3º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

EXPERIÊNCIAS GEOANALÍTICAS NA SALA DE AULA

Beto Rober Saavedra

ANPMat
Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

Experiências Geoanalíticas
na Sala de Aula

Experiências geoanalíticas na sala de aula

Capa: Pablo Diego Regino
Projeto gráfico: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

ISBN 978-65-81453-01-5

Distribuição
Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
https://www.anpmat.org.br / email: secretaria@anpmat.org.br

3º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

EXPERIÊNCIAS GEOANALÍTICAS NA SALA DE AULA

Beto Rober Saavedra

1ª edição
2019
Rio de Janeiro

ANPMat

Dedicated to My Mother Carmen Saavedra and My Son Diego.

Sumário

Prefácio

Através de soluções de problemas da Geometria Analítica, pretende-se comentar as potencialidades de seus conceitos e de suas formulas, usadas, muitas vezes, mecanicamente. Colateralmente, propagar com modéstia que no processo de ensino-aprendizagem desta disciplina ainda existem novos horizontes por descobrir e explorar. Este trabalho não é uma introdução à Geometria Analítica; senão uma revisão.

Agradecimentos

Agradeço ao Comite Organizador e aos Senhores Avaliadores por permitir-me ministrar este minicurso no III Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste - Juazeiro - BA / UNIVASF (2019). Igualmente, agradeço o apoio inestimável da SBM e da ANPMat a nós os professores de Matemática.

Introdução

"Nenhum Conhecimento Humano pode ir além de sua Experiência."
– Jhon Locke, *Ensaio Acerca do Entendimento Humano.*

Numa ocasião desafiei a meus alunos a dar a equação cartesiana de uma hipérbole com assíntotas $7x \pm 6y = 0$. Após muita cogitação e agitação conseguiram dar uma resposta razoável:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} = 1 \text{ ou } \frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{36} = 1$$

Era de esperar esta resposta dos alunos que lembraram que a assíntotas das hipérboles.Mas, ninguem tentou dar as outras respostas

$$\frac{x^2}{36k} - \frac{y^2}{49k} = 1$$

. onde k é qualquer número diferente de zero. Contudo, não hesitei em perguntar: se as assíntotas fossem duas retas quaisquer não paralelas, como seria a equação cartesiana da hipérbole? Por exemplo, se as retas fossem

$$3x + 2y + 5 = 0 \quad \text{e} \quad 2x - 7y + 1 = 0.$$

Os alunos mais avançados só conseguiram dar como resposta um esboço de estratégia: realizar uma translação de eixos coordenados ao ponto de interseção das retas dadas e, logo, realizar uma rotação de eixos coordenados, onde a bissetriz das retas seja o eixo das abcissas, com o intuito de transformar o problema ao simples formato do primeiro desafio. Observei que a estratégia era eficaz, mas exaustiva. Assim, me mostrei satisfeito com a resposta parcial. Como no caso anterior, a resposta é uma família de hipérboles:

$$(3x + 2y + 5)(2x - 7y + 1) = k, \quad \text{onde } k \neq 0.$$

Para conseguir essa resposta usei o conceito de distância dirigida de um ponto a uma reta e simples argumentos geométricos.

Este breve relato ilustra o motivo de minha praxe docente de indagar (e de ensinar) o potencial dos conceitos, já seja geométricos, algébricos e analíticos, evitando, na medida do possível, a resolução de problemas mero mecânico. Esta postura me ajudou a lidar com outros desafios matemáticos, conseguindo resultados satisfatórios. Específicamente, os conceitos que exploro são os seguintes:

- Noções de Geometria Euclidiana, de Álgebra Básica e de Trigonométria;
- Distância entre dois pontos: Equação Cartesiana da Circunferência e Equação Cartesiana da Esfera;
- Vetor: Norma de um vetor e Vetor unitário;
- Interpetação Geométrica da Soma de vetores;
- Interpretação Geométrica da Multiplicação de um vetor por um número;
- Interpretação Geométrica de uma Combinação Linear de vetores;
- Produto Interno: Propriedades, Ângulo entre vetores e Area;
- Produto Vetorial e Produto Misto: Area e Volume;
- Representação Paramétrica e Cartesiana da reta;
- Representação Paramétrica e Cartesiana do Plano.

