2º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

COMPARANDO GRANDEZAS – PARTE I

Cydara Ripoll – cydara@mat.ufrgs.br
Letícia Rangel – leticiarangel@ufrj.br
Victor Giraldo – victor@im.ufrj.br
Tatiana Roque – tati@im.ufrj.br

APRESENTAÇÃO

Esta oficina é fruto de reflexões dos autores do **Livro do Professor de Matemática da Escola Básica**, e também de colaboradores do **MatDigital**, ambos projetos da SBM, desenvolvidos no âmbito do Projeto Klein para o século XXI[1] em Língua Portuguesa. Esses projetos têm como objetivo atuar no sentido da conciliação da *dupla descontinuidade* denunciada por Klein há mais de cem anos. Segundo Klein, por um lado, durante a formação inicial dos Professores, há pouca identificação da Matemática estudada com aquela anteriormente aprendida por eles enquanto alunos da escola básica; e, por outro lado, durante sua vida profissional, há pouca identificação entre a Matemática praticada em sala de aula e aquela estudada nos cursos de formação. Os problemas identificados por Klein há mais de um século ainda se revelam atuais e têm orientado questões abordadas pela pesquisa recente em Educação Matemática. Assim, pretende-se, tanto com o Livro do Professor De Matemática da Escola Básica como com o MatDigital, reexaminar conceitos que fazem parte do currículo do ensino básico e que muitas vezes não têm sido tratados com a necessária atenção na

[1] O Klein Project para o Século XXI é um projeto de colaboração entre a ICMI (*International Comitee for Mathematical Instruction)* e a IMU (*International Mathematical Union*) para celebrar os 100 anos da primeira publicação dos famosos textos de Felix Klein para professores do ensino secundário, *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior* (http://klein.sbm.org.br/). O **Livro do Professor de Matemática da Escola Básica é** uma coleção de livros para o professor da Escola Básica que tem como tema central a abordagem de conceitos do ensino básico, tomando como base a fundamentação matemática. Nele são discutidos aspectos centrais relativos ao ensino desses conceitos, tais como a seleção e a organização de conteúdos, opções metodológicas de abordagem e suas possíveis consequências na sala de aula, no dia a dia do Professor. O **MatDigital** é um projeto da SBM, que pretende desenvolver um conjunto abrangente de materiais e recursos digitais para a sala de aula dos quatro anos do segundo segmento do ensino fundamental público brasileiro.

formação do professor, o que certamente impõe reflexos na escola. Números Racionais é um desses assuntos.

A abordagem de números racionais no ensino fundamental é um assunto que tem motivado grande parte das reflexões dos autores do Livro do Professor de Matemática da Escola Básica e as discussões dos professores participantes do MatDigital. De fato, é um assunto que congrega vários tópicos que reconhecidamente oferecem desafios para o ensino e para a aprendizagem no ensino básico. Por exemplo, a abordagem dos diferentes significados associados às frações, o conceito de razão neste contexto, a relação entre frações e números racionais, a representação decimal dos números racionais, as operações envolvendo esses números e o próprio entendimento conceitual de número racional, que envolve essencialmente o conceito de medida. O recorte que trazemos para discussão nesta oficina tem como tema disparador um **conceito elementar para a compreensão dos números racionais**, a **comparação**.

A pergunta **"O que é razão?"** é a questão disparadora desta oficina. As atividades aqui propostas têm o propósito de suscitar e conduzir a reflexão, tendo como referência a prática de sala de aula do ensino básico. No entanto, tais atividades não estão "prontas" para serem diretamente aplicadas, mas podem ser consideradas como fontes de inspiração para novas atividades ou podem ser adaptadas à realidade e aos objetivos do ensino básico. Além disso, esta oficina não pretende esgotar a discussão sobre os temas comparação, razão nem sobre números racionais. O objetivo é **promover a reflexão sobre o ensino de razão e sua relação com o ensino de frações e de números racionais no ensino básico.**

ATIVIDADES

Refletindo sobre Comparação

Atividade 1

De acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em resolução publicada no Diário Oficial da União em 28 de agosto de 2013, o Brasil tinha sua população estimada em 201 032 714 habitantes. Assim, o Brasil tinha, , naquela época, 7 085 829 habitantes a mais do que a população estimada em 2012. Entre as unidades da federação, o estado mais populoso era São Paulo, com cerca de 43,7 milhões de residentes. Já o estado menos populoso era Roraima, com cerca de 488 mil habitantes.

Registre pelo menos três diferentes formas de comparação envolvendo, em cada caso, dois dos dados numéricos acima expostos.

Atividade 2

Material necessário para o desenvolvimento desta atividade: saquinhos com fichas coloridas ou com botões.

Esta atividade deve ser realizada em pequenos grupos (por exemplo, de 4 pessoas) e cada grupo deve receber um dos saquinhos para responder às seguintes questões:

a) **Estabeleça diferentes formas de comparação envolvendo fichas de duas cores diferentes ou de uma das cores e o total de botões**.

b) A escolha das quantidades de botões coloridas para a composição do material, 12, 8, 6, 6 e 5, não foi ao acaso. **Discuta a relevância pedagógica da escolha dessas quantidades.**

Na sala de aula

a) Exemplique diferentes formas matemáticas de comparar duas grandezas ou quantidades (entre si).

b) Dentre as formas listadas, quais são abordadas no Ensino Fundamental antes do sétimo ano?

c) Entre as formas listadas, quais são abordadas no Ensino Fundamental?

A comparação envolve a identificação de uma *relação* entre as grandezas ou as quantidades a serem comparadas. Essa relação pode ser estabelecida a partir de formas variadas. No ensino fundamental, desde as séries iniciais, é possível sensibilizar o aluno quanto a diferentes formas de comparação. No 6º e no 7º anos, etapas em que os alunos revisitam as operações básicas e iniciam o estudo de proporcionalidade, há a oportunidade de o professor de matemática explorar, a partir de problemas, diferentes situações envolvendo comparações e destacando o que caracteriza cada uma delas. Por exemplo, ao comparar a idade de duas pessoas, podemos simplesmente dizer que uma é mais velha (ou mais nova) do que a outra. Neste caso, a comparação se estabelece a partir da <u>ordem</u>. Mas, quanto mais velha? De forma mais precisa, é possível comparar as idades destacando a diferença entre elas, o que revela um dado numérico mais específico e também invariante sobre a situação. Claro que a ordem e a diferença não são as únicas formas de comparar duas quantidades ou grandezas. Ainda sobre a comparação das idades, se no momento do nascimento de seu filho um pai tiver 30 anos, a diferença entre suas idades será sempre de 30 anos. No entanto, apenas aos seus 30 anos, o filho terá a metade da idade do pai. Portanto, comparar as idades do pai e do filho por meio do <u>produto</u> ou do <u>quociente</u> pode, em muitos casos, não ser a melhor escolha. Já para comparar as quantidades de ingredientes em uma receita, a diferença talvez não seja a melhor escolha. Se para preparar um bolo são necessários 2 copos de leite e 3 de farinha, a diferença entre as quantidades desses ingredientes não se manterá se a receita for dobrada. Nesse caso, a comparação por <u>razão</u> se apresenta mais eficiente: para cada 2 copos de leite utilize 3 copos de farinha.

