_{11} = \alpha\sigma\gamma$, $a_{12} = \beta\sigma(1 - \alpha)$,



$a_{21} = \sigma\gamma$ e $a_{22} = 0$, $x_n = p_n$ e $y_n = S_n^1$, o sistema (32) se torna

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (33)$$

Agora, adotando a notação vetorial, fazendo

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

daí, o sistema (33) pode ser escrito na forma

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n \quad (34)$$

Repetindo o procedimento adotado anteriormente, supondo que a solução do



sistema (34) é da forma

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} K_1 \lambda^n \\ K_2 \lambda^n \end{pmatrix} \quad (35)$$

Neste caso, substituindo (35) em (34) se obtém

$$\begin{pmatrix} K_1 \lambda^{n+1} \\ K_2 \lambda^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \lambda^n \\ K_2 \lambda^n \end{pmatrix} \quad (36)$$

que é equivalente a

$$\lambda \begin{pmatrix} K_1 \lambda^n \\ K_2 \lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \lambda^n \\ K_2 \lambda^n \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\lambda \mathbf{v}_n = A \mathbf{v}_n$$



Esta última equação é o que se denomina problema de autovalores - comumente tratado nos livros de Álgebra Linear. Assim, desenvolvendo o produto matricial do lado direito e cancelando o fator λ^n se chega ao seguinte sistema de equações algébricas lineares para as incógnitas K_1 e K_2

$$\begin{cases} 0 &= (a_{11} - \lambda)K_1 + a_{12}K_2 \\ 0 &= a_{21}K_1 + (a_{22} - \lambda)K_2 \end{cases} \quad (37)$$

(37) também pode ser escrito na forma

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Uma solução, neste caso, seria $K_1 = K_2 = 0$, o que leva na solução trivial $\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, ou seja, o nível populacional x_n e y_n são ambos identicamente nulos $\forall n \in \mathbb{N}$.



Para se ter soluções não nulas nas incógnitas K_1 e K_2 , é necessário que o determinante da matriz em (38) seja nulo (sistema indeterminado). Esta condição leva a equação

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

que conduz à chamada equação característica associada a matriz A , dada por

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0,$$

uma equação característica quadrática, cujas raízes são os autovalores de (34).

Neste caso, desenvolvendo esta última equação e renomeando os termos se obtém

$$\lambda^2 - \beta\lambda + \gamma = 0, \quad (39)$$

onde,



$\beta = a_{11} + a_{22}$ é o denominado traço da matriz A e $\gamma = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ é o determinante da matriz A .

Os autovalores (raízes) da equação (39) são dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2},$$

onde o termo $\beta^2 - 4\gamma$ é denominado discriminante de A – notação $\mathbf{disc}(A)$.

Assim, analisando o discriminante de A , três possíveis situações poderão ocorrer:

- i) $\mathbf{disc}(A) > 0$, neste caso, serão dois autovalores reais e distintos;
- ii) $\mathbf{disc}(A) = 0$, neste caso, será um único autovalor real;



iii) $\text{disc}(A) < 0$, neste caso, os autovalores serão complexos e conjugados, o que produz soluções com trajetórias periódicas ou espirais, ao longo do tempo.

Pelo princípio da superposição linear, a solução do sistema – nos casos i) e iii) – é dada por:

$$\begin{aligned}x_n &= A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n \\y_n &= B_1\lambda_1^n + B_2\lambda_2^n\end{aligned}\tag{40}$$

Os valores das constantes A_1 , A_2 , B_1 e B_2 são obtidos de maneira única, pelos níveis populacionais x_n e y_n , para duas gerações sucessivas (condições iniciais).



Teorema 1. *Se o polinômio característico associado ao sistema ou equação de diferenças*

$$a\chi_{n+2} + b\chi_{n+1} + c\chi_n = 0 \quad (41)$$

tem uma única raiz real ζ , a sucessão

$$\chi_n = n\zeta^n \quad (42)$$

é solução da equação (41).

Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} x_n &= A_1\lambda^n + A_2n\lambda^n \\ y_n &= B_1\lambda^n + B_2n\lambda^n \end{aligned} \quad (43)$$



Dinâmica populacional com 3 classes etárias

Estabelecendo o problema

- Algumas espécies de besouros (*Volmar-Wasserman*) vivem no máximo 3 meses.
- As fêmeas podem ser divididas em 3 faixas etárias: ninfas (de 0 a 1 mês), juvenis (de 1 a 2 meses) e adultas (de 2 a 3 meses).
- As ninfas não põem ovos; cada fêmea juvenil produz uma média de 4 fêmeas e cada adulta uma média de 3 fêmeas.
- A taxa de sobrevivência é de 25% para as juvenis (σ_2) e de 50% para as ninfas (σ_1) – fig. 7.



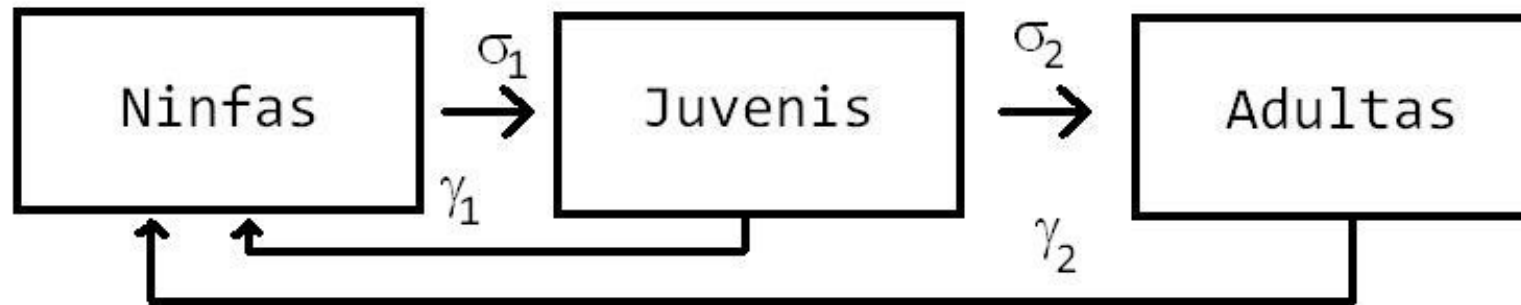


Figura 7: Diagrama do ciclo populacional de fêmeas de Volmar-Wasserman



● Representação matemática do processo

Com base no diagrama (figura 4), são definidas as seguintes variáveis e parâmetros:

- N_k = número de ninfas na geração k ;
- J_k = números de fêmeas juvenis na geração k ;
- A_k = número de fêmeas adultas na geração k ;
- σ_1 = taxa de sobrevivência das ninfas, ao final do mês;
- σ_2 = taxa de sobrevivência das juvenis, ao final do mês;
- γ_1 = fecundidade das juvenis, produção média de fêmeas per capita;
- γ_2 = fecundidade das adultas, produção média de fêmeas per capita.