Todos estes conceitos sao tratados em qualquer livro texto; por exemplo, ver [2] e [1]. Mas, a intenção deste escrito é compartilhar como aproveito o potencial destes conceitos. Não posso deixar de frisar que as ideias expostas aqui as considero *em fase experimental*. Após sua leitura crítica e cuidadosa, espero se resgate alguma relevância.

Capítulo 1

Alguns Resultados Profícuos

Em este capítulo registrare alguns resultados com explanação que formam, em geral, o arcabouço do seguinte capítulo. Por outro lado, as provas destes resultados dadas aqui elucidam como manusseio as noções básicas da Geometria Analítica.

Proposisação 1: (Ângulos Suplementarios) Sejam os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ não paralelos. Sejam θ, o ângulo entre os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e γ, o ângulo entre os vetores $\mathbf{v}$ e $-\mathbf{w}$. Então, estes ângulos são suplementarios. Isto é,

$$\theta + \gamma = \pi$$

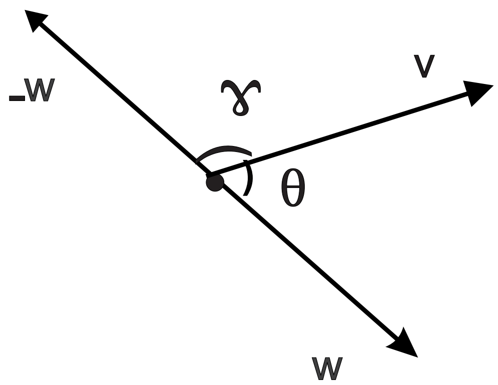

Figura 1.1: Ângulos Suplementarios .

Prova. Ver figura 1.1 ■

Proposição 2 (Vetor Bissetriz): Sejam dois vetores não paralelos $\vec{v}$ e $\vec{w}$. O vetor

$$\frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}+\frac{\overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{w}|}=\frac{1}{|\overrightarrow{v}|}\overrightarrow{v}+\frac{1}{|\overrightarrow{w}|}\overrightarrow{w}$$

é bissetriz destes vetores.

Prova: Ver figura 1.2. É suficiente observar que os vetores unitários $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ e $\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ formam um losango. Logo, a diagonal $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}+\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ seria una bissetriz ■

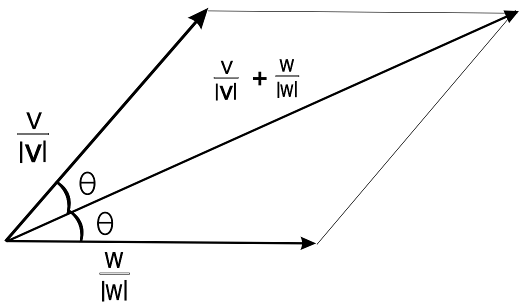

Figura 1.2: Losango formado por vetores unitários .

Proposição3 (Projeção Perpendicular): Sejam dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ não paralelos. Então, existe um único número $\lambda > 0$ tal que o vetor $\mathbf{w}-\lambda\mathbf{v}$ é perpendicular a $\overrightarrow{V}$:

Prova: Ver figura 1.3 Como os vetores não são paralelos podemos admitir que não são nulos. A proposição resulta das seguintes equivalências:

$$(\mathbf{w}-\lambda\mathbf{V}).\mathbf{v}=0 \Leftrightarrow \mathbf{W}.\mathbf{V}=\lambda|\mathbf{V}|^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda=\frac{\mathbf{w}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}$$

Desse modo terminamos a prova ■

Proposição 4 (Vetor Paralelo e Vetor Perpendicular a uma Reta): Seja r a reta determinada pela equação $Ax+By+=C0$. Então, os vetores

$$\mathbf{v}_1=(A,B) \text{ e } \mathbf{v}_2=(-A,-B)$$

são perpendiculares á reta r. E, os vetores

$$\mathbf{w}_1=(-B,A) \text{ e } \mathbf{w}_2=(B,-A)$$

são paralelos á reta r.

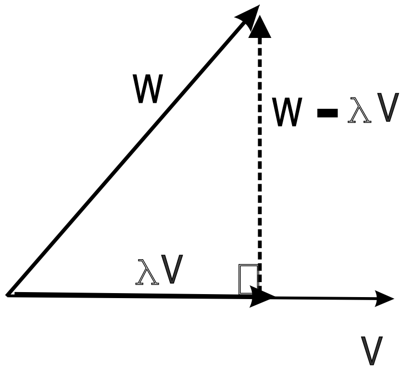

Figura 1.3: Projeção Ortogonal do vetor W sobre o vetor V .

