

ÁREA, PERÍMETRO E PERÍMETRO FRACTAL DE UMA FORMA GEOMÉTRICA PLANA

Jaime Ripoll ¹

2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da região Sul

Abril de 2016

Fundação Universidade de Rio Grande
Rio Grande, Rio Grande do Sul

¹Versão preliminar de um texto mais detalhado e completo que está sendo escrito em colaboração com Cydara Ripoll e Miriam Telichevesky.

SUMÁRIO

1	Introdução.	3
2	Formas geométricas planas: conceituação matemática.	5
3	Área de uma FGP.	8
4	A área de um círculo (o número π).	9
5	Áreas de regiões elípticas e de setores parabólicos.	20
6	Perímetro: o comprimento de um contorno.	28
6.1	O perímetro de um círculo. Primeira versão. Uma nova definição de π	29
6.2	O perímetro de um círculo. Segunda versão.	31
7	Perímetro de FGP convexas.	39
8	Perímetro de FGP quaisquer. Perímetros fractais.	43
9	Medida de Hausdorff. Uma pequena introdução à Teoria Geométrica da Medida.	45
9.1	Gráficos de funções reais de uma variável real. A conjectura da dimensão do gráfico da função de Weiertrass.	49
9.2	O conjunto de Mandelbrot e o Teorema de Mitsuhiro Shishikura.	51
10	Apêndice.	52

1 Introdução.

“Figura plana”, “forma plana” ou “forma geométrica plana” (FGP) é um importante conceito da Geometria trabalhada de maneira bastante intuitiva na Escola Básica (EB)². Pelo que podemos perceber, não é lá apresentada uma definição precisa, apenas dados exemplos. Típicamente as regiões poligonais e os círculos (em geral chamados de discos nos cursos universitários), bem como setores de círculos. Já foi perguntado ao autor se elipse (e seu interior) era considerada uma figura plana.

Na verdade, alguns textos da EB incluem também elipses (o bordo e o interior) bem como porções do plano limitadas por parábolas, hipérbolas e segmentos de reta (<https://en.wikipedia.org/wiki/Shape>). Alguns textos ainda consideram FGP regiões cujo “contorno pode ser formado por curvas”, mas não definem estes textos, precisamente, o que consiste um “contorno curvo” (https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_shape).

Mais ainda importante do que a noção de FGP são dois conceitos intimamente ligados às mesmas: o de área e o de perímetro. Enquanto a noção de área de uma FGP é razoavelmente simples de ser tratado matematicamente, inclusive através de uma abordagem bastante intuitiva e que pode ser discutida na EB, o conceito de perímetro é complicado do ponto de vista matemático. A razão disto é que a área é a medida de conjuntos bidimensionais e toda FGP é um conjunto bidimensional. Já perímetro é a medida de conjuntos unidimensionais e não é verdade que o contorno de uma FGP seja necessariamente um conjunto unidimensional. O contorno de um FGP pode ter dimensão maior do que 1 e, até mesmo, dimensão 2 (veja Seção 9.2). Definir a dimensão de um subconjunto do plano não é simples e é matematicamente sofisticado. Isto trás uma apreciável complicação no tratamento da noção de perímetro de uma FGP na EB.

Neste texto vamos introduzir de maneira precisa a noção de FGP principalmente para poder tratar de forma igualmente precisa as noções de área e de perímetro de uma FGP. Parte do nosso maior esforço foi o de procurar apresentar uma abordagem das noções de área e de perímetro de uma FGP, principalmente de perímetro, que fosse matematicamente rigorosa e, ao mesmo tempo, passível de ser discutida, em alguns aspectos significativos, na EB. Mas, também, o de procurar dar ao professor da EB uma visão mais abrangente sobre este assunto, bem como o de dar os subsídios matemáticos

²Por Escola Básica entendemos aqui os Ensinos Fundamental e Médio

para que possa trata-lo com mais segurança. Nesse sentido, a leitura do texto requer certamente uma familiaridade e treinamento na forma de argumentar matematicamente. Mas é verdade que é apenas em sua forma mais simples, como a que era utilizada na EB nos idos dos anos 60 (os leitores de mais idade devem lembrar do famoso “Bezerrão” [1], livro muito utilizado nos 3 últimos anos da EB. A familiaridade com o nível de argumentação deste livro é mais do que suficiente para acompanhar este texto). O finalzinho do texto requer mais um pouco de matemática (típica dos cursos de Análise Real I dos bacharelados em matemática).

Quanto aos conteúdos matemáticos propriamente ditos, a necessidade da simplicidade e precisão, principalmente da precisão, nos forçou a fazer uso de dois conteúdos não estudados na EB: limites de sequências numéricas e as noções de supremo e de ínfimo. Quanto aos limites, contudo, a maneira que os utilizamos está longe da forma rigorosa de que eles são tratados em cursos de Análise Real ou na forma mais detalhada dos cursos de Cálculo, e sem que isso nos tenha feito pecar na argumentação matemática. Empregamos limites de forma intuitiva, como a utilizada, por exemplo, para justificar a fórmula da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica de razão $-1 < q < 1$. Mas não fazemos parcimônia no uso de simbologias típicas de limites como $\lim_{n \rightarrow \infty}$ etc. Já o uso das noções de supremo e de ínfimo são mais difíceis de serem tratadas intuitivamente e, ao mesmo tempo, de forma matematicamente consistente. Acreditamos que elas podem ser substituídas de forma matematicamente aceitável e convincente usando aproximações. Mas não fizemos e nem tentamos uma tal abordagem neste texto. Primeiro porque o alongaria sobremaneira e segundo, e principalmente, por falta de experiência que temos com o ensino da EB.

Mas enfim, este não é um texto dirigido a alunos da EB, mas a licenciandos e licenciados em cursos de Graduação em Matemática bem como, claro, a Professores de Matemática da EB. Pelo que conhecemos estes tópicos não são abordados de maneira sistemática, completa, em cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil.

Deixamos aqui este desafio pedagógico/matemático aos professores de Matemática da EB, qual seja, o de tentar encontrar uma forma de tratar estes assuntos na EB. Nos colocamos a disposição para discutir este assunto com eventuais interessados. Email ao final do texto (inclusive para aqueles que se interessarem em me contatar e receber uma versão expandida deste texto que deve sair em futuro próximo, em colaboração com as colegas Cydara Ripoll e Miriam Telichevesky). Ficaremos muito satisfeitos se, futuramente,

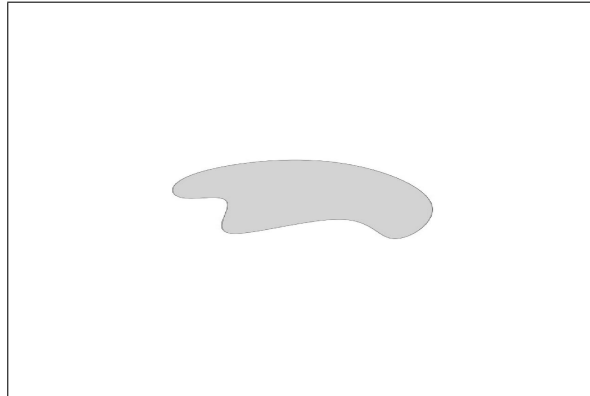
tivermos algum retorno de professores da EB que tenham tentado uma tal aventura. Assim poderemos saber se este texto conseguiu atingir, ao menos parcialmente, seu maior objetivo.

Finalmente, queremos dizer que uma das maiores motivações do autor em escrever este texto é a dele achar interessante e útil tornar mais presente entre os professores da EB diversos problemas, antigos e atuais (alguns ainda em aberto e sendo investigados) da Geometria. Problemas antigos mas educativos (pois estão por trás de questões e conceitos atuais utilizados em Geometria) que estão sendo deixados para trás bem como problemas novos que não vem sendo discutidos, fruto em parte da crescente algebrização e consequente banalização da geometria, fenômeno observável nos atuais livros textos da EB. Outra motivação é a de gostar demais de Geometria e de escrever textos de Matemática.

2 Formas geométricas planas: conceituação matemática.

Denotamos por \mathbb{E} o plano euclidiano. Uma forma geométrica plana (FGP) é, antes de mais nada, um subconjunto *limitado* F de \mathbb{E} . Limitado significa que F está contido em algum círculo de raio suficientemente grande. Por exemplo, regiões poligonais, círculos são subconjuntos limitados do plano. Já um semi-plano ou, por exemplo uma região delimitada por uma parábola, são subconjuntos *ilimitados* (ou seja, não limitados) do plano

Tal subconjunto limitado F , para ser uma FGP, deve consistir de duas partes, disjuntas uma da outra e ambas não vazias. Uma delas chamamos o *interior* de F , digamos $I(F)$ ou simplesmente I ; e a outra chamamos o *contorno* de F , digamos $C(F)$, ou apenas C . Assim $F = I \cup C$, $I \cap C = \emptyset$ e $I \neq \emptyset \neq C$.

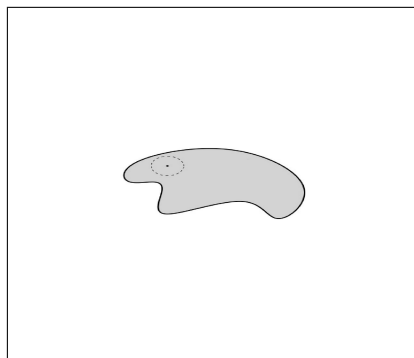


Forma geométrica plana

Em Matemática superior costuma-se denotar o contorno de F por ∂F , também dito *bordo* ou *fronteira* de F . Ocasionalmente usaremos esta notação e terminologia neste texto.

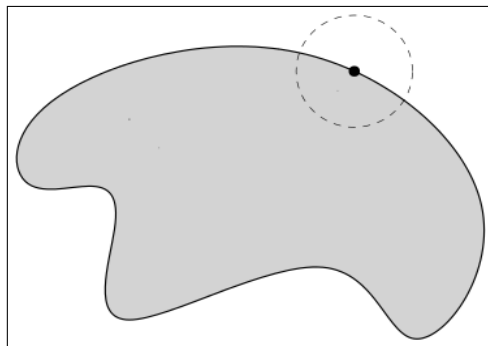
O interior I e o contorno C de F são definidos de forma matematicamente precisa como segue.

Um ponto p de \mathbb{E} pertence a I se, e só se, *existe* um círculo de \mathbb{E} centrado em p e inteiramente contido em I .



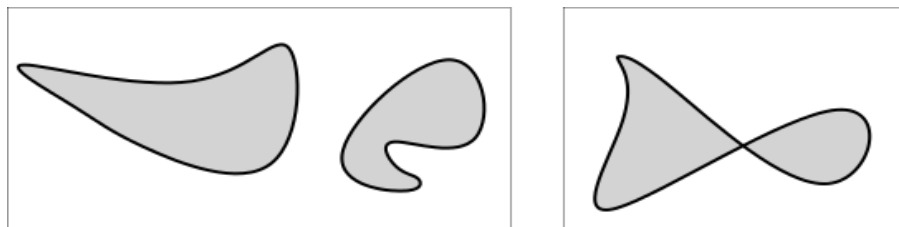
Ponto interior de uma FGP

Um ponto p de \mathbb{E} pertence ao contorno C de F se, e só se, *qualquer* círculo com centro em p intersepta tanto I quanto $\mathbb{E} \setminus F$.



Ponto do contorno de uma FGP

Para que F seja uma figura ainda precisamos requerer mais uma condição sobre F , a saber, que o interior I de F seja um *conjunto conexo*. Isto significa que *não* existem subconjuntos não vazios J e K de I , satisfazendo a mesma propriedade característica de I dita acima (ou seja, se $p \in J$ então existe um círculo centrado em p inteiramente contido em J , e o mesmo para K), tais que $I = J \cup K$ e $J \cap K = \emptyset$. Os subconjuntos no desenho abaixo não são FGP. Os dois desenhos constituem, na verdade, cada um, de duas FGP. O segundo de duas FGP se tocando em um ponto de seus contornos.



Contra-exemplos de FGP

Uma *região poligonal* é uma FGP cujo contorno é uma união finita de segmentos de reta.

3 Área de uma FGP.

Fixando em \mathbb{E} uma unidade de comprimento convencionamos que a área de um quadrado de lado 1 (uma unidade de comprimento) é 1, uma unidade de área. A partir daí, supondo que a área $\text{Area}(F)$ de uma FGP F deve satisfazer as propriedades auto-evidentes:

$$1) \text{Area}(F_1) \leq \text{Area}(F_2)$$

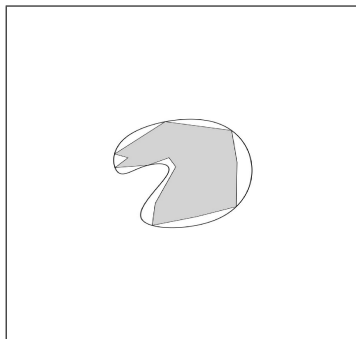
se $F_1 \subset F_2$,

$$2) \text{Area}(F_1 \cup F_2) = \text{Area}(F_1) + \text{Area}(F_2)$$

se $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ (mais geralmente, se $F_1 \cap F_2 = \partial F_1 \cap \partial F_2$), bem como do fato de que duas FGP que diferem por uma rotação ou translação tem a mesma área, podemos definir sem grandes dificuldades a área de um triângulo qualquer e, como corolário, definir área de uma região poligonal usando triangularizações de tais regiões, bem como obter as conhecidas fórmulas para as áreas de diversas regiões poligonais.

