III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA OPORTUNIDADE PARA TOMADA E RETOMADA DE CONTEÚDOS PELA CONSTRUÇÃO E AVALIAÇÃO DE PORTFÓLIOS

Gláucia Helena Sarmento Malta
Sérgio Augusto Amaral Lopes

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA OPORTUNIDADE PARA TOMADA E RETOMADA DE CONTEÚDOS PELA CONSTRUÇÃO E AVALIAÇÃO DE PORTFÓLIOS

O Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas: uma oportunidade para tomada e retomada de conteúdos pela construção e avaliação de portfólios

Capa: Pablo Diego Regino
Projeto gráfico: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

ISBN: 978-85-8337-141-0

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

III SIMPÓSIO NACIONAL DA
FORMAÇÃO DO PROFESSOR
DE MATEMÁTICA

O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA OPORTUNIDADE PARA TOMADA E RETOMADA DE CONTEÚDOS PELA CONSTRUÇÃO E AVALIAÇÃO DE PORTFÓLIOS

Gláucia Helena Sarmento Malta
Sérgio Augusto Amaral Lopes

1ª edição
2018
Rio de Janeiro

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Sumário

Prefácio

Este minicurso reflete a experiência vivida em sala de aula pelos professores Gláucia Helena Sarmento Malta e Sérgio Augusto Amaral Lopes, enquanto coordenadores e professores do Ensino Fundamental 1 e 2, Ensino Médio e Formação de Professores. Assim, o minicurso tem como objetivo discutir o potencial da resolução de problemas [10] como metodologia de ensino de Matemática e sua importância na tomada e retomada dos conteúdos que envolvem a solução dos problemas. Propõem-se aos participantes problemas de matemática típicos do currículo do Ensino Fundamental 2, do Ensino Médio e a discussão sobre a solução desses problemas, a partir da análise dos pré-requisitos que os alunos necessitam para resolvê-los. Pretende-se, assim, promover a reflexão sobre diferentes estratégias de soluções para os problemas apresentados e o potencial da construção de portfólios para o desenvolvimento do pensamento lógico dos estudantes e para estabelecer *links* entre os conteúdos estudados nesses anos escolares, bem como o uso de tais portfólios para fins avaliativos. Em particular, o foco deste minicurso é o ensino de matemática no segundo segmento do ensino fundamental e médio. O método de tomada e retomada de conteúdos através de portfólios como estratégica no auxílio da resolução de problemas tem se apresentado como uma excelente ferramenta para auxiliar o processo de generalização do pensamento matemático e para amparar o ensino de matemática no sentido de possibilitar que os alunos visitem todos os conteúdos necessários para a solução de um problema, independentemente destes conteúdos estarem ou não na grade curricular do ano ou série em que eles se encontrem.

Capítulo 1

A Matemática no Ensino Fundamental e Médio

As justificativas usadas para argumentar sobre a existência da Matemática na vida escolar das crianças e jovens no Ensino Fundamental e Médio são várias. Durante todo o período que vai da educação infantil, 1º ao 9º ano e os três anos do Ensino Médio, tal conteúdo é considerado como fundamental para contribuir na formação intelectual do aluno. Contudo, existe uma distância considerável entre o que pode ser realizado em termos de ensino de Matemática e a verdadeira concretização dos objetivos propostos para esses períodos escolares.

São vários os fatores que podem influenciar o desenvolvimento cognitivo e a superação dos desafios impostos pelo ensino de Matemática. Nesse minicurso, entre os mais importantes destacamos:

- Formação dos professores.
- Currículo.
- Definição de métodos e estratégias de ensino.

1.1 O papel do professor e sua atuação na sala de aula

Segundo o professor Ubiratan D'Ambrosio[3], cada indivíduo tem a sua prática, e todo professor, ao iniciar sua carreira, vai fazer na sala de aula, basicamente, o que ele viu alguém, que o impressionou, fazendo. E vai deixar de fazer algo que viu e não aprovou.

Essas memórias cognitivas são experiências que estão ligadas ao emocional do professor, mas o lado racional é sem dúvida influenciado por aquilo que aprendeu na sua formação. Nesse contexto, destacamos que a boa formação nos cursos de licenciatura e a formação continuada são fundamentais para a boa prática do professor.

Felix Klein, em sua obra *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior* (1908), denuncia uma dupla descontinuidade nos cursos de formação inicial do professor. De acordo com Klein, são poucas conexões estabelecidas:

- entre a matemática dos cursos universitários e aquela anteriormente estudada na escola básica;
- entre a matemática dos cursos universitários e aquela que será futuramente praticada em sala de aula.

Os cursos de licenciatura deveriam formar professores que sejam capazes de propor questões e tarefas que explicitem, envolvam e desafiem o pensamento de cada aluno, ouvindo suas ideias e pedindo que justifiquem essas ideias oralmente e por escrito. Ao professor cabe também a tarefa de decidir quando e como incorporar a linguagem matemática e as notações às ideias dos alunos, além de fornecer informações e avançar nos conteúdos, à medida que forem adquirindo as habilidades propostas no currículo.

Shulman(1986) propõe a noção de saber pedagógico de conteúdo, como um saber sobre o conteúdo para o ensino. O autor critica a separação estrita entre o conhecimento de conteúdo e a pedagogia, que identifica como um paradigma perdido.

1.2 A análise do currículo

O currículo escolar pode ser considerado como uma estratégia para a ação educativa. Um currículo deve apresentar os conteúdos propostos, identificar os objetivos e propor as metodologias mais adequadas para que tais objetivos sejam alcançados.

No Brasil, desde 1987, utilizamos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para nortear as escolas na formação de seus Projetos Políticos Pedagógicos e definir as habilidades e as competências que os alunos devem adquirir na educação fundamental e no ensino médio.

Podemos entender por competências o conjunto dos saberes ou conhecimentos desenvolvidos pelo homem/cidadão ao longo de sua vida escolar e social.

Atualmente vivemos o momento de espera pelo parecer do Conselho Nacional de Educação, CNE, sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que propõe normatizar a proposta de direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento para alunos da Educação Básica. A terceira versão do documento foi encaminhada ao CNE em abril desse ano e até aquele momento dava conta apenas do Ensino Fundamental.

No desenvolvimento das atividades desse minicurso vamos utilizar as atuais matrizes de referência de conteúdos do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e do Saeb referente ao 3^{o}ano do Ensino Médio.

Para o 3^{o} ano do ensino médio, a Matriz de Referência completa do Saeb, em Matemática, é formada pelos seguintes descritores:

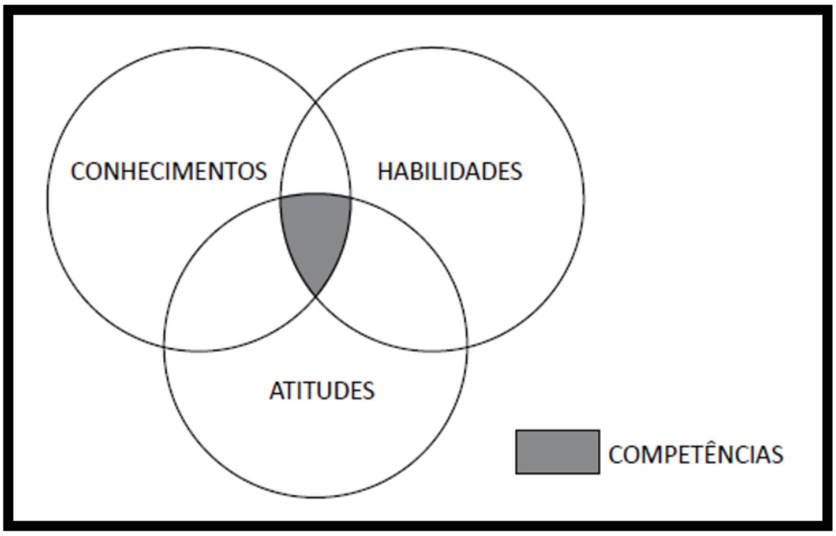


Figura 1.1: Currículo

- Descritores do Tema I. Espaço e Forma
  - D1 - Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.
  - D2 – Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.
  - D3 – Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.
  - D4 – Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.
  - D5 – Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).
  - D6 – Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.
  - D7 – Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.
  - D8 – Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.
  - D9 – Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.
  - D10 – Reconhecer entre as equações de 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.

- Descritores do Tema II. Grandezas e Medidas
  - D11 – Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.
  - D12 – Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.
  - D13 – Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).
- Descritores do Tema III. Números e Operações /Álgebra e Funções
  - D14 – Identificar a localização de números reais na reta numérica.
  - D15 – Resolver problema que envolva variações proporcionais, diretas ou inversas entre grandezas.
  - D16 – Resolver problema que envolva porcentagem.
  - D17 – Resolver problema que envolva equação de segundo grau.
  - D18 – Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.
  - D19 – Resolver problema envolvendo uma função de primeiro grau.
  - D20 – Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.
  - D21 – Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.
  - D22 – Resolver problema envolvendo PA/PG dada a fórmula do termo geral.
  - D23 – Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau por meio de seus coeficientes.
  - D24 – Reconhecer a representação algébrica de uma função do primeiro grau, dado o seu gráfico.
  - D25 – Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do segundo grau.
  - D26 – Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do primeiro grau.
  - D27 – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.
  - D28 – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica reconhecendo-a como inversa da função exponencial.
  - D29 – Resolver problema que envolva função exponencial.
  - D30 – Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.