Daí, o sistema de equações que descreve o processo evolutivo nas gerações sucessivas é dado por

$$\begin{cases} N_{k+1} &= \gamma_1 J_k + \gamma_2 A_k \\ J_{k+1} &= \sigma_1 N_k \\ A_{k+1} &= \sigma_2 J_k \end{cases} \quad (44)$$

O sistema (44) pode ser representado na forma matricial, por

$$\begin{bmatrix} N_{k+1} \\ J_{k+1} \\ A_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} N_k \\ J_k \\ A_k \end{bmatrix} \quad (45)$$



Neste caso, o polinômio característico associado ao sistema (45) é dado por

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) \quad (46)$$

onde A é a matriz de coeficientes do sistema e I é a matriz identidade.

A equação (46) leva a

$$P(\lambda) = \det \left[\begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right]$$

ou seja,

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \sigma_1 & -\lambda & 0 \\ 0 & \sigma_2 & -\lambda \end{bmatrix} \quad (47)$$



Agora, substituindo em (47) os valores dos parâmetros conforme apresentados anteriormente, se chega a

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 4 & 3 \\ 0,5 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0,25 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Assim, o polinômio característico associado a este sistema é dado por

$$P(\lambda) = 0,5 + 1,5\lambda - \lambda^3 \quad (48)$$

Para encontrar os autovalores associados ao sistema, basta encontrar as raízes da equação característica associada ao polinômio característico (48), ou seja,



encontrar as raízes de $P(\lambda) = 0$, donde

$$0,5 + 1,5\lambda - \lambda^3 = 0 \quad (49)$$

Como $\lambda_1 = -1$ satisfaz a equação (49). Daí, fatorando por $(\lambda + 1)$ em (49), se obtém

$$(\lambda + 1)(0,5 + \lambda - \lambda^2) = 0 \quad (50)$$

Por fim, aplicando a fórmula de resolução da equação do 2º grau para o termo quadrático que aparece em (50), se obtém os valores de λ_2 e λ_3 , dados por

$$\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \quad \lambda_3 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$



Desta forma, os autovalores associados a este sistema são

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \quad \lambda_3 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

Portanto, a solução do sistema (47) se torna

$$\begin{cases} N_k = C_{11}\lambda_1^k + C_{12}\lambda_2^k + C_{13}\lambda_3^k \\ J_k = C_{21}\lambda_1^k + C_{22}\lambda_2^k + C_{23}\lambda_3^k \\ A_k = C_{31}\lambda_1^k + C_{32}\lambda_2^k + C_{33}\lambda_3^k \end{cases} \quad (51)$$

Lembrando que as constantes C_{ij} ficam unicamente determinadas, conhecidas as quantidades de fêmeas de cada classe etária, para três gerações sucessivas (condições iniciais).



Autovalores complexos

A equação característica resultante do sistema (34) pode ter autovalores complexos, onde a parte imaginária é não nula (nos casos em que $\mathbf{disc}(A) < 0$), ou seja, considerando a equação característica quadrática na forma

$$\lambda^2 - \beta\lambda + \gamma = 0,$$

com $\beta^2 < 4\gamma$, então os autovalores (complexos e conjugados), são dados por

$$\lambda_1 = a + bi \quad \text{e} \quad \lambda_2 = a - bi,$$

$$\text{com } a = \frac{\beta}{2} \text{ e } b = \frac{\sqrt{|\beta^2 - 4\gamma|}}{2}.$$



Autovalores complexos podem ocorrer tanto para equações de diferenças de ordem 2, ou superior, quanto para sistemas de equações de diferenças de ordem maior ou igual a 2.

Desta forma, é necessário obter soluções gerais envolvendo potências de números complexos, que tenham sentido do ponto de vista biológico, como por exemplo, soluções do tipo

$$x_n = A_1(a + bi)^n + A_2(a - bi)^n \quad (52)$$

Isto pode ser feito utilizando as propriedades fundamentais dos números complexos, conforme indicado a seguir.



$$a + bi = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = re^{i\theta} \quad (53)$$

$$a - bi = r(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) = re^{-i\theta} \quad (54)$$

Assim, usando as fórmulas de Euler (53–54), se obtém a potência de um número complexo através das relações

$$(a + bi)^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = \epsilon + \delta i \quad (55)$$

onde $\epsilon = r^n \cos(n\theta)$ e $\delta = r^n \operatorname{sen}(n\theta)$.

Desta forma, usando as relações dadas em (53) e (54), a solução apresentada



em (52) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}x_n &= A_1(a + bi)^n + A_2(a - bi)^n \Rightarrow \\x_n &= A_1r^n (\cos n\theta + i\text{sen } n\theta) + A_2r^n (\cos n\theta - i\text{sen } n\theta)\end{aligned}$$

daí, fazendo $(A_1 + A_2) = C_1$ e $(A_1 - A_2) = C_2$, a equação acima se torna

$$x_n = C_1r^n \cos n\theta + iC_2r^n \text{sen } n\theta \quad (56)$$

Agora, denotando por p_n e q_n em (56), de modo que $p_n = \cos n\theta$ e $q_n = \text{sen } n\theta$, a solução x_n pode ser escrita na forma

$$x_n = C_1r^n p_n + iC_2r^n q_n \quad (57)$$

Como a equação (57) é linear para as partes real e imaginária, daí se pode concluir que elas também são soluções.



Aplicando o princípio de superposição linear para as partes real (p_n) e imaginária (q_n), se define uma solução a valores reais,

$$x_n = r^n [C_1 \cos(n\theta) + C_2 \text{sen}(n\theta)] \quad (58)$$

Desta forma, as soluções associadas a autovalores complexos apresentam oscilações nas sucessivas gerações que serão crescentes (se $r > 1$), decrescentes (se $r < 1$), ou de amplitude constante (se $r = 1$).

Além disso, se $r = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ e $\arctan(b/a)$ é um múltiplo racional de π , então a solução x_n será periódica, assumindo um número finito de valores a cada ciclo.