A discussão sobre comparação deve ser objetivo do ensino de matemática no ensino básico. Esse é o foco principal desta oficina.

Comparação por meio de razão

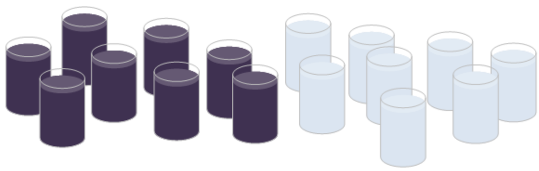
Atividade 3

Uma caixa de um suco concentrado traz a seguinte informação para o preparo do suco diluído: *cada 2 copos de suco concentrado fazem 5 copos de suco diluído em água.*

De acordo com essa informação, determine quantos copos de suco diluído é possível preparar com as quantidades de copos de suco concentrado e de copos de água que estão em cada uma das ilustrações a seguir:

(a)

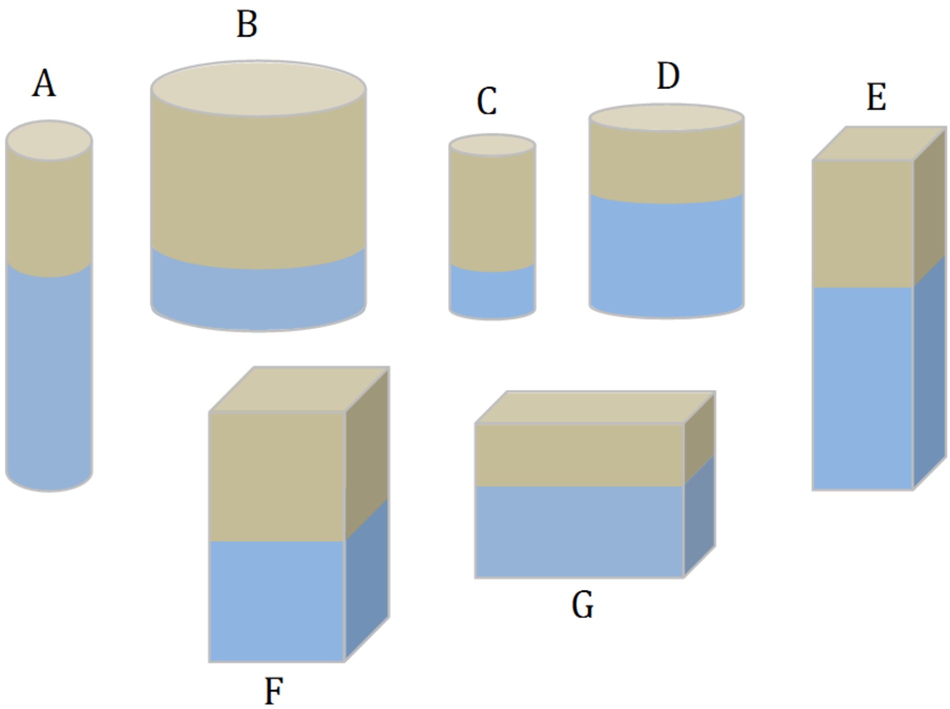
(b)



(c)

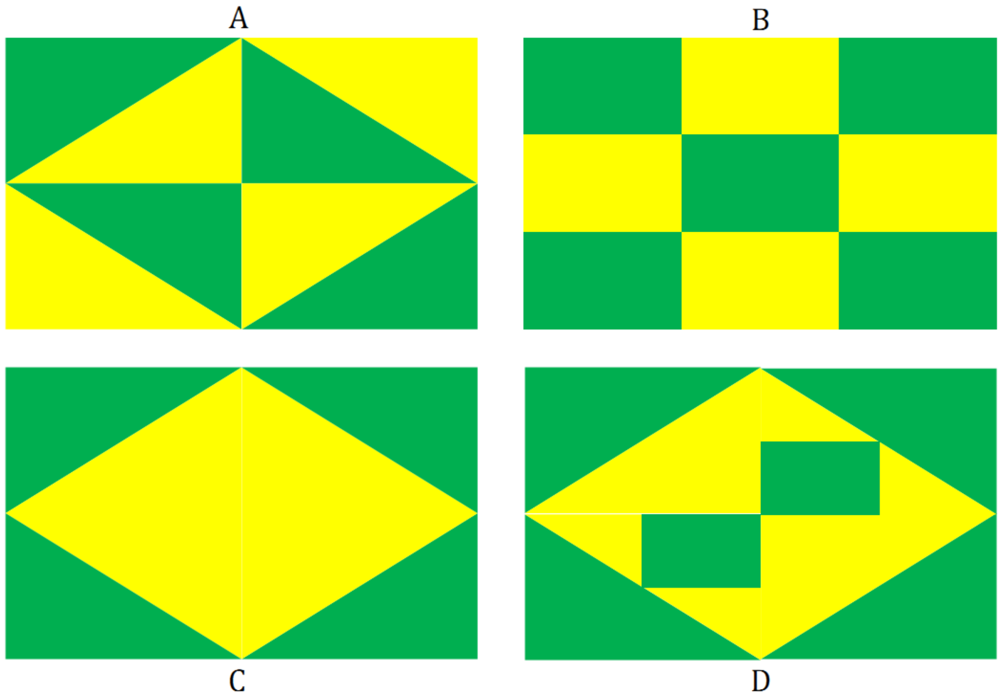
Atividade 4

As ilustrações a seguir representam recipientes nos quais encontramos água e óleo que, como sabemos, não se misturam. **Identifique aqueles recipientes que poderiam representar, de forma aproximada, a comparação "2 partes de óleo para 3 partes de água".** (Atenção: não deve ser usada régua para o desenvolvimento desta atividade!)



