2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Sudeste

REFLEXÕES EM GRUPO E ANÁLISE DE ERROS: UMA ALTERNATIVA PARA SALA DE AULA?

Carmen Vieira Mathias
Luisa Rodríguez Doering
Cydara Cavedon Ripoll

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Reflexões em grupo e análise de erros: Uma alternativa para sala de aula?

Reflexões em grupo e análise de erros: Uma alternativa para sala de aula?

Capa: Pablo Diego Regino
Projeto gráfico: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

ISBN 978-65-990395-0-8

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Sudeste

REFLEXÕES EM GRUPO E ANÁLISE DE ERROS: UMA ALTERNATIVA PARA SALA DE AULA?

Carmen Vieira Mathias
Luisa Rodríguez Doering
Cydara Cavedon Ripoll

1ª edição
2019
Rio de Janeiro

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Sumário

Prefácio

Na formação de professores são poucos os momentos destinados a refletir sobre os erros cometidos na resolução de exercícios ou em avaliações. Em geral, quando a reflexão é realizada, o erro é visto como resultado e possui sentido negativo. Durante este minicurso, os participantes serão convidados a uma reflexão de grupo originada na sua própria produção de diferentes resoluções para um mesmo exercício, onde o erro assumirá o sentido de processo e será considerado como um procedimento construtivo, baseado em [5]. Tal reflexão culminou com uma argumentação aceita por todos e que constitui, de fato, uma demonstração para o resultado proposto e com uma generalização do mesmo.

Capítulo 1

Introdução

A ideia deste minicurso surgiu em meados do ano de 2017, enquanto as autoras ministravam uma disciplina denominada Tópicos de Matemática, que foi ofertada aos alunos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) na Universidade Federal de Santa Maria. A disciplina teve como objetivo desenvolver a habilidade de analisar criticamente livros didáticos para a Escola Básica, adaptar atividades e/ou textos de tais livros, bem como criar atividades e material alternativo.

Durante o desenvolvimento da disciplina, discutiu-se o pensamento matemático na Escola Básica e foram mencionadas as ideias de Hanna [7] [1] sobre o tipo de demonstração que pode e deve ser abordada no contexto escolar. A seguir, foi proposto aos alunos o seguinte exercício: *"A título de exercitar-se o pensamento matemático, solicita-se a demonstração da afirmação: Não existe um número racional cujo quadrado é igual a 2“* .

O exercício tinha como objetivo não apenas exercitar o pensamento matemático na produção de uma demonstração, mas também oportunizar uma reflexão coletiva sobre as resoluções apresentadas, escolhendo, dentre as diferentes demonstrações produzidas pelos alunos, a(s) mais adequada(s), na perspectiva de Hanna, para determinado ano escolar (8º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio, por exemplo).

Houve, porém, uma variação no nível de precisão da linguagem e nos argumentos utilizados pelos alunos, que inclusive incorreram em erros (segundo a definição dada ao termo em [4] e em [19]). Os erros cometidos foram analisados e categorizados e em um segundo momento, foi utilizada a análise de erros como metodologia de ensino, ponderando-se com os alunos as estratégias de resoluções por eles utilizadas, levando em conta, mais especificamente, as lacunas no seu conhecimento matemático, os erros e as dificuldades que eles encontraram ao resolver o problema

[1] Hanna é uma pesquisadora da Universidade de Toronto que defende que demonstrações voltem à sala de aula, mas que sejam escolhidas aquelas que auxiliem a promover a compreensão: “O mais importante desafio aos educadores matemáticos, no que diz respeito a demonstrações, é abrilhantar o seu papel em sala de aula, encontrando caminhos efetivos de utilizá-la como veículo para promover o aprendizado e a compreensão da matemática. ” [7]

proposto.

As principais motivações para a proposta deste minicurso foram o êxito da atividade aqui relatada, aliado ao fato de que, na formação do professor de matemática, existem poucos espaços de reflexão sobre conteúdos matemáticos que são apreendidos e serão por ele ensinados, além do fato de que, em geral, os erros cometidos ao solucionar exercícios ou ao realizar avaliações não são explorados. Objetiva-se utilizar o processo de reflexão em grupo para analisar, de forma coletiva, os erros cometidos pelos participantes na demonstração de algumas afirmações, propondo uma atividade análoga àquela vivenciada pelos alunos do Profmat, porém bem mais abrangente, incluindo generalizações. Além da análise, objetiva-se construir coletivamente algumas demonstrações.