Análise alternativa

Podemos estabelecer uma análise qualitativa do sistema:

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n + \mathbf{b} \quad (59)$$

Suponha que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{y}$. Então

$$\bar{\mathbf{v}} = A\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{b} \quad (60)$$

em que $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{x}, \bar{y})^T$.



Uma análise dessa forma pode ser útil em:

- Os indivíduos de uma espécie estão dispersos em duas regiões A e B .
- A região A possui capacidade suporte K_A e a B , K_B .
- Há uma migração entre as regiões.

$$\begin{aligned}x_{n+1} - x_n &= \alpha (K_A - x_n) + m_B y_n - m_A x_n \\ y_{n+1} - y_n &= \beta (K_B - y_n) + m_A x_n - m_B y_n\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha - m_A & m_1 \\ m_2 & 1 - \beta - m_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha K_A \\ \beta K_B \end{pmatrix} \quad (61)$$



Um sistema específico

Consideremos o caso particular em que:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \beta \\ 1 - \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (62)$$

Observe que $x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Recorrências deste tipo surgem em:

- Análise de eleições.
- Análises de mutação genética.

Temos que: $\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{1 - \beta}{1 - \alpha}$.



Dinâmica populacional – retorno

- Modelo básico estabelecido no início:

$$x_{n+1} = \alpha x_n.$$

- A taxa de crescimento é sempre constante?
- Uma suposição razoável é considerar α decrescente com relação ao tamanho população.
- Um opção seria $\alpha(x_n) = r(K - x_n)$ de modo que

$$x_{n+1} = r(K - x_n)x_n.$$



- Ou ainda $\alpha(x_n) = e^{r(K-x_n)}$ de modo que

$$x_{n+1} = x_n e^{r(K-x_n)}.$$

Definição 5. *Uma equação de diferenças não linear de primeira ordem é uma fórmula de recorrência do tipo*

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{63}$$

em que f é uma expressão não linear de x_n (produto, potências, exponenciais, etc.).



Equações de diferenças não lineares

- A solução de (63) é uma expressão que relaciona x_n e a condição inicial x_0 , para cada estágio n . Geralmente, não é possível obter tal solução diretamente quando se trata de equações não lineares. Na maioria dos casos, o que se procura fazer é analisar estas equações através de seus pontos de equilíbrio.
- No contexto das equações de diferenças se tem a estabilidade do processo quando não ocorre variação do estágio n para o estágio $n + 1$, isto é, quando

$$x_{n+1} = x_n = \bar{x} \quad (64)$$



- Da equação (64) em (63), se tem um ponto de equilíbrio \bar{x} quando

$$\bar{x} = f(\bar{x}),$$

ou seja, \bar{x} é um ponto fixo da função f .

Quando f é derivável, então:

$$x_{n+1} = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_n - \bar{x}) + \mathcal{O}(x_n - \bar{x})^2$$

ou ainda

$$x_{n+1} - \bar{x} = f'(\bar{x})(x_n - \bar{x}) + \mathcal{O}(x_n - \bar{x})^2$$

que reescrevendo, temos:

$$y_{n+1} \approx f'(\bar{x}) y_n.$$



Estabilidade

O parâmetro $\lambda = f'(\bar{x})$ é denominado autovalor do equilíbrio \bar{x} da equação (63). Conforme os valores que λ assume, se tem que:

- Se $0 < |\lambda| < 1$ \bar{x} é, localmente, assintoticamente estável (atrator), ou seja, se x_n está próximo de \bar{x} , então x_n converge para \bar{x} . Mais ainda, se $0 < \lambda < 1$ a convergência é monótona e se $-1 < \lambda < 0$ a convergência é oscilatória.
- Se $|\lambda| > 1$ o ponto de equilíbrio \bar{x} é instável (repulsor).
- Se $|\lambda| = 1$, o ponto de equilíbrio \bar{x} é neutramente estável, ou simplesmente estável. A sequência x_n pode convergir para ou se afastar de \bar{x} .



Equação logística discreta

- Um modelo matemático que se tornou clássico em dinâmica populacional sugerido por Verhulst⁸, possui um modelo similar para equações de diferenças não lineares, onde a taxa de crescimento populacional depende do número de indivíduos da própria população (densidade dependente), que é dado por

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n), \quad (65)$$

com $r > 0$

- Os pontos de equilíbrio de (65) são dados pelos pontos fixos de f , ou seja, $\bar{x} = f(\bar{x}) \Rightarrow r\bar{x}(1 - \bar{x}) = \bar{x}$ ou $r\bar{x}^2 - \bar{x}(r - 1) = 0 \Rightarrow \bar{x}[r\bar{x} - (r - 1)] = 0$.

⁸J. D. Murray, "Mathematical biology". Springer, Berlim, 1990.



Portanto,

$$\bar{x}_1 = 0 \quad (\text{ponto trivial}) \quad \text{e} \quad \bar{x}_2 = 1 - \frac{1}{r} \quad (\text{ponto não trivial}).$$

E desde que $f'(x) = r(1 - 2x)$ então: para $\bar{x}_1 = 0$, se tem que $\lambda_1 = r$; e para $\bar{x}_2 = 1 - \frac{1}{r}$, se tem que $\lambda_2 = 2 - r$.

Assim, se:

- a) $0 < r < 1$, então o ponto $\bar{x}_1 = 0$ é assintoticamente estável, enquanto $\bar{x}_2 < 0$ é instável.
- b) $r > 1$, então \bar{x}_1 é instável, enquanto \bar{x}_2 é assintoticamente estável, desde que $|\lambda_2| = |2 - r| < 1 \iff 1 < r < 3$.

- O modelo logístico discreto, dado pela equação (65), é um dos mais simples



exemplos de equações de diferenças não lineares e se pode notar a complexidade de seu desenvolvimento quando se varia o parâmetro r (cf. Bassanezi, 2002).

- A formulação de modelos matemáticos com equações de diferenças ganhou força a partir dos trabalhos desenvolvidos por May⁹, sobre dinâmica populacional de certos insetos que têm gerações que se sobrepõem, cujos indivíduos são gerados periodicamente.
- Ao variar o parâmetro r a partir do valor 3, quando ocorre a primeira bifurcação do estado de equilíbrio (oscilação de período 2).

⁹R. M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature*, **261**, (1976), 459–467.



Periodicidade

Recorrências não lineares podem apresentar periodicidade.