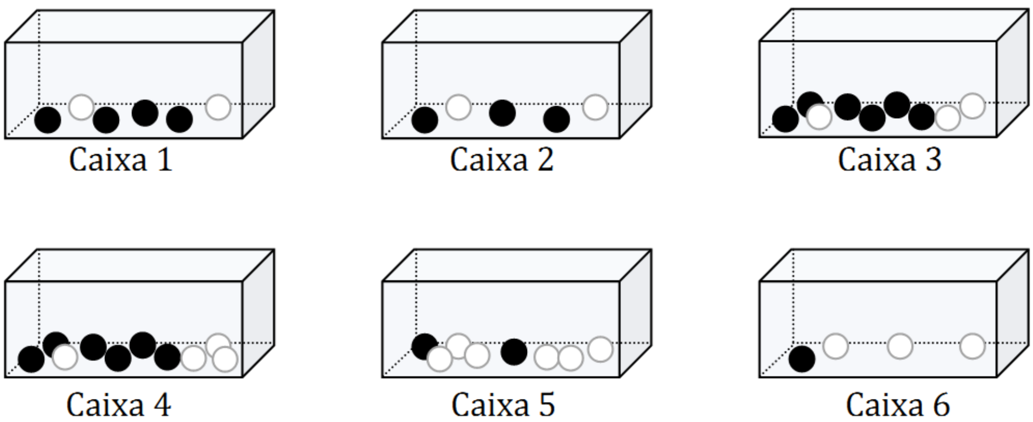
Atividade 5

Em cada uma das bandeiras a seguir, estabeleça uma comparação na forma de razão entre as áreas amarela e verde.



Atividade 6

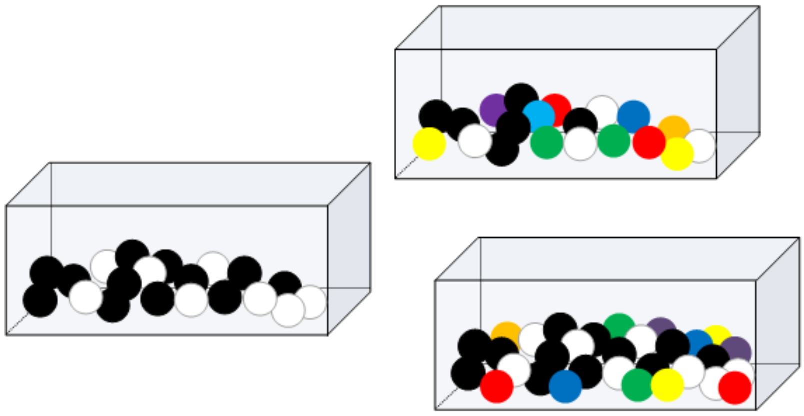
As imagens a seguir representam caixas nas quais há bolas brancas e bolas pretas:



(a) **Indique, abaixo de cada uma delas, uma razão que expresse a comparação entre bolas brancas e bolas pretas.**

(b) **Em quais caixas a relação entre bolas brancas e bolas pretas é a mesma, isto é, correspondem a mesma razão?**

Dizer, por exemplo, que existem bolas pretas e brancas em uma caixa na razão de "2 bolas brancas para 3 bolas pretas" não informa sobre a quantidade total de bolas brancas nem de bolas pretas, bem como nada informa sobre a quantidade total de bolas que há na caixa nem se existem bolas de outra cor nesta caixa. Por exemplo, observe **a razão entre bolas brancas e bolas pretas em cada uma das caixas a seguir.**



Nas expressões "2 bolas brancas para 3 bolas pretas" , "para cada 2 bolas brancas na urna existem 3 bolas pretas" ou "para cada duas partes de bolas brancas existem 3 partes de bolas pretas", existe uma informação que diz respeito a uma <u>comparação</u> entre as quantidades de bolas brancas e de bolas pretas. Essa comparação, como apresentada, não envolve uma operação entre as quantidades envolvidas, como, por exemplo, a subtração ou a divisão.

Razão a partir de modelos pictóricos

Uma representação um tanto natural para a expressão "2 bolas brancas para 3 bolas pretas" pode envolver o desenho de bolas brancas e pretas, como os que aparecem nos exemplos anteriores. No entanto, outra representação pictórica possível, faz uso de "barrinhas" no lugar de bolinhas.

TB (total de bolas brancas)

TP (total de bolas pretas)

Em tal representação, todas as células são de mesmo tamanho e cada célula não está representando o 1, mas sim a "parte" na expressão "2 partes de branca para 3 partes de preta". Tem-se ainda, levando em conta que a quantidade de bolas brancas e pretas juntas formam um total de cinco partes, a possíbilidade:

T (total de bolas brancas e bolas pretas)

O modelo pictórico que propõe a representação com "barrinhas" é potencialmente mais significativo uma vez que é adequado também à comparação de grandezas contínuas. Além disso, esse modelo, aparentemente simples, e até ingênuo, explica a comparação e pode se revelar um importante recurso de representação que ampara a resolução de problemas que envolvem razão entre grandezas e as medidas dessas grandezas.

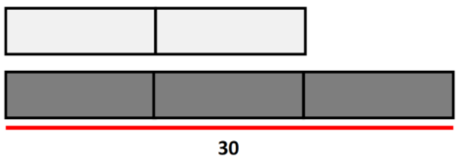
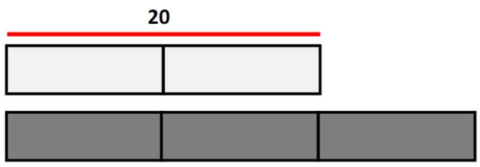
Razão e Medida

Em muitas situações são conhecidas a razão que determina uma comparação entre duas grandezas e a medida de uma delas. Nesses casos, é possível determinar a medida da outra grandeza. Por exemplo,

> Em uma urna com bolas coloridas, para cada 2 bolas brancas há 3 bolas pretas. Sabendo que na urna existem 30 bolas pretas, pergunta-se: **quantas bolas brancas há nessa urna?**

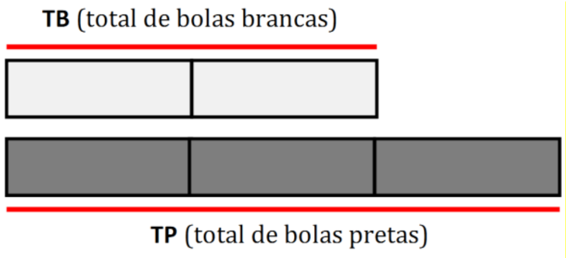
Resolução pelo método pictórico

Na sala de aula do ensino básico, sugere-se ao professor que registre, ao lado da resolução pelo método pictórico, um “relatório” que explique, em palavras ou em linguagem simbólica, o raciocínio que está sendo registrado pictoricamente. Acreditamos que este relatório, como estratégia pedagógica, ajuda ao aluno no processo de transição para a álgebra (linguagem simbólica).