- D31 – Determinar a solução de um sistema linear associando-o a uma matriz.
- D32 – Resolver o problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.
- D33 – Calcular a probabilidade de um evento.

- Descritores do Tema IV. Tratamento da Informação
  - D34 – Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.
  - D35 – Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

A matriz de referência para o Enem está dividida por competência e habilidades:

- Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
  - H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações (naturais, inteiros, racionais ou reais).
  - H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
  - H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
  - H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
  - H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade, utilizando conhecimentos numéricos.
- Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
  - H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
  - H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.
  - H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
  - H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
- Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
  - H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

  - H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
  - H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
  - H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
  - H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

- Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
  - H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.
  - H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
  - H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
  - H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

- Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.
  - H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
  - H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
  - H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
  - H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
  - H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

- Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.
  - H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
  - H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

  - H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

- Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.
  - H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.
  - H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
  - H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
  - H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

1.3 Métodos e estratégias de ensino

As estratégias de ensino são os processos adotados pelo professor para conduzir suas aulas de modo a atingir os objetivos propostos em seu planejamento.

Em sua metodologia o professor deve garantir que todo aluno esteja aprendendo uma matemática sólida, bem estruturada e que tenha significado para o aluno, além, é claro, de garantir a expansão de suas ideias por meio de desafios que os envolvam e os motivem a estabelecer conexões da matemática como uma atividade humana dinâmica e em desenvolvimento.

Nesse minicurso vamos destacar a estratégia dos portfólios para a tomada e retomada de conhecimentos com foco na resolução de problemas, mais especificamente, problemas relacionados ao Ensino Médio, ligados à Obmep e que servem de base e apoio aos professores para a preparação dos alunos tanto para a prova do Enem como outras avaliações externas à escola tais como: Prova Brasil, Saeb, Olimpíadas Regionais de Matemática etc.

1.4 Refletindo sobre questões relevantes

Vamos refletir sobre algumas questões relevantes:

1. Como planejar ações de formação e desenvolvimento profissional permanente que enriqueçam e ampliem o conteúdo matemático dos professores e, ao mesmo tempo, articulem essa reflexão com os saberes e experiências emergentes da prática de sala de aula?

2. Quais são os principais fatores que causam a ruptura no processo de educação matemática nos Ensino Fundamental e Médio?

3. Em sua prática docente, com relação aos alunos que vão bem em Matemática, o que eles alegam? E a respeito dos alunos que dizem não gostar de Matemática, o que eles alegam?

4. Na sua experiência como professor, qual o diferencial dos alunos que vão bem na Obmep ou em outras Olimpíadas de Matemática? O que os motivou? Por que outros alunos, às vezes da mesma turma, não se sentiram motivados?

Capítulo 2

A Resolução de Problemas

A resolução de problemas tem sido apontada como uma das competências fundamentais a serem desenvolvidas na educação básica. Os documentos oficiais apontam o ler, o escrever e o resolver problemas como competências de todas as áreas do conhecimento.

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática constituem um referencial para a construção de uma prática que favoreça o acesso ao conhecimento matemático que possibilite de fato a inserção dos alunos como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. Os parâmetros destacam que a Matemática está presente na vida de todas as pessoas, em situações em que é preciso, por exemplo, quantificar, calcular, localizar um objeto no espaço, ler gráficos e mapas, fazer previsões. Mostram que é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula.[1]

A Matemática tem na sua gênese a resolução de problemas como motivação para o desenvolvimento de muitas de suas ideias e de seus campos. Lamentavelmente, omite-se o processo de criação e as etapas pelas quais o matemático passou para chegar aos conceitos e procedimentos eficazes para resolver determinados problemas. Omitindo-se tais etapas, cria-se a cultura da matemática nascida pronta, acabada e soberana. Muitos estudantes sentem-se intimidados diante de tantos mecanismos por vezes incompreendidos. No entanto, entender a Matemática como um conhecimento científico em construção poderia oportunizar ao aluno a chance de reconhecer as contribuições dessa disciplina e a importância de sua aquisição para a formação e atuação de um cidadão consciente.

> Ao aprender a resolver problemas e a construir atitudes em relação às metas que quer atingir nas mais diversas situações da vida, o aluno faz aquisições dos domínios cognitivo e linguístico, que incluem formas de comunicação e de representação espaciais, temporais e gráficas.[1]

O objetivo principal deste minicurso é discutir o potencial da resolução de problemas para desenvolver o raciocínio lógico dos alunos e possibilitar a tomada e retomada de tópicos de matemática que são necessários para a resolução dos problemas. Durante o minicurso serão apresentados os problemas e portfólios que apresentam os pré-requisitos necessários para as resoluções, bem como fontes de pesquisa e sugestões de metodologias que ajudem os professores nesse contínuo processo de tomada e retomada dos conteúdos de matemática propostos nos currículos do Ensino Fundamental 2 e do Ensino Médio.

2.1 A resolução de problemas

A resolução de problemas é, sem dúvida, uma alternativa metodológica reconhecida na Educação Matemática e um conteúdo a ser desenvolvido. Cabe destacar que ela é ao mesmo tempo conteúdo e metodologia: Aprende-se a resolver problemas resolvendo-os.

A dificuldade de seus alunos levou Polya [10] a criar uma rotina para que a resolução de problemas dos ingressantes no Ensino Superior fosse mais bem encaminhada. São reconhecidamente importantes as seguintes etapas na resolução de um problema:

- compreender o problema
- delinear uma estratégia de resolução
- desenvolver essa estratégia de resolução
- avaliar o resultado

Atualmente destaca-se também a comunicação da solução encontrada como uma importante etapa, chamada plenária, que oportuniza, ao sujeito, pensar sobre o seu pensamento (metacognição) e, aos ouvintes, ampliar seu repertório de resolução.

Conhecer a resposta para um dado problema é importante, mas, em termos de aprendizagem, saber como se chega a ela é tão importante quanto. Os envolvidos na plenária são desafiados a pensar sobre as diferentes estratégias adotadas, e a discussão enriquece a aula de Matemática e amplia o conhecimento acerca da Matemática. Não é o professor que está impondo um saber, ele é o mediador das discussões e aquele que confrontará as diferentes maneiras de se pensar o problema e a forma de se chegar a um resultado. Todos os envolvidos ganham com a discussão.

A perspectiva da resolução de problemas perpassa toda a Escola Básica. As etapas iniciais de um conteúdo são momentos importantes para que se iniciem as discussões a respeito da resolução de problemas. Encontra-se explícito nos cadernos adotados no programa do MEC de formação de professores conhecido como PACTO tal indicação.

> A produção de tais registros, principalmente no ciclo de alfabetização, vem sempre acompanhada da oralidade. Nas atividades em sala de aula os alunos participam

> oralmente da leitura coletiva de problemas com o professor, da manifestação de estratégias e procedimentos de resolução, levantamento de hipóteses e argumentações, para complementar ou refutar uma argumentação de um colega, na manifestação dos seus modos de pensar matematicamente. A comunicação oral possibilita uma maior interatividade entre alunos e professor em sala de aula. Muitas vezes é no momento da exposição oral de um raciocínio que o aluno toma consciência sobre o seu modo de pensar, correto ou não. Dessa forma, a oralidade necessita ser reconhecida enquanto um registro de resolução do problema e considerada como instrumento importante para a elaboração escrita.[2]

2.1.1 O método pictórico

O método pictórico também conhecido como Matemática de Singapura tem sido aplicado há algum tempo em países como Singapura, Japão, Estados Unidos e Canadá e está chegando ao Brasil, especialmente através da pesquisadora Yuriko Baldin. O método consiste, em parte, em uma representação do problema por barras que facilitam a visualização e a comparação de informações numéricas. Uma das vantagens do método é ajudar no pensamento genérico e na abstração.

Vamos resolver alguns problemas utilizando o método pictórico:

1. João já andou 800 metros da distância de sua casa até a escola. Essa distância corresponde a quatro quintos do total que ele deve percorrer. Quantos metros faltam para ele completar o percurso?

2. São três irmãos: Alex, Danilo e Gustavo. As idades deles são números consecutivos. Juntos, eles têm 45 anos. Qual a idade de cada um, sabendo que o Alex é o mais novo e Gustavo é o mais velho?

3. Minha prima é 4 anos mais velha do que eu. O quíntuplo de minha idade somado ao dobro da idade de minha prima é igual a 106 anos. Quantos anos eu tenho?

4. Osmar e Marcela têm juntos 5200 reais. Se Osmar gastar dois quintos do que tem e Marcela R$400,00, os dois ficarão com quantidades iguais. Qual quantia inicial de cada um?