Capítulo 2

Fundamentação do Minicurso

2.1 Generalizações

Muitos pesquisadores possuem diferentes interpretações sobre o significado da palavra generalização. Segundo [8] generalização é a derivação ou indução de particularidades, identificando os pontos comuns e expandindo seus domínios.

Em [9] considera-se que a generalização envolve uma extensão do raciocínio, ou da comunicação, para além do(s) caso(s) até então considerado(s), identificando e expondo explicitamente o que é comum entre eles, ou elevando o raciocínio ou a comunicação a um nível em que o foco não está mais nesses casos ou situações em si, mas sim nos padrões, procedimentos, estruturas e relações.

Conforme [13] generalização é um importante processo do raciocínio, visto que parte de uma conclusão ou conjectura específica para formular uma conjectura de âmbito mais geral. "As tarefas envolvendo generalizações, para além de promoverem a capacidade de abstração, visam também desenvolver a capacidade de comunicação e o raciocínio matemático" [14].

Uma generalização pode surgir de uma ponderação individual ou de uma reflexão coletiva. Ao considerar a produção de um grupo, concorda-se com Mestre e Oliveira, que defendem que a generalização "surge de uma representação coletiva, ocorrendo através de experiências mediadas pela interação, linguagem e outras ferramentas próprias. As interações dos alunos suportam e moldam as atividades de generalização" [10].

Como uma generalização só é validada após uma demonstração e essa passa por várias etapas de argumentação, é crucial o papel do professor de promover o debate de ideias na sala de aula, "encorajando o questionamento e a clarificação, pedindo justificativas, estimulando a análise e comparação de ideias, promovendo a discussão de erros e identificando as ideias matemáticas importantes de cada tarefa" [10].

2.2 Análise de Erros

A escolha da análise de erros como planejamento inicial nesse minicurso de formação continuada de professores de matemática, contempla a delicada tarefa de oportunizar a professores em atividade e professores em formação a reflexão sobre os erros por eles cometidos. Assim como na disciplina de Tópicos de Matemática oferecida no Profmat, a análise de erros foi utilizada como uma metodologia de ensino na realização das atividades propostas neste minicurso.

Conforme [4], a análise de erros não é, em geral, uma das metodologias de ensino abordadas em sala de aula de cursos de graduação. Nesse mesmo artigo a autora enfatiza que

> Os erros cometidos pelos alunos são bons exemplos das dificuldades que os futuros docentes vão enfrentar, mas também os erros cometidos por eles próprios são importantes, porque mostram quais aspectos dos conteúdos não foram bem compreendidos durante seus cursos de formação, inicial ou continuada. Assim, discutir erros, buscar estratégias para superá-los e planejar atividades em que esses erros possam se tornar observáveis, são ações que devem fazer parte da formação do professor. [4]

Sobre a análise de erros como metodologia de ensino, em [3] afirma-se que

> Do ponto de vista da didática de ensino da Matemática podemos aproveitar positivamente os erros cometidos pelos estudantes. Sentar com os alunos e discutir os caminhos que eles seguiram para solucionar uma determinada questão pode promover o diálogo entre educador e educando. [3]

A metodologia proposta por [5] é derivada também da análise de conteúdo proposta por [1], que apresenta três etapas para análise de conteúdo: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Na fase de pré-análise realiza-se uma “leitura flutuante” e escolhem-se as respostas que serão consideradas (descartando respostas em branco ou sem solução). Na segunda etapa procede-se a uma categorização dos erros; para isso, é realizada uma releitura do material, com o objetivo de definir as unidades de análise, “que podem ser palavras, termos ou mesmo documentos em sua forma integral” [5].

Na última fase é realizada uma descrição das categorias com a apresentação dos resultados obtidos, em geral apresentados por meio de quadros ou de tabelas.

Na disciplina Tópicos de Matemática, após a realização do exercício, foram cumpridas pelas ministrantes a primeira e a segunda etapas (análise dos erros cometidos pelos alunos e posterior classificação dos mesmos), escolhendo-se a ordem crescente de complexidade dos argumentos utilizados na resolução do exercício, para só então, categorizarem-se os erros encontrados; foram registradas quatro classes, a saber:

- Reflexão do sujeito sobre seu conhecimento matemático.
- Argumentação do sujeito sobre suas próprias afirmações.
- Familiaridade do sujeito com a escrita matemática.
- Preocupação do sujeito com a transposição do resultado para a sala de aula.