Resolução pelo método pictórico	Explicação “em palavras”	Linguagem simbólica
Passo 1  	*“Na urna existem 30 bolas pretas, e elas correspondem a 3 partes”*	$3\,\boxed{} = 30$ ou $3 . x = 30$
Passo 2  	*“Se 3 partes totalizam 30 bolas, então cada parte é formada por 10 bolas pretas”*	$\boxed{} = 30 : 3 \rightarrow$ $\boxed{} = 10$ ou $x = 30 : 3 \rightarrow x=10$
Passo 3  	*“Como a quantidade de bolas em cada parte (branca ou preta) é igual e como as bolas brancas correspondem a duas partes, o total de bolas brancas é 20”*	Então, como $\boxed{} = 10$ e o total de bolas brancas é igual a $2 \times \boxed{}$, tem-se que esse total é igual20. ou Como $x = 10$ e $TB = 2 . x$, $TB = 20$.

É importante destacar que, na representação, cada uma das partes representadas por $\boxed{}$ indica a parte comum que estabelece a comparação entre bolas brancas e bolas pretas. No entanto, essa unidade de comparação pode não corresponder a apenas uma bola (A quantas bolas cada uma dessas unidades corresponde no exemplo em questão?). Assim, a quantidade total de bolas brancas corresponde a duas vezes essa parte e a quantidade total de bolas pretas corresponde a três vezes essa parte.

Além disso, destacamos que esta representação também favorece a associação de fração a razão. Observe que, considerando a quantidade de bolas pretas como o “todo”, a representação em "barrinhas" favorece o entendimento de que a quantidade total de bolas brancas (TB) corresponde a 2/3 da quantidade total de bolas pretas (TP), ou seja,



$$\text{TB} = \frac{2}{3} \text{ de TP , ou ainda, TB} = \frac{2}{3} \text{ x TP .}$$

Assim, sabendo que a quantidade de bolas pretas é de 30 unidades, então a quantidade de bolas brancas equivale a "(2/3) de 30 unidades", ou seja, há 20 bolas brancas. **É em contextos como esse, em que se conhece a medida de uma das grandezas, que se revela pertinente associar razão a uma fração, a um número real ou a um operador**. No entanto, cabe ressaltar: **razão não é sinônimo de fração**, **razão não é igual a uma fração.**

Atividade 7

Considere uma situação análoga à do exemplo anterior: uma urna na qual, para cada 2 bolas brancas, há 3 bolas pretas. Sabendo que, neste caso, há 40 bolas brancas na urna, pergunta-se: **quantas bolas pretas há nesta urna?** Procure resolver a atividade fazendo uso do método pictórico.

Atividade 8

A partir de uma razão, às vezes[2], pode-se chegar a uma fração. De fato, observando a atividade 7, é possível deduzir que a afirmação "para cada 2 bolas brancas existem 3 bolas pretas" é equivalente à afirmação que o total de bolas brancas é 2/3 do total de bolas pretas.

Complete a tabela a seguir:

Informação	Quantidade de bolas brancas	Quantidade de bolas pretas	Quantidade total de bolas brancas e pretas
a) tendo na urna 30 bolas brancas e pretas			
b) tendo na urna 20 bolas brancas			
c) tendo na urna 21 bolas pretas			

[2] Falamos aqui em "às vezes" porque existem comparações, mesmo entre grandezas de mesma espécie, como segmentos, às quais não é possível associar nenhuma fração. Por exemplo, quando comparamos a diagonal de um quadrado com o seu lado.

Comparando Razões e Proporcionalidade

Atividade 9

Em uma prova, sabe-se que Paula acertou 10 questões em cada 30 questões, e Bruna acertou 4 questões em cada 10 questões. **Qual das alunas teve o melhor desempenho?**

Atividade 10

Certo dia, em um supermercado de Porto Alegre, havia três promoções diferentes para o mesmo produto, como mostram as imagens a seguir.

Oferta A

Oferta B

Oferta C

Considerando que os rolos de papel são todos do mesmo tamanho e que o preço unitário permanece o mesmo nos três pacotes, **do ponto de vista financeiro, qual a compra mais interessante?**

Atividade 11

No preparo de um suco, Ana dilui 2 partes de suco concentrado em 3 partes de água. Já Bia, dilui 3 partes do mesmo suco concentrado em 5 partes de água.

(a) Qual das meninas preparou o suco mais diluído?

(b) Experimente resolver esse problema usando o método pictórico.

Atividade 12[3]:

Em um restaurante há duas salas ocupadas com clientes. Na sala A há 45 homens e 60 mulheres, e na sala B há 32 homens e 44 mulheres.

(a) Que fração apodemos associar à razão entre a quantidade de homens e de mulheres que há na sala A?

(b) Que fração apodemos associar à razão entre a quantidade de homens e de mulheres que há na sala B?

(c) Que fração apodemos associar à razão entre a quantidade de homens e de mulheres que há em ambas as salas?

---

[3] Atividade retirada de Martínez, S. et al (2013), p.406.

Atividade 13

Considere que as quatro fotos a seguir foram tiradas em um mesmo dia e que a árvore que aparece em todas elas é a mesma. Em cada foto, há uma pessoa ao lado dessa árvore, Guilherme, Joana, Maria e Eduardo. **Essas pessoas têm alturas iguais? Se não, qual (ou quais) delas é(são) a(s) mais alta(s)?**

Guilherme Joana Maria Eduardo

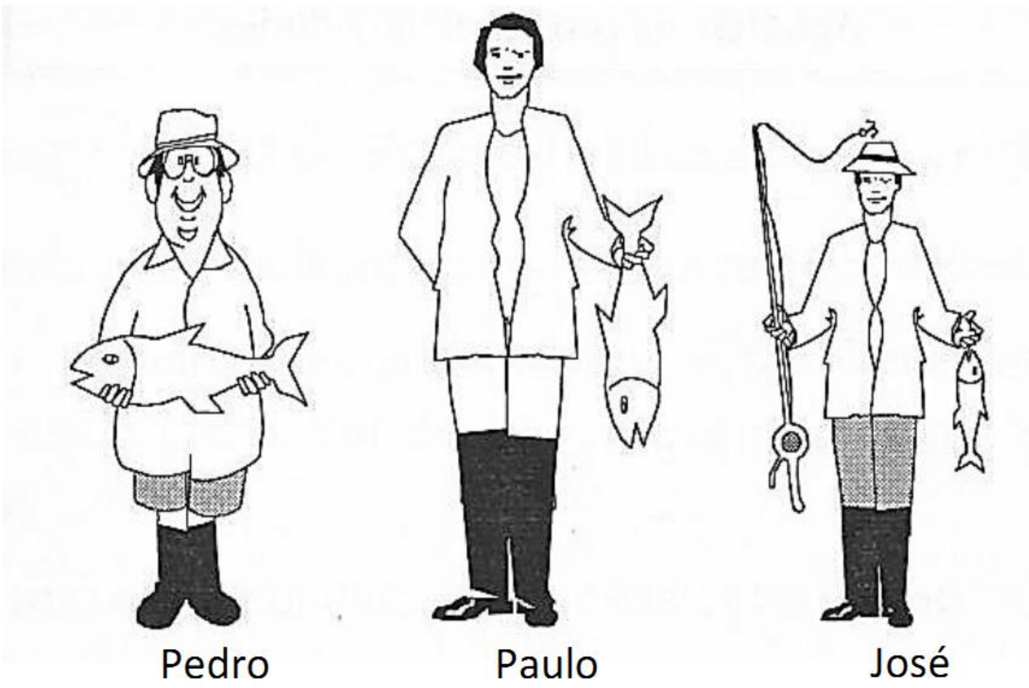
Atividade 14

Considere agora a situação em que a pessoa é a mesma e as árvores são distintas. **Qual é a árvore mais alta?**

Árvore A Árvore B Árvore C

Atividade 15[4]

Os três pescadores abaixo têm a mesma altura. **Qual deles pescou o maior peixe?**



Diferentes formas de expressar uma razão

Atividade 16

Reescreva as comparações destacadas nas frases seguintes apresentando de uma forma diferente a razão envolvida.