Observação1: No momento de inferir a Equação Cartesiana e a Equação Pramétrica de uma reta na sala de aula, deve-se salientar os coeficientes que formam as coordenadas do vetor perpendicular e o vetor paralelo.

Notação1: Observar que a reta $Ax + By + C = 0$ divide o plano $\mathbb{R}^2$ em dois semiplanos disjuntos S_1 e S_2. Conveniaremos que S_1 encontra-se no sentido de $\mathbf{v}_1 = (A, B)$. paralelo.

Notação2: A distância, do ponto P=(x,y) a uma reta r, denotaremos por $d_0(P; r)$.

Proposição4(Distância Dirigida de um ponto a uma reta) Sejam r a reta determinada pela equação

$$ax + by + c = 0, \quad \text{onde o vetor } \mathbf{n} = (a, b) \text{ é unitário,}$$

e um ponto qualquer $P = (x_0, y_0)$ do plano. Então, o número

$$ax_0 + by_0 + c$$

é a distância dirigida de P á reta r. Isto é,

$$\begin{cases} d_0(P, r), & \text{se } P \in S_1; \\ -d_0(P, r), & \text{se } P \in S_2; \\ 0, & \quad P \in r. \end{cases}$$

Prova Veja a figura 1.4 Seja o ponto $Q = (x_1, y_1)$ a projeção ortogonal de P sobre r. Assim podemos afirmar que a norma $|\overrightarrow{QP}|$ é a distância do ponto P à reta r.Por outro lado, notar que $\overrightarrow{QP}$ é paralelo a $\mathbf{n}$. Isto é, $\overrightarrow{QP} = k\mathbf{n}$. Decorre-se que $|k| = |\overrightarrow{QP}| = d(P; r)$. O seja a constante k seria a distância dirigida do ponto P à reta r. Pois, se $k > 0$, o ponto

$P \in S_1$. Se $k < 0$, $P \in S_2$. E, por último se $k = 0$, $P \in r$. A seguir, calcularemos o valor de k:

$$\begin{aligned} k &= (k.\mathbf{n}).\mathbf{n} \\ &= \overrightarrow{QP}.\mathbf{n} = (P - Q).\mathbf{n} \\ &= \overrightarrow{OP}.\mathbf{n} - \overrightarrow{OQ}.\mathbf{n} \\ &= (ax_0 + by_0) - (ax_1 + by_1) = (ax_0 + by_0) - (-c) \\ &= (ax_0 + by_0) + c \end{aligned}$$

Assim terminamos a prova ■

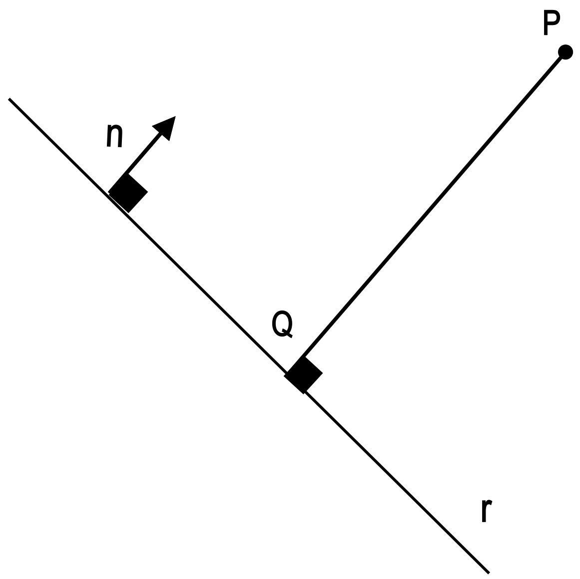

Figura 1.4: Projeção Ortogonal do ponto P sobre a reta r .

Notação 3: A distância dirigida, do ponto P=(x,y) a uma reta r, denotaremos por $d_1(P; r)$.

Capítulo 2

Exploração na Geometria Analítica

O escopo deste capítulo é aprofundar a sintonia entre as equações de primeiro e segundo grau de duas variáveis e as Cônicas.Colateralmente, inspirar aos colegas para a aplicação desta postura a outras áreas da Geometria Analítica.Esta postura corresponde ao análise qualitativo praticado habitualmente no campo das Equações Diferenciais Ordinárias e no Campo das Equações Diferenciais Parciais. Ao finalizar este capítulo, registrarei algumas curiosidades da Geometria Analítica no espaço.