2.3 Reflexão de Grupo

De acordo com [6] o termo "reflexão" tem sido empregado frequentemente nas pesquisas sobre formação de professores. Como exemplos, podemos citar [2], [12], [18]. Um exemplo de pesquisa que atrela o erro à reflexão é [11]; segundo seu autor, "O erro, quando submetido à reflexão, poderá desencadear um questionamento de todo o processo de ensino e transforma-se numa estratégia didática inovadora, pela possibilidade que oferece ao professor de ampliar seus saberes e, com isso, seu ensino".

Segundo [12] o conceito de professor reflexivo

> (...) foi sistematicamente referenciado por John Dewey, na década de 30. Conforme Dewey, o pensamento reflexivo envolve necessariamente um estado de imprecisão, hesitação, perplexidade e até mesmo dificuldade, o que origina o ato de pensar. A necessidade de solucionar algo consiste no fator orientador do pensamento reflexivo, da mesma maneira que "a natureza do problema a resolver determina o objetivo do pensamento e este objetivo orienta o processo do ato de pensar".

Quanto ao refletir de forma coletiva, principalmente em cursos de formação continuada de professores, [16] coloca:

> A formação continuada, baseada na prática reflexiva, considera o professor um sujeito da ação, valoriza suas experiências pessoais, suas incursões teóricas, seus saberes da prática e possibilita-lhe atribuir novo significado à sua prática ao longo do seu processo de formação, bem como permite-lhe compreender e enfrentar as dificuldades com as quais se depara diariamente no exercício da profissão. [16]

Além disso, ao pesquisar sobre o processo de reflexão em cursos de formação de matemática, é possível encontrar trabalhos que tratam da reflexão sobre a prática ([15] e [17]), os quais são focados basicamente na reflexão sobre práticas de ensino, ou seja, incluem tópicos como definição de metas, planos de ensino, como enfrentar os problemas dos alunos em sala aula, pontos fracos e fortes da prática docente etc.

Nesse sentido, espera-se que o minicurso aqui proposto seja diferente, no sentido de que não serão realizadas reflexões sobre a prática docente por si só, mas reflexões sobre um conteúdo matemático específico que oportunizem reflexões sobre a prática docente.

Capítulo 3

Minicurso

3.1 Planejamento

Originalmente, o minicurso foi planejado para um público-alvo formado por professores dos anos finais do ensino básico e ensino médio, bem como alunos de graduação, constituindo-se de 10 momentos, conforme descrição a seguir:

1. Apresentação do minicurso, detalhando a motivação para a sua criação, mencionando a disciplina do Profmat e o exercício lá realizado, no qual foram consideradas diferentes classes de erros, baseadas em [5].

2. Proposta do seguinte exercício a ser realizado individualmente: Solicita-se a demonstração da afirmação: "*Não existe um número racional cujo quadrado é igual a 2*".

3. Apresentação, por parte das ministrantes, das categorias de erros classificados na disciplina do Profmat e que são baseadas em [5].

4. Agrupamento em duplas dos participantes: cada integrante da dupla deverá corrigir a demonstração realizada pelo seu par, inspirados nas categorias apresentadas, e cada dupla deverá comparar as duas correções realizadas e compor uma nova demonstração.

5. Repetição do 4º Momento, agora com o agrupamento de duas duplas em quartetos, culminando com a elaboração de nova demonstração.

Justificativas para os momentos **4** e **5**: Nesses espaços, os participantes têm a oportunidade de praticar a reflexão individual e, posteriormente, de grupo, com relação à análise dos erros cometidos e na elaboração de uma demonstração coletiva. Além disso, trabalhando em quartetos, viabiliza-se um maior número de vagas no minicurso.

6. Apresentação ao grande grupo das demonstrações realizadas no 5º momento, seguida de análise coletiva das mesmas, com fechamentos estimulados pelas ministrantes.

7. Proposta aos quartetos do seguinte exercício: Solicita-se a demonstração da afirmação: *"Não existe um número racional cujo quadrado é igual a 7"*.