5. Raquel é cabelereira. Ela cobra R$25,00 o corte de adulto e R$15,00 o corte de criança. Em um dia ela fez 18 cortes e ganhou R$400,00. Quantos foram os cortes de adultos?

6. Carmen deixou cair a caixa com sua coleção de moedas: um quarto das moedas caiu sobre a cama, dois terços se espalharam pelo chão e 2 ficaram dentro da caixa. Quantas moedas tem a coleção de Carmen?

7. Em uma prova de atletismo, um prêmio de R$1.000,00 foi dividido entre os dois primeiros colocados na razão de 5 para 3. A partir dessas informações, determine o prêmio de cada competidor.

2.1.2 O uso de portfólio como estratégia para tomada e retomada de conteúdos frente a metodologia da resolução de problemas

Portfólios educacionais podem ser considerados como um conjunto de trabalhos de um estudante organizados de forma que possam ser apresentados e compartilhados com outros colegas. Do latim temos *Port* que significa portar e *Folio* que significa folhas.

O portfólio é uma coleção de produções dos alunos as quais apresentam as evidências de suas aprendizagens. É uma excelente forma de registro das produções dos alunos que possibilita uma constante reflexão sobre o pensamento, metacognição. Essa coleção de atividades organizadas pelo aluno permite o acompanhamento da construção de determinado conteúdo. A forma reflexiva do aluno na construção de seus registros leva a uma constante reflexão a respeito do que está produzindo.

Conforme Hoffmann[6] o portfólio é mais do que uma coleção de produções:

> Um dossiê/portfólio torna-se significativo pelas intenções de quem o organiza. Não há sentido em coletar trabalhos dos alunos apenas para mostrá-los aos pais ou como instrumento burocrático. Ele precisa constituir-se em um conjunto de dados que expressem avanços, mudanças conceituais, novos jeitos de pensar e de fazer, alusivos à progressão dos estudantes. [6]

O portfólio pode ser usado como instrumento de registro e contribui para a memorização de definições, propriedades e teoremas matemáticos que ajudam os alunos e professores a resolverem problemas e se prepararem para as avaliações internas e externas à escola.

Após receber a aula, o aluno pode gradativamente ir registrando em seu portfólio os aspectos mais relevantes do conteúdo que aprendeu e detectar, as dúvidas e conexões que ainda precisam ser retomadas. Esse processo, de tomada e retomada, faz parte da aceitação do fato de que o professor está em uma constante prática de aprimorar sua técnica e nada melhor para isso do que ele conhecer o seu desempenho através dos registros daqueles que estão participando de suas aulas.

Esse instrumento metodológico permite que o professor saiba o quanto do conteúdo que ele pretendia passar a seus alunos foi assimilado, bem como retomar conteúdos e abordagens de anos ou séries anteriores.

Além disso, o portfólio pode ser considerado como um instrumento de avaliação, pois se for conduzido pelo professor e elaborado pelos alunos, é capaz de mostrar o desenvolvimento da aprendizagem.

Destacamos aqui algumas vantagens do uso dos portfólios na educação:

- Relaciona teoria e prática,
- Possibilita o aluno refletir sobre seu próprio aprendizado e discuti-lo com seu professor.
- Realça os aspectos subjetivos da aprendizagem, na medida em que cada aluno contribui com suas ideias, dúvidas e habilidades já alcançadas ou em desenvolvimento.

- Ajuda os estudantes a desenvolver a habilidade de avaliar seu próprio trabalho.

- O professor é capaz de instaurar um diálogo com cada aluno de forma individualizada.

Por fim, gostaríamos de destacar a possibilidade da exposição dos portfólios dos alunos via *web*, ou seja, o professor pode usar recursos de criação e exposição dos portfólios de seus alunos utilizando aplicativos que auxiliam na elaboração dos portfólios e redes sociais tais como grupos de Facebook ou WhatsApp para a exposição dos trabalhos. Alguns pesquisadores em educação chamam essa possibilidade de *webfólio*.

Capítulo 3

O Minicurso

Etapas do minicurso proposto:

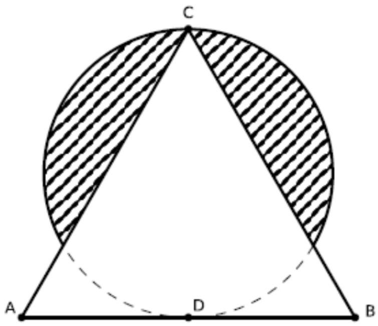
- Discussão teórica de questões relevantes ao Ensino de Matemática.
- Conhecer o Método Pictórico como uma estratégia para resolução dos problemas.
- Apresentação da metodologia do uso de portfólio como ferramenta de tomada e retomada de conteúdos.
- Apresentação de alguns portfólios montados a partir da resolução de problemas da Obmep[1].
- Construção de um portfólio a partir de questões do banco de questão da Obmep.
- Exposição dos portfólios construídos em uma plenária final.

[1] www.obmep.org.br

Capítulo 4

Problema 1

No desenho abaixo, o triângulo ABC é um triângulo equilátero e CD é tanto uma altura do triângulo quanto um diâmetro do círculo. Se AB = 10cm, determine a área sombreada.



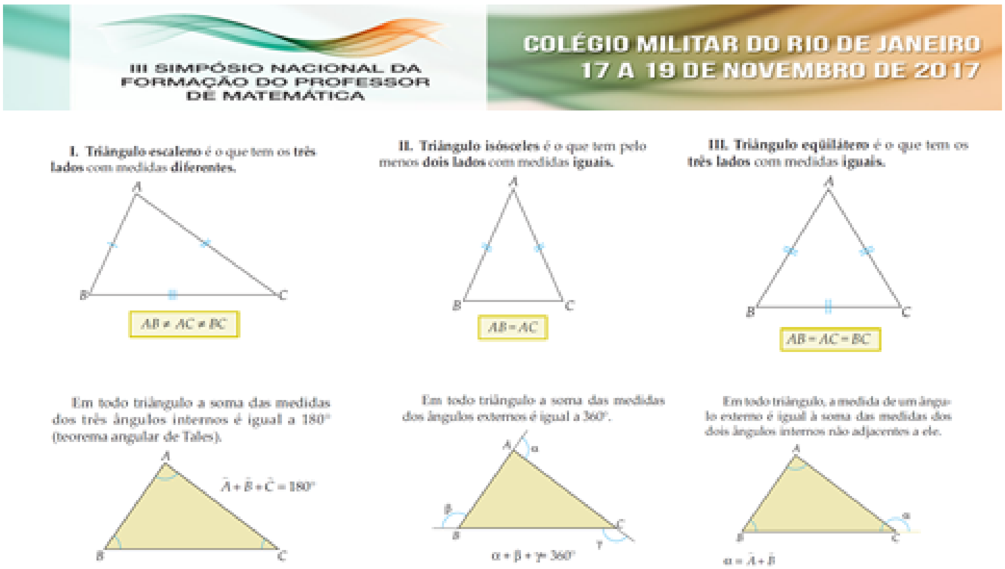
Para resolver esse problema o aluno deverá compreender os seguintes tópicos:

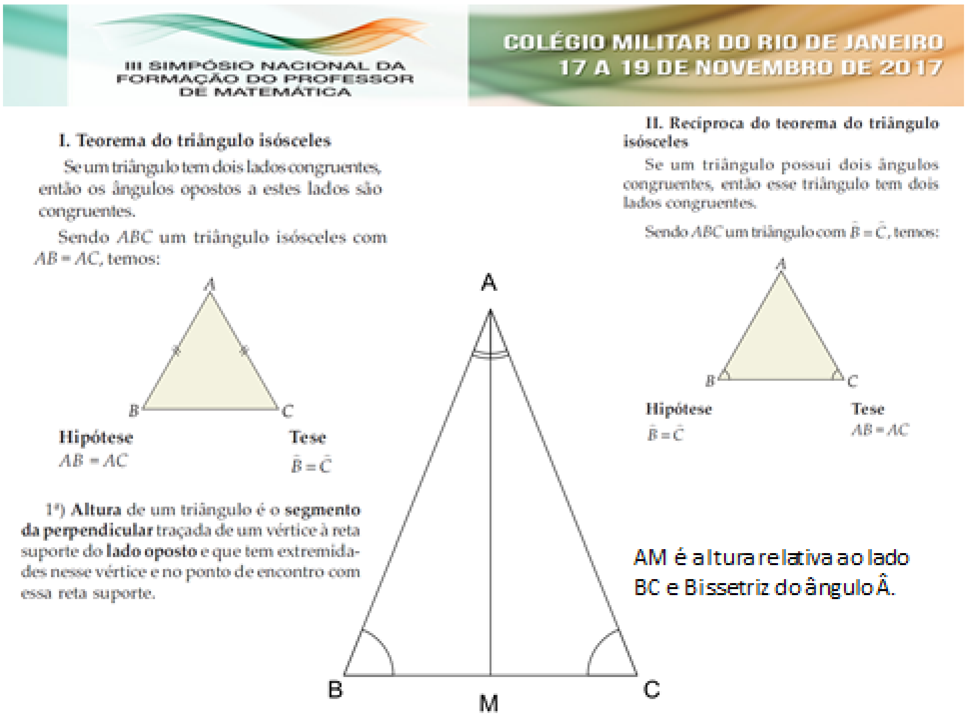
- Propriedades de tangência entre circunferência e retas.
- Classificação de triângulos.
- Propriedades dos triângulos isósceles e equilátero.
- Identificar e calcular a altura de triângulos equiláteros.
- Elementos e propriedades da circunferência.
- Ângulos da circunferência.
- Áreas de triângulos.
- Áreas do círculo e suas partes.