2.1 Brincando com as retas.

Forma Simples de uma reta: Seja a reta r, definida por $Ax + By + C = 0$. A equação equivalente

$$ax + by + c = 0, \quad \text{onde}$$

$$a = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad b = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{e} \quad c = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

chamaremos de *Forma Simples da reta de r*.Observar que o vetor perpendicular $\mathbf{v} = (a, b)$ é unitário.

Significado Geometrico de $\mathbf{Ax_0 + By_0 + C > 0}$: Sejam r a reta determinada pela equação $Ax + By + C = 0$ e o ponto $P = (x_0, y_0)$. Pela Proposição 4, temos

$$\begin{aligned} 0 < Ax_0 + By_0 + C &= \sqrt{A^2 + B^2}\,.\,\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &= \sqrt{A^2 + B^2}(ax_0 + by_0 + c) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2}d_1(P; r). \end{aligned}$$

Além disso, $P \in S_1$ e $d_0(P; r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ■

Significado Geometrico de $\mathbf{ax_0 + by_0 + c < 0}$: Deixamos como tarefa ao leitor.

Notação 4: Denotaremos a distância entre duas retas , r e r_1, por $d(r;r_1)$.

Distância entre duas retas paralelas. Sejam duas retas paralelas r e r_1, definidas por

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{e} \quad kAx + kBy + C_1 = 0,$$

e um ponto $P = (x_0, y_0) \in r$. Logo,

$$\begin{aligned} d(r;r_1) = d_0(P, r_1) &= |d_1(P, r_1)| \\ &= \frac{kAx_0 + kBy_0 + C_1}{\sqrt{k^2A^2 + k^2B^2}} \\ &= \frac{|-kC + C_1|}{\sqrt{k^2A^2 + k^2B^2}} \\ &= \frac{|C_1 - kC|}{\sqrt{k^2A^2 + k^2B^2}} \end{aligned}$$

Observar que, para calcular $d(r;r_1)$, não se especifica o ponto $P \in r$; é suficiente supor que $P \in r$ ■

Feixe de retas com um ponto comun: Sejam duas retas não paralelas,

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ e } A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

que intersectam no ponto $P = (x_0, y_0)$. As equações

$$(\lambda A_1 + \beta A_2)x + (\lambda B_1 + \beta B_2)y + (\lambda C_1 + \beta C_2) = 0, \qquad (\triangle)$$

onde $\lambda^2 + \beta^2 \neq 0$, representam uma familia de retas que se intersectam no ponto P. De fato, como os vetores $\mathbf{v}_1 = (A_1, B_1)$ e $\mathbf{v}_2 = (A_2, B_2)$ não são paralelos, o vetor

$$\mathbf{v} = (\lambda A_1 + \beta A_2, \lambda B_1 + \beta B_2) = \lambda \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$$

não é nulo. Caso contrário, ja que $\lambda \neq 0$ ou $\beta \neq 0$, teriamos duas possibilidades:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\beta}{\lambda}\mathbf{v}_2 \quad \text{ou} \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\lambda}{\beta}\mathbf{v}_2.$$

Ou seja, o vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ seriam paralelos contradizendo as condições admitidas. Agora, se pode afirmar que as equações representam retas. Substituindo as coordenadas do ponto P em $(\triangle)$, prova-se que todas as retas se intersectam em P ■

Reta Bissetriz: Sejam duas retas não paralelas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ e $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. As **formas simples** destas retas são

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{e} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

respectivamente. Logo, a reta r , definida por

$$(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y + c_1 + c_2 = 0,$$

é uma reta bissetriz destas retas. De fato, como no item anterior, ja que os vetores v_1 e v_2 são não paralelos, o vetor $\mathbf{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ não é nulo. Além disso,pela proposição 2, é o vetor $\mathbf{v}$ é bissetriz dos vetores v_1 e v_2, que são vetores perpendiculares as retas, respectivamente.Portanto, a reta r é bissetriz destas retas ■

.