(a) João tem o dobro de figurinhas que Pedro.

(b) No basquete, Renato acerta em torno de 20% dos seus arremessos.

(c) 2/5 da massa de certa substância é constituída de água.

[4] Atividade retirada de Tinoco, L (2011), p.13.

NÚMEROS RACIONAIS – DE ONDE VÊM?

É certo que o conceito de número racional depende dos conceitos de medida e de fração. Para Klein, a introdução do conceito de frações na escola representa uma mudança de princípios:

> "Transitámos do número de coisas para a sua medida, transitámos de *coisas numeráveis* para *coisas mensuráveis*." (Klein, 2009, p.38, itálico como no original).

Mas a que *mudança de princípios* Klein está se referindo? O que pretende diferenciar com os termos "*coisas numeráveis*" e "*coisas mensuráveis*"? A diferença que Klein destaca diz respeito a *contar* e a *medir*. No contexto de situações reais, **contar e medir são atividades humanas elementares que se referem a controlar uma quantidade**. Medir uma grandeza significa compará-la com uma unidade, isto é, compará-la com uma grandeza de mesma espécie estabelecida como referência. Mas, contar também é comparar. A contagem se estabelece a partir de uma relação biunívoca ao conjunto dos números naturais, no qual a unidade também tem papel fundamental. *Mas então qual a diferença entre contar e medir a que se refere Klein?*

O que sustenta essa diferença é a dualidade discreto/contínuo. Contar é relativo a universos discretos ou discretizáveis, universos em que os elementos são distinguidos admitindo a correspondência biunívoca com os números naturais. Já medir alcança universos contínuos. Assim, contamos pessoas e medimos sua altura, contamos cadeiras e medimos seu peso, contamos frutas e medimos o volume de leite. Nos termos de Klein, a contagem, estabelecida em universos discretos, diz respeito a *coisas numeráveis* e a medida, contemplando universos contínuos, a *coisas mensuráveis*.

A origem da medida é a comparação realizada a partir da verificação de quantas vezes a unidade estabelecida *cabe* no que se quer medir. No entanto, a unidade pode não *caber* uma quantidade inteira de vezes no que se quer medir, ou seja, essa quantidade pode não ser determinada a partir da associação a um número natural. É nessa circunstância que surge a necessidade de novos números além dos naturais. Uma tentativa de solução para o problema descrito, ou seja, o problema da unidade não caber uma quantidade inteira de vezes no que se quer medir, é repartir a unidade. É neste contexto que emergem as frações e, consequentemente, os números racionais. A questão da medida é igualmente fundamental para a compreensão da necessidade da expansão dos números naturais para os números racionais e para a identificação da limitação dos números racionais, que determina a necessidade da expansão dos números racionais para os números reais. **A ideia de comparação sustenta toda essa discussão**.

Na Matemática contemporânea, as medidas transformam problemas geométricos em problemas numéricos. A escolha de uma unidade de medida basta para converter um comprimento, uma área ou um volume em um número. Assim, por exemplo, atualmente, a ideia de "medir" um comprimento, uma área ou um volume está naturalmente associada a atribuir a essas grandezas um valor numérico, determinado a partir de uma unidade fixada. No entanto, a tradição que marcou a geometria grega na época de Euclides – e mesmo um pouco antes – envolvia o chamado de “cálculo de áreas” – práticas geométricas que envolviam a busca de equivalências de áreas e operações com áreas. Estas operações eram feitas sem medir as grandezas envolvidas (isto é, sem atribuir a elas valores numéricos), mas realizando as operações diretamente com estas como grandezas geométricas, fossem elas comprimentos, áreas ou volumes. Por exemplo, como na a proposição a seguir, dos Elementos:

Proposição I-38 *Os triângulos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si*[5]*.*

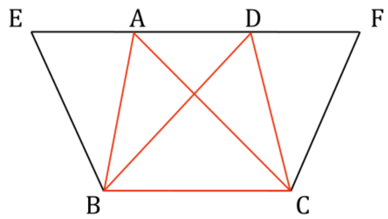


Figura 1: Triângulos com áreas iguais.

De forma geral, essa proposição pode ser traduzida por *Se dois triângulos, ABC e DBC, possuem a mesma base, BC, e o terceiro vértice em uma reta paralela à base, então eles têm áreas iguais*. Em termos atuais, em geral, tem-se que dois triângulos têm áreas iguais se possuem a mesma base e a mesma altura, uma vez que a área é calculada a partir de uma fórmula (No caso, (*base* x *altura*)/2). A proposição acima enuncia um caso em que duas áreas são iguais, por meio de condições geométricas, sem que seja preciso calcular valores numéricos para essas áreas. O que está sendo abordado aqui trata de uma tradição geométrica que não associava grandezas a números, a base e a altura não eram medidas para se indicar a área.

Para se entender a importância de conclusões deste tipo, é preciso entender como eram realizados os cálculos de áreas na geometria grega, que consistia em uma prática distinta da que é usada atualmente. **Na matemática contemporânea, medir é associar uma grandeza a um número**. Por exemplo, de maneira geral, quando se quer somar as áreas de dois polígonos, primeiro se calcula a área de cada um deles, por meio de uma fórmula, e depois se soma os resultados (que são números). No entanto, **na geometria grega, as grandezas não eram tratadas por meio de sua associação a números.** Neste caso, como operar com grandezas, como áreas, senão por meio de suas medidas numéricas?

Este problema era resolvido por meio da procura de áreas equivalentes. Por exemplo, “medir’’ a área de uma figura qualquer significava encontrar uma figura simples cuja área fosse igual à da figura dada. Esta figura simples era um quadrado. Logo, o problema de se encontrar a *quadratura* de uma figura qualquer correspondia a construir um quadrado cuja área fosse igual à da figura dada. O conceito de razão se insere no contexto geométrico descrito anteriormente, que diz respeito à origem dos números racionais: **Uma razão é uma comparação entre grandezas**.