- Um ponto \bar{x} é periódico, de período 2, se

$$\bar{x} \neq f(\bar{x}) \quad \text{e} \quad \bar{x} = f(f(\bar{x})) = f^2(\bar{x}).$$

Isto é, se \bar{x} é ponto de equilíbrio da recorrência $x_{n+1} = g(x_n)$ em que $g(x) = f(f(x))$.

- A estabilidade de pontos periódicos é feita analisando $g'(\bar{x})$.



- Para o caso da logística, temos:

$$\bar{x}_{1,2} = \frac{r \pm \sqrt{(r+1)(r-3)} + 1}{2r}$$

- E temos também:

$$g'(\bar{x}_{1,2}) = -r^2 + 2r + 4$$

- Para $r = 3.2$, temos $\bar{x}_1 = 0.7995$ $\bar{x}_2 = 0.5130$ e $g'(\bar{x}_{1,2}) = 0.1600$. Logo, \bar{x}_1 e \bar{x}_2 são pontos assintoticamente estáveis.



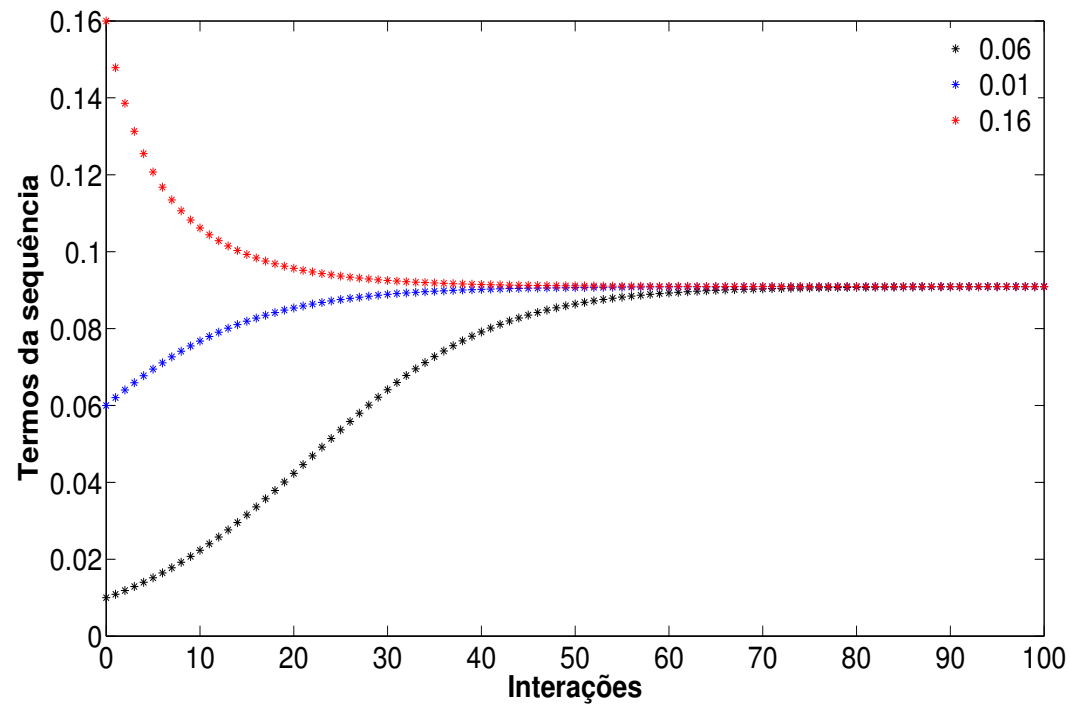


Figura 8: Simulação numérica da interação entre indivíduos.



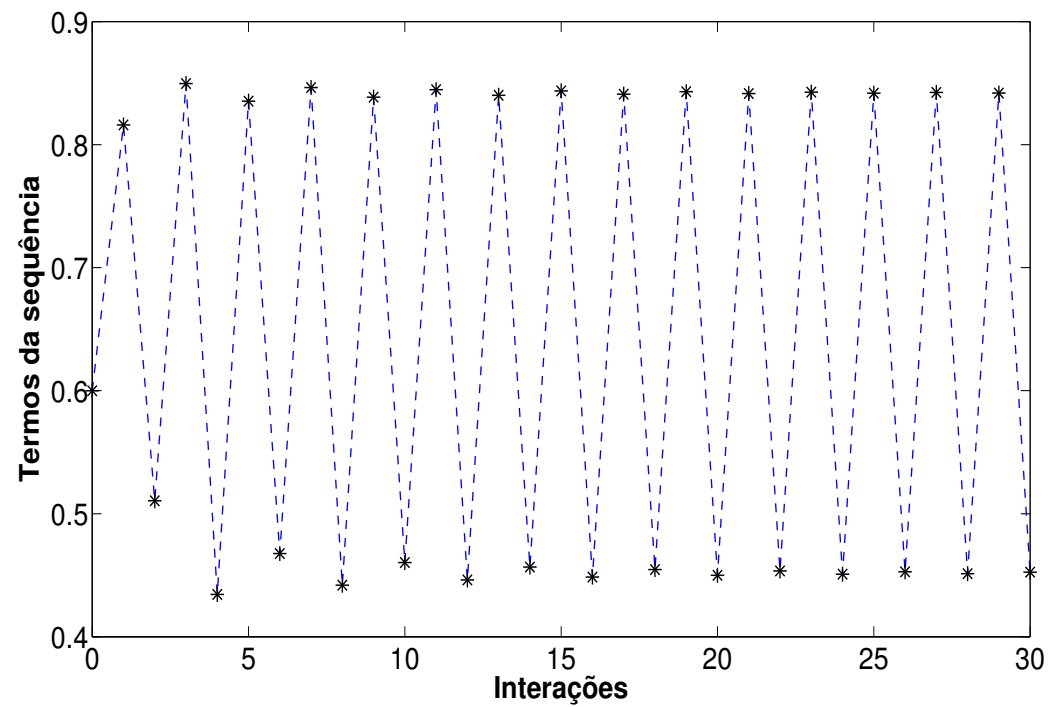


Figura 9: Simulação numérica da interação entre indivíduos.