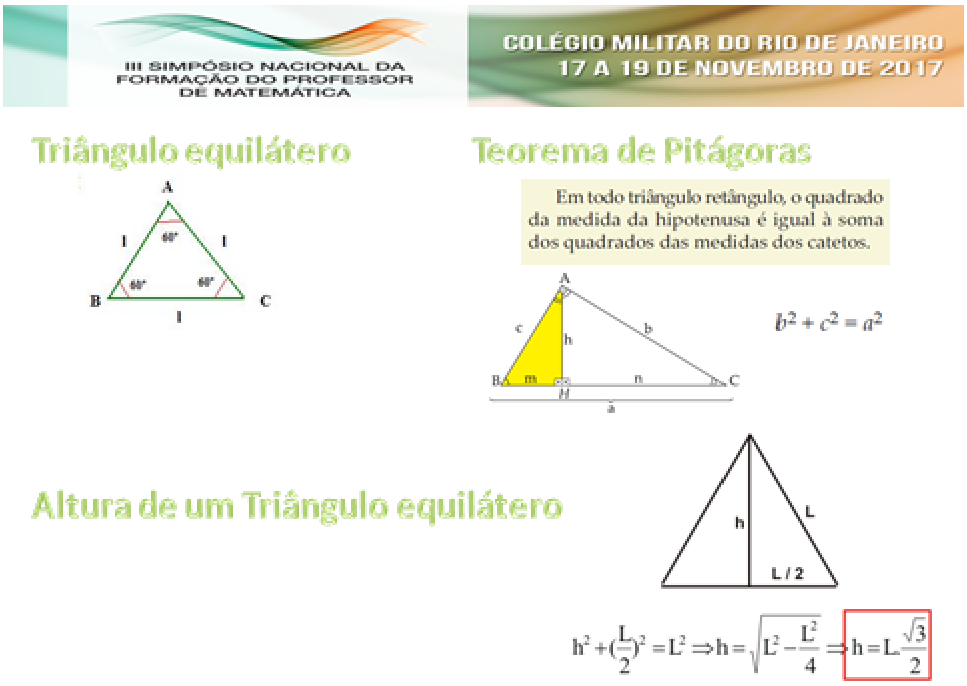
Este problema envolve:

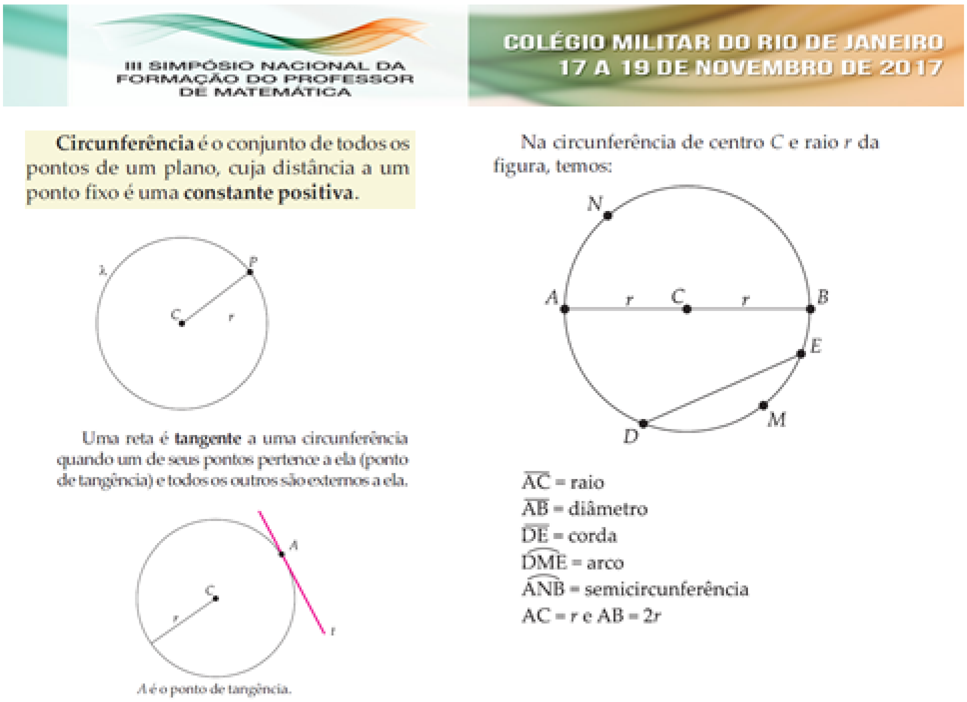
- Matriz Saeb: D2, D11 e D12
- Enem
  - Competência 1: H7 e H8.
  - Competência 3: H10, H13 e H14.

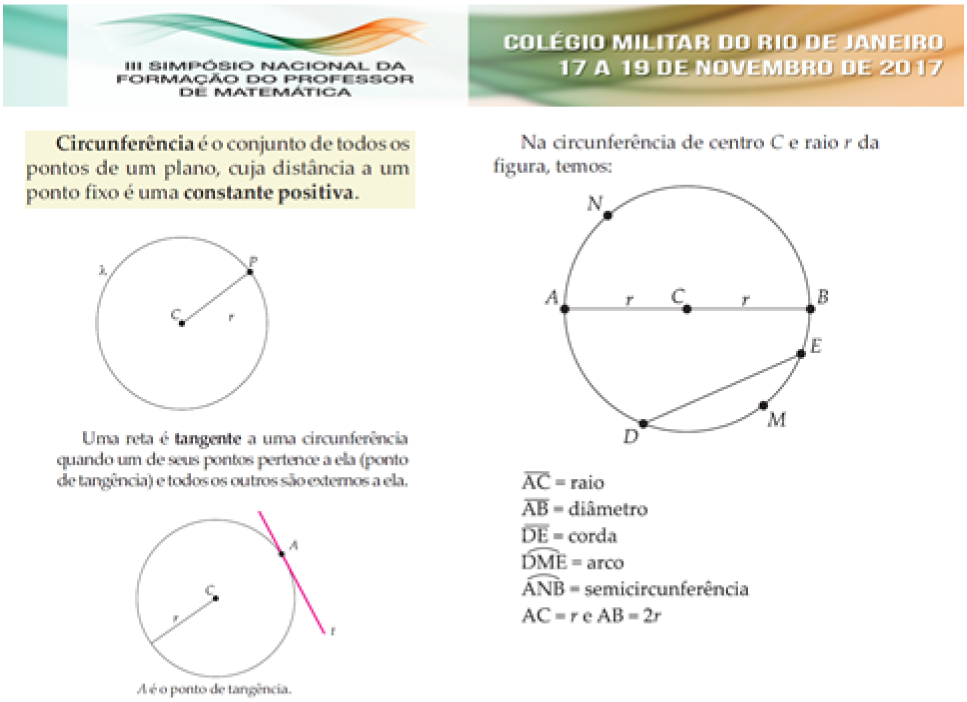
4.1 Sugestão de portfólio




III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA
COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
17 A 19 DE NOVEMBRO DE 2017
I. Teorema do triângulo isósceles
Se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a estes lados são congruentes.
Sendo ABC um triângulo isósceles com AB = AC, temos:
A
B
C
Hipótese
AB = AC
Tese
$\hat{B} = \hat{C}$
1º) Altura de um triângulo é o segmento da perpendicular traçada de um vértice à reta suporte do lado oposto e que tem extremidades nesse vértice e no ponto de encontro com essa reta suporte.
A
B
M
C
II. Recíproca do teorema do triângulo isósceles
Se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então esse triângulo tem dois lados congruentes.
Sendo ABC um triângulo com $\hat{B} = \hat{C}$, temos:
A
B
C
Hipótese
$\hat{B} = \hat{C}$
Tese
AB = AC
AM é altura relativa ao lado BC e Bissetriz do ângulo Â.