8. Apresentação do segundo exercício pelos quartetos e análise coletiva das demonstrações.

Justificativa para o 8º momento: levar os participantes a refletir sobre ideias que podem ser aproveitadas do primeiro exercício, preparando também o grande grupo para o 9º momento.

9. Questionamentos ao grande grupo:

- Essas demonstrações apresentadas podem ser adaptadas para demonstrar a afirmação "*Se p é um número primo, então não existe um número racional cujo quadrado é igual a p?*", seguida de uma demonstração para a mesma.
- A demonstração anterior pode ser adaptada para demostrar a afirmação "*Não existe um número racional cujo quadrado é igual a 12?*", seguida de uma demonstração para a mesma.
- Essa última demonstração pode ser adaptada para mostrar a afirmação "*Se n é um número que não é um quadrado perfeito, então não existe um número racional cujo quadrado é igual a n?*"

10. Fechamento do minicurso: Comentários dos participantes sobre o minicurso com relação às questões: Você acredita que atividades similares à desenvolvida neste minicurso são adequadas para uma sala de aula? Em caso afirmativo, para que nível e que tipo de atividade similar você faria?

3.2 Relato

O minicurso contou com a participação de nove inscritos, sendo dois professores do ensino básico (anos iniciais do ensino fundamental) e sete alunos de graduação de diferentes períodos, variando entre quase calouros e quase formandos. Assim, foram formados ao final da proposta, um quarteto e um quinteto. Além disso, levando em conta o número de participantes e a formação dos mesmos, o planejamento original de 10 momentos sofreu alterações. No que segue, será realizado um relato das etapas afinal desenvolvidas. A fim de ser preservada a identidade dos envolvidos, os participantes serão denominados pelas letras do alfabeto, de A a I e duplas, quartetos e quintetos por eles formados serão denominados pelas letras que representam cada componente do grupo (por exemplo, o quarteto formado pelos participantes A, B, C e D será denominado ABCD). Da mesma forma, no relato realizado por duas das professoras participantes, o nome da escola foi removido.

A primeira etapa desenvolvida ocorreu de acordo com o planejado como 1º Momento: após a apresentação do que trataria esse minicurso, as ministrantes comentaram a motivação para o mesmo, mencionando o exercício realizado na disciplina do Profmat, para o qual foram consideradas diferentes classes de erros, baseadas em [5] e esclareceram as etapas de desenvolvimento do minicurso.

Também nesse primeiro momento foi questionada a formação dos participantes e suas expectativas em relação ao minicurso. Alguns alunos expuseram suas motivações, tais como o trabalho final de graduação, o interesse pela metodologia de análise de erros e sua utilização em sala de aula. Essa discussão foi muito rica e produtiva, apresentando alguns exemplos práticos, tanto em termos de reflexão, quanto de metodologia. Em particular, a dupla de professoras (de uma mesma escola) participantes do minicurso produziu um interessante relato sobre como a análise de erros é desenvolvida na sua escola e como é necessário convencer também as famílias da eficiência de tal metodologia. A seguir apresentamos um excerto deste relato, enviado posteriormente por *e-mail*.

> A escola XXX é uma escola que acredita no potencial das crianças para pensar sobre o mundo em todos os seus aspectos naturais, sociais e culturais.
>
> A atividade matemática em nossa escola é fortemente ligada à resolução de problemas e a um modo particular de raciocinar e comunicar os resultados. (...) Essa forma de trabalhar em matemática caracteriza a atividade na sala de aula desde o início da escolaridade.
>
> É essencial, para o trabalho de reflexão, propiciar a aparição de variados caminhos para chegar à solução de um problema, mesmo quando esses são errados ou não convencionais. (...) Nesse processo, o professor tem um papel importantíssimo de alimentar investigações fazendo perguntas e intervenções que enriqueçam a pesquisa. Nas perspectivas que adotamos, inspirada em Reggio Emilia e nas contribuições do construtivismo, o erro é visto como parte do processo, como forte reflexão e alimento para aperfeiçoar ideias e procedimentos.
>
> É importante lembrar que o professor é o representante da Matemática na classe, e que qualquer afirmação sua será tratada como lei, anulando qualquer discussão. Portanto, é necessário que o professor aprenda a escutar seus alunos de maneira neutra, “devolvendo” a discussão para a turma e que só intervenha se for necessário. Dessa maneira é possível deslocar a responsabilidade da validação do professor para os alunos; ao se responsabilizar pela validação, os alunos aumentam seu nível de compromisso e autonomia.
>
> Esta é a filosofia da escola para o desenvolvimento da matemática ao longo dos anos iniciais, porém não é fácil conscientizar as famílias da valorização do erro nos resultados das resoluções de atividades matemáticas, (...), o que dificulta as discussões em sala de aula; muitas vezes ouvimos das crianças "meu pai falou que é assim que se resolve”.
>
> Por isso a escola proporciona no início do ano letivo um encontro com as famílias das crianças de 6 a 8 anos, e desenvolve atividades com eles, para que as famílias possam experimentar, dialogar, e debater as diferentes soluções e mostrar o quanto o erro é significativo, e, assim, mostrar às famílias o enriquecimento que as soluções