[5] “São iguais” na linguagem de Euclides quer dizer “possuem a mesma área”.

O CONCEITO DE RAZÃO

O conceito de razão se insere no contexto geométrico descrito anteriormente, que diz respeito à origem dos números racionais:

Uma razão é uma comparação entre grandezas.

Nos *Elementos* de Euclides, encontram-se dois tipos de teoria sobre razões e proporções. Há uma versão no livro VII, que pode ser aplicada somente à razão entre inteiros, e é atribuída aos pitagóricos. A definição contida aí pode ser usada para razões entre grandezas comensuráveis. A segunda versão, presumidamente posterior à primeira, está contida no livro V e é atribuída ao matemático platônico Eudoxo. Esta última teoria das razões e proporções é bastante sofisticada e se aplica igualmente a grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Resumindo, existem duas teorias, uma para grandezas comensuráveis e outra abrangendo grandezas quaisquer, mas todas de mesmo tipo.

A definição apresentada no Livro V é abrangente o suficiente para que possa se enquadrar nas diferentes teorias de razão (Livro V, Definição 3):

"Uma razão é um tipo de relação referente ao tamanho entre duas grandezas de mesmo tipo."

O "termo grandeza de mesmo tipo" refere-se ao caso em que as grandezas podem ser comparadas entre si, determinando-se qual é a maior e qual é a menor. Assim, dois comprimentos são grandezas de mesmo tipo, bem como duas áreas. Já um comprimento e uma área não são grandezas do mesmo tipo. Logo, o enunciado acima estabelece que só as grandezas de mesmo tipo podem ser comparadas por meio de razões.

Comparando as duas teorias sobre razões e proporções expostas por Euclides, há motivos históricos para se acreditar que a inadequação da teoria numérica para tratar as grandezas incomensuráveis tenha levado à busca de uma técnica que pudesse ser aplicada a elas de modo confiável. Existia uma técnica, chamada "antifairese", que já era usada para números. Os matemáticos da época teriam tentado estender, por meio deste procedimento, a teoria das razões e proporções para incluir a comparação entre duas grandezas incomensuráveis.

Uma das hipóteses mais confiáveis, defendida por historiadores como Freudenthal, Knorr e Fowler, é a de que o método da antifairese estava na base de uma teoria das razões que era praticada, pelo menos, durante o século IV a.E.C. e que teria sido desenvolvida por Teeteto, matemático contemporâneo de Platão e pertencente ao seu círculo. Fowler argumenta que, antes de Euclides, era corrente uma teoria tratando somente de razões, baseada na antifairese, sem a investigação de proporções.

O MÉTODO DA ANTIFAIRESE

A palavra antifairese vem do grego antho-hypo-hairesis, que significa literalmente subtração recíproca. Na álgebra moderna, o procedimento é conhecido como "algoritmo de Euclides" para encontrar o maior divisor comum entre dois números naturais. A etimologia desta palavra já indica o procedimento das "subtrações mútuas", ou "subtrações recíprocas": dados dois números (ou duas grandezas), em cada passo subtrai-se, do maior, um múltiplo do menor, de modo que o resto seja menor do que o menor dos dois números dados. Assim, o método da antifairese corresponde a uma série de comparações sucessivas. Por exemplo, podemos pedir que um aluno compare duas pilhas de pedras. Se a primeira tem 60 pedras e a segunda tem 26 pedras, obtemos:

1) da primeira pilha com 60 pedras pode-se subtrair **2 vezes** a pilha com 26 pedras e ainda resta uma pilha com 8 pedras.
2) da pilha com 26 pedras pode-se subtrair **3 vezes** a pilha com oito pedras e ainda resta uma pilha com 2 pedras.
3) por fim, a pilha com 2 pedras cabe exatamente **4 vezes** na pilha com 8 pedras.

A sequência: "**2 vezes, 3 vezes e 4 vezes exatamente"** representa o número de subtrações que se pode fazer em cada passo e exprime uma forma de comparação entre os números 60 e 26. Podemos chamar essa sequência de *razão antifairética* e, para representar a razão antifairética 60:26, por exemplo, usar a notação:

$$\text{Ant}(60, 26) = [2, 3, 4].$$

As pilhas de pedra são tratadas como grandezas e a comparação entre elas não emprega a operação de divisão entre os números 60 e 26. Note que a comparação entre os números 90 e 39, por exemplo, pode ser expressa por uma sequência com o mesmo número de subtrações sucessivas, embora, em cada passo, os resultados das subtrações sejam diferentes. De fato:

1) $90 - 2 \times 39 = 12$
2) $39 - 3 \times 12 = 3$
3) $12 - 4 \times 3 = 0$

Assim, a razão antifairética [2, 3, 4] também expressa a comparação entre os números 90 e 39:

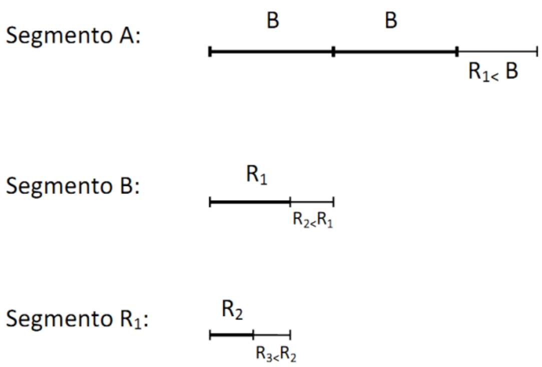
$$\text{Ant}(90, 39) = [2, 3, 4].$$

Para Fowler, os gregos entendiam a razão 22:6, por exemplo, com base no fato de que se pode subtrair 6 de 22 três vezes, restando 4; em seguida, subtrair uma vez o 4 de 6, restando 2; e finalmente, subtrair 2 de 4 exatamente duas vezes. Logo, a razão 22:6 seria definida pela sequencia "3 vezes, 1 vez, 2 vezes".

Podemos estender a técnica da antifairese para comparar dois segmentos de reta. Considere, por exemplo, os segmentos A e B na figura abaixo, sendo $A > B$. Se B não cabe um número inteiro de vezes em A, quando B é retirado continuamente de A, sobra algum resto menor que B. Na figura abaixo, procedemos da seguinte forma:

1. Retiramos 2 vezes B de A, obtendo $R_{1.}$
2. Em seguida, retiramos 1 vez o resto R_1 de B obtendo $R_{2;}$
3. Depois, 3 vezes R_2 de R_1.
4. E assim por diante...

Esta antifairese equivale a fazer:



Ou

$$A = n_0 B + R_1$$

$$B = n_1 R_1 + R_2$$

$$R_1 = n_2 R_2 + R_3$$

e assim por diante.