foilhead

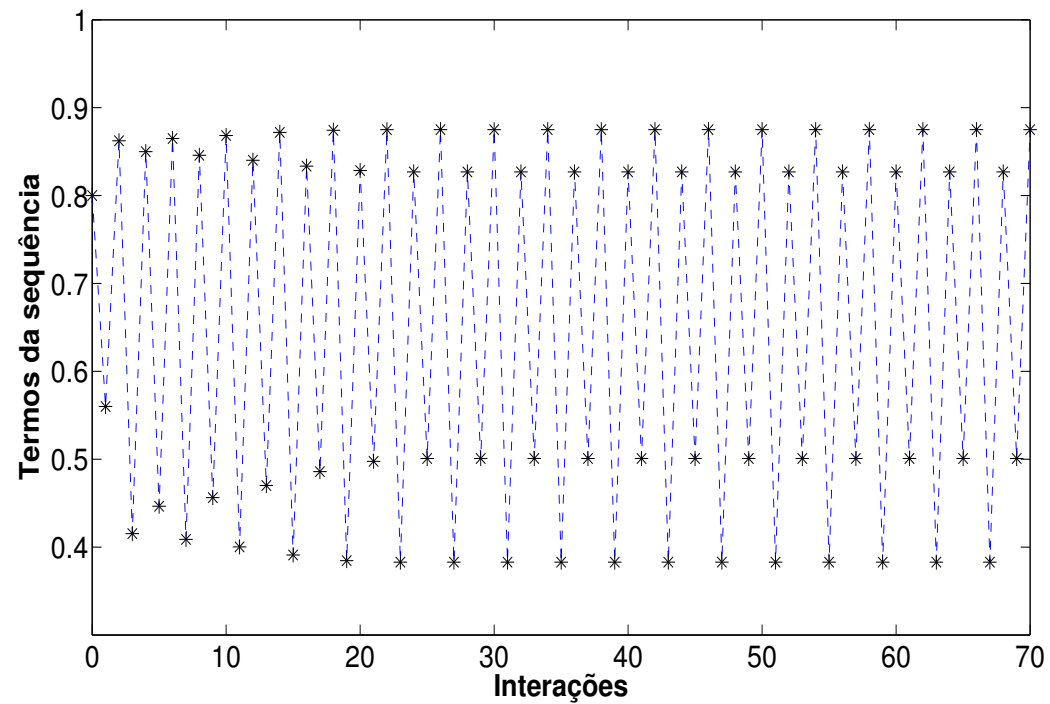


Figura 10: Simulação numérica da interação entre indivíduos.



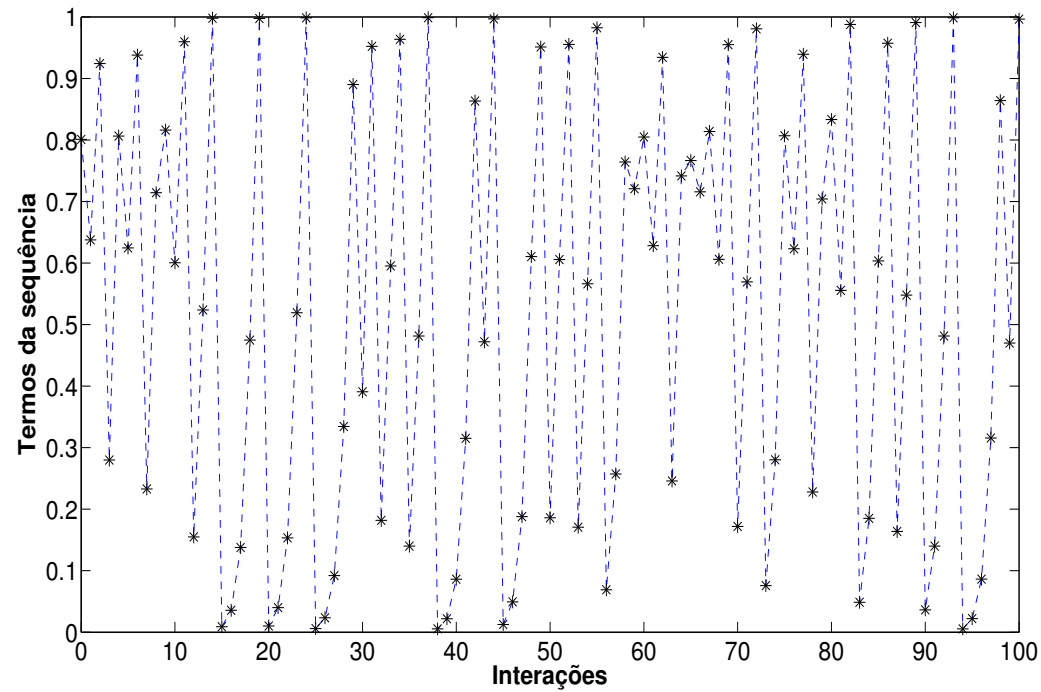


Figura 11: Simulação numérica da interação entre indivíduos.



Doenças infecciosas – fenômeno *viral*

Principais características:

- Os indivíduos de uma população são divididos entre *suscetíveis* e *infecciosos*.
- A transmissão da doença ocorre por meio do contato entre suscetíveis e infecciosos.
- O contato entre os indivíduos ocorre de maneira aleatória.
- Todos os suscetíveis tem a mesma probabilidade de ser infectado.
- O número de indivíduos na população permanece fixo durante o período de ocorrência da doença.



O modelo

- Sejam S_n e I_n as quantidades de suscetíveis e infecciosos no tempo n .
- O produto $S_n I_n$ representa os possíveis encontros.
- Um fração $\beta > 0$ desses encontros resultam no contágio dos suscetíveis.

Assim,

$$\begin{cases} S_{n+1} - S_n = -\beta S_n I_n \\ I_{n+1} - I_n = \beta S_n I_n \end{cases}$$



Desde que $S_n + I_n = c$, que podemos tomar como sendo $c = 1$, então

$$I_{n+1} = (1 + \beta - \beta I_n) I_n$$

- Quem são os pontos de equilíbrio desse modelo?
- E a estabilidade?
- Qual o comportamento do valores de I_n ? e de S_n ?

Esse modelo também serve para explicar os *virais* em tempos de internet.



Interação entre indivíduos

A interação entre indivíduos de uma mesma espécie é um importante ramo de estudo dentro da biologia teórica. Indivíduos interagem na disputa por recursos naturais, parceiros para acasalamento e fuga de predadores. Essas interações influenciam a taxa de reprodução e sobrevivência.

- Suponha que os indivíduos podem adotar duas estratégias, A e B nas interações.
- Indivíduos de que adotam A tem uma taxa de reprodução $a > 0$ quando interagem com outros indivíduos que adotam A .
- Indivíduos de que adotam B tem uma taxa de reprodução $b > 0$ quando



interagem com outros indivíduos que adotam B .