> erradas podem trazer aos nossos alunos, mudando a visão de que o erro é ruim, de que o aluno não pode errar.
>
> Propomos às famílias problemas no campo multiplicativo, onde os familiares não podem usar a conta convencional, atividades com o uso da calculadora e o cálculo mental; os trabalhos são realizados em grupos e, em determinado momento, abrimos para as reflexões coletivas verificando os diferentes tipos de resolução, onde o erro sempre aparece; tirar os familiares de sua zona de conforto ao solicitar a explicação de seus pensamentos leva-os a parar para reflexão na abordagem que desenvolvemos a matemática em nossa escola, formando uma parceria entre escola e família.(...)

Após a apresentação dos participantes, passou-se ao 2º Momento do planejamento original, a saber: *Solicita-se a demonstração da afirmação: "Não existe um número racional cujo quadrado é igual a 2*".

Foram dados aos participantes 15 minutos para realizarem essa tarefa individualmente, sendo distribuída uma folha impressa a cada um deles para fazerem o registro de sua resolução. Cabe ressaltar que essa folha foi recolhida no final do minicurso (Apêndice A).

Já nos primeiros minutos, as ministrantes puderam perceber a falta de familiaridade da maioria dos participantes com a questão apresentada. De fato, ao circularem entre os participantes, perceberam que os mesmos estavam realizando erros além dos esperados. Por exemplo, na tentativa de resolver a questão proposta, a participante G pensou em números específicos, empregando uma espécie de aproximação, realizando apenas uma inspeção e não uma demonstração, conforme solicitado (Figura 3.1).

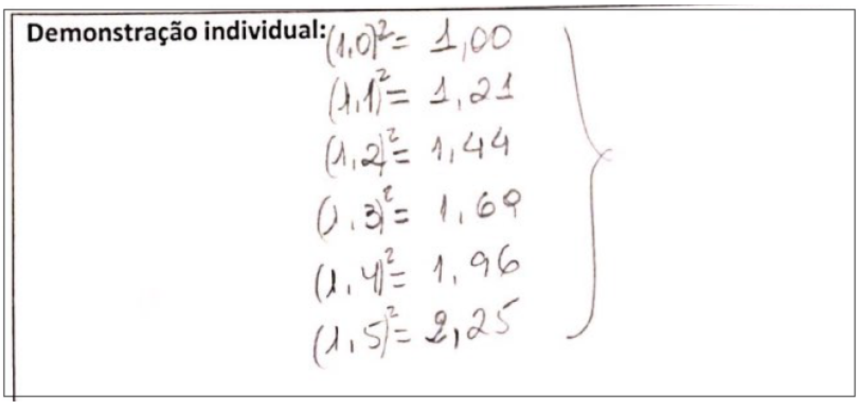
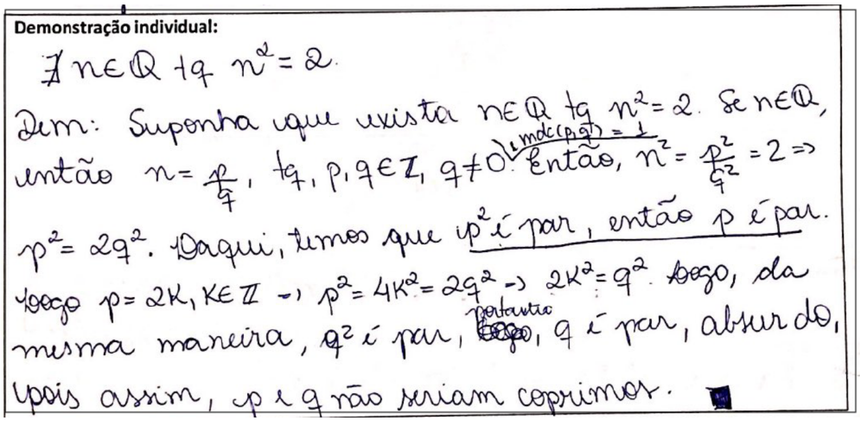