III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA
COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
17 A 19 DE NOVEMBRO DE 2017
Triângulo equilátero
A
B
C
l
l
l
60°
60°
60°
Teorema de Pitágoras
Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.
A
B
C
H
c
b
h
m
n
a
$b^2 + c^2 = a^2$
Altura de um Triângulo equilátero
h
L
L / 2
$h^2 + (\frac{L}{2})^2 = L^2 \Rightarrow h = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} \Rightarrow \boxed{h = L\frac{\sqrt{3}}{2}}$

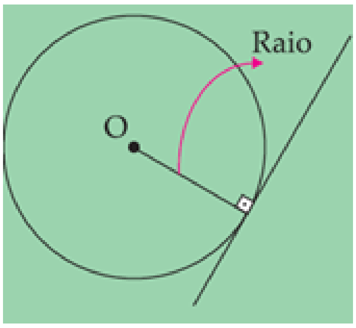

III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA
COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
17 A 19 DE NOVEMBRO DE 2017
Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano, cuja distância a um ponto fixo é uma constante positiva.
λ
P
C
r
Uma reta é tangente a uma circunferência quando um de seus pontos pertence a ela (ponto de tangência) e todos os outros são externos a ela.
A
C
r
t
A é o ponto de tangência.
Na circunferência de centro C e raio r da figura, temos:
N
A
r
C
r
B
E
M
D
AC = raio
AB = diâmetro
DE = corda
DME = arco
ANB = semicircunferência
AC = r e AB = 2r


III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA
COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
17 A 19 DE NOVEMBRO DE 2017
Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano, cuja distância a um ponto fixo é uma constante positiva.
λ
P
C
r
Uma reta é tangente a uma circunferência quando um de seus pontos pertence a ela (ponto de tangência) e todos os outros são externos a ela.
A
C
r
t
A é o ponto de tangência.
Na circunferência de centro C e raio r da figura, temos:
N
A
r
C
r
B
E
M
D
AC = raio
AB = diâmetro
DE = corda
DME = arco
ANB = semicircunferência
AC = r e AB = 2r

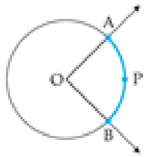
III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
17 A 19 DE NOVEMBRO DE 2017

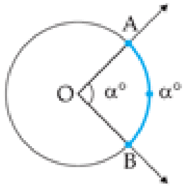
Toda reta t tangente a uma circunferência de centro O é perpendicular ao raio no ponto T de tangência.



Ângulo central é o que tem o **vértice no centro** da circunferência. O arco da circunferência com pontos internos ao ângulo é o seu arco correspondente.



A medida de um ângulo central é igual à medida de seu arco correspondente.

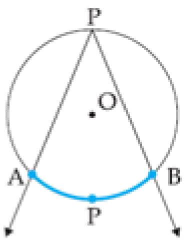


$\Rightarrow A\hat{O}B = m\,(\widehat{AB}) = \alpha$

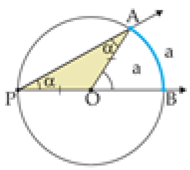
III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
17 A 19 DE NOVEMBRO DE 2017

Ângulo inscrito é o que tem **vértice na circunferência** e **lados secantes** à mesma. O arco da circunferência com pontos internos ao ângulo é o seu arco correspondente.

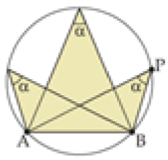


A medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do seu arco correspondente.

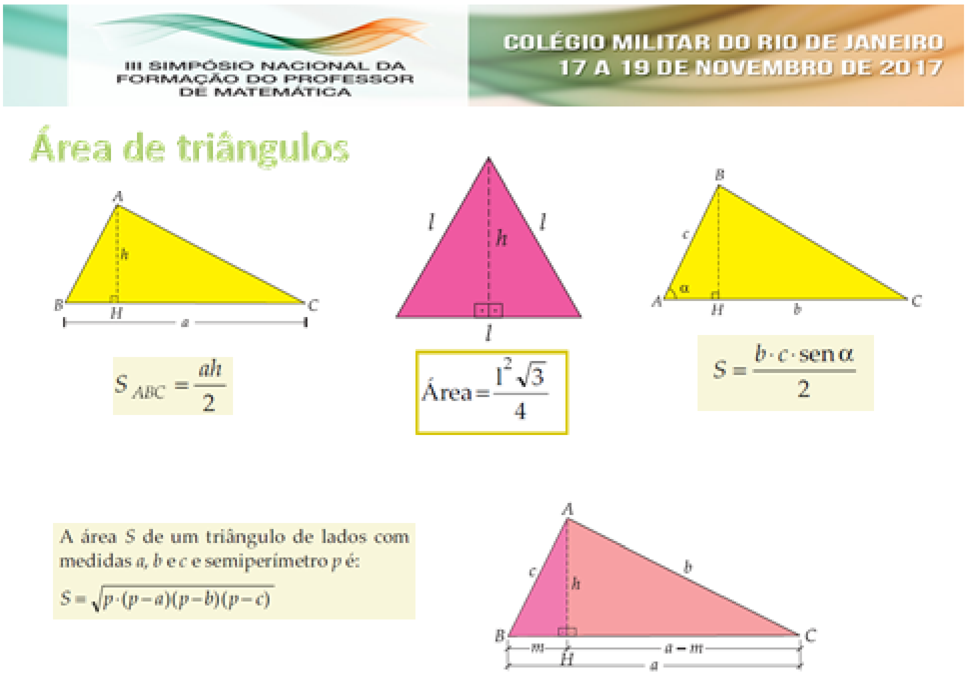


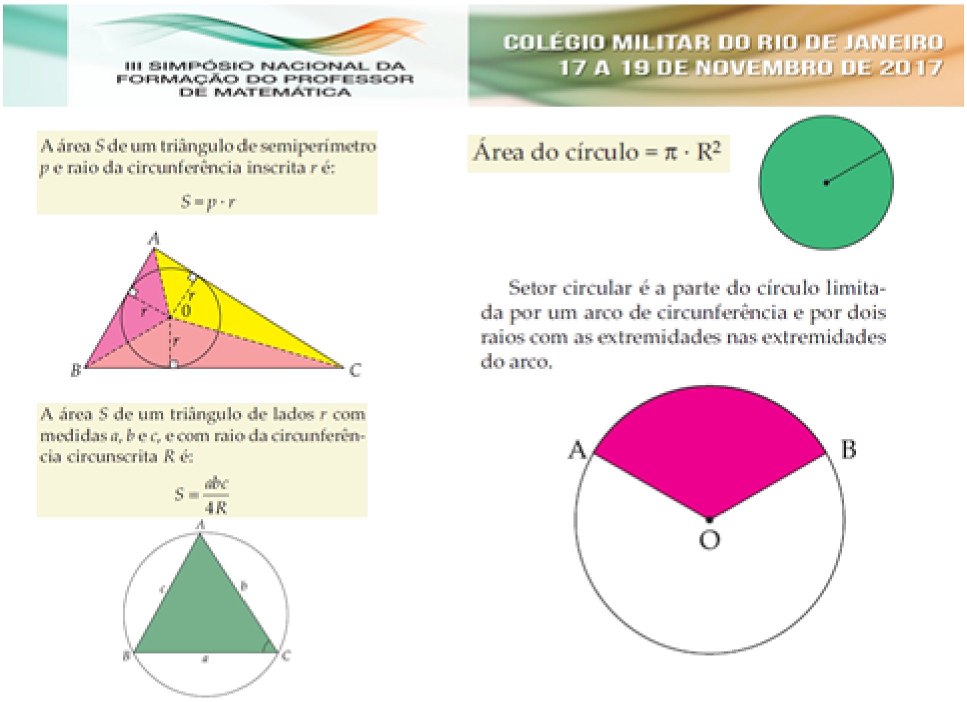
$a = 2\alpha$

Dois ângulo inscritos em uma mesma circunferência, com o mesmo arco correspondente, têm medidas iguais.



O arco $\widehat{APB}$ é chamado de arco capaz de α.


III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA
COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
17 A 19 DE NOVEMBRO DE 2017
Área de triângulos
$S_{ABC} = \frac{ah}{2}$
$\text{Área} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$
$S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$
A área S de um triângulo de lados com medidas a, b e c e semiperímetro p é:
$S = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$


III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA
COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
17 A 19 DE NOVEMBRO DE 2017
A área S de um triângulo de semiperímetro p e raio da circunferência inscrita r é:
$S = p \cdot r$
A área S de um triângulo de lados r com medidas a, b e c, e com raio da circunferência circunscrita R é:
$S = \frac{abc}{4R}$
Área do círculo = $\pi \cdot R^2$
Setor circular é a parte do círculo limitada por um arco de circunferência e por dois raios com as extremidades nas extremidades do arco.
A
B
O

III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
17 A 19 DE NOVEMBRO DE 2017

A área do setor circular é proporcional à medida do arco, então podemos calcular a sua área fazendo uma regra de três simples:

1º caso: arco medido em graus

Setor	arco
πR^2	$360°$
S	$\alpha°$

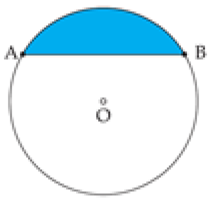
Assim, $\boxed{S = \dfrac{\pi R^2 \cdot \alpha°}{360°}}$

2º caso: arco medido em radianos

Setor	arco
πR^2	2π rad
S	α rad

Assim, $\boxed{S = \dfrac{R^2 \cdot \alpha}{2}}$

Segmento circular é a parte do círculo limitada por um arco de circunferência e por uma corda com as extremidades nas extremidades do arco.