- Quando A interagem com B , A tem um retorno $c > 0$ e B tem um retorno $d > 0$.

As perguntas de interesse então são:

- Qual estratégia será bem sucedida?
- Quando uma estratégia é estável?
- Quando uma estratégia pode ser invadida por outra?



O modelo

- Sejam x_n e y_n a quantidade de indivíduos adotando A e B , respectivamente.
- Sejam

$$u_n = \frac{x_n}{N_n}, \quad v_n = \frac{y_n}{N_n}$$

as frequências relativas em que $N_n = x_n + y_n$.

Observe que a taxa de reprodução dos indivíduos depende da frequência dos indivíduos adotando A ou B .



$$r_A = au_n + cv_n \quad r_B = du_n + bv_n.$$

A dinâmica é dada pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_{n+1} = r_A x_n \\ y_{n+1} = r_B y_n \end{cases}$$

Mas observe que:

$$\begin{aligned} N_{n+1} &= x_{n+1} + y_{n+1} \\ &= r_A x_n + r_B y_n \\ &= r_A u_n N_n + r_B v_n N_n \\ &= \underbrace{(r_A u_n + r_B v_n)}_{\phi} N_n \end{aligned}$$



Com isso, temos que:

$$u_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{r_A x_n}{\phi N_n} = \frac{r_A}{\phi} u_n$$

$$v_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{r_B y_n}{\phi N_n} = \frac{r_B}{\phi} v_n$$

e desde que $u_n + v_n = 1$ então:

$$u_{n+1} = \underbrace{\left[\frac{(a-c)u_n + c}{(a+b-c-d)u_n^2 + (c-2b+d)u_n + b} \right]}_{f(u_n)} u_n$$



A estabilidade

- Pontos de equilíbrio: $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 1$ e

$$\bar{x}_3 = \frac{b - c}{a + b - c - d}$$

- Autovalores: $\lambda_1 = c/b$, $\lambda_2 = d/a$ e

$$\lambda_3 = \frac{ac - 2ab + bd}{cd - ab}.$$

- Supondo $a = 1.1$, $b = 0.7$, $c = 1$ e $d = 1.2$ então $\bar{x}_3 = 0.90$ é assintoticamente estável.



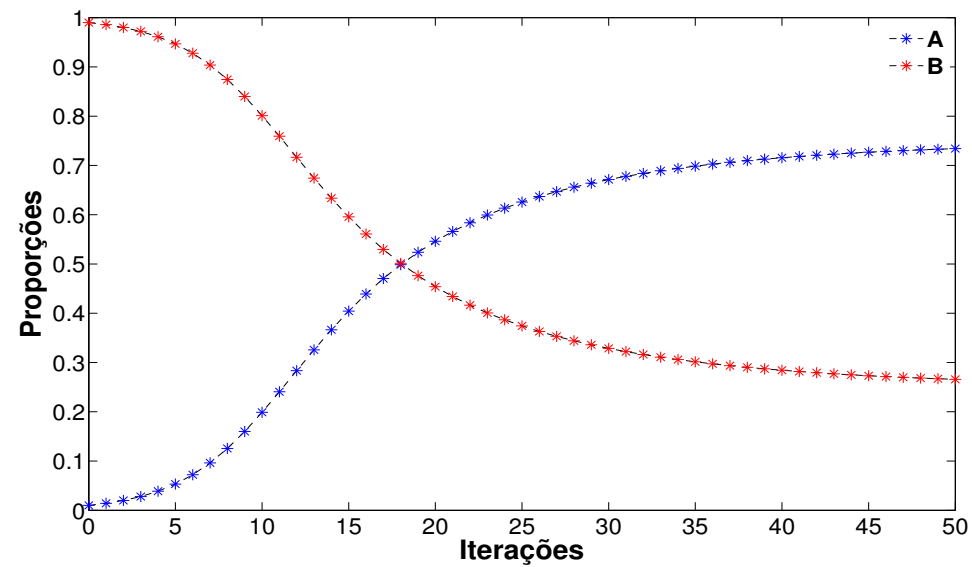


Figura 12: Simulação numérica da interação entre indivíduos.



Presas - predador

As hipóteses mais simples que caracterizam um sistema presa-predador são:

- Na ausência de predadores, as presas apresentam crescimento malthusiano.
- Na ausência de presas, os predadores apresentam decrescimento malthusiano.
- O encontro entre presas e predadores é benéfica para os predadores e prejudicial para as presas.

Suponha que x_n represente a quantidade de presas e y_n de predadores no instante n . Suponha ainda que o encontro entre presas e predadores ocorre alea-



toriamamente; as presas tem igual probabilidade de serem abatidas por predadores; predadores são igualmente hábeis. Então:

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n - bx_ny_n \\ y_{n+1} = cy_n + dx_ny_n \end{cases} \quad (66)$$

em que $a > 1$, b , $c < 1$ e d são constantes positivas.

- Para um estudo qualitativo do problema, o mais interessante é estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio para este sistema. Neste caso, a condição de equilíbrio do sistema é dada por

$$x_{n+1} = x_n = \bar{x}, \quad y_{n+1} = y_n = \bar{y} \quad (67)$$



- Levando a condição (67) em (66), se obtém

$$\begin{cases} \bar{x} = a\bar{x} - b\bar{x}\bar{y} \\ \bar{y}(1 - c - d\bar{x}) \end{cases} \quad (68)$$

ou seja,

$$\begin{cases} \bar{x}(1 - a + b\bar{y}) = 0 \\ \bar{y}(1 - c - d\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad (69)$$

- Os pontos de equilíbrio são:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = \left(\frac{1 - c}{d}, \frac{a - 1}{b} \right)$$



- O passo seguinte é estudar a estabilidade destes pontos. Para isso, sejam

$$f(x, y) = ax - bxy \quad g(x, y) = cy + dxy.$$

A estabilidade é feita por análise dos autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} f_x(\bar{x}, \bar{y}) & f_y(\bar{x}, \bar{y}) \\ g_x(\bar{x}, \bar{y}) & g_y(\bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b\bar{y} & -b\bar{x} \\ d\bar{y} & c + d\bar{x} \end{bmatrix}.$$

- Para $(0, 0)$ temos que os autovalores são $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = c$. Como $a > 1$ então a origem é instável.
- Para P_2 temos que os autovalores são