Demonstração individual:
$(1,0)^2 = 1,00$
$(1,1)^2 = 1,21$
$(1,2)^2 = 1,44$
$(1,3)^2 = 1,69$
$(1,4)^2 = 1,96$
$(1,5)^2 = 2,25$

Figura 3.1: Resolução individual do participante G

As ministrantes decidiram então que as próximas etapas deveriam ser alteradas em relação ao planejamento original, conforme relatado na sequência. Assim, nesse momento, as ministrantes estavam realizando uma pré-análise das respostas.

A expectativa das ministrantes era de que a maioria dos participantes conseguisse realizar uma demonstração nos moldes da apresentada por F (Figura 3.2), que foi, afinal, a única participante que conseguiu expressar com certa maturidade matemática uma tentativa de demonstração.


Demonstração individual:

$\nexists\, n \in \mathbb{Q}$ tq $n^2 = 2$.

Dem: Suponha que exista $n \in \mathbb{Q}$ tq $n^2 = 2$. Se $n \in \mathbb{Q}$, então $n = \frac{p}{q}$, tq, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $mdc(p,q) = 1$. Então, $n^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$. Daqui, temos que p^2 é par, então p é par. Logo $p = 2K, K \in \mathbb{Z} \rightarrow p^2 = 4K^2 = 2q^2 \rightarrow 2K^2 = q^2$. ~~Logo~~, da mesma maneira, q^2 é par, ~~logo~~ portanto, q é par, absurdo, pois assim, p e q não seriam coprimos.

Figura 3.2: Resolução individual da participante F

Outros participantes (A, B, C, E e I) demonstraram uma falta de reflexão sobre o conhecimento matemático que possuem, visto que não perceberam que a demonstração solicitada é equivalente a demonstrar que não é um número racional.

Os participantes (D e H) iniciaram um ensaio de demonstração (Figura 3.3).

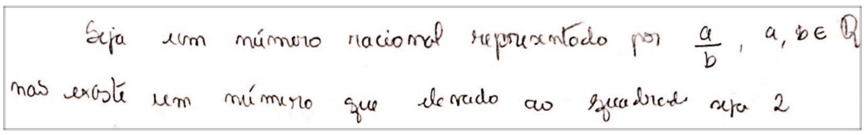
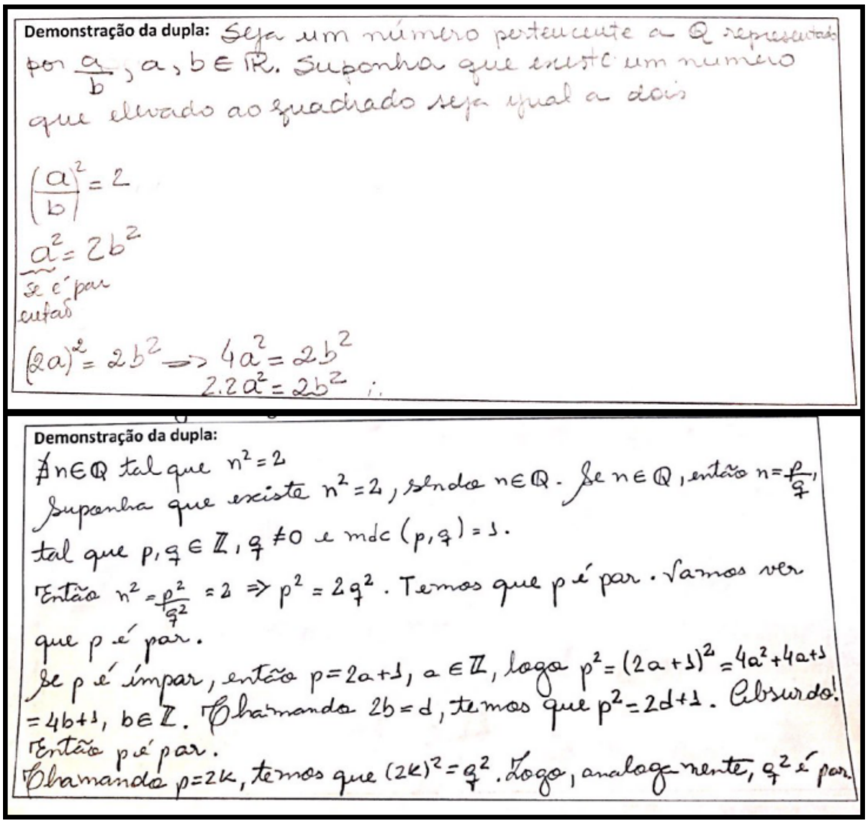