2.2 Brincando com as Retas Tangentes às Cônicas.

Reta Tangente à Elipse: Seja a elipse $\mathcal{E}$ dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. A reta tangente $L_{\mathcal{E}}$ à elipse $\mathcal{E}$ no ponto $P = (x_0, y_0) \in E$ é definida pela equação

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1. \qquad (I)$$

A reta L_E intersecta $\mathcal{E}$ num único ponto. De fato, se supomos outro ponto $Q \in E \cap L_E$, de coordenadas $Q = (x_1, y_1)$, podemos escrever

$$\frac{x_0x_1}{a^2} + \frac{y_0y_1}{b^2} = 1. \qquad (II)$$

Consideremos a reta tangente à elipse E, no ponto Q, que denotaremos por L_Q, definida por

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1. \qquad (III)$$

A partir das equações (I),(II) e (III), é imediato observar que os pontos P e Q pertencem ao conjunto $L_E \bigcap L_Q$. Logo, $L_Q = L_E$. Assim, podemos afirmar que os vetores $v_1 = (\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2})$ e $v_2 = (\frac{x_1}{a^2}, \frac{y_1}{b^2})$ são paralelos.Isto é, existe um λ tal que

$$\frac{x_1}{a^2} = \lambda\frac{x_0}{a^2} \quad \text{e} \quad \frac{y_1}{b^2} = \lambda\frac{y_0}{b^2} \qquad (IV)$$

As equações (I), (IV) e (III), nessa ordem, nos leva ao seguinte :

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\lambda x_0x}{a^2} + \frac{\lambda y_0y}{b^2}\\ &= \frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

Agora, como $\lambda = 1$, e por (IV), podemos afirmar que $P = Q$ ■

Reta Tangente à Parábola: Seja a parábola $\mathcal{P}$ dada por $y = ax^2,\ a \neq 0.$ A reta tangente $L_{\mathcal{P}}$ à parábola $\mathcal{P}$ num ponto $P = (x_0, y_0) \in E$ é definida pela equação

$$y = 2ax_0x - y_0. \qquad (i)$$

L_P intersecta $\mathcal{P}$ num único ponto. De fato, se supomos outro ponto $Q \in E \cap L_E,$ de coordenadas $Q = (x_1, y_1)$, podemos escrever

$$y_1 = 2ax_0x_1 - y_0. \qquad (ii)$$

Consideremos a reta tangente à elipse E, no ponto Q, que denotaremos por $L_Q,$ definida por

$$y = 2ax_1x - y_1. \qquad (ii)$$

A partir das equações (i),(ii) e (iii), é imediato observar que os pontos P e Q pertencem ao conjunto $L_{\mathcal{P}} \bigcap L_Q$. Logo, $L_Q = L_{\mathcal{P}}$. Assim, podemos afirmar que os vetores $v_1 = (2ax_1, -1)$ e $v_2 = (2ax_0, -1)$ são paralelos.Isto é, existe um λ tal que

$$2ax_1 = \lambda 2ax_0 \ \text{ e } \ 1 = \lambda.$$

Assim, podemos afirmar que $P = Q$ ■

Reta Tangente à Hipérbole: Seja a hipérbole

$$\mathcal{H} : (bx - ay)(bx + ay) = b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \qquad (i)$$

As assíntotas da hipérbole $\mathcal{H},\ S_1$ e $S_2,$ são definidas por

$$bx - ay = 0 \ \text{ e } \ bx + ay = 0, \qquad (ii)$$

respectivamente. A reta tangente $L_{\mathcal{H}},$ á hipérbole $\mathcal{H},$ num ponto $P = (x_0, y_0) \in H,$ tem equação

$$b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2. \qquad (iii)$$

É a única reta não paralela às assíntotas que intersecta a $\mathcal{H}$ núm único ponto. Em efeito, seja a reta L que passa pelos pontos $P = (x_1, y_1) \in S_1$ e $Q = (x_2, y_2) \in S_2$. Ou seja,

$$bx_1 - ay_1 = 0 \ \text{ e } \ bx_2 - ay_2 = 0. \qquad (iv)$$

A reta L pode ser definida, paramétricamente, por

$$L = \{((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Analisar a interseção $L \cap \mathcal{H}$ equivalente a estudar a equação, considerando (iv),

$$b^2((1-t)x_1 + tx_2)^2 - a^2((1-t)y_1 + ty_2)^2 = a^2b^2,$$

que é equivalente a

$$2(t^2 - t)(b^2 x_1 x_2 - a^2 y_1 y_2) = a^2 b^2 \qquad (v)$$

Se $b^2 x_1 x_2 - a^2 y_1 y_2 = 0$, a reta L não intersecta a hiperbole. Caso contrário, (v) é equivalente a

$$(t - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{a^2 b^2}{2(b^2 x_1 x_2 - a^2 y_1 y_2)} \qquad (vi)$$