Chamamos a atenção que a obtenção destas fórmulas, bem como da própria definição de área de uma região poligonal, é uma tarefa não trivial matematicamente falando, que envolve questões sutis de aproximação, comensurabilidade de medidas, existência de triangularizações de regiões poligonais. Embora este seja um tema muito importante que deve ser abordado em cursos de Licenciatura em Matemática, não o trataremos neste texto. A razão é que queremos dar ênfase e prioridade a questões envolvendo os conceitos de área e perímetro de uma FGP, principalmente de perímetro, que são igualmente importantes mas bastante mais complicados de serem tratados do ponto de vista da Matemática.

Seja F uma FGP. Uma *aproximação* (por regiões poligonais) de F consiste em uma região poligonal inteiramente contida em F



Aproximação por região poligonal

Como existem quadrados contidos F (o que é uma consequência da condição que define o interior de F) decorre que o conjunto

$$Z = \{\text{Area}(R) \mid R \text{ é uma aproximação de } F\} \quad (1)$$

é não vazio e, pela observação anterior, limitado superiormente. É natural então definir a área de F como

$$\text{Area}(F) = \sup Z,$$

ou seja, o supremo do conjunto Z .

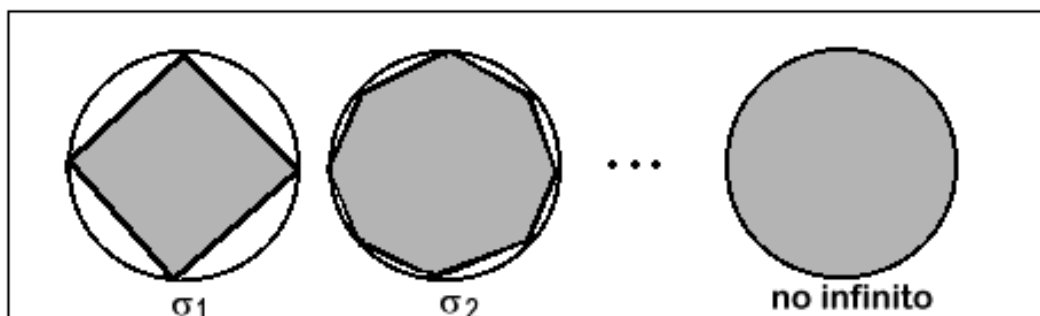
Observação. As noções de supremo e de ínfimo de um subconjunto de números reais são estudadas nos cursos de Análise Real. No Apêndice, Seção 10 ao final deste texto, fazemos uma breve mais completa, para os objetivos deste texto, introdução a este assunto.

4 A área de um círculo (o número π).

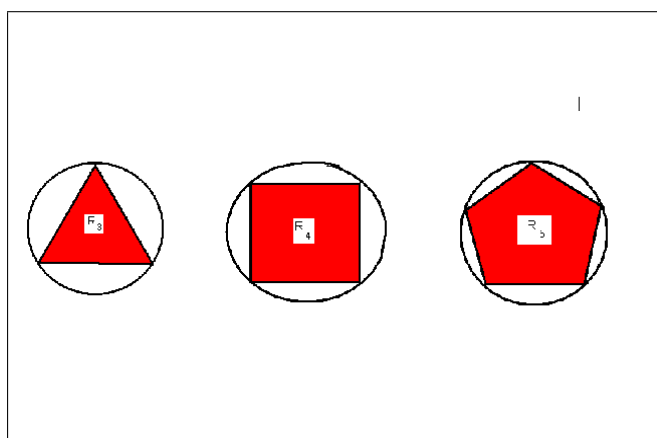
O cálculo da área de uma figura F que não é poligonal necessariamente envolve um processo de limite, a saber, sequências de aproximações ou de regiões poligonais cujas áreas convergem para o supremo de Z (conforme (1)). A possibilidade de se obter assim uma fórmula explícita da área de F vai depender fortemente de como é dado o contorno ∂F de F (por exemplo, das equações que descrevem ∂F , se ∂F for descrito por equações) e, algumas vezes, requer ferramentas do Cálculo Integral. Contudo, em alguns casos particulares muito importantes, como no caso de círculos, anéis, ou setores dos

mesmos, bem como de setores cônicos (elípticos, parabólicos, hiperbólicos) é possível obtermos fórmulas explícitas para a área em termos de “invariantes” destas figuras geométricas (por exemplo, do raio no caso do círculos, dos eixos menor e maior no caso elipses) usando argumentos bem mais simples e diretos. Veremos um pouco deste assunto nesta seção, começando pelo caso do círculo.

Uma conhecida (e natural) maneira de calcular a área de um círculo é tomando as áreas σ_1, σ_2 etc de regiões poligonais regulares inscritas no círculo e calculando o limite das áreas destas regiões.



Veamos isto em detalhes. Seja D_r um círculo fechado no plano de raio $r > 0$ (usamos a notação D_r pois em nos cursos de graduação círculos são denominados de discos. Além disso, reservamos a notação C_r para a circunferência de raio r). Dado n , seja R_n a região poligonal regular de n lados inscrita em D_r :



Parece evidente que

$$A(D_r) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n).$$

Mas é interessante analisarmos este limite analiticamente. Seja l_n o comprimento do lado de R_n . Então é fácil de ver que

$$A(R_n) = \frac{nl_n a_n}{2},$$

onde a_n é a apótema do polígono R_n . Observamos que $a_n \rightarrow r$ quando $n \rightarrow \infty$. Isto é claro e não precisamos nos preocupar em dar uma prova. Examinemos agora o produto nl_n . Note que ele é precisamente o comprimento $C(p_n)$ da curva poligonal p_n que é o contorno de R_n . Uma rápida olhada já deixa claro que o valor nl_n apresenta uma dificuldade de ser diretamente avaliado quando $n \rightarrow \infty$. Com efeito: ele é o produto de dois números com o primeiro - n - crescendo arbitrariamente e o segundo - l_n - diminuindo arbitrariamente à medida que o primeiro cresce. Fica assim impossível, na ausência de uma relação mais explícita entre l_n e n , termos uma idéia do que vai acontecer com o produto nl_n quando n for para o infinito (isto em Matemática constitui, como bem se conhece, uma **indeterminação**), e portanto, estritamente falando, não podemos ainda afirmar que o limite acima de fato existe! Em particular, não temos como garantir, usando esta argumentação puramente analítica, que existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n)$.

Exercise 1 *O fato de não sabermos o que acontece com o produto nl_n quando n cresce, não podendo em particular concluir que o mesmo se mantém menor que um certo valor, visto de um ponto de vista estritamente analítico, decorre, como observamos acima, de não sabermos qual a dependência de l_n em termos de n . Sabemos que l_n decresce quando n cresce, ou seja, sabemos que l_n é uma grandeza que varia inversamente com n ; mas não sabemos - e isto é importante! - com que magnitude.*

Para esclarecer melhor este ponto, analise o que acontece com o produto nl_n nos seguintes casos:

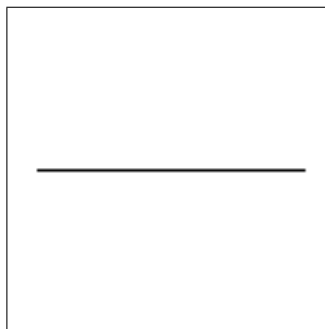
- a) l_n é inversamente proporcional ao quadrado de n
- b) l_n é inversamente proporcional à raiz quadrada de n
- c) l_n é inversamente proporcional a n

O exercício anterior mostra um caso em que $nl_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Como este exemplo é aparentemente construído “artificialmente” através

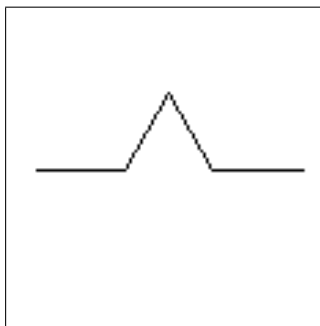
de especial escolhas de fórmulas analíticas para l_n (a saber, $l_n = \alpha/n^2$, $l_n = \alpha/\sqrt{n}$ e $l_n = \alpha/n$), poder-se-ia pensar que quando nl_n representa o comprimento de uma poligonal que faz parte de uma sequência de poligonais todas contidas em uma mesma região limitada do plano, como as que estamos acima considerando, não se poder ter $nl_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Contudo, mesmo nesta situação, ou seja, em que as poligonais estão restritas a uma região limitada do plano, não podemos garantir a “finitude” de nl_n , como mostra-se no exemplo que segue:

Example 2 *Construímos uma sequência K_n de poligonais contidas todas em um quadrado de lado de comprimento 1 do plano como se segue:*

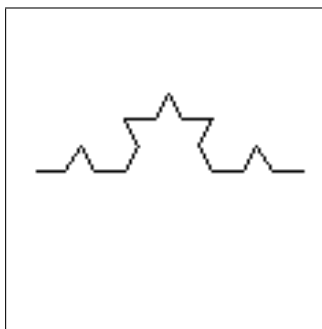
1) K_1 : segmento de reta



2) K_2 : dividimos p_1 em três segmentos de igual comprimento e substituímos o do meio, digamos S , por dois segmentos S_1 e S_2 tais que S , S_1 e S_2 formem um triângulo equilátero



3) K_3 : repetimos os procedimentos 1) e 2) em cada um dos 4 segmentos de reta de p_2 :



Vamos calcular o limite do comprimento $C(K_m)$ da poligonal K_m . Vamos assumir que

$$C(K_1) = |K_1| = 1.$$

Note que quando aplicamos a construção acima a K_m , cada lado de K_m origina 4 lados da poligonal K_{m+1} . Portanto, se n_m é o número de lados de K_m , temos $n_{m+1} = 4n_m$ de modo que

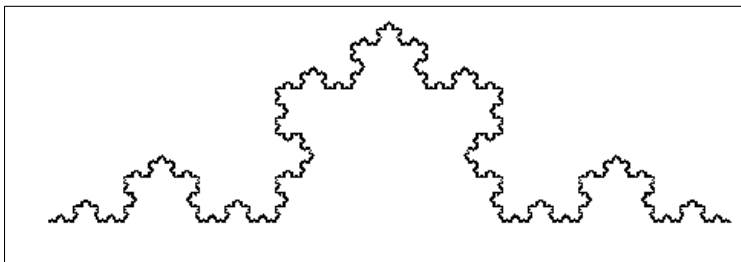
$$n_{m+1} = 4n_m = 4^2 n_{m-1} = \dots = 4^m n_1 = 4^m.$$

Além disso, se cada lado de K_m é l_m , então $l_{m+1} = l_m/3$ de modo que $l_{m+1} = 1/3^m$. Segue-se que

$$C(K_m) = n_m l_m = 4^m \frac{1}{3^m} = \left(\frac{4}{3}\right)^m$$

donde podemos concluir que $\lim_m C(K_m) = \infty$.

Observação. Na Seção 8 vamos provar que estas poligonais K_m tendem ao contorno de uma bem determinada FGP. Este contorno, denotada por K , é dita **curva de Koch**³, cujo aparência (bastante aumentada) é algo do tipo:



A aparência aproximada da Curva de Koch

³O nome Koch deve-se ao matemático sueco Niels Fabian Helge von Koch (25/01/1870 – 11/03/1924) que construiu esta curva em um artigo de 1904 intitulado “Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire” (Arkiv für Matematik 1 (1904) 681-704)

A curva K descrita no exercício acima é o que se chama em linguagem mais moderna de um **fractal**. A razão desta denominação é que K não tem dimensão 1 (isto é, a dimensão da reta, ou, mais geralmente, de uma curva, tipo a circunferência) nem dimensão 2 (isto é, a dimensão de um plano ou de uma superfície, tipo a esfera); a dimensão de K é um número maior do que 1 e menor do que 2, não sendo portanto um inteiro (daí a nomenclatura *dimensão fractal* - dimensão fracionária). Este fato também mostra que o termo “curva” de Koch não é apropriado, pois, como havíamos dito antes, curva designa conjuntos unidimensionais. No entanto, na falta de uma terminologia mais adequada, usa-se esta. Adiante vamos retomar este exemplo da curva de Koch e calcular explicitamente a dimensão desta curva o que, esperamos, propicie uma explicação convincente deste fenômeno.