Seja um número racional representado por $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ mas existe um número que elevado ao quadrado seja 2

Figura 3.3: Resolução individual do participante H

A reorganização do minicurso a partir daqui, em relação ao planejamento original, deu-se da seguinte forma: foi decidido que o 3º momento do planejamento seria temporariamente suprimido, visto que não foram realizados tantos erros passiveis de categorização. Foi então solicitado que os participantes formassem três duplas e um trio e que, no lugar de cada membro da dupla corrigir a demonstração realizada pelo seu par, os participantes realizassem o que foi denominado uma construção coletiva de uma nova demonstração pela dupla ou trio. As duplas foram compostas pelos participantes B e C, A e G, H e I e o trio pelos participantes E, F e D, por isso denominaremos as duplas de BC, AG e HI e o trio de EFD.

Observou-se que a dupla BC discutiu um pouco, mas acabou consultando o trio EFD e decidiu repetir a demonstração do integrante F. Cabe ressaltar, ainda, que esses participantes, quase calouros do curso de licenciatura em matemática, tiveram muita dificuldade em entender o que foi solicitado. A dupla HI e o trio

EFD, aprimoraram suas resoluções individuais, a partir de discussões realizadas entre eles e com as ministrantes, como ilustra a Figura 3.4.


Demonstração da dupla: Seja um número pertencente a $\mathbb{Q}$ representado por $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Suponha que existe um número que elevado ao quadrado seja igual a dois

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$

$a^2 = 2b^2$

se é par então

$(2a)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4a^2 = 2b^2$

$2.2a^2 = 2b^2$

Demonstração da dupla:

$\nexists\, n \in \mathbb{Q}$ tal que $n^2 = 2$

Suponha que existe $n^2 = 2$, sendo $n \in \mathbb{Q}$. Se $n \in \mathbb{Q}$, então $n = \frac{p}{q}$, tal que $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ e $mdc(p,q) = 1$.

Então $n^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$. Temos que p é par. Vamos ver que p é par.

Se p é ímpar, então $p = 2a+1$, $a \in \mathbb{Z}$, logo $p^2 = (2a+1)^2 = 4a^2+4a+1 = 4b+1$, $b \in \mathbb{Z}$. Chamando $2b = d$, temos que $p^2 = 2d+1$. Absurdo!

Então p é par.

Chamando $p = 2k$, temos que $(2k)^2 = q^2$. Logo, analogamente, q^2 é par

Figura 3.4: Resolução da dupla HI (acima) e do trio EFD (abaixo)

Foi interessante observar a interação da dupla AG, composta pelas duas professoras autoras do relato apresentado sobre o primeiro momento, sendo que uma delas possui formação em Pedagogia: o compartilhamento das ideias ficou no âmbito da explicação. A Figura 3.5 ilustra que a troca de ideias das professoras deu-se em um nível elementar, pensando no entendimento sobre o quadrado de um número, e parece que percebendo a maior complexidade do argumento quando se passa dos números naturais para os números racionais.