O procedimento pode chegar ao fim, ou não. Quando o procedimento termina, a medida comum aos dois segmentos está associada a um terceiro segmento R, que é o último resto não nulo encontrado e que mede os segmentos A e B, isto é, que tem a propriedade de caber um número inteiro de vezes tanto em A quanto em B. Isto permite encontrar a medida comum a dois segmentos e, por meio deste procedimento, poderíamos reduzir a geometria à aritmética, uma vez que cada segmento poderia ser representado pela sua medida. Neste caso, a verificação da semelhança entre figuras seria reduzida à verificação de uma proporção aritmética, que seria definida como uma igualdade de razões entre números.

Existem casos em que a antifairese não termina, que são os casos incomensuráveis, como no procedimento que usaremos no próximo capítulo para demonstrar geometricamente a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado. Nesta situação, a definição de proporção pela igualdade de razões, que só é viável para grandezas comensuráveis, não são mais aceitáveis.

Números e grandezas

Nos *Elementos* de Euclides, o tratamento dos números (*arithmos*) é separado do tratamento das grandezas (*mégéthos*). Embora tanto as grandezas quanto os números sejam representados por segmentos de reta, a diferença é a seguinte:

- Os números são agrupamentos de unidades, e essas unidades não são divisíveis.
- As grandezas geométricas são divisíveis em partes do mesmo tipo (uma linha é dividida em linhas, uma superfície em superfícies, etc.).

A medida está presente nos dois casos, dos números e das grandezas. A diferença está no fato de que, no caso dos números, a medida se dá a partir de uma unidade indivisível, enquanto que as grandezas podem ser divididas. As primeiras definições do livro VII apresentam a noção de número e o papel da medida:

> ***Definição VII-1*** *Unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma.*
>
> ***Definição VII-2*** *E número é a quantidade composta de unidades.*
>
> ***Definição VII-3*** *Um número é uma parte de um número, o menor, do maior, quando mede exatamente o maior.*

Esta última definição postula que um número menor é uma parte de outro número maior quando pode *medi-lo* (ou seja, quando o segundo é múltiplo inteiro do primeiro). Assim, os números são considerados como segmentos de reta com medida inteira. Por exemplo, um segmento de tamanho 2 não seria parte de um segmento de tamanho 3, mas sim de um segmento de tamanho 6.

Os números servem para contar, mas antes de contar é preciso saber qual a unidade de contagem. No caso das grandezas, a unidade de medida deve ser também uma grandeza. No caso dos números, a unidade não é um número. A "unidade", na definição de Euclides, é o que possibilita a medida, mas ela não pode ser subdividida. Este ponto de vista, que afirmamos ser o de Euclides, foi explicitado por Aristóteles:

> *"O Uno não tem outro caráter do que servir de medida a alguma multiplicidade, e o número não tem outro caráter do que o de ser uma multiplicidade medida e uma multiplicidade de medidas. É também com razão que o Uno não é considerado um número, pois a unidade de medida não é uma pluralidade de medidas" (Metafísica, N I 1088a).*

Vemos assim que, para Euclides, o Um não é um número, pois o número pressupõe uma multiplicidade, ou seja, uma diversidade que o Um não possui. O Uno é caracterizado pela sua identidade em relação a si mesmo.

As técnicas de medida, que ocupam um lugar preponderante nas práticas euclidianas sobre os números, eram realizadas pelo método da antifairese. Por isso, este procedimento, no caso dos números, é conhecido hoje como “algoritmo de Euclides”. Este método era utilizado para encontrar a medida comum a dois números (mais precisamente, o **mdc** entre eles):

> ***Proposição VII-1*** *Sendo expostos dois números desiguais, e sendo sempre subtraído de novo o menor do maior, caso o que restou nunca meça exatamente o antes dele mesmo, até que reste uma unidade, os números do princípio serão primos entre si.*
>
> ***Proposição VII-2*** *Sendo dados dois números não primos entre si, achar a maior medida comum deles.*

A proposição VII-1 acima fornece um critério para decidir quando dois números A e B são primos entre si. Supondo B < A, retira-se B de A obtendo-se um resto R_1. Se R_1 não for igual a B, retira-se R_1 de B, obtendo-se outro resto R_2. O procedimento continua enquanto o resto R_i não é igual ao anterior e nem igual a 1.

Quando um resto couber um número inteiro de vezes no anterior, a próxima subtração resultará em 0, os números A e B terão uma medida comum e então a proposição 2 se aplica. Se isto não acontecer $R_i = 1$ em alguma iteração e poderemos dizer que A e B são primos entre si.

Na verdade, o modo como Euclides enuncia esta proposição 2 do livro VII emprega uma linguagem de grandezas. Os dois números dados são segmentos A e B dos quais queremos encontrar a maior medida comum. Construímos geometricamente as diferenças entre restos sucessivos.

Exemplo: Como encontrar, por este método, o mdc entre 119 e 85 ?

Solução: Começo por retirar 85 uma vez de 119, obtendo $R_1 = 34$ como resto. Em seguida retiro 34 duas vezes de 85, obtendo o segundo resto $R_2 = 17$. Agora retiro 17 duas vezes de 34 obtendo 0. Logo 17 é o maior divisor comum de 119 e 85. Note que, se fossem primos, este procedimento chegaria ao resto 1 e não a 0.

O procedimento pode dar 0, ou seja, pode chegar ao fim, ou não. Se os dois números não são primos entre si, o mesmo procedimento dará um resto, diferente da unidade, que mede o precedente (logo, se retiramos este resto do número precedente um certo número de vezes, obtemos zero, como ocorreu no exemplo acima). Este resto é a maior medida (divisor) comum entre os dois números. Logo, se um resto mede o precedente, o algoritmo termina e obtemos o **mdc** dos dois números. **Assim, o mdc representa o maior número que mede os dois números dados, isto é, a maior medida comum entre eles.**

Um número é primo quando não é medido por nenhum outro número além de si próprio, somente pelo 1, que não é considerado um número. Quando o mdc de dois números é 1 ele não é considerado um **mdc** “verdadeiro” (o que faz com que os primos possuam natureza distinta dos outros números).

Observando o método da antifairese, podemos notar um paralelo entre números que não são primos entre si e grandezas comensuráveis, pois é possível obter uma medida comum entre eles, e, consequentemente, entre números primos entre si e grandezas incomensuráveis. No caso das grandezas comensuráveis, essa “medida comum” é uma grandeza de mesmo tipo que “mede” ambas, isto é, da qual ambas são múltiplas inteiras. Analogamente, no caso de números não primos entre si, o mdc, também obtido por meio da antifairese, representa o maior número do qual ambos são múltiplos, isto é, a “medida comum” entre eles.