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{(a-1)(c-1)}$$



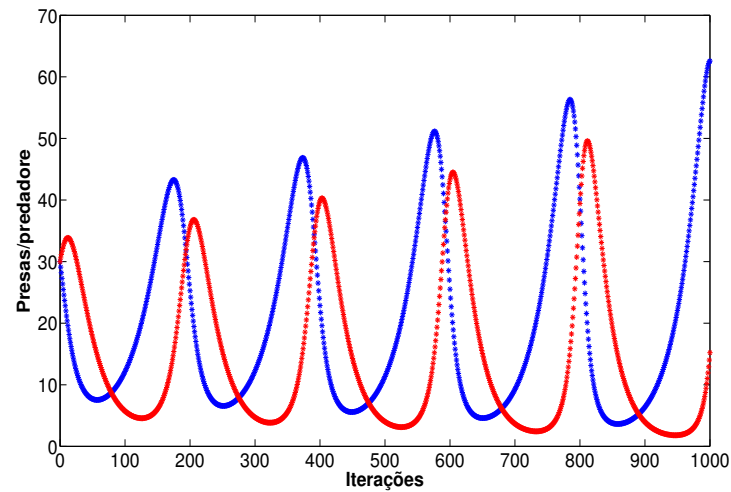
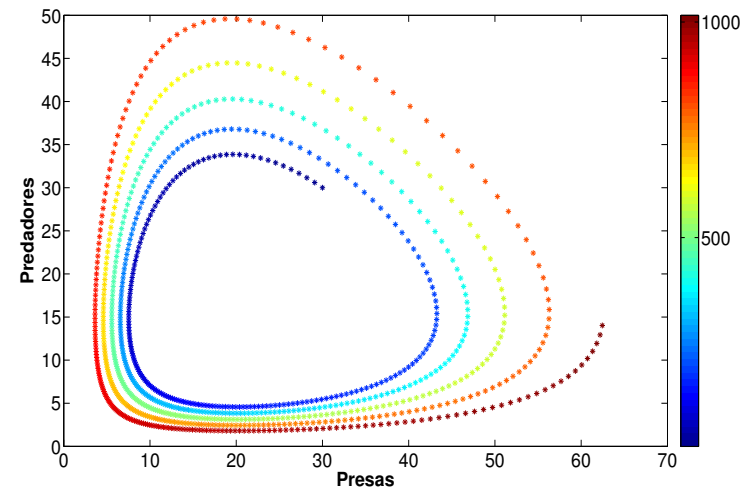
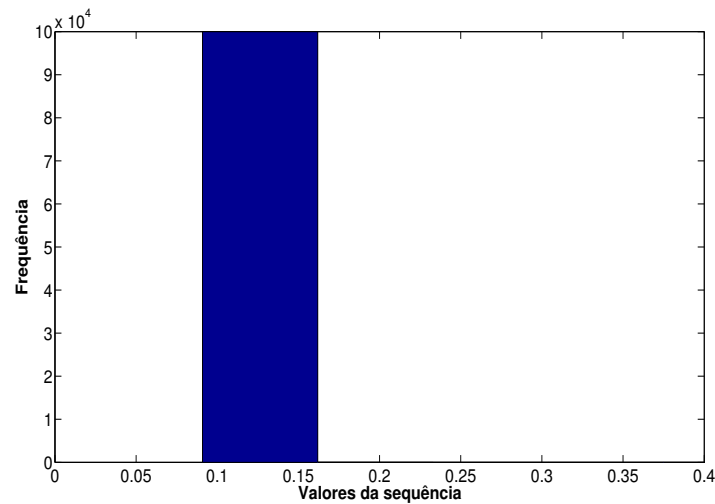
(a) Iterações \times Presas/predadores(b) Presas \times Predadores.

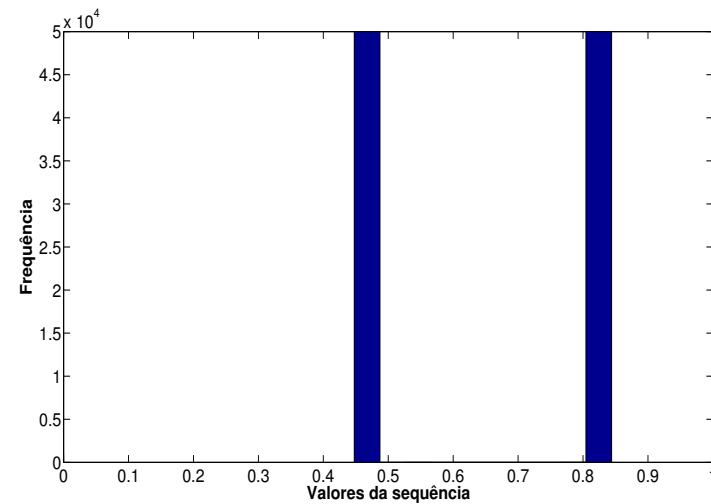
Figura 13: Simulação numérica do modelo presa-predador.



Caos



(a) Histograma para $r = 1.1$

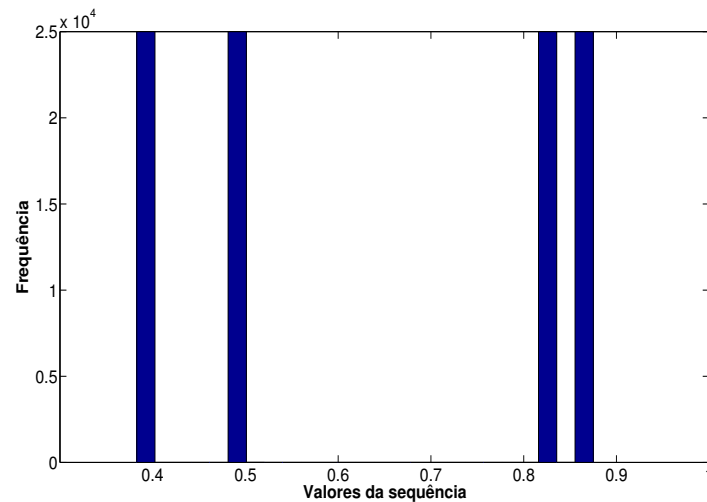


(b) Histograma para $r = 3.2$

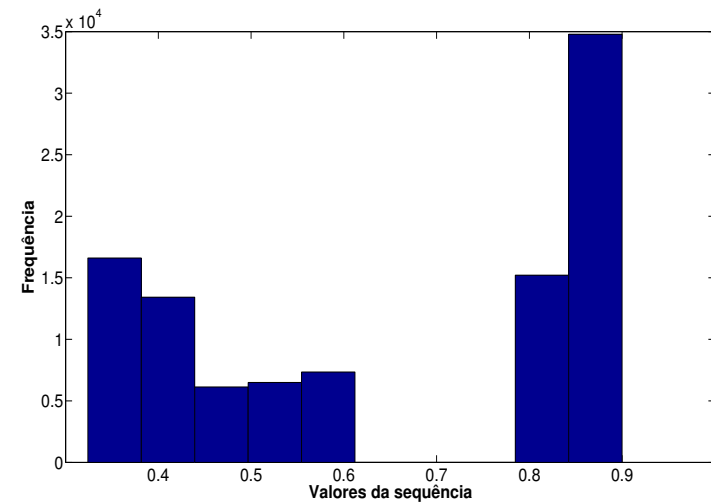
Figura 14: Simulação numérica da logística com 100000 iterações.