Logo, a condição

$$a^2 x_1 x_2 - b^2 y_1 y_2 = 2a^2 b^2, \qquad (vii)$$

é necessária e suficiente a $L \cap \mathcal{H} = \{R = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})\}$. A seguir, provaremos que L é a reta tangente à hipérbole $\mathcal{H}$, no ponto R, mostrando que os pontos P e Q pertençem à reta tangente L_R à hipérbole $\mathcal{H}$, definida por

$$b^2(\frac{x_1 + x_2}{2})x - a^2(\frac{y_1 + y_2}{2})y = a^2 b^2. \qquad (viii)$$

Se colocamos as coordenadas de P em (viii), obtermos:

$$\begin{aligned} b^2(\frac{x_1 + x_2}{2})x_1 - a^2(\frac{y_1 + y_2}{2})y_1 = a^2 b^2 &\Leftrightarrow \frac{b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2}{2} + \frac{b^2 x_1 x_2 - a^2 y_1 y_2}{2} = a^2 b^2 \\ &\Leftrightarrow 0 + \frac{2a^2 b^2}{2} = a^2 b^2 \qquad \text{(por } (ii) \ e \ (vii)) \\ &\Leftrightarrow a^2 b^2 = a^2 b^2. \end{aligned}$$

O anterior nos confirma que $P \in L_R$. Procediendo, analogamente, verifica-se que $Q \in L_R$. Desse modo, se verificou que as retas tangentes são as únicas retas não paralela às assíntotas que intersecta a $\mathcal{H}$ núm único ponto ■

Exercício: Seja a hipérbole

$$\mathcal{H} : xy = 1.$$

Encontrar a Equação Cartesiana da reta tangente a $\mathcal{H}$ que passa pelo ponto $(0, 2)$.

2.3 Propriedades Refletoras das Cônicas

Não podia deixar de honrar, neste trabalho, às cônicas por suas propriedades refletoras vitais para a sociedade moderna : farol dianteiro dos carro , antena parabólica, ponte suspensa, arcos parabolicos, espelhos parabólicos, acustica, telescópios, etc. Para a exposição, fixemos a seguinte definição: diz-se que uma reta L é perpendicular a uma Cônica $\mathcal{C}$, em $P \in \mathcal{C}$, se é perpendicular à reta T, tangente a $\mathcal{C}$ no ponto P.

Propriedade de Reflexão da Parábola: Seja P um ponto da parábola $\mathcal{P}$ com foco F. A reta perpendicular reta tangente à parábola $\mathcal{P}$ em P é bissetriz do ângulo formado por $\overline{PF}$ e a reta paralela ao eixo focal da parábola, que paasa por P. De fato, define-se $\mathcal{P}$ pela equação

$$y^2 = 4ax, \quad a > 0.$$

Neste caso, seu foco tem coordenadas $F = (a, 0)$, a equação de sua diretriz é $x = -a$ e seu eixo focal é paralélo ao vetor $i = (1, 0)$. Se $P = (x_0, y_0)$, a reta tangente L à parábola $\mathcal{P}$, no ponto P, é representada por

$$2ax - y_0 y + 2ax_0 = 0.$$

A reta perpendicular à reta tangente L seria paralela ao vetor $\mathbf{n} = (2a, -y_0)$, perpendicular a L. Observar que , pela definiçao de uma Parábola, vale $|\overrightarrow{PF}| = x_0 + a$. Logo, para provar a afirmação é suficiente provar que o vetor $\mathbf{n}$ é bissetriz dos vetores $\overrightarrow{PF}$ e o vetor i. Isto é, os vetores $\frac{\overrightarrow{PF}}{|\overrightarrow{PF}|} + i$ e $\mathbf{n}$ são paralelos. Fato que segue-se das seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{PF}}{|\overrightarrow{PF}|} + i &= (\frac{a - x_0}{x_0 + a}, \frac{-y_0}{x_0 + a}) + (1, 0) \\ &= \frac{1}{x_0 + a}(2a, -y_0) = \frac{1}{x_0 + a}\mathbf{n} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