Entretanto, verifica-se uma diferença importante entre os números primos entre si e as grandezas incomensuráveis. No caso dos números primos entre si, o processo da antifairese termina no 1. No caso das grandezas incomensuráveis, a antifairese é infinita, continua indefinidamente. Neste caso, devemos tomar uma grandeza e subdividi-la infinitamente, e este procedimento não tem fim. Logo, não existe uma grandeza menor do que todas as outras e pode ser que o algoritmo de Euclides não termine. As grandezas incomensuráveis são objeto do livro X dos *Elementos*.

Podemos citar, por exemplo, a proposição X-2, versão para grandezas da proposição VII-1 citada anteriormente:

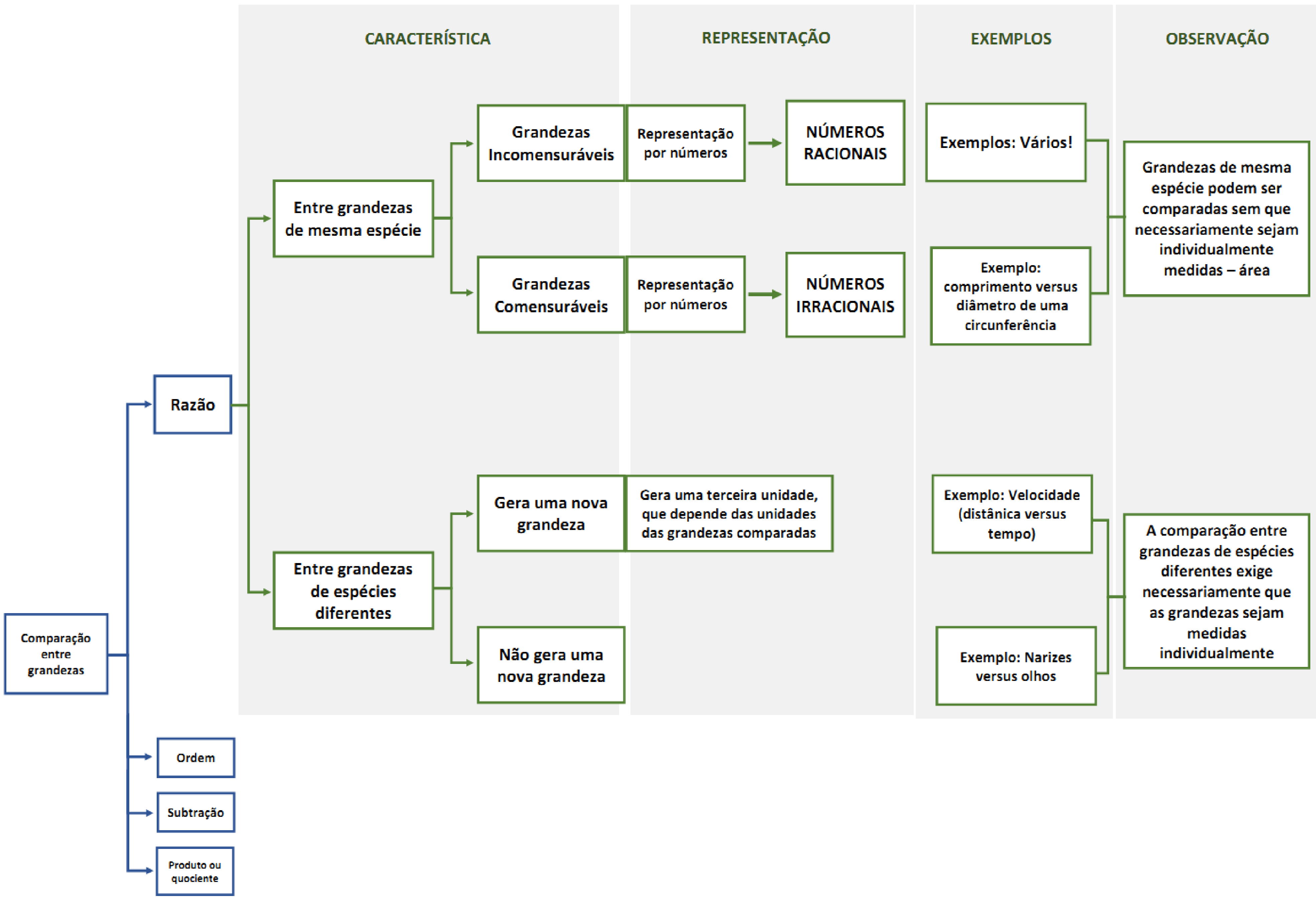
Proposição X-2 Se, quando a menor de duas grandezas é continuamente subtraída da maior, a que resta nunca mede a precedente, as grandezas são incomensuráveis.

MORAL DA HISTÓRIA:

No contexto da geometria grega da época de que tratamos aqui uma razão era uma comparação entre grandezas. Esta comparação entre grandezas, bem como a operação com estas grandezas, não passava pela associação das mesmas a números – o que seria feito por meio de um procedimento de medida.

A razão podia servir também para comparar números (representados como segmentos de reta). Neste caso, a comparação era feita pela técnica da antifairese, que não identifica a razão a uma divisão entre números.

Em algum momento que não sabemos bem identificar, os geômetras se deram conta de que duas grandezas de mesmo tipo podiam ser incomensuráveis. Aí então, o método da antifairese, que já era usada para números, foi adaptado para comparar grandezas.


CARACTERÍSTICA
REPRESENTAÇÃO
EXEMPLOS
OBSERVAÇÃO
Comparação entre grandezas
Razão
Entre grandezas de mesma espécie
Grandezas Incomensuráveis
Representação por números
NÚMEROS RACIONAIS
Exemplos: Vários!
Grandezas Comensuráveis
Representação por números
NÚMEROS IRRACIONAIS
Exemplo: comprimento versus diâmetro de uma circunferência
Grandezas de mesma espécie podem ser comparadas sem que necessariamente sejam individualmente medidas – área
Entre grandezas de espécies diferentes
Gera uma nova grandeza
Gera uma terceira unidade, que depende das unidades das grandezas comparadas
Exemplo: Velocidade (distânica versus tempo)
Não gera uma nova grandeza
Exemplo: Narizes versus olhos
A comparação entre grandezas de espécies diferentes exige necessariamente que as grandezas sejam medidas individualmente
Ordem
Subtração
Produto ou quociente

Referências:

[1]. Martínez, S. et al (2013) *ReFIP Matemática – Recursos para la Formación de Professores de Educación Básica*. Ediciones SM, Chile. (http://refip.cmm.uchile.cl/)

[2]. Tinoco, Lucia (Org). Razão e Proporção. Projeto Fundão. IM-UFRJ, 2011.

[3]. Livro do Professor De Matemática da Escola Básica, SBM (a aparecer).