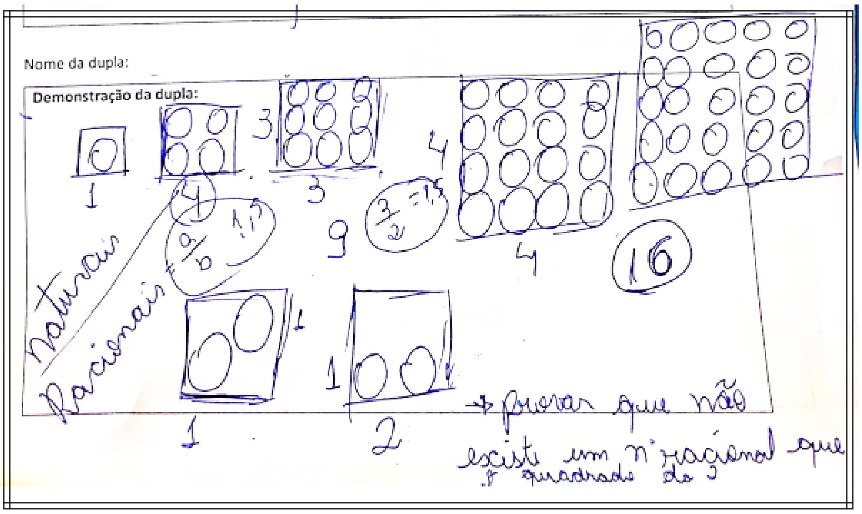


Figura 3.5: Resolução da dupla AG

Dando sequência às atividades, foi solicitado que os grupos agora se organizassem em um quarteto (duplas AG e HI) e um quinteto (dupla BC e trio EFD). Nessa etapa, foi realizada uma repetição do momento anterior, a saber, que os participantes elaborassem uma nova demonstração, baseada nas demonstrações das duplas e do trio. Ocorreu, porém, que em ambos (quarteto e quinteto), não houve a construção de uma demonstração, mas sim apenas a eleição do que consideraram a melhor argumentação, com esclarecimento de dúvidas e compartilhamento de ideias. Acredita-se que isso tenha ocorrido porque as duplas BC e AG não tinham formulado uma demonstração.

Enquanto os participantes realizavam as discussões em grupo, as ministrantes conversavam com os mesmos, no intuito de averiguar por qual das duas resoluções iniciar-se-ia a discussão em grande grupo.

O quarteto e o quinteto foram então convidados a registrar suas resoluções no quadro (Figura 3.6).

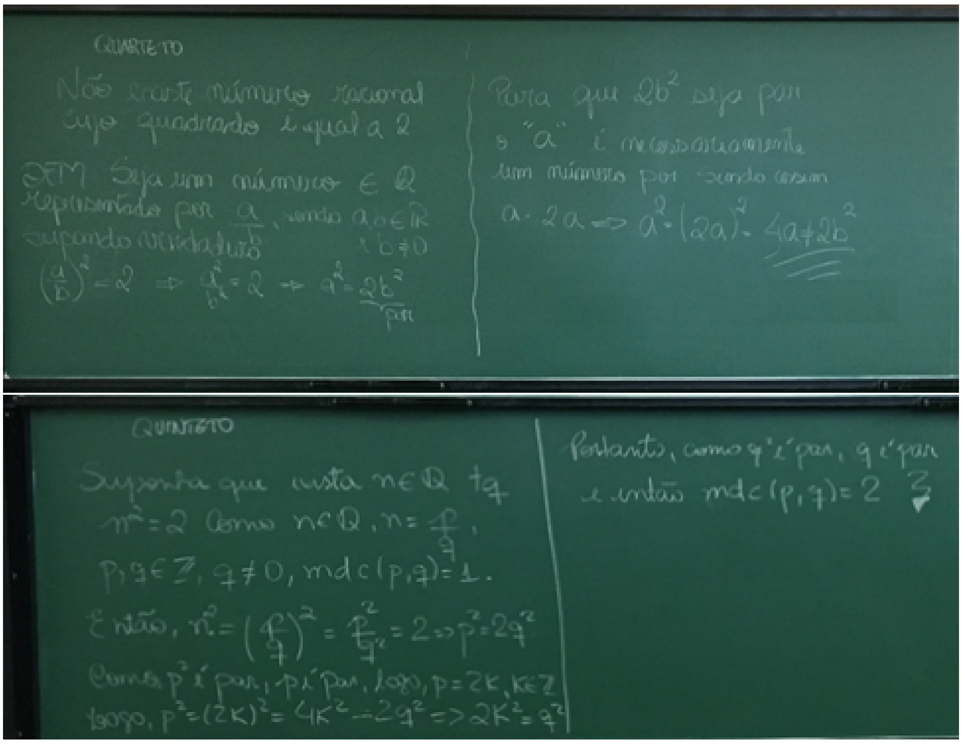