O exercício anterior nos faz ser cautelosos quanto ao que acontece com o produto nl_n quando $n \rightarrow \infty$. De fato, não há nenhuma regra geral que nos permita dizer o que acontece com o produto de uma grandeza que se torna arbitrariamente grande por outra grandeza que se torna arbitrariamente pequena. A curva de Koch passou por uma indeterminação que afinal se revelou valer infinito. No nosso caso, contudo, podemos nos valer da propriedade da monotonicidade da área, como utilizado antes para definir a área de uma FGP como supremo da área de regiões poligonais que aproximam a figura, para facilmente provar que $A(R_n)$ (e, em decorrência nl_n) permanece limitado quando $n \rightarrow \infty$ (adiante, na Seção 6.2, quando estivermos estudando o comprimento de arcos de círculos, provaremos isso usando apenas resultados de trigonometria euclidiana, ou seja, sem usar áreas). Com efeito, basta atentarmos que tomando qualquer região poligonal R contendo D_r , temos $A(R_n) \leq A(R)$. Em particular, se Q denota o quadrado de lado $2r$ circunscrito a D_r , então

$$A(R_n) \leq A(Q) = 4r^2. \quad (2)$$

Note que esta limitação das áreas dos R_n é uma condição necessária, óbvia, para a existência do limite $\lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n)$. Mas não é suficiente, pois uma seqüência de números reais positivos, mesmo limitada, pode não ter limite:

Exercise 3 -

Seja

$$A_n = 2 + \frac{n}{(-1)^{n+1}n + 1}.$$

i) Prove que $0 < A_n < 3$ para todo n .

ii) Mostre que se n é um número natural **par** muito grande então A_n está próximo de 1, e se n é **ímpar** e muito grande, então A_n está próximo de 3. Em particular, conclua que não existe $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Observamos que a monotonicidade da área nos faz pensar que, embora ainda não tenhamos provado a existência do limite $\lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n)$, se ele existir, então ele deve ser maior do que $A(R_n)$, para todo n .

Exercise 4 Observe que isto seria obviamente o caso se soubéssemos que $A(R_n)$ cresce com n . Embora isto seja verdadeiro, não é fácil de provar. Se o leitor não acredita, deixamos aqui a sugestão de fazer a prova.

Vamos agora provar por completo que $A(D_r) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n)$. Observe que se P_m , $m \in \mathbb{N}$, é uma região poligonal regular qualquer de m lados circunscrita a D_r então, da definição de supremo, tem-se $A(D_r) \leq A(P_m)$. Como $A(R_n) \leq A(D_r)$ temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq A(D_r) - A(R_n) \leq A(P_n) - A(R_n) \quad (3)$$

Podemos ver que

$$A(P_n) = \frac{nr^2 l_n}{2a_n}. \quad (4)$$

De fato, sendo s_n o comprimento do lado de P_n , temos $A(P_n) = (ns_n r) / 2$. Mas, usando semelhança de triângulos, temos

$$\frac{s_n/2}{r} = \frac{l_n/2}{a_n} \Rightarrow s_n = \frac{r l_n}{a_n}$$

o que prova (4). Desta fórmula concluímos que

$$\begin{aligned} A(P_n) - A(R_n) &= \frac{nr^2 l_n}{2a_n} - \frac{na_n l_n}{2} \\ &= \frac{nl_n}{2} \left(\frac{r^2 - a_n^2}{a_n} \right) \\ &= A(R_n) \left(\frac{r^2 - a_n^2}{a_n} \right) \leq A(D_r) \left(\frac{r^2 - a_n^2}{a_n} \right) \end{aligned}$$

o que deixa claro que $A(P_n) - A(R_n)$ tende a zero quando $n \rightarrow \infty$. Segue de (3) que $A(D_r) - A(R_n)$ tende a zero o que garante que $A(D_r) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n)$.

Com o que vimos até agora, podemos provar o seguinte resultado que dá um fechamento ao estudo da área de um círculo:

Theorem 5 *Seja D_r um círculo fechado de raio r do plano euclidiano. Então*

a)

$$A(D_r) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(S_n)$$

onde S_n é uma região poligonal regular de n lados circunscrita em D_r

b)

$$A(D_r) = \inf\{A(S) \mid S \text{ é uma região poligonal circunscrita em } D_r\}$$

Proof. a) Primeiro observamos que $A(S_n) \geq A(D_r)$ para todo n . De fato: se $A(S_n) < A(D_r)$ para algum n então, como $\lim_{m \rightarrow \infty} A(R_m) = A(D_r)$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A(R_m) > A(S_n)$, o que é absurdo pois R_m e S_n são regiões poligonais com $R_m \subset S_n$. Assim temos:

$$0 < A(S_n) - A(D_r) < A(S_n) - A(R_m).$$

Como recém provamos acima, $A(S_n) - A(R_m) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Segue então que $A(D_r) = \lim_n A(S_n)$.

b) Observemos primeiro que $A(D_r)$ é uma cota superior de

$$\mathcal{P} := \{A(R) \mid R \text{ é uma região poligonal inscrita em } D_r\}.$$

De fato: seja P_n uma região poligonal de n lados que circunscribe D_r . Então, dada uma região poligonal qualquer $R \subset D_r$ temos $R \subset P_n$ de modo que

$$A(R) \leq A(P_n).$$

Como esta desigualdade vale para qualquer n , podemos tomar o limite para $n \rightarrow \infty$ para obter

$$A(R) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A(P_n) = A(D_r),$$

o que prova que $A(D_r)$ é uma cota superior de \mathcal{P} . Além disso, sendo P_n uma região de n lados inscrita em D_r temos $A(D_r) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(P_n)$. Como $A(P_n) \in \mathcal{P}$, a prova agora decorre de propriedades do supremo e ínfimo de um conjunto. ■

Exercise 6 *Prove, usando as contas obtidas até agora, que*

$$\sqrt{3}r < nl_n < 8r.$$

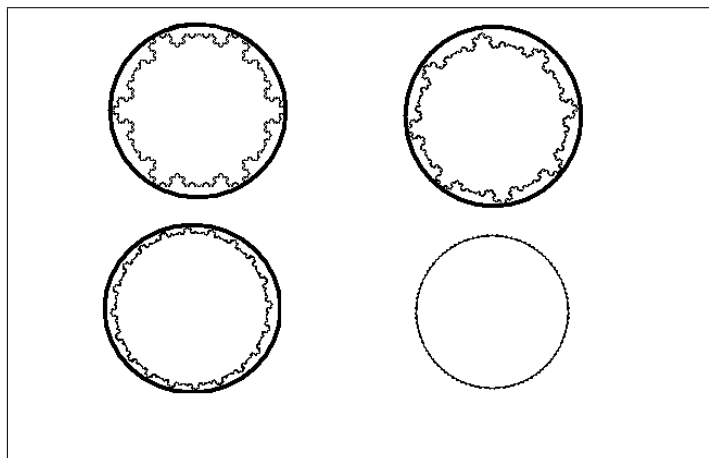
Exercise 7 Sendo A_n a seqüência do Exercício (3), verifique que $3 = \sup\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ não é 3.

No “círculo” de idéias discutido acima, é oportuno refletir sobre o que tras à tona o seguinte exercício:

Exercise 8 Seja P_n uma poligonal regular de n lados inscrita em D . Em cada lado l_i da poligonal P_n , $i = 1, \dots, n$, podemos construir uma curva de Koch K_i como fizemos no Exemplo 2 (neste exemplo da curva de Koch, partimos de um segmento unitário, mas note que o fato do segmento inicial ser ou não unitário em nada afeta a constuição geométrica utilizada para construir a curva de Koch). Seja $K_{i,m}$ a m -ésima linha poligonal utilizada para construir a curva K_i como no Exemplo 2 (ou seja, na notação deste exemplo, teríamos “ $K_{i,m} = K_m$ ”). Então

$$q_n = \bigcup_{i=1}^n K_{i,n}$$

é uma linha poligonal, fronteira de uma região poligonal S_n que se aproxima de D_r à medida que n cresce. Observe a figura:



Explique por que neste exemplo, apesar de se ter $\lim_{n \rightarrow \infty} (nl_n) = \infty$, não há contradição com o fato de $A(D_r) < \infty$.

Vamos no segue dar uma definição do número mais importante da Matemática, o número π e, com ele, obter a conhecida fórmula πr^2 da área de um círculo de raio r . Adiante daremos a definição mais comum de π , usando comprimentos, e veremos que elas são equivalentes.

Definition 9 (Primeira definição do número π) *Seja D_1 um círculo de raio 1. Então*

$$\pi := A(D_1).$$

Vamos provar no que segue que se D_r é um círculo de raio r então $A(D_r) = \pi r^2$. Para isso, precisamos de alguns fatos preliminares.

É conveniente agora usar um modelo explícito para \mathbb{E} . Existem infinitos modelos. O mais comum é o estudado na Geometria Analítica plana, $\mathbb{E} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Desta forma dotamos \mathbb{E} de uma sistema x, y de coordenadas. Usaremos as seguintes notações que devem ser familiares ao leitor.

Dados ponto $A, B \in \mathbb{E}$ o segmento de reta de extremos A e B é denotado por AB . O comprimento deste segmento é denotado por $|AB|$. Este comprimento mede também a *distância* entre A e B , que denotamos por $d(A, B)$. Em coordenadas, se $A = (x, y)$ e $B = (z, w)$ então

$$d(A, B) = \sqrt{(x - z)^2 + (y - w)^2}.$$

Definition 10 (subconjuntos homotéticos ou semelhantes) *Dados um subconjunto $R \subset \mathbb{E}$ e $r > 0$, define rR por*

$$rR = \{rp \mid p \in R\}.$$

Em coordenadas:

$$rR = \{(rx, ry) \mid (x, y) \in R\}.$$

Dizemos que rR e R são subconjuntos homotéticas ou semelhantes por um fator r .

Exercise 11 *Prove que*

$$d(rA, rB) = rd(A, B),$$

onde $A, B \in \mathbb{E}$ e $r > 0$.

Note que se S é um segmento de reta de extremos A e B então rS é um segmento de reta de extremos rA e rB . Portanto

$$|rS| = d(rA, rB) = rd(A, B) = r|S|.$$

Daí decorre que se T é um triângulo de vértices A, B e C e lados a, b e c então rT é um triângulo de vértices rA, rB e rC e lados ra, rb e rc . Além disso, se a altura h de T em relação ao vértice A é a medida do segmento AD , onde D é um ponto da reta passando por B e C , a altura h' de rT em relação ao vértice rA é a medida do segmento de vértices rA e rD , de modo que $h' = rh$. Com essas observações, podemos provar:

Lemma 12 *Sejam T um triângulo e $r > 0$. Então*

$$A(rT) = r^2 A(T).$$

Proof. Sejam b e h base e altura de T . Então rb e rh são base e altura de rT de modo que

$$A(rT) = \frac{(rb)(rh)}{2} = r^2 \frac{bh}{2} = r^2 A(T).$$

■

Theorem 13 *Seja R uma região poligonal. Então $A(rR) = r^2 A(R)$*

Proof. Se T_1, \dots, T_n é uma triangulação de R então rT_1, \dots, rT_n é uma triangulação de rR donde segue que

$$\begin{aligned} A(rR) &= A(rT_1) + \dots + A(rT_n) \\ &= r^2(A(T_1) + \dots + A(T_n)) = r^2 A(R). \end{aligned}$$

■

Lemma 14 *Seja D_r um círculo fechado de raio $r > 0$ centrado na origem. Então*

$$D_r = rD_1.$$

Proof. Temos

$$\begin{aligned} D_r &= \{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Usando as representações $x' = x/r$ e $y' = y/r$ decorre que $x = rx'$, $y = ry'$ de modo que podemos reescrever D_r como

$$\begin{aligned} D_r &= \{(rx', ry') \in \mathbb{R}^2 \mid x'^2 + y'^2 \leq 1\} \\ &= \{r(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid x'^2 + y'^2 \leq 1\} \\ &= r \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid x'^2 + y'^2 \leq 1\} = rD_1 \end{aligned}$$

■

Theorem 15 *Sejam D_r um círculo fechado e $r > 0$. Então*

$$A(D_r) = \pi r^2.$$

Proof. Podemos supor, sem perda de generalidade, que D_r tenha seu centro na origem. Seja R_n uma região poligonal de n lados inscrita D_1 . Então claramente rR_n é uma poligonal de n lados inscrita em rD_1 . Mas do Lema 14, $rD_1 = D_r$. Logo, pelo que vimos sobre a área de um círculo e do Teorema 13

$$A(D_r) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(rR_n) = r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n) = r^2 A(D_1) = \pi r^2.$$

■

5 Áreas de regiões elípticas e de setores parabólicos.