Caos



(a) Histograma para $r = 3.5$

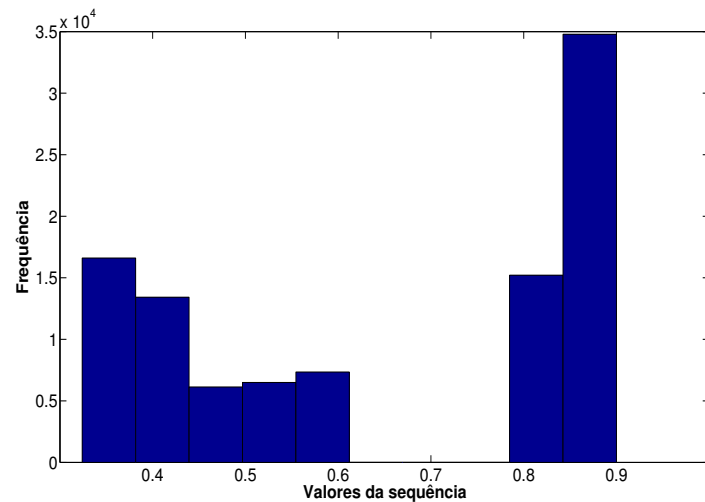


(b) Histograma para $r = 3.6$

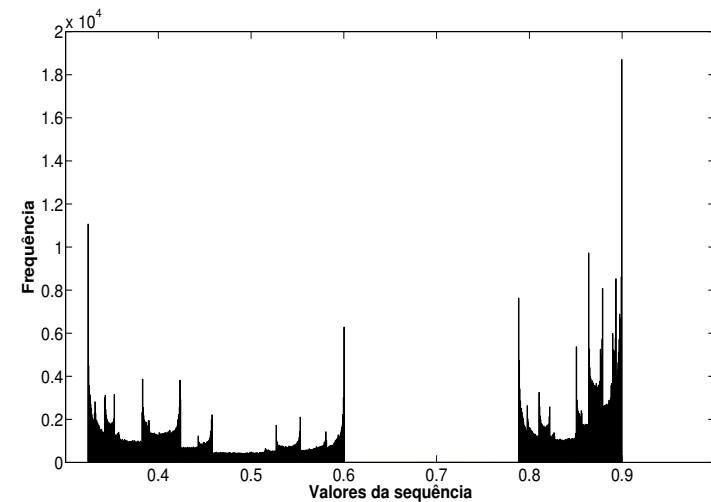
Figura 15: Simulação numérica da logística com 100000 iterações.



Caos



(a) Histograma para $r = 3.6$

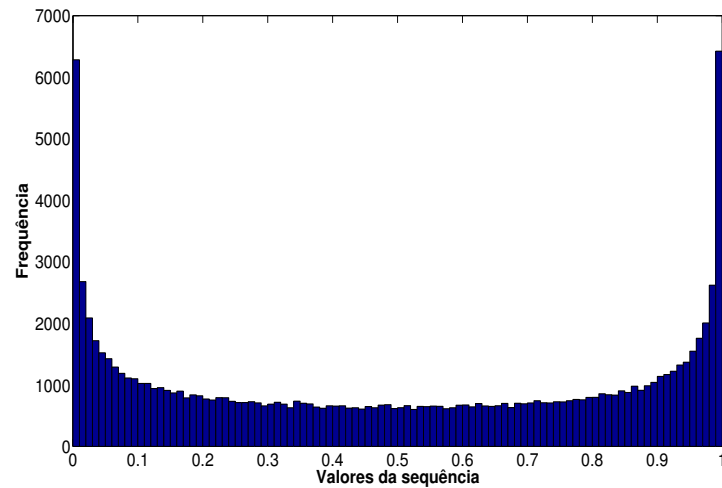


(b) Histograma para $r = 3.6$

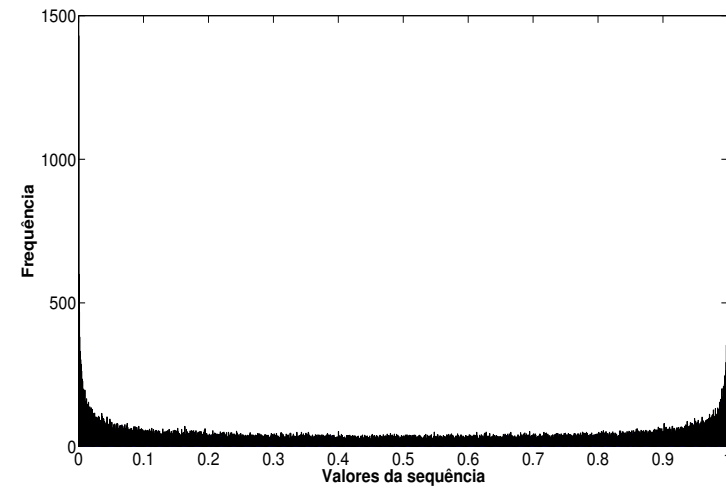
Figura 16: Simulação numérica da logística.



Caos



(a) Histograma para $r = 4$



(b) Histograma para $r = 4$

Figura 17: Simulação numérica da logística.



Conclusões e discussões

- As relações de recorrência podem ser úteis para descrever diversos fenômenos.
- Embora sejam ferramentas simples, podem apresentar um comportamento extremamente complicado
- O uso de planilhas eletrônicas pode ser útil para se obter um visão do comportamento.
- Tanto os aspectos de modelagem quanto da matemática envolvida podem ser explorados.
- Como explorar isso em sala?