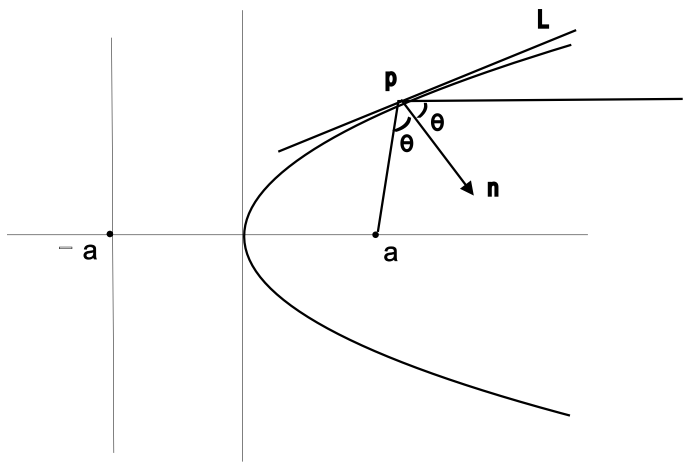

Figura 2.1: Propriedade de Reflexão da Parábola .

Propriedade de Reflexão da Elipse: Seja P um ponto da Elipse $\mathcal{E}$, com focos focos F_1 e F_2 . A perpendicular à Elipse $\mathcal{E}$ em P é bissetriz do ângulo $\widehat{F_1PF_2}$. Ver figura 2.2 De fato, representa-se $\mathcal{E}$ pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a > b.$$

Neste caso, os focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Se $P = (x_0, y_0)$, a reta tangente L à elipse $\mathcal{E}$, no ponto P, é representada por

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 x_0 x + a^2 x_0 x = a^2 b^2.$$

A reta perpendicular à reta tangente L seria paralela ao vetor $\mathbf{n} = (b^2 x_0, a^2 y_0)$, perpendicular a L.Observar que, pela definição de Elipse, vale

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a.$$

Esta equação implica que

$$\begin{aligned} 2a(|PF_1| - |PF_2|) &= (|PF_1| - |PF_2|)(|PF_1| + |PF_2|) \\ &= 4x_0 c \qquad\qquad (I) \end{aligned}$$

Logo, para provar a afirmação é suficiente provar que o vetor $-\mathbf{n}$ é bissetriz dos vetores $\overrightarrow{PF_1}$ e o vetor $\overrightarrow{PF_2}$. Fato que segue das seguintes equivalências:

$$\frac{\overrightarrow{PF_1}\mathbf{n}}{|\overrightarrow{PF_1}||\mathbf{n}|} = \frac{\overrightarrow{PF_2}\mathbf{n}}{|\overrightarrow{PF_2}||\mathbf{n}|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 c x_0 + a^2 b^2}{|\overrightarrow{PF_1}||\mathbf{n}|} = \frac{-b^2 c x_0 + a^2 b^2}{|\overrightarrow{PF_2}||\mathbf{n}|}$$

$$\Leftrightarrow (|\overrightarrow{PF_1}| + |\overrightarrow{PF_2}|) b^2 c x_0 = (|\overrightarrow{PF_1}| - |\overrightarrow{PF_2}|) a^2 b^2$$

$$\Leftrightarrow 2ab^2 c x_0 = \frac{2x_0 c}{a} a^2 b^2. \qquad \text{Por } (I)$$

Se θ é o ângulo entre $-\mathbf{n}$ e $\overrightarrow{PF_1}$ e ϕ é o ângulo entre $-\mathbf{n}$ e $\overrightarrow{PF_2}$, pelo anterior, teríamos

$$cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{PF_1}\mathbf{n}}{|\overrightarrow{PF_1}||\mathbf{n}|} = \frac{\overrightarrow{PF_2}\mathbf{n}}{|\overrightarrow{PF_2}||\mathbf{n}|} = cos(\phi).$$

Desse modo, terminamos a prova ■

Propriedade de Reflexão da Hipérbole: Seja P um ponto de uma Hipérbole H de focos F_1 e F_2. Mostrar que a reta tangente a H em P é a bissetriz do ângulo $\widehat{F_1 P F_2}$. Deixa-se como exercício.