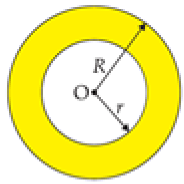


$S = S_{setor} - S_{triângulo}$

$S = R^2\left(\dfrac{\pi \cdot \alpha}{360°} - \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{2}\right)$

com a medido em graus

A área de uma coroa circular de raios R e r é:



$S = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$

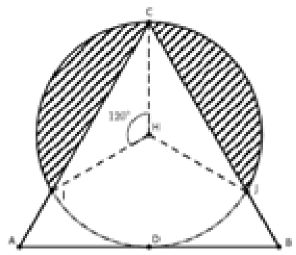
$\boxed{S = \pi\,(R^2 - r^2)}$

III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
17 A 19 DE NOVEMBRO DE 2017

E vamos a solução:

Como CD é diâmetro, o seu ponto médio H é o centro do círculo. Sejam I e J as outras interseções da circunferência com os lados AC e BC.



Como $\angle ICH = \angle HCJ = 30°$ e $IH = CH = HJ$, segue que os triângulos ΔCHI e ΔCHJ são isósceles com ângulo do vértice igual à 120°. Se l é o raio do círculo, como a altura do triângulo e o diâmetro do círculo coincidem, $2l = \dfrac{10\sqrt{3}}{2}$cm e consequentemente $l = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$cm.

Cada uma das regiões sombreadas corresponde a área de um setor circular de $120° = 2\pi/3$ subtraída de um triângulo isósceles, ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{(2\pi/3)l^2}{2} - \frac{l^2 \operatorname{sen} 120°}{2} &= \frac{\pi l^2}{3} - \frac{\sqrt{3}l^2}{4} \\
&= \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})l^2}{12}. \\
&= \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})}{12} \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2. \\
&= \frac{100\pi - 75\sqrt{3}}{8} cm^2.
\end{aligned}$$

Como temos duas regiões iguais, a área procurada é o dobro do valor encontrado, ou seja, $\dfrac{100\pi - 75\sqrt{3}}{4} cm^2$.

Capítulo 5

Problema 2

José aprendeu um método para calcular produtos de dois números de uma forma mais rápida baseado na fatoração:

$$(n-k).(n+k) = n^2 - k^2$$

Para calcular 23x17, ele escolhe n = 20, k = 3 e calcula: 23x17 = 202 – 32 = 400 - 9 = 391.

Determine, sem usar a calculadora, o valor de

$$\sqrt{(1001.1003+1)}$$

- Verifique que

$$(n.(n+3)+1)^2 = n.(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

- Determine, sem usar a calculadora, o valor de:

$$\sqrt{((2014)(2015)(2016)(2017)+1)}$$

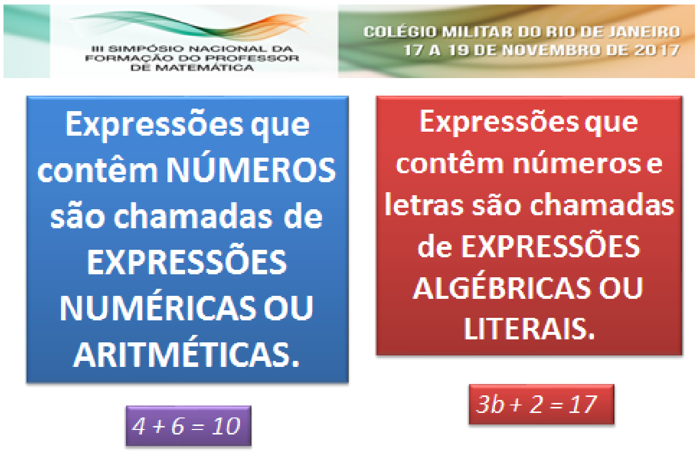
Para resolver esse problema o aluno deverá compreender os seguintes tópicos:

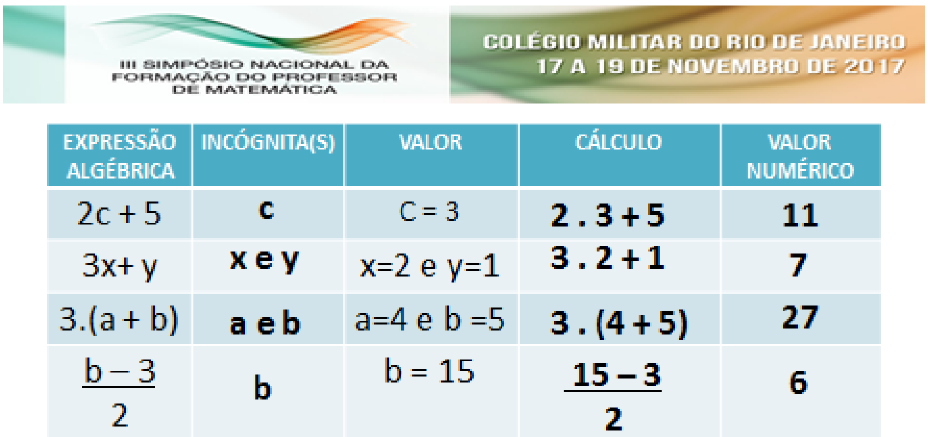
- Linguagem algébrica.
- Expressões algébricas.
- Potenciação e suas propriedades.
- Radiciação e suas propriedades.
- Fatoração.

Este problema envolve:

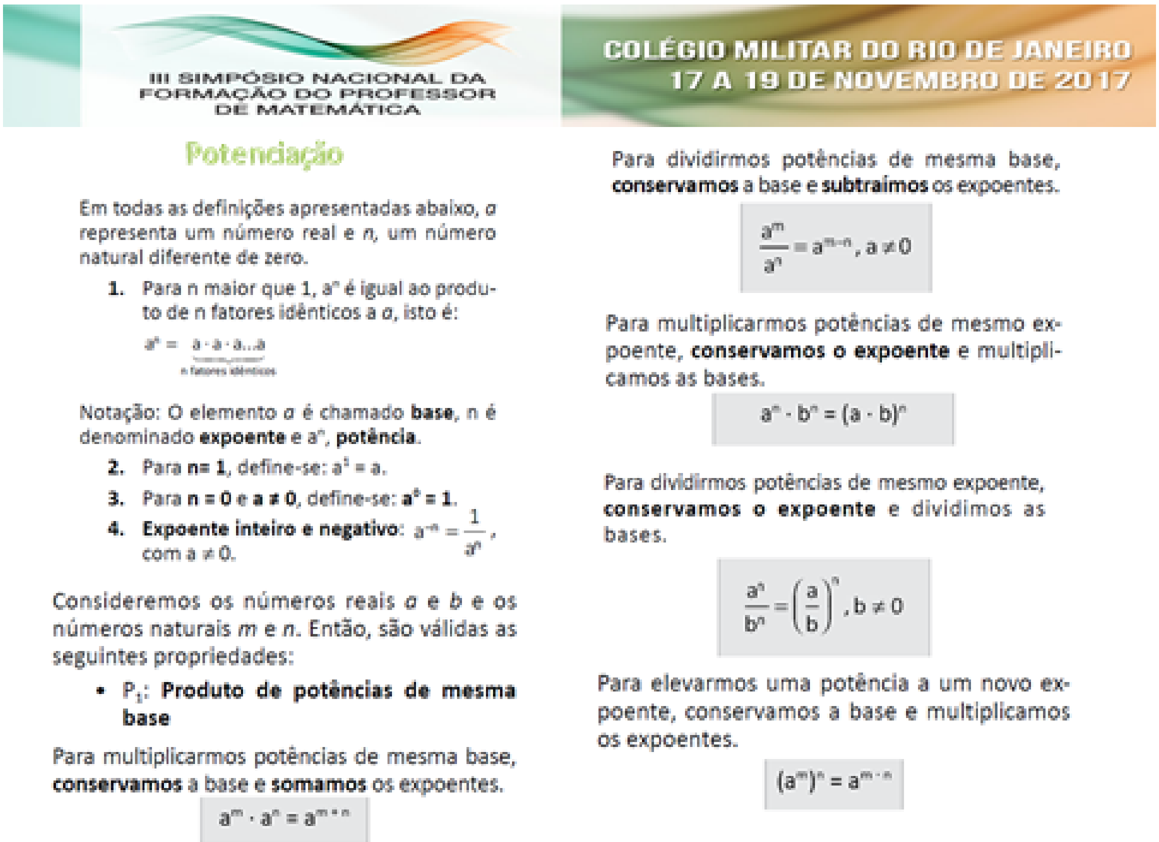
- Matriz Saeb: D17, D19, D26 e D27
- Enem: Competência 5: H21 e H23

5.1 Sugestão de portfólio





EXPRESSÃO ALGÉBRICA	INCÓGNITA(S)	VALOR	CÁLCULO	VALOR NUMÉRICO
$2c + 5$	c	C = 3	$2 . 3 + 5$	11
$3x + y$	x e y	x=2 e y=1	$3 . 2 + 1$	7
$3.(a + b)$	a e b	a=4 e b =5	$3 . (4 + 5)$	27
$\frac{b - 3}{2}$	b	b = 15	$\frac{15 - 3}{2}$	6



III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
17 A 19 DE NOVEMBRO DE 2017

Potenciação

Em todas as definições apresentadas abaixo, *a* representa um número real e *n*, um número natural diferente de zero.