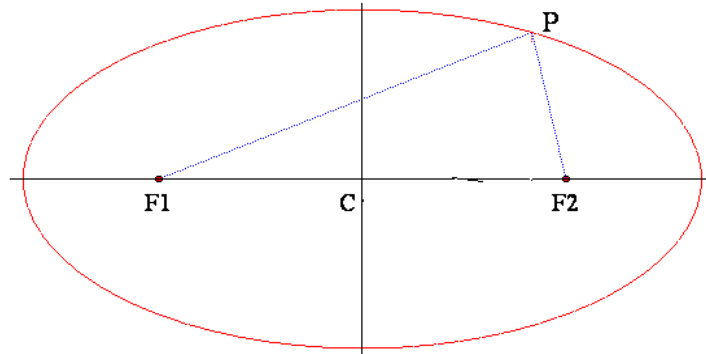
Obs: esta seção está escrita de forma muito preliminar

Lembramos que uma elipse ε é o lugar geométrico dos pontos p do planos euclidiano que satisfazem uma equação do tipo

$$d(p, F_1) + d(p, F_2) = 2a$$

onde $a > 0$ é uma constante e F_1, F_2 pontos fixos do plano e sendo $d(p, F_i)$ à

distância entre os pontos p e F_i , $i = 1, 2$.



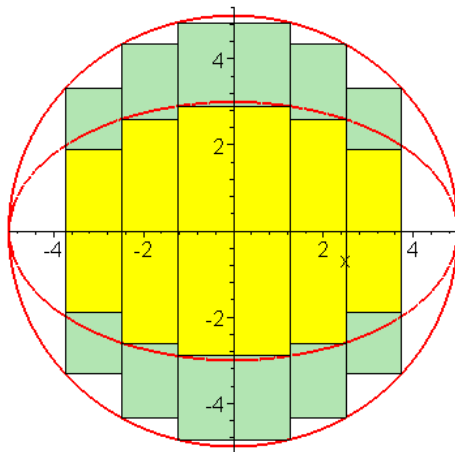
Os pontos F_1 e F_2 são ditos os *focos* de ε . A intersecção de ε com a reta passando pelos focos determina um segmento cuja medida é dita o *eixo maior* de ε . O ponto médio C do segmento F_1F_2 é dito *centro* de ε . A medida do segmento determinado pela intersecção de ε com a reta perpendicular à reta contendo os focos e passando por C é dita o *eixo menor* de ε . Não só a prova como as figuras do teorema seguinte foram retiradas do site site: <http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/precalculo/geo2.htm>.

Theorem 16 *Seja E a região cuja fronteira é uma elipse ε de eixo maior a e eixo menor b . Então*

$$A(E) = \frac{\pi ab}{4}. \quad (5)$$

Proof. Sejam C o centro de ε e D o círculo com centro em C e cujo diâmetro é o eixo maior de ε . Assim, c “circunscribe” ε . Consideremos uma exaustão R_n de D por retângulos e seja S_n uma correspondente exaustão de E por

retângulos contidos nos retângulos de R_n , conforme indicado na figura:



Então

$$A(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n)$$

e

$$A(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(S_n).$$

Vamos agora provar que

$$\frac{A(R_n)}{A(S_n)} = \frac{a}{b}$$

do que segue que

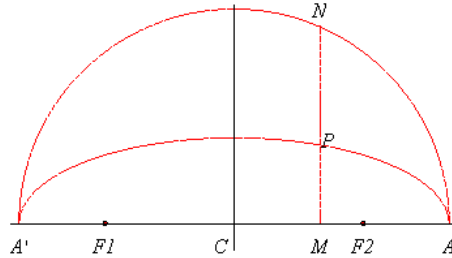
$$A(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n) = \frac{a}{b} A(E),$$

ou seja

$$\frac{\pi a^2}{4} = \frac{a}{b} A(E)$$

o que prova 5. Basta notar que

$$\frac{NM}{PM} = \frac{a}{b}$$



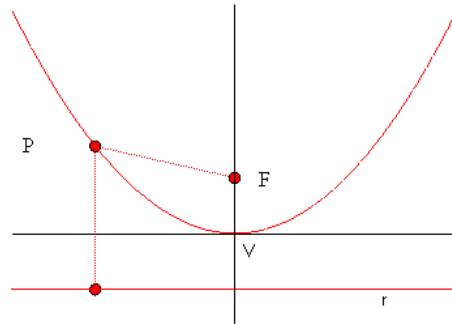
pois então

$$A(\text{ret}_D) = NM \times l = \left(\frac{a}{b}PM\right) \times l = \frac{a}{b}PM \times l = \frac{a}{b}A(\text{ret}_E).$$

■

Uma parábola \mathcal{P} com foco F e reta diretriz r é o lugar geométrico dos pontos p do plano cuja distância à F é a mesma à r :

$$d(p, F) = d(p, r)$$



É fácil de ver que \mathcal{P} intercepta a reta passando por F e perpendicular a r em um ponto V dito vértice de \mathcal{P} . A distância entre F e V , ou seja, a meia distância entre F e r é dita a *distância focal* de \mathcal{P} .

É conveniente ter a descrição de uma parábola em um sistema cartesiano de coordenadas. Fazemos isto na proposição que segue:

Proposition 17 *Seja \mathcal{P} uma parábola com foco F e vértice V . Seja $a = d(F, V)$ a distância focal de \mathcal{P} . Considere o sistema cartesiano de eixos cuja origem é V e cujo eixo das ordenadas é a reta determinada por F e V . Então (a menos de uma escolha conveniente de orientações dos eixos coordenados), \mathcal{P} é dado por*

$$\mathcal{P} = \left\{ \left(x, \frac{x^2}{4a} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Proof. É claro que uma reta vertical não pode encontrar \mathcal{P} em dois pontos distintos, de modo que \mathcal{P} é o gráfico de alguma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja

$$\mathcal{P} = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Temos

$$d^2((x, f(x)), (0, a)) = d^2((x, f(x)), r). \quad (6)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} d^2((x, f(x)), (0, a)) &= x^2 + (f(x) - a)^2 \\ d^2((x, f(x)), r) &= (f(x) + a)^2 \end{aligned}$$

de modo que de (6) obtemos, após simplificações,

$$f(x) = \frac{x^2}{4a}.$$

■

Um tronco \mathcal{P}_d de parábola de comprimento d é a região de \mathcal{P} compreendida entre V e uma reta s paralela à r a uma distância d de V .

Theorem 18 *Um tronco \mathcal{P}_d de parábola de comprimento d e distância focal a é*

$$A(\mathcal{P}_d) = \frac{8}{3}d\sqrt{ad} \quad (7)$$

Precisamos do seguinte resultado

Lemma 19 *A soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é dado pela fórmula*

$$1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Proof. Usar indução em n . ■

Prova do Teorema 18. Segue-se da Proposição 17 que podemos descrever \mathcal{P}_d em coordenadas por

$$\mathcal{P}_d = \left\{ \left(x, \frac{x^2}{4a} \right) \mid -2\sqrt{ad} \leq x \leq 2\sqrt{ad} \right\}.$$

Seja $l = 2\sqrt{ad}$. Dado $n \in \mathbb{N}$ dividimos o intervalo $[0, l]$ em n subintervalos de comprimento l/n , a saber

$$\left[0, \frac{l}{n} \right], \left[\frac{l}{n}, \frac{2l}{n} \right], \dots, \left[\frac{(j-1)l}{n}, \frac{jl}{n} \right], \dots, \left[\frac{(n-1)l}{n}, l \right]$$

Seja $R_{n,j}$ o retângulo de base

$$\left[\frac{(j-1)l}{n}, \frac{jl}{n} \right]$$

e altura

$$f\left(\frac{jl}{n}\right) = \frac{j^2 l^2}{4an^2}.$$

Seja

$$R_n = R_{n,1} \cup \dots \cup R_{n,n-1}$$

Então R_n é uma exaustão de metade de \mathcal{P}_d de modo que

$$A(\mathcal{P}_d) = 2 \lim A(R_n).$$

Temos

$$\begin{aligned} A(R_n) &= \sum_{j=1}^{n-1} A(R_{n,j}) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{l}{n} \left(d - \frac{j^2 l^2}{4an^2} \right) \\ &= \frac{l}{n} \left(\sum_{j=1}^{n-1} d - \frac{l^2}{4an^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \right) \\ &= \frac{l(n-1)d}{n} - \frac{l^3}{4an^3} \frac{2(n-1)^3 + 3(n-1)^2 + n-1}{6} \\ &= ld \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{l^3}{24a} \left[2 \left(1 - \frac{1}{n} \right)^3 + 3 \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} \right] \end{aligned}$$

de modo que

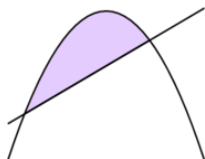
$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n) = ld - \frac{l^3}{12a} = \frac{4}{3}d\sqrt{ad}$$

e portanto

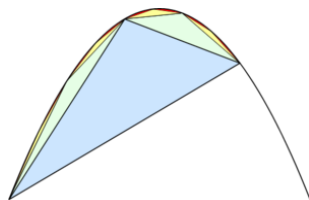
$$A(\mathcal{P}_d) = \frac{8}{3}d\sqrt{ad}$$

■

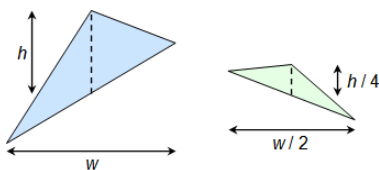
Exercise 20 (Retirado do site http://en.wikipedia.org/wiki/The_Quadrature_of_the_Parabola)
 Obtenha a fórmula (7) da **quadratura da parábola** obtido por Arquimedes em um texto constituído por 24 Proposições que culminam com a dita fórmula. O propósito é calcular a área A da figura hachurada:



Para isso utilize a exaustão:



e observe que

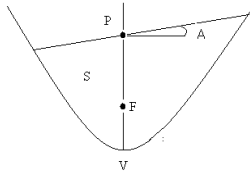


para concluir que

$$A = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right) A(T)$$

onde T é o triângulo azul inicial.

Exercise 21 *Generalize o Teorema 18 para um setor parabólico S como o da figura abaixo obtendo uma fórmula para área em termos de a (distância focal), d e do cosseno do ângulo α , sendo d a distância de P ao vértice V da parábola (use o mesmo tipo de construção do Teorema 18).*

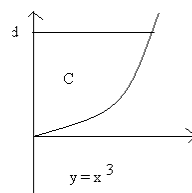
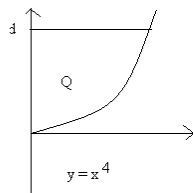


Exercise 22 *Prove por indução as fórmulas*

$$1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2}$$

$$1 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

e, usando o mesmo tipo de construção do Teorema 18, obtenha a área das regiões C e Q das figuras abaixo (as fórmulas vão depender apenas de d).



Outras leituras interessantes

O uso de planímetros para medir a área de uma região qualquer:

- <http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer/Planimeter/PLANIMETER.HTM>
- <http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer/Planimeter/HowPlanimetersWork.htm>

6 Perímetro: o comprimento de um contorno.

Toda a figura plana tem um contorno e faz sentido, há interesse, em medirmos a extensão, ou comprimento, deste contorno. O contorno de um círculo de raio r é uma circunferência C_r de raio r e todos conhecem a fórmula $2\pi r$ que nos dá o comprimento de C_r , ou o perímetro do círculo de raio r .

Queremos aqui definir precisamente o que é perímetro uma FGP qualquer e, em particular, explicar como se obtêm a fórmula acima para o comprimento da circunferência.

Uma experiência prática que dá uma ideia concreta do que vem a ser a extensão do contorno de uma figura plana F consiste em superpor sobre o contorno de F um cordão. O extensão do contorno é então o comprimento do segmento de reta obtido ao esticarmos o cordão (uma vez tenhamos fixado uma unidade de comprimento). Contudo, modelar matematicamente esta construção prática não parece ser possível. Mas, mais do que a dificuldade em si desta modelagem, é que podemos construir figuras matemáticas cujo contorno não admite ser coberto por um cordão de comprimento finito (são regiões com contorno muito rugoso e que, seja qual for o cordão que utilizemos para superpor sobre o contorno, ele vai ter que ter tantas dobras para cobrir o contorno que vai acabar por não ter comprimento suficiente para cobrir todo o contorno, seja qual for o comprimento do cordão. Estamos aqui supondo um cordão ideal, sem espessura, unidimensional).

Esta impossibilidade sugere que, diferentemente da noção de área, a noção de perímetro pode ser mais complicada. E da fato é: vamos ver a seguir que a procura do entendimento da noção de perímetro nos leva a um novo mundo da Matemática, que em parte solapa a noção intuitiva (e ingênua) que temos de medida. Este estudo nos leva a conceitos novos de Matemática que levam a diversos problemas de pesquisa, muitos deles ainda em aberto e sendo presentemente investigados.

Consideremos uma figura plana F com contorno $C = \partial F$. A ideia para definir e ao mesmo tempo determinar o perímetro de C é muito simples: construimos uma sequência de curva poligonais P_n de n lados, todos de mesmo comprimento, cujos vértices estão sobre C e tomamos o limite dos comprimentos das poligonais P_n quando n tende a infinito.

Para efeitos da facilidade de cálculos futuros, é conveniente reescrever esta definição de uma forma mais geral (aparentemente), como segue: para cada n construímos uma poligonal P_n de m_n lados (com m_n possivelmente

maior do que n), todos os lados de mesmo comprimento, e tomamos o limite do comprimento destas poligonais quando $n \rightarrow \infty$.

Vamos implementar este procedimento inicialmente no caso de circunferências.

6.1 O perímetro de um círculo. Primeira versão. Uma nova definição de π .

Seja C_r um círculo de raio r . Considerando linhas poligonais regulares r_n de n lados inscritas em C_r costuma-se definir o comprimento $C(C_r)$ como o limite $\lim_n C(r_n)$ dos comprimentos destas poligonais. O problema é provar que este limite de fato existe. Se l_n denota o comprimento do lado de r_n , então $C(r_n) = nl_n$. Com já havíamos discutido, o limite deste produto é uma indeterminação pois l_n tende a zero quando $n \rightarrow \infty$. Vamos num primeiro momento resolver esta indeterminação usando o que sabemos sobre área. Esta maneira será utilizada na determinação do perímetro de FGP “convexas por pedaços” (veja Seção 7). Pelo que conhecemos, isto não é o que é comumente utilizado para argumentar a favor da existência deste limite. Na seção seguinte apresentamos a maneira mais usual que, como veremos, é um pouco mais difícil mas, ainda sim, elementar.

Sendo a_n a apótema da região poligonal R_n que tem r_n como fronteira, temos

$$C(r_n) = nl_n = \frac{2}{a_n} \left(\frac{nl_n a_n}{2} \right) = \frac{2}{a_n} A(R_n).$$

Provamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n) = A(D_r) = \pi r^2.$$

Como $\lim_n a_n = r$ obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{a_n} A(R_n) \right] = 2 \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = 2 \frac{\pi r^2}{r} = 2\pi r.$$

Podemos resumir estas conclusões no seguinte resultado/definição:

Theorem 23 *Seja C_r e seja um círculo de raio r e seja r_n a linha poligonal regular de n lados inscrita em C_r . Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(r_n) = 2\pi r.$$

Definimos este limite como o comprimento de C_r que denotamos por $C(C_r)$. Portanto, o **comprimento de C_r** é o limite dos comprimentos das poligonais regulares inscritas em C_r quando o número de lados destas poligonais tende a infinito e vale

$$C(C_r) = 2\pi r.$$

Com isto podemos provar de imediato o seguinte conhecido resultado que nos dá uma segunda e mais popular definição de π :

Theorem 24 (Teorema e a definição usual de π) *O quociente entre o comprimento $C(C_r)$ de um círculo C_r de raio r pelo seu diâmetro d_r é constante, ou seja, não depende de r , e vale exatamente π .*

Proof.

$$\frac{C(C_r)}{d_r} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi.$$

■

De (11) decorre que π vale a metade do comprimento do círculo unitário,

$$\pi = \frac{C(c_1)}{2}.$$

Assim, temos neste momento quatro possíveis definições de π :

$$\pi = A(D_1)$$

$$\pi = \frac{A(D_r)}{r^2}$$

$$\pi = \frac{C(c_1)}{2}$$

$$\pi = \frac{C(C_r)}{2r}$$

Exercise 25 *Sejam*

$$X = \{C(p) \mid p \text{ é uma poligonal qualquer inscrita em } C_r\}$$

e

$$Y = \{C(p) \mid p \text{ é uma poligonal qualquer circunscrita em } C_r\}.$$

Prove que X é limitado superiormente, Y é limitado inferiormente e que

$$\sup X = \inf Y = 2\pi r.$$

6.2 O perímetro de um círculo. Segunda versão.

Nesta seção vamos tratar do problema da medida do contorno de um círculo utilizando argumentos que aparentemente foram os utilizados por Arquimedes, embora de maneira não completa pelo que conseguimos averiguar. Ela é mais difícil de justificar matematicamente, mas é a que é explorada (sem maiores justificativas pelo que se observa) nos cursos da EB.

Como antes, consideramos linhas poligonais regulares p_n de n lados inscritas em um círculo C_r de raio r e vamos provar, usando argumentos da Geometria Euclidiana, a existência do limite $\lim_n C(p_n)$.

Para isso, vamos de início provar a afirmação de Arquimedes, a saber, de que o comprimento de uma poligonal regular inscrita em um círculo é menor do que o comprimento de uma poligonal circunscrita neste círculo. Diretamente ligada a esta afirmação tem uma “tricky question”: curvas que estão próximas uma da outra tem comprimentos próximos?

O leitor é convidado a responder esta questão resolvendo o seguinte exercício:

Exercise 26 (o Teorema de Pitágoras revisitado) *Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo retângulo sendo c a hipotenusa. Então $c = a + b$.*

Prova. *Sejam A, B e C os vértices do triângulo e suponha que $|AB| = a$ $|BC| = b$. Sejam A_1 e B_1 e p_1 a poligonal formada pelos lados do triângulo de comprimento a ...*

O absurdo afirmado no exercício anterior mostra que calcular o comprimento de uma dada curva usando o limite do comprimento de poligonais que aproximam a curva pode não funcionar em geral. Um outro exemplo ainda mais contundente é o seguinte:

Exercise 27 *Seja S um segmento de reta. Construa uma seqüência de poligonais p_n que se aproximam indefinidamente de S à medida que $n \rightarrow \infty$ mas que $\lim_{n \rightarrow \infty} C(p_n) = \infty$.*

É interessante de observar que este é um fenômeno que ocorre com a medida de comprimento. Com a área isto não acontece:

Exercise 28 *Dizemos que uma seqüência R_n de FGP converge a uma FGP R , em símbolos,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = R$$

se, dados uma FGP U contida no interior de R e uma FGP V cujo interior contem R , existe um n_0 tal que

$$U \subset R_n \subset V$$

para todo $n \geq n_0$. Prove que se $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = R$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n) = A(R)$.

Voltemos agora à afirmação de Arquimedes. Começamos com uma definição, que se aplica ao caso mais geral de arcos de circunferência ao invés de toda a circunferência. Esta generalização vai ser útil quando formos definir o perímetro de FGP cujo contorno são “arcos convexos por partes”.

Definition 29 *Seja a um arco de círculo e p uma poligonal regular de lados S_1, \dots, S_n inscrita em a . Fixado i , sejam P_i e P_{i+1} os pontos extremos de S_i . Seja r_i a semi-reta com origem na origem do círculo que contem a e contendo P_i . Seja T_i o segmento de reta paralelo a S_i com extremos nas retas r_i e r_{i+1} , tangente a a . Então os segmentos de reta T_i formam uma poligonal aberta regular q dita **poligonal regular circunscrita** a a . Dizemos também que q é a poligonal regular circunscrita a a **determinada** por p .*

A figura abaixo ilustra o processo de construção de um dos lados da poligonal circunscrita. Alguns elementos que constam na figura serão utilizados na prova do Teorema 35.

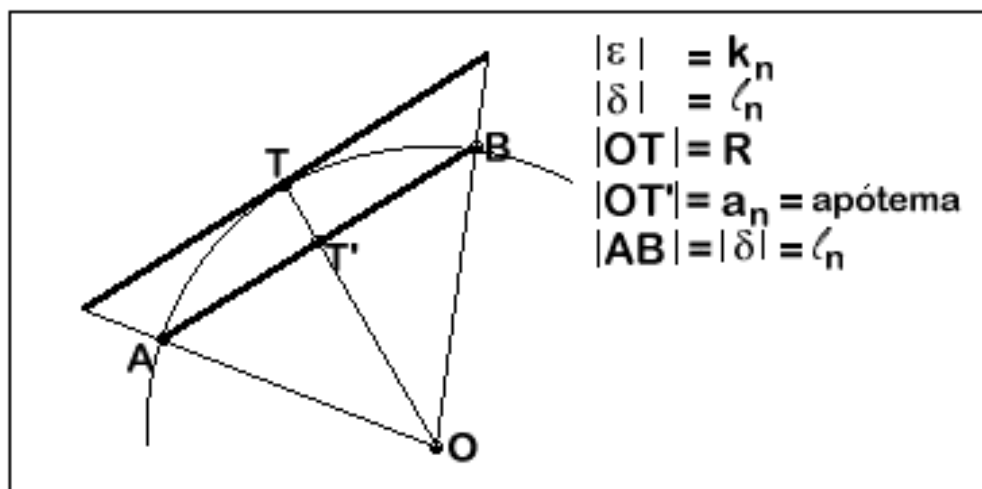


Figura 6.2

Passemos agora a provar a primeira parte da afirmação de Arquimedes, para o caso de arcos de circunferências. Começamos com um lema simples de Geometria Euclidiana, cuja prova deixamos como exercício:

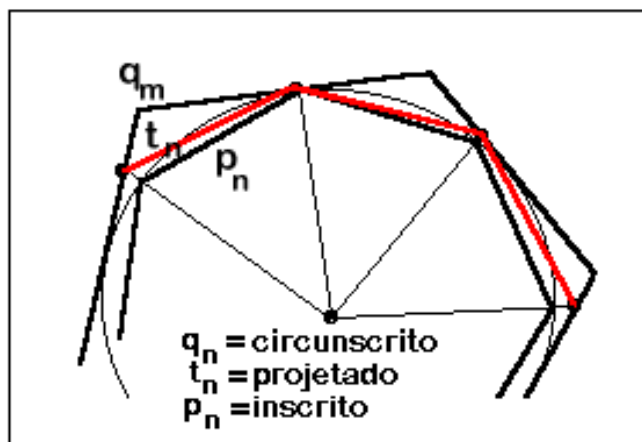
Lemma 30

Se em um triângulo ABC o ângulo \widehat{B} é obtuso então $|AB| < |AC|$, onde $|AB|$ e $|AC|$ denotam os comprimentos dos segmentos de reta AB e AC .

Lemma 31 -

O comprimento de qualquer poligonal regular inscrita a um arco de círculo de raio R é menor do que o comprimento de qualquer poligonal regular circunscrita ao mesmo. Precisamente: sejam p e q poligonais regulares inscrita e circunscrita, respectivamente, a um mesmo círculo de raio R . Então

$$C(p) < C(q).$$



Proof.

Projetando radialmente, a partir do centro do círculo, os vértices da poligonal p sobre a poligonal q obtemos uma nova poligonal t , não necessariamente regular, “inscrita em q ” (não necessariamente inscrita nem circunscrita ao círculo - veja a figura). Agora note que cada lado de p tem comprimento menor do que o correspondente lado de t , pelo Lema 30, e portanto $C(p) < C(t)$. Por sua vez, $C(t) \leq C(q)$, pois a medida de um lado de um triângulo é menor que a soma das medidas dos dois outros lados. Isto prova o lema. ■

Remark 32 - *Notamos que:*

1) o mesmo argumento permite usado na demonstração do Lema 31 permite provar que o comprimento de qualquer poligonal inscrita em \mathbf{a} é menor que o comprimento de qualquer poligonal convexa que contorna \mathbf{a} .

2) a hipótese “regular” não foi usada na demonstração acima. Este enfraquecimento de hipótese será útil para o que veremos adiante.

Corollary 33 -

Seja \mathbf{a}_R um arco de círculo de raio R e p uma poligonal regular qualquer inscrita em \mathbf{a}_R . Então

$$C(p) \leq 8R.$$

Proof. Podemos contornar \mathbf{a}_R com um quadrado de lado $2R$ e aplicar a observação anterior. ■

Exercise 34 -

Enuncie e prove um resultado análogo ao do Corolário anterior para poligonais regulares circunscritas, mostrando que o comprimento de qualquer poligonal circunscrita a um círculo de raio R é maior ou igual a $4R\sqrt{2}$.

O Corolário 33 é importante, uma vez que mostra que os produtos nl_n não podem crescer mais do que um certo valor. No entanto, como vimos no Exercício 3, tal limitação não garante de modo algum a existência de um valor para o limite nl_n para n indo ao infinito.

Vamos agora fazer uso do Lema 31 para provar a existência de um limite para os comprimentos das poligonais inscritas a um círculo.

Theorem 35 Dado n , seja p_n a poligonal regular de n lados inscrita em \mathbf{a}_R . Então os comprimentos de $C(p_n)$ das poligonais p_n se aproximam de um valor $C(\mathbf{a}_R) > 0$ quando $n \rightarrow \infty$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(p_n) = C(\mathbf{a}_R). \quad (8)$$

Proof. Decorre do Corolário 33 que o conjunto numérico X formado pelos comprimentos das poligonais p_n , ou seja,

$$X = \{C(p_n) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

é um conjunto limitado superiormente e, portanto, tem um supremo. Definimos $C(\mathbf{a}_R)$ como este supremo:

$$C(\mathbf{a}_R) = \sup X.$$

Vamos agora provar que $C(p_n)$ se aproxima arbitrariamente de $C(\mathbf{a}_R)$ quando n vai para infinito. Para isso, consideremos a poligonal regular q_n circunscrita a \mathbf{a}_R determinada por p_n . Decorre do Lema 31 que $C(q_n)$, para qualquer n , é maior que o comprimento de *qualquer* poligonal regular inscrita em C_r . Segue-se que $C(q_n)$ é uma cota superior de X e, então, pela definição de supremo,

$$C(\mathbf{a}_R) = \sup X \leq C(q_n),$$

donde concluímos que

$$0 \leq C(\mathbf{a}_R) - C(p_n) \leq C(q_n) - C(p_n), \quad (9)$$

sendo tais desigualdades válidas para todo n . Sendo l_n o comprimento de um lado de p_n e k_n o comprimento de um lado de q_n , obtemos, por semelhança de triângulos,

$$\frac{k_n}{l_n} = \frac{R}{a_n},$$

onde a_n é a apótema da poligonal p_n (veja Fig 6.2), de modo que

$$\frac{C(q_n)}{C(p_n)} = \frac{nk_n}{nl_n} = \frac{k_n}{l_n} = \frac{R}{a_n}$$

e então, usando o Corolário 33,

$$C(q_n) - C(p_n) = \frac{R}{a_n}C(p_n) - C(p_n) = \left(\frac{R - a_n}{a_n}\right)C(p_n) \leq 8 \left(\frac{R - a_n}{a_n}\right)R.$$

Como a_n se aproxima arbitrariamente de R quando n cresce vemos que a diferença $R - a_n$ se aproxima arbitrariamente de zero, o que nos permite concluir que a diferença $C(q_n) - C(p_n)$ está tendendo a zero à medida que n cresce. Segue-se de (9) que a diferença $C(\mathbf{a}_R) - C(p_n)$ se aproxima de zero à medida que n cresce. Equivalentemente, obtemos que o comprimento $C(p_n)$ de p_n está se aproximando do valor $C(\mathbf{a}_R)$ à medida que n cresce. Em suma, provamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(p_n) = C(\mathbf{a}_R),$$

concluindo a prova do teorema. ■

Exercise 36 -

Prove que os comprimentos das poligonais regulares circunscritas a um círculo \mathbf{a}_R têm $C(\mathbf{a}_R)$ como limite à medida que n cresce.

Exercise 37 -

Seja l_n dada no Exercício 3, comprove que $\sup X = 3$, onde

$$X = \{nl_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

No entanto, diferentemente do que acontece na prova do Teorema 35, não vale que nl_n se aproxima arbitrariamente de $\sup X$ quando $n \rightarrow \infty$.

Exercise 38 Prove que os comprimentos das poligonais regulares circunscritas a um círculo C_r têm $C(C_r)$ como limite à medida que n cresce.

Demos acima uma nova prova de que os comprimentos das poligonais r_n inscritas em um círculo de raio r tem limite que denotamos por $C(C_r)$. Uma das propriedades fundamentais deste valor $C(C_r)$ é que o mesmo dividido pela medida do diâmetro de C_r não depende de r . Na Seção 6.1 provamos este fato usando a fórmula $C(C_r) = 2\pi r$ que por sua vez foi obtida através da fórmula de área $A(D_r) = \pi r^2$. A seguir re-provamos o Teorema 24 usando apenas a Trigonometria Euclidiana:

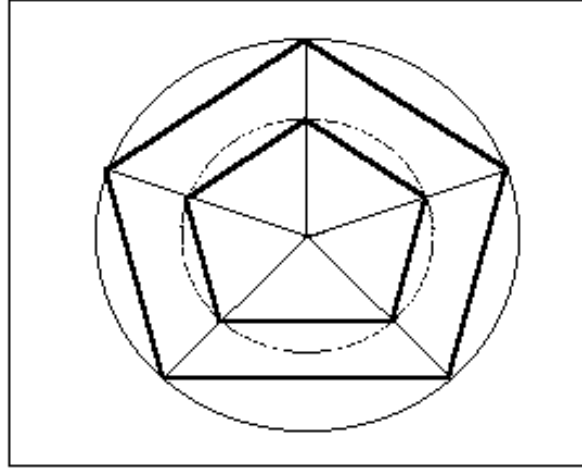
Theorem 39 -

Sejam C_{r_1} e C_{r_2} círculos de raios r_1 e r_2 . Então

$$\frac{C(C_{r_1})}{r_1} = \frac{C(C_{r_2})}{r_2}. \quad (10)$$

Em particular, é constante a razão entre o comprimento de um círculo qualquer e seu diâmetro.

Proof. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $r_1 < r_2$ e que C_{r_1} e C_{r_2} são concêntricos. Dado n , suponha que uma poligonal regular de n lados inscrita em C_{r_1} tenha lado com comprimento l_n . Afirmamos então que, projetando radialmente cada vértice desta poligonal sobre o arco C_{r_2} (acompanhe na figura abaixo, feita para $n = 5$),



geramos uma poligonal regular de n lados inscrita em C_{r_2} cujos lados têm comprimento que denotaremos por \tilde{l}_n que, pela semelhança de triângulos, é tal que

$$\tilde{l}_n = (r_2/r_1)l_n.$$

Segue-se que $l_n = (r_1/r_2)\tilde{l}_n$, decorrendo então de (35) que

$$C(c_{r_1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (nl_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r_1}{r_2} n\tilde{l}_n \right) = \frac{r_1}{r_2} \lim_{n \rightarrow \infty} (n\tilde{l}_n) = \frac{r_1}{r_2} C(c_{r_2}),$$

o que prova (10). ■

Seja C_r um círculo de raio r e c_1 um círculo unitário, e denotando por d_r o diâmetro de C_r então, do teorema anterior

$$\frac{C(C_r)}{d_r} = \frac{r C(c_1)}{2r} = \frac{C(c_1)}{2}. \quad (11)$$

Definindo este valor como π , obtemos a fórmula $C(C_r) = 2\pi r$. O que fizemos na Seção 6.1 nos garante que este π dado por (11) é o mesmo π definido nesta mencionada seção.

Exercise 40 -

Usando poligonais inscritas e circunscritas em um dado círculo, obtenha as seguintes estimativas de π :

$$3,1 < \pi < 3,2.$$

Exercise 41 Arquimedes fez uso da Proposição VI do Livro 3 dos Elementos para estimar π . Veja Exercício ??): olhar o site: <http://www.mathpages.com/home/kmath425/kmat>

Exercise 42 -

Num círculo de raio R , consideremos um arco a e sejam, respectivamente, c a medida da corda e θ a medida em graus (sexagesimais) do ângulo compreendido por tal arco.

Alguém afirmou que vale a fórmula:

$$\theta = \frac{c}{L(a)\sqrt{2}}$$

e nosso objetivo é mostrar a falsidade da mesma. Para tal:

a) No caso em que o arco é um semi-círculo, mostre que o valor do correspondente ângulo, segundo a fórmula dada, é de aproximadamente 26° . A partir disto, conclua a falsidade de tal fórmula.

b) Mostre que a afirmação implica que, ao menos para arcos menores do que um quadrante, vale $\theta < 0,707$. A partir disto, novamente, conclua a falsidade da fórmula dada.

c) No raciocínio do item anterior, bastou trabalharmos com arcos menores do que o quadrante. Contudo, é interessante responder a seguinte pergunta associada perifericamente: Qual o maior arco s_{\max} tal que, para todos $0 < s < s_{\max}$, vale, segundo a fórmula dada:

$$\theta < 0,707 ?$$

Se achar difícil encontrar o maior s_{\max} , encontre o maior que puder.

Exercise 43 -

Na situação do exercício anterior, além das variáveis s , c , θ , também podemos considerar r como variável. Temos, então, que $\theta = F(s, c, r)$ e o objetivo deste exercício é elucidar esta função.

a) É um teorema clássico da Geometria que podemos afirmar que $\theta = f_1(s, r)$. Pede-se a expressão analítica desta função quando θ for medido em radianos e em graus.

b) Exiba algum argumento geométrico demonstrando que podemos afirmar que θ é uma função $f_2(s, c)$.

c) Podemos dizer que o exercício anterior consistiu em provar que a relação $\theta = c/s\sqrt{2}$ não é uma expressão analítica para a função $\theta = f_2(s, c)$. Usando

raciocínios trigonométricos, mostre que podemos escrever:

$$\frac{s}{c} = \frac{\text{sen}(\theta/2)}{\theta/2}.$$

d) Na relação acima, apareceu a função

$$x \mapsto \frac{\text{sen } x}{x},$$

a qual é freqüentemente encontrada em Engenharia, e costumamos denotá-la por senc . Pede-se estudar o gráfico de $y = \text{senc}(x)$, especialmente no que toca a sua inversibilidade.

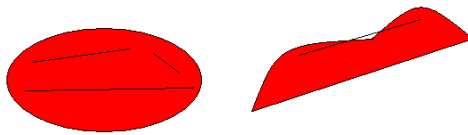
e) Conclua que, para c e s adequados, podemos escrever:

$$\theta = 2\text{senc}^{-1}\left(\frac{c}{s}\right)$$

7 Perímetro de FGP convexas.

Vamos nesta seção imitar a técnica que empregamos para determinar o perímetro de arcos de circunferências para definir (e eventualmente determinar) o perímetro de contornos de figuras convexas.

Uma FGP F de \mathbb{E} é dita convexa se dados dois pontos quaisquer P, Q de \mathbb{E} , se $P, Q \in F$ então $PQ \subset F$ sendo, como antes, PQ o segmento de reta de extremos P e Q .



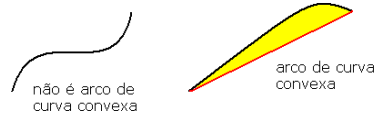
Definition 44 *Um subconjunto $\gamma \subset \mathbb{E}$ é dito um contorno convexo se existe uma região convexa limitada U tal que*

$$\gamma = \partial U.$$

Um subconjunto $\gamma \subset \mathbb{E}$ é dito um arco convexo de extremos P e Q se existe uma região convexa limitada U tal que

$$\gamma \cup PQ = \partial U,$$

onde PQ é o segmento de reta de extremos P e Q . Em outras palavras, um arco convexo é um “arco do contorno” de uma FGP convexa.



Vamos considerar no que segue apenas arcos de curvas convexas. Os resultados se estendem de maneira imediata a curvas convexas fechadas.

Definition 45 Seja γ um arco convexo. Dizemos que uma poligonal p é inscrita a γ se os pontos extremos de γ coincidem com os pontos extremos de p e se os vértices de p estão em γ .

Vamos provar e definir:

Theorem 46 Seja γ um arco convexo. Então

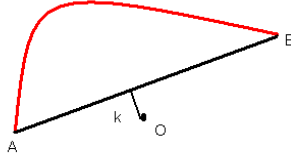
$$X = \{C(p) \mid p \text{ é uma poligonal inscrita em } \gamma\}$$

é limitado superiormente e seu supremo é definido como o **comprimento** $C(\gamma)$ de γ .

Proof. Sejam A e B os pontos extremos de γ , seja O um ponto “um pouco abaixo” de AB e seja

$$k = \min \{d(O, x) \mid x \in AB\}.$$

Veja figura:



Suponha que

$$\gamma \cup AB = \partial U$$

onde U é uma região convexa. Seja p uma poligonal qualquer inscrita em γ que não o próprio segmento AB (veja Exercício 47). Sejam $A = A_1, \dots, A_{n+1} = B$ os vértices desta poligonal. Seja $l_i = |A_i A_{i+1}|$, $i = 1, \dots, n$. Então

$$C(p) = l_1 + \dots + l_n.$$

Seja R_p a região poligonal dada pela união dos triângulos $T_i := \Delta A_i O A_{i+1}$:

$$R_p = T_1 \cup \dots \cup T_n.$$

Seja $T = \Delta AOB$. Então, da convexidade de U , decorre que $R_p \subset U \cup T$ de modo que

$$A(R_p) \leq A(U \cup T). \quad (12)$$

Daí, sendo h_i a altura do triângulo T_i em relação ao lado $A_i A_{i+1}$ temos

$$A(T_i) = \frac{l_i h_i}{2}.$$

Mas a altura h_i é dada pela distância de um ponto na reta determinada pelos pontos A_i e A_{i+1} ao ponto O , de modo que $h_i \geq k$. Segue-se que

$$A(T_i) \geq \frac{l_i k}{2}$$

e assim

$$A(R_p) = A(T_1) + \dots + A(T_m) \geq \frac{k}{2}(l_1 + \dots + l_n) = \frac{k}{2} C(p)$$

o que prova usando (12) que

$$C(p) \leq \frac{2A(U \cup T)}{k}.$$

Segue-se daí que X é limitado superiormente e, portanto, tem supremo. ■

Exercise 47 *Prove que o comprimento de qualquer poligonal inscrita em γ tem comprimento maior ou igual ao segmento de reta ligando os pontos extremos A e B de γ , valendo a igualdade se e somente se $\gamma = AB$. Isto mostra que não há perda de generalidade na suposição feita no início da prova do Teorema 46, onde este exercício é indicado.*

Exercise 48 *Use o exemplo da curva de Koch para mostrar que a hipótese da convexidade é indispensável no Teorema 46.*

Definition 49 (FGP com contorno convexo por partes) *Dizemos que uma FGP F tem o contorno C convexo por partes se existe um número finito de arcos convexos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ tais que*

$$C = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$$

Um desenho possível de uma FGP com contorno convexo por partes, formada por 4 arcos convexos, é a FGP da página 3 deste texto.

Theorem 50 *Toda FGP com contorno convexo por partes tem perímetro (quer dizer, perímetro finito), ou seja, tem contorno com comprimento finito.*

Remark 51 *Não vale a recíproca do teorema anterior, ou seja, nem toda FGP que tem perímetro tem necessariamente contorno convexo por partes. Contudo, os exemplos de FGP passíveis de serem trabalhados na EB são dessa classe “mais comportada” ou seja, com contorno convexo por partes. Em cursos universitários pode-se ter a oportunidade de se construírem estes exemplos mais “selvagens”, ou mais “exóticos”.*

8 Perímetro de FGP quaisquer. Perímetros fractais.

Nas seções anteriores definimos o comprimento de arcos de círculos e obtivemos uma fórmula para estes comprimentos, bem como de arcos convexos, para isso tomando o limite dos comprimentos de linhas poligonais que “aproximam” o arco. Mostramos que, nestes casos, este procedimento sempre leva a um número real positivo que mede o comprimento do contorno de arco considerado. Vamos agora utilizar a curva de Koch para construir uma FGP que não tem perímetro ou seja, cujo contorno não tem comprimento finito. Também podemos dizer que a FGP tem perímetro infinito.

Tomamos um triângulo equilátero de lado 1 e, sobre cada um dos lados, construímos a sequência de poligonais de Koch K_m^1, K_m^2, K_m^3 como no Exemplo 2. Obtemos assim uma sequência de regiões poligonais R_m cujo contorno é a linha poligonal

$$Z_m = K_m^1 \cup K_m^2 \cup K_m^3.$$

Notemos agora que $R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \dots \subset R_m \subset \dots \subset R$ onde R é o retângulo que tem por bases superior e inferior lados de comprimento 1 e por laterais lados de comprimento 2. É possível mostrar que uma união arbitrária de FGP uniformemente limitadas (ou seja, todas elas contidas em um círculo de raio suficientemente grande, como é o caso da sequência R_m) é uma FGP. Decorre então que

$$F_K = \bigcup_{m=1}^{\infty} R_m$$

é uma FGP, dita o *Floco de Neve de Koch*.

Observamos agora que cada vértice de Z_1 é um vértice de Z_2 , que cada vértice de Z_2 é um vértice de Z_3 e assim por diante. Segue-se que cada vértice de Z_n está no contorno de Z_m para todo $m \geq n$. Consegue-se daí provar que os vértices de Z_m estão no contorno de F_K para todo m . Em suma, cada Z_m é uma poligonal cujos vértices estão em ∂F_K . Assim, o comprimento do contorno de F_K pode ser calculado pelo limite dos comprimentos das poligonais Z_m que tende a infinito, como vimos no Exemplo 2.

Não é tão fácil entender este fenômeno. Para buscar uma explicação, procuramos olha-lo um pouco “mais de cima”. Primeiro temos que perceber que estamos querendo medir o tamanho de um conjunto, no caso o contorno de F_K . Mas então nos perguntamos: o que é, mais precisamente, “medir” um conjunto? Começamos com o caso mais simples, a saber, conjuntos finitos. Como medimos um conjunto finito? Ora, simplesmente contando os elementos do conjunto. É a chamada de medida de contagem, que vamos denotar por N . O tamanho ou seja, medida, do conjunto A das letras do alfabeto português é 26 (com a nova normatização), pois existem vinte e seis letras neste alfabeto; $N(A) = 26$.

Consideremo agora exemplos do nosso contexto. Sejam $X \subset \mathbb{E}$ um subconjunto limitado do plano que queremos medir. A medida de X , que denotaremos por $m(X)$, deve ser um número real positivo que expresse o *tamanho* de X .

Para procurar ter uma ideia de como obter este número $m(X)$, consideremos inicialmente as seguintes situações particulares.

- (1) X é um conjunto de k pontos do plano,
- (2) X é uma poligonal com k lados de comprimentos l_1, \dots, l_k ,
- (3) X é uma região poligonal que se decompõe como uma união de k quadrados se interseptando unicamente em seus lados que supomos de comprimentos l_1, \dots, l_k também.

Vemos então que, no primeiro caso, usamos a medida de contagem para obter

$$m(X) = N(X) = k$$

no segundo caso a de comprimento,

$$m(X) = C(X) = l_1 + \dots + l_k$$

e no terceiro caso a de área

$$m(X) = A(X) = l_1^2 + \dots + l_k^2.$$

Notando que:

$$\begin{aligned} l_1^0 + \dots + l_k^0 &= \overbrace{1 + \dots + 1}^{k\text{-parcelas}} = k = N(X) \\ l_1^1 + \dots + l_k^1 &= l_1 + \dots + l_k = C(P) \\ l_1^2 + \dots + l_k^2 &= A(R), \end{aligned}$$

fica evidente que o que diferencia as três medidas acima, de contagem, de comprimento e de área, é o expoente de l_i . Finalmente, observando que a medida de contagem é inútil para medir segmentos de reta ou FGP pois dá sempre infinito, a medida de comprimento é inútil para medir um conjunto finito de pontos pois dá zero, é inútil para medir um FGP pois dá infinito (apelamos para a intuição do leitor que deve tentar imaginar completar um quadrado, por exemplo, com segmentos de reta paralelos), e a medida de área é inútil para medir conjuntos finitos e poligonais pois dá sempre zero, procuramos um expoente α a elevar o lado l_m de cada poligonal Z_m de tal modo que o limite dos comprimentos $C(Z_m)$ das poligonais Z_m , quando m tende a infinito, não seja nem zero nem infinito. Este raciocínio é o “pulo do gato”. Ele nos leva a definir o comprimento α -dimensional de K_m , para $\alpha \in [0, \infty)$ por

$$C_\alpha(K_m) = 3n_m l_m^\alpha = 3 \times 4^m \left(\frac{1}{3^m}\right)^\alpha = 3 \left(\frac{4}{3^\alpha}\right)^m,$$

e procurar por um α tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} C_\alpha(K_m)$ seja finito e não zero. Concluímos então que isto vai ocorrer se e só se $4/3^\alpha = 1$ ou seja, $\alpha = \log 4 / \log 3$. Podemos então dizer que o contorno $C_K = \partial F_K$ de F_K tem dimensão fractal $\alpha_{C_K} := \log 4 / \log 3 \simeq 1.2619$ e que a medida α_{C_K} dimensional de C_K é 3. Denotamos a medida α -dimensional por M^α . Assim $M^{\alpha_{C_K}}(C_K) = 3$.

Justificando o título desta seção, dizemos que F_K tem perímetro fractal. Podemos dizer mais precisamente que F_K tem contorno de dimensão fractal $\log 4 / \log 3$ e que o perímetro $\log 4 / \log 3$ -dimensional de F_K é 3.

9 Medida de Hausdorff. Uma pequena introdução à Teoria Geométrica da Medida.

O exemplo da anterior, da curva de Kock, nos permite intuir que entre as medidas de comprimento e de área existem outras medidas que nossa vã filosofia não consegue alcançar. Mas também dá a perceber que a Matemática sim!! Veremos, nesta seção, ainda que de maneira simplificada, um pouco da teoria matemática que dá conta desse assunto de forma rigorosa e abrangente, a chamada Teoria Geométrica da Medida.

Dizemos que uma coleção de quadrados $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ é uma *cobertura*⁴

⁴Na teoria geral da medida usam-se coberturas enumeráveis. Usaremos aqui apenas

de um subconjunto $X \subset \mathbb{E}$ se

$$X \subset Q_1 \cup \cdots \cup Q_n.$$

Dado $\alpha \in [0, \infty)$, e sendo l_i o comprimento do lado de Q_i , definimos

$$M^\alpha(\mathcal{Q}) = l_1^\alpha + \cdots + l_n^\alpha.$$

Dado $l > 0$, seja $\mathcal{Q}_l(X)$ o conjunto de todas as coberturas de quadrados de X com todos os quadrados com lado de comprimento menor ou igual a l . Definimos a

$$M_l^\alpha(X) = \inf \{M^\alpha(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \in \mathcal{Q}_l(X)\}.$$

Temos

Proposition 52 *Fixados α e X , a função $l \mapsto M_l^\alpha(X)$ é não decrescente com l .*

Como toda função não decrescente positiva tem limites laterais (considerando ∞ como possibilidade para o limite), podemos definir a medida α -dimensional $M^\alpha(X)$ de X por

$$M^\alpha(X) = \lim_{l \rightarrow 0^+} M_l^\alpha(X). \quad (13)$$

Lembramos que estamos considerando o infinito como uma possibilidade para o limite (13), ou seja, $M^\alpha(X)$ pode eventualmente ser infinito.

Pode-se mostrar, mas não o faremos aqui, que M^0 , M^1 e M^2 são as medidas de contagem, comprimento e área respectivamente. Em particular, $M^2(X)$ é sempre finito (lembrar que X é um conjunto limitado). Este último fato é o ponto inicial que nos permite provar um dos resultados mais básicos mas mais fundamentais da Teoria Geométrica da Medida:

Theorem 53 *Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ limitado. Então existe um número real $\alpha_0 \in [0, 2]$ tal que, dado $\alpha \in [0, \infty)$, tem-se*

$$M^\alpha(X) = \begin{cases} \infty & \text{se } \alpha < \alpha_0 \\ 0 & \text{se } \alpha > \alpha_0. \end{cases}$$

coberturas finitas por questão de simplicidade. Elas não são equivalentes. Contudo, nos exemplos que vamos considerar aqui, o uso apenas de coberturas finitas não trará problemas.

Proof. Temos $M^2(X) = 0$ ou $M^2(X) > 0$. Suponhamos primeiro que ocorra a segunda alternativa. Mostremos então que $M^\alpha(X) = \infty$ para todo $\alpha < 2$ e $M^\alpha(X) = 0$ para todo $\alpha > 2$, o que prova que $\alpha_0 = 2$ neste caso. Fixe $\alpha \geq 0$. Sejam $l > 0$ e $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ uma cobertura de X por quadrados de lados l_1, \dots, l_n todos eles menores ou iguais a l . Então

$$M^2(\mathcal{Q}) = \sum_{i=1}^n l_i^2 = \frac{1}{l^{\alpha-2}} \sum_{i=1}^n l^{\alpha-2} l_i^2. \quad (14)$$

Portanto, se $\alpha > 2$ então

$$\begin{aligned} M^2(\mathcal{Q}) &\geq \frac{1}{l^{\alpha-2}} \sum_{i=1}^n l_i^{\alpha-2} l_i^2 = \frac{1}{l^{\alpha-2}} \sum_{i=1}^n l_i^\alpha \\ &= \frac{M^\alpha(\mathcal{Q})}{l^{\alpha-2}} \geq \frac{M_l^\alpha(X)}{l^{\alpha-2}} \end{aligned}$$

Como a desigualdade $M^2(\mathcal{Q}) \geq M_l^\alpha(X)/l^{\alpha-2}$ vale para toda cobertura de lado menor ou igual a l , vale também para o ínfimo da área coberta por estas coberturas, o que nos dá $M^2(X) \geq M_l^\alpha(X)/l^{\alpha-2}$, de modo que

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{M_l^\alpha(X)}{l^{\alpha-2}} \leq M^2(X) < \infty.$$

Mas isto evidentemente implica que

$$\lim_{l \rightarrow 0} M_l^\alpha(X) = 0,$$

ou seja, $M^\alpha(X) = 0$.

Suponha agora que $\alpha < 2$. Então, de (14),

$$\begin{aligned} M^2(\mathcal{Q}) &\leq \frac{1}{l^{\alpha-2}} \sum_{i=1}^n l_i^{\alpha-2} l_i^2 \\ &= \frac{1}{l^{\alpha-2}} \sum_{i=1}^n l_i^\alpha = l^{2-\alpha} M^\alpha(\mathcal{Q}) \end{aligned}$$

de modo que

$$M^2(X) \leq l^{2-\alpha} M_l^\alpha(X).$$

Tomando o limite para $l \rightarrow 0$ a única maneira de que o resultado não dê zero é que $M_l^\alpha(X) \rightarrow \infty$, provando o afirmado.

Suponhamos agora que $M^2(X) = 0$. Então o conjunto

$$V = \{\alpha \in [0, 2] \mid M^\beta(X) = 0 \text{ para todo } \beta \in [\alpha, 2]\}$$

é não vazio, limitado inferiormente por 0. Assim, admite um ínfimo. Seja $\alpha_0 = \inf V$. Se $\alpha_0 = 2$ então, como vimos antes, $M^\alpha(X) = \infty$ para todo $\alpha < \alpha_0$, o que prova o teorema neste caso. Suponha então $\alpha_0 < 2$. Provemos que α_0 satisfaz as condições enunciadas no teorema. Se $\alpha \in (\alpha_0, 2]$, obviamente $M^\alpha(X) = 0$, caso contrário α_0 não seria o ínfimo de V . Suponha $0 \leq \alpha < \alpha_0$. Queremos mostrar que $M^\alpha(X) = \infty$. Seja γ com $\alpha < \gamma < \alpha_0$. Se $M^\gamma(X) = 0$ então, para não haver contradição com a definição de ínfimo, deve haver $\beta > \gamma$ tal que $M^\beta(X) > 0$ ou $M^\beta(X) = \infty$. Mas qualquer uma destas igualdades, pelo fato de termos $\alpha < \beta$, usando um argumento similar ao feito acima, implica que $M^\alpha(X) = \infty$ e o teorema está provado neste caso. Assim, devemos ter $M^\gamma(X) > 0$. Novamente, pelo fato de termos $\alpha < \gamma$, concluímos que $M^\alpha(X) = \infty$. Isto conclui com a prova do teorema. ■

O número α_0 é importante pois expressa o que naturalmente intuimos como a dimensão de X . Sacramentamos isto na seguinte definição:

Definition 54 *Dado $X \subset \mathbb{R}^2$ limitado, o número α_0 do Teorema 53 é dito a dimensão de Hausdorff de X , sendo denotado por $\dim(X)$.*

A denominação dimensão “de Hausdorff” deve-se ao fato de que existem outras maneiras de definir a dimensão de um conjunto, que nem sempre coincidem com a que demos acima. Mas, como só trabalharemos com a dimensão de Hausdorff, nos referiremos a ela apenas como a dimensão do conjunto.

Definition 55 *Podemos agora finalmente dizer, usando a definição de dimensão, o que é, precisamente, um fractal no plano: todo subconjunto limitado X de \mathbb{R}^2 cuja dimensão $\dim(X)$ é um número diferente de 0, 1, e 2.*

Notemos que se $\alpha_0 \neq 0, 2$, então, por este mesmo teorema, α_0 é alternativamente dado por

$$\alpha_0 = \sup\{\alpha \mid M^\alpha(X) = \infty\}$$

ou

$$\alpha_0 = \inf\{\alpha \mid M^\alpha(X) = 0\}.$$

Decorre da prova do Teorema 53:

Corollary 56 *Seja X limitado. Se $0 < M^\alpha(X) < \infty$ então $\alpha = \dim X$.*

Exercise 57 *Verificar, através de exemplos, que se $M^\alpha(X) = \infty$ não podemos concluir que $\dim X < \alpha$.*

Pode-se mostrar que se $\alpha = \dim X$, então *não* podemos ter $M^\alpha(X) = 0$, de modo que $0 < M^\alpha(X) \leq \infty$.

9.1 Gráficos de funções reais de uma variável real. A conjectura da dimensão do gráfico da função de Weierstrass.

Suponha que um conjunto de \mathbb{R}^2 que queiramos medir seja plano e dado como o gráfico $\text{Gr}(f)$ de uma função $y = f(x)$ para $x \in [a, b]$. Assim,

$$\text{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}.$$

Neste caso, é interessante tomarmos partições $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$, ou seja, x_0, x_1, \dots, x_n são pontos de $[a, b]$ satisfazendo

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Formamos então a poligonal P passando pelos pontos $(a, f(a)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_{n-1}, f(x_{n-1})), (b, f(b))$ que tem comprimento

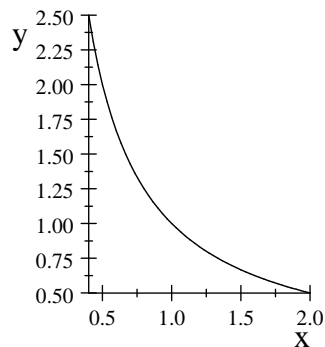
$$M^1(P) = \sum_{j=1}^n \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}.$$

Em princípio, podemos tomar $M^1(P)$ como uma aproximação de $M^1(G(f))$. O leitor pode usar esta técnica para estimar por exemplo, o comprimento da parábola $y = x^2$, $x \in [1, 5]$. Ou da cossenóide $y = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$.

Em relação ao exemplo anterior, é natural nos perguntarmos se gráficos de funções de uma variável real definidas em um intervalo fechado têm sempre comprimento finito. A resposta é não e é bem fácil de construir exemplos se nos permitirmos considerar qualquer função. De fato, convidamos o leitor a provar que tem comprimento infinito o gráfico da função $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (0, 2] \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

cujo gráfico sabemos que vai para infinito quando x se aproxima de 0:



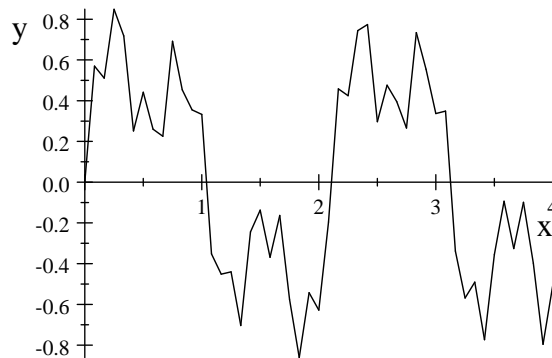
Esta função não é limitada e poderíamos pensar que se exigíssemos continuidade da função (o que implicaria em sua limitação, uma vez que seu domínio é um intervalo fechado e limitado) então o comprimento do gráfico teria de ser finito. Mas isto também é falso, só que provar não é tão simples. Exemplos conhecidos são as funções de Weierstrass. Uma delas é

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-0.5k} \sin(3^k x), \quad x \in [0, 4]$$

Avaliando o somatório com k variando de 1 a 4, ou seja, aproximando a função w pela função:

$$\begin{aligned} w_4(x) &= \sum_{k=1}^4 3^{-0.5k} \sin(3^k x) \\ &= 3^{-0.5} \sin(3x) + 3^{-1} \sin(3^2 x) + 3^{-1.5} \sin(3^3 x) + 3^{-2} \sin(3^4 x), \quad x \in [0, 4] \end{aligned}$$

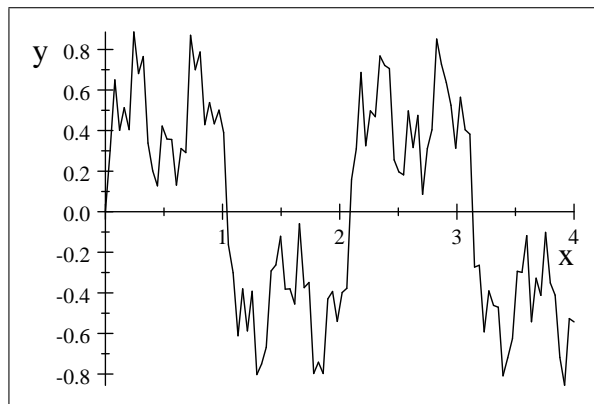
vemos que o gráfico de f é parecido com:



Já tomando

$$w_{60}(x) = \sum_{k=1}^{60} 3^{-0.5k} \sin(3^k x)$$

obtemos uma aproximação mais apurada para w :



O formato geral de uma função de Weierstrass é

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(2\pi b^k x)$$

com $0 < a < 1 < b$. Conjectura-se que

$$\dim \text{Gr}(w) = 2 + \frac{\log b}{\log a}.$$

Esta conjectura continua em aberto (veja [2]).

9.2 O conjunto de Mandelbrot e o Teorema de Mitsuhiro Shishikura.

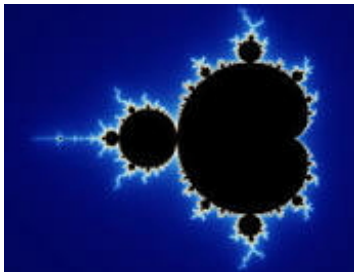
O plano \mathbb{E} em coordenadas cartesianas, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ identifica-se naturalmente com o plano complexo $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ onde i é a unidade imaginária que, com a operação de multiplicação complexa, satisfaz $i^2 = -1$.

O conjunto de Mandelbrot (Benoit B. Mandelbrot, 20 de novembro de 1924 – 14 de outubro de 2010) é definido como o conjunto dos números complexos $c \in \mathbb{C}$ tais que os iterados da função $f_c(z) = z^2 + c$ a partir de 0

formam sequencias limitadas de números complexos. Fixado um c , uma tal sequencia é

$$\begin{aligned} c &= f_c(0) \\ c^2 + c &= f_c(c) = f_c(f_c(0)) = f_c^2(0) \\ (c^2 + c)^2 + c &= f_c(f_c(f_c(0))) = f_c^3(0) \\ \left((c^2 + c)^2 + c \right)^2 + c &= f_c(f_c(f_c(f_c(0)))) = f_c^4(0) \end{aligned}$$

e assim por diante. Este conjunto tem um aspecto provavelmente conhecido do leitor:



Conjunto de Mandelbrot

O próprio Mandelbrot, assim como o matemático John Milnor conjecturaram que o contorno do conjunto de Mandelbrot tem dimensão de Hausdorff 2. Isto foi provado por Mitsuhiro Shishikura em um artigo que foi publicado no *Annals of Mathematics* em 1998 ([4]).

10 Apêndice.

Definition 58 -

Um subconjunto numérico $X \subset \mathbb{R}$ é dito **limitado superiormente** se existe um real M tal que $x \leq M$ para todo $x \in X$.

O número M é dito uma **cota superior** para X .

É claro que, no caso de ser X um conjunto limitado superiormente, existe uma infinidade de cotas superiores para X (faça um raciocínio simples para provar isto). No teorema a seguir usamos a construção dos números

reais apresentada no curso de Fundamentos de Matemática A do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS (baseado no livro [3]) para provar que existe *a menor* das cotas superiores.

Theorem 59 -

Todo subconjunto de \mathbb{R} limitado superiormente admite a menor das cotas superiores

Proof. Seja X um subconjunto de \mathbb{R} limitado superiormente. Sejam $x_1 \in X$ e M_1 uma cota superior para X diferente de x_1 (note que se existir em X o maior elemento de todos então poderíamos ter $x_1 = M_1$); tem-se então $x_1 < M_1$. Seja

$$y_1 = \frac{x_1 + M_1}{2}.$$

Temos então $x_1 < y_1 < M_1$. Daí:

1º *caso*: y_1 é cota superior para X (e então passamos a chamá-lo M_2). Neste caso, obtemos, pondo $x_2 = x_1$,

$$[x_2, M_2] \subset [x_1, M_1],$$

com

$$M_2 - x_2 \leq \frac{1}{2} (M_1 - x_1).$$

2º *caso*: y_1 não é cota superior para X , o que implica que existe $x_2 \in X$ tal que $x_2 > y_1$ ($> x_1$). Neste caso obtemos, pondo $M_2 = M_1$,

$$[x_2, M_2] \subset [x_1, M_1],$$

temo-se, novamente,

$$M_2 - x_2 \leq \frac{1}{2} (M_1 - x_1).$$

Repetimos o raciocínio para o intervalo $[x_2, M_2]$ e obtemos um novo intervalo $[x_3, M_3] \subset [x_2, M_2]$ que tem comprimento no máximo $1/2$ do comprimento de $[x_2, M_2]$ e, portanto, no máximo $1/2^2$ do comprimento do intervalo inicial $[x_1, M_1]$. Obtemos assim uma seqüência de intervalos que é encaixante e evanescente. O único número real comum a todos eles (cuja existência é garantida pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes e Evanescetes) é a menor das cotas inferiores para X . ■

Exercise 60 -

Prove as duas últimas afirmações da demonstração acima.

Definition 61 -

Seja X um subconjunto de \mathbb{R} limitado superiormente. A menor cota superior para X é denominada de supremo de X e denotada por $\sup X$.

Corollary 62 -

Seja X um subconjunto de \mathbb{R} limitado superiormente. Para qualquer que seja $\varepsilon > 0$ sempre existe entre $\sup X - \varepsilon$ e $\sup X$ pelo menos um elemento de X .

Exercise 63 -

Prove o Corolário acima.

References

- [1] Manual Jairo Bezerra: *Curso de Matemática para os cursos de segundo grau*, Companhia Editora Nacional, 33a Edição, 1976
- [2] Brian R. Hunt: *The Hausdorff dimension of the graphs of Weierstrass functions*, Proceedings of the AMS, Volume 126, Number 3, March 1998, Pages 791–800
- [3] C. Ripoll, J. Ripoll, J. F. Porto da Silveira, *Números racionais, reais e complexos*, Editora da UFRGS, 2a. edição, 2009
- [4] M. Shishikura: *The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets*, Annals of Mathematics (2) 147 (1998), no. 2, 225–267

Jaime Ripoll
DMPA - UFRGS
email: jaime.ripoll@ufrgs.br