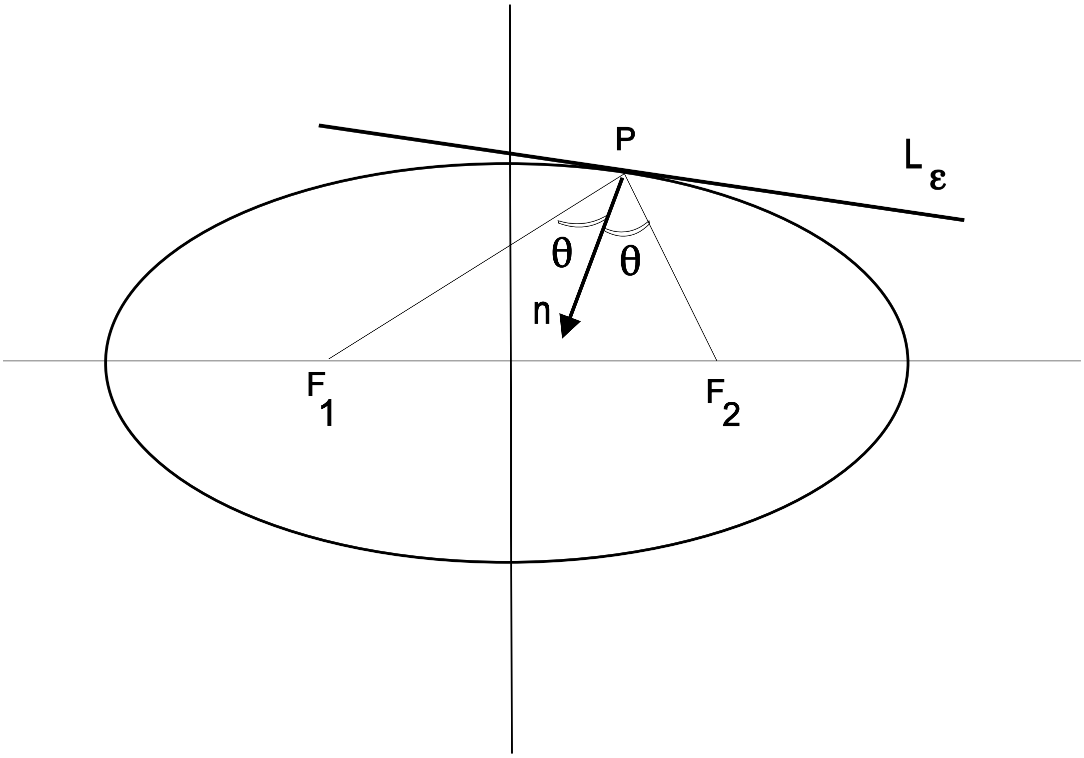

Figura 2.2: Propriedade de Reflexão da Elipse .

2.4 Curiosidades no Espaço

Equação Cartesiana da Reta no Espaço: A equação

$$(x - y + z - 5)^2 + (2x - y + 1)^2 = 0 \qquad (i)$$

representa uma reta. Pois,

$$(i) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + z - 5 = 0 \\ \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases},$$

Ou seja, (i) representa a interseção de dois planos não paralelos ■

Equação Cartesiana de uma Parábola no Espaço: A equação

$$(z^2 - x^2 - y^2)^2 + (x + y + z - 1)^2 = 0 \qquad (ii)$$

representa uma parábola. De fato, a partir da seguinte equivalência

$$(ii) \Longleftrightarrow \begin{cases} z^2 - x^2 - y^2 = 0 \\ \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases},$$

podemos afirmar que (ii) representa a interseção de um cone com um plano. Para mostrar que se trata de uma parábola, definiremos um sistema de coordenadas no plano. A reta $X = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) + t(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) : t \in \mathbb{R}\}$ seria o eixo das abscissas. A reta $Y = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) + s(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}) : s \in \mathbb{R}\}$. Observar que esta retas são perpendiculares e estam contidas no plano $x + y + z = 1$. Um ponto generico do plano seria

$$(\frac{1}{2} + \frac{-t}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{6}}, \frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{6}}, \frac{-2s}{\sqrt{6}}), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Colocaremos estas coordenadas na equacão do cone afim de encontrar uma relação entre a variável s e a variável t. Isto é

$$(\frac{-2s}{\sqrt{6}})^2 - (\frac{1}{2} + \frac{-t}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{6}})^2 - (\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{6}})^2 = 0.$$

Esta equação reduz-se a

$$t^2 = \sqrt{6}(s + \frac{\sqrt{6}}{4}).$$

Com esta última equação podemos assegurar que (ii) representa uma parábola ■

Referências Bibliográficas

[1] DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. *Geometria Analítica* .Rio de Janeiro: Editora SBM, Coleção PROFMAT, 1ra edição,2013.

[2] REIS, G.; SILVA, V. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2da edição 2007.

REALIZAÇÃO

ANPMat

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

ORGANIZAÇÃO

SBM

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

ISBN 978-65-81453-01-5

9 786581 453015 >