1. Para n maior que 1, a^n é igual ao produto de n fatores idênticos a *a*, isto é:
   $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ fatores idênticos}}$

Notação: O elemento *a* é chamado **base**, n é denominado **expoente** e a^n, **potência**.

2. Para **n= 1**, define-se: $a^1 = a$.
3. Para **n = 0** e **a ≠ 0**, define-se: $\mathbf{a^0 = 1}$.
4. **Expoente inteiro e negativo**: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, com $a \neq 0$.

Consideremos os números reais *a* e *b* e os números naturais *m* e *n*. Então, são válidas as seguintes propriedades:

- P_1: **Produto de potências de mesma base**

Para multiplicarmos potências de mesma base, **conservamos** a base e **somamos** os expoentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Para dividirmos potências de mesma base, **conservamos** a base e **subtraímos** os expoentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$$

Para multiplicarmos potências de mesmo expoente, **conservamos o expoente** e multiplicamos as bases.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Para dividirmos potências de mesmo expoente, **conservamos o expoente** e dividimos as bases.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$$

Para elevarmos uma potência a um novo expoente, conservamos a base e multiplicamos os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
17 A 19 DE NOVEMBRO DE 2017

$$(-a)^n = \underbrace{(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)\cdot\ldots\cdot(-a)}_{n\ \text{vezes}}$$

$$-a^n = -\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{vezes}}$$

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{\left(a^m\right)\cdot\left(a^m\right)\cdot\left(a^m\right)\cdot\ldots\cdot\left(a^m\right)}_{n\ \text{vezes}}$$

$$a^{m^n} = a^{\overbrace{m\cdot m\cdot\ldots\cdot m}^{n\ \text{vezes}}}$$

Radiciação:

1. Considere a um número real não negativo e n um número natural diferente de zero.
O símbolo $\sqrt[n]{a}$ representa um número real b, não negativo, que satisfaz a igualdade $b^n = a$.
Notação: O número a é chamado **radicando**, n é denominado **índice** e $\sqrt[n]{a}$ é a **raiz n-ésima de a**.
Observação: O símbolo $\sqrt{a}$ representa o mesmo que $\sqrt[2]{a}$.

2. Considere a um número real e n um número natural ímpar.

O símbolo $\sqrt[n]{a}$ representa um número real b que satisfaz a igualdade $b^n = a$.

$$a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n},\ \text{com } a > 0,\ n \text{ inteiro e } k \text{ inteiro positivo.}$$

III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
17 A 19 DE NOVEMBRO DE 2017

Para multiplicarmos radicais com o mesmo índice, conservamos o índice e multiplicamos os radicandos.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Para dividirmos radicais com o mesmo índice, conservamos o índice e dividimos os radicandos.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

Para elevarmos uma raiz a um expoente, basta elevarmos o radicando a esse expoente.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Para obtermos a raiz de uma outra raiz, basta conservarmos o radicando e multiplicarmos os índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

Fatoração

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
17 A 19 DE NOVEMBRO DE 2017

Fatoração

Fatorar uma expressão algébrica é modificar sua forma de soma algébrica para produto, isto é, obter outra expressão que:

a. seja equivalente à expressão dada;

b. sua forma equivalente se apresente na forma de produto.

A. Fator comum

Devemos reconhecer o fator comum, seja ele numérico, literal ou misto; em seguida, colocamos em evidência esse fator comum e simplificamos a expressão deixando entre parênteses a soma algébrica.

Observe os exemplos abaixo.

a. $ab + ac = a \cdot (b + c)$

b. $3x^3y - 6x^2y^3 = 3x^2y(x - 2y^2)$

B. Agrupamento

Devemos dispor os termos do polinômio de modo que formem dois ou mais grupos entre os quais haja um fator comum e, em seguida, colocar o fator comum em evidência.

Observe:

$ax + ay + bx + by =$

$= a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y) =$

$= (a + b) \cdot (x + y)$

C. Diferença de quadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

D. Trinômio quadrado perfeito

Uma expressão algébrica pode ser identificada como trinômio quadrado perfeito sempre que resultar do quadrado da soma ou diferença entre dois monômios.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

e

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
17 A 19 DE NOVEMBRO DE 2017

E. Trinômio do 2º grau

Considerando o trinômio do 2º grau $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ e suas raízes reais x_1 e x_2, a seguinte igualdade é verdadeira:

$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

F. Soma e diferença de cubos

$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$ $\qquad$ $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

COLÉGIO MILITAR DO RIO DE JANEIRO
17 A 19 DE NOVEMBRO DE 2017

E vamos a solução:

a) Basta escolher $n = 1002$ e $k = 1$, pois

$$\begin{aligned}\sqrt{1001 \cdot 1003 + 1} &= \sqrt{1002^2 - 1^2 + 1}\\ &= \sqrt{1002^2}\\ &= 1002.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(n(n+3)+1)^2 &= n^2(n+3)^2 + 2n(n+3) + 1\\ &= n(n+3)[n(n+3)+2]+1\\ &= n(n+3)[n^2+3n+2]+1\\ &= n(n+3)[(n+1)(n+2)]+1\\ &= n(n+1)(n+2)(n+3)+1.\end{aligned}$$

c) Usando o item anterior e escolhendo $n = 2014$, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{(2014)(2015)(2016)(2017)+1} &= \sqrt{(2014 \cdot 2017 + 1)^2}\\ &= 2014 \cdot 2017 + 1.\\ &= 4062239.\end{aligned}$$

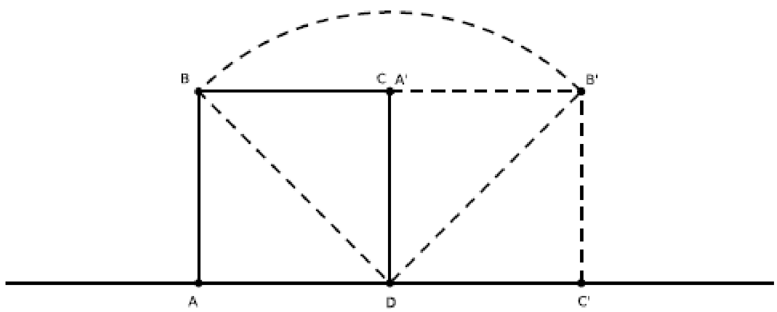
Capítulo 6

Proposta de Problemas para Construção de Portfólios

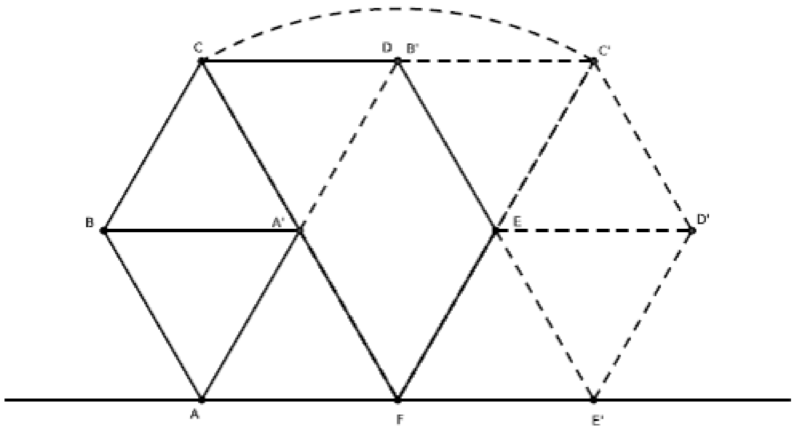
Para cada problema, a seguir, fazer uma lista de pré-requisitos para sua solução, situá-los nas matrizes de referência do Proeb e do Enem e idealizar um portfólio que seja capaz de revisitar os conteúdos necessários para a solução. Inclua no portfólio o enunciado do problema e sua respectiva solução.

6.1 Problema 1

- O quadrado ABCD de lado 1cm é "tombado" em torno do ponto D conforme a figura a seguir. Os traços pontilhados indicam a área ocupada pelo quadrado durante o seu movimento de tombamento. Qual a área total ocupada pelo quadrado do início até o final de seu tombamento?

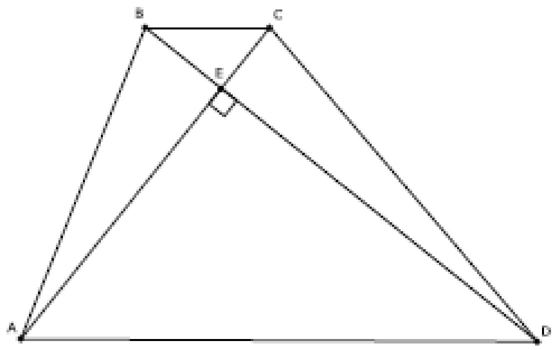


- Assim, como no caso do quadrado do item anterior, um hexágono regular ABCDEF de lado 1cm é "tombado" em torno do ponto F conforme a figura a seguir. Qual a área total ocupada pelo hexágono do início até o final do seu tombamento?



6.2 Problema 2

No desenho abaixo, ABCD é um trapézio e suas diagonais AC e BD são perpendiculares. Além disso, BC = 10 e AD = 30.



- Determine a razão entre os segmentos BE e ED.
- Encontre o valor do comprimento dos segmentos EC, AE e ED em função do comprimento de BE = x.
- Se (AE).(EC) = 108, determine o valor de (BE).(ED).

6.3 Problema 3

O mágico Magimático diz para uma pessoa da plateia escolher uma peça qualquer de um dominó comum. Tal peça é formada por um par de números de 0 a 6. Em seguida, ele diz para a pessoa escolher um dos números da peça e realizar a seguinte sequência de operações:

1. multiplicá-lo por 5;
2. somar o resultado anterior com 15;
3. multiplicar o último resultado por 2 e, finalmente,
4. somar o último resultado com o outro número da peça.

Realizadas tais operações, o resultado é divulgado e Magimático impressiona a plateia dizendo exatamente os números escritos no dominó escolhido.

- Sabendo que o resultado foi 62, como o mágico descobriu o número escolhido pelo membro da plateia?
- Se o resultado tivesse sido n, como descobrir os números da peça escolhida?

6.4 Problema 4

Arnaldo e Bernaldo decidem jogar um jogo que possui um número limitado de jogadas. Arnaldo escreve o número 1 no quadro em sua primeira jogada. Em seguida, Bernaldo escreve 2 ou 4 no quadro. Depois disso, Arnaldo escreve 3 ou 9 no quadro. Os dois continuam jogando alternadamente, mantendo a regra de que na jogada n o jogador escreve n ou n^2 no quadro. Arnaldo vence o jogo se, após a última jogada, a soma dos números no quadro for divisível por 3. Se a soma não for divisível por 3, então Bernaldo vence.

- Suponha que o jogo acabe na jogada de número 15. Mostre que Bernaldo pode garantir a vitória.
- Suponha que o jogo acabe na jogada de número 7. Nesse caso, qual dos dois jogadores poderá sempre garantir a vitória independentemente de como o seu adversário jogue? Como ele deverá jogar para vencer?

6.5 Problema 5

- Verifique que $(1 + tank)(1 + (tan45° - k)) = 2$
- Dado que: $(1 + tan1°)(1 + tan2°).....(1 + tan45°) = 2^n$, encontre n.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL, Ministério da Educação - Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[2] BRASIL, Ministério da Educação – Secretaria da Educação Básica. *Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa*. Brasília: MEC/SEB, 2014.

[3] D'AMBROSIO, Ubiratan. *EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Da Teoria à Prática*. 23ºEd. Campinas-SP: Papirus, 2012.

[4] GIRALDO, Vitor & ROQUE, Tatiana. *O saber do professor de Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2013.

[5] GRANJA, Carlos E. & PASTORE, José L. *ATIVIDADES EXPERIMENTAIS DE MATEMÁTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL*. São Paulo: Edições SM, 2012.

[6] HOFFMANN, Jussara. *Avaliar para promover: as setas do caminho*. Porto Alegre: Mediação, 2014.

[7] IMPA / OBMEP. *BANCO DE QUESTÕES 2015*. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[8] KLEIN, Felix.*Matemática elementar de um ponto de vista superior*. Volume I. Parte 1. Aritmética. Lisboa. Editora SPM, 2009.

[9] PAIS, Luiz Carlos. *ENSINAR E APRENDER MATEMÁTICA*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

[10] POLYA, George. *A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

[11] SADOVSKY, Patrícia. *O ENSINO DE MATEMÁTICA HOJE. Enfoques, sentidos e desafios*. São Paulo: Ática, 2007.

[12] WALLE, John A. Van de. *MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL, Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula*. 6ª edição. Porto Alegre: Artmed, 2009.

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Medio Vol. 4 - Exercicios e Soluções* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Um Convite à Matemática* - D.C de Morais Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 1 - Números Reais - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 3 - Introdução à Análise - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 4 - Combinatória - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 5 - Teoria dos Números - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 6 - Polinômios - A. Caminha
- *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)
- *Como Resolver Problemas Matemáticos* - T. Tao
- *Geometria em Sala de Aula* - A. C. P. Hellmeister (Comitê Editorial da RPM)
- *Números Primos, amigos que causam problemas* - P. Ribenboim
- *Introdução à Teoria dos Conjuntos* - G. P. Novaes
- *Manual de Redação Matemática* - D. C. de Morais Filho
- *Introdução à Teoria dos Conjuntos* - G. Pires Novaes

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

(continuação dos títulos publicados)

COLEÇÃO PROFMAT

- *Introdução à Álgebra Linear* - A. Hefez e C.S. Fernandez
- *Tópicos de Teoria dos Números* - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha
- *Polinômios e Equações Algébricas* - A. Hefez e M.L. Villela
- *Tópicos de Historia de Matemática* - T. Roque e J. Bosco Pitombeira
- *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática* - V. Giraldo, P. Caetano e F. Mattos
- *Temas e Problemas Elementares* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Números e Funções Reais* - E. L. Lima
- *Aritmética* - A. Hefez
- *Geometria* - A. Caminha
- *Avaliação Educacional* - M. Rabelo
- *Geometria Analítica* - J. Delgado, K. Frensel e L. Crissaff
- *Matemática Discreta* - A. Morgado e P. C. P. Carvalho
- *Matemática e Atualidade - Volume 1* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Fundamentos de Cálculo* - A. C. Muniz Neto
- *Matemática e Atualidade - Volume 2* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear* - A. Hefez e C. de Souza Fernandez
- *Exercícios Resolvidos de Aritmética* - A. Hefez

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D. G. de Figueiredo
- *Números Racionais e Irracionais* - I. Niven
- *Tópicos Especiais em Álgebra* - J. F. S. Andrade

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L. N. de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M. P. do Carmo
- *Matemática Discreta* - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- *Álgebra Linear: Um segundo Curso* - H. P. Bueno
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa* - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.
- *Elementos de Topologia Geral* - E. L. Lima
- *A Construção dos Números* - J. Ferreira
- *Introdução à Geometria Projetiva* - A. Barros e P. Andrade
- *Análise Vetorial Clássica* - F. Acker
- *Funções, Limites e Continuidade* - P. Ribenboim
- *Fundamentos de Análise Funcional* - G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira
- *Teoria dos Números Transcendentes* - D. Marques
- *Introdução à Geometria Hiperbólica - O modelo de Poincaré* - P. Andrade

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

(continuação dos títulos publicados)

- *Álgebra Linear: Teoria e Aplicações* - T. P. de Araújo
- *Introdução à Análise Matemática na Reta* - C. I. Doering
- *Topologia e Análise no Espaço Rn* - R. Freire de Lima
- *Equações Ordinárias e Aplicações* - B. Scárdua
- *Cálculo Avançado* - R. Cipolatti
- *Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e superficies* - A. Lymberopoulos e I. Terek Couto

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H. Bolfarine e M. Sandoval
- *Discretização de Equações Diferenciais Parciais* - J. Cuminato e M. Meneguette
- *Fenômenos de Transferência – com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia volume 1: Fundamentos* - J. Pontes e N. Mangiavacchi

COLEÇÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª* - E. Mega e R. Watanabe
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª* - C. Moreira e E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues
- *21 Aulas de Matemática Olímpica* - C. Y. Sh
- *Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções* - K. I. M. Oliveira e A. J. C. Fernández
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Fundamental* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Médio* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 17ª a 24ª* - C. G. T. de A. Moreira, C. Y. Shine, E. L. R. Motta, E. Tengan e N. C. Saldanha
- *10 matemáticos 100 problemas* - E. Wagner (Organização)

COLEÇÃO FRONTEIRAS DA MATEMÁTICA

- *Fundamentos da Teoria Ergódica* - M.Viana e K. Oliveira
- *Tópicos de Geometria Diferencial* - A. C. Muniz Neto
- *Formas Diferenciais e Aplicações* - M. Perdigão do Carmo
- *Topologia das Variedades* - W. de Melo

COLEÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume I Números Naturais* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo
- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume II Números Inteiros* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo

COLEÇÃO COLETÂNEAS DE MATEMÁTICA

- *Teorema Vivo* - C. Villani

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

ISBN 978-85-8337-141-0

9 788583 371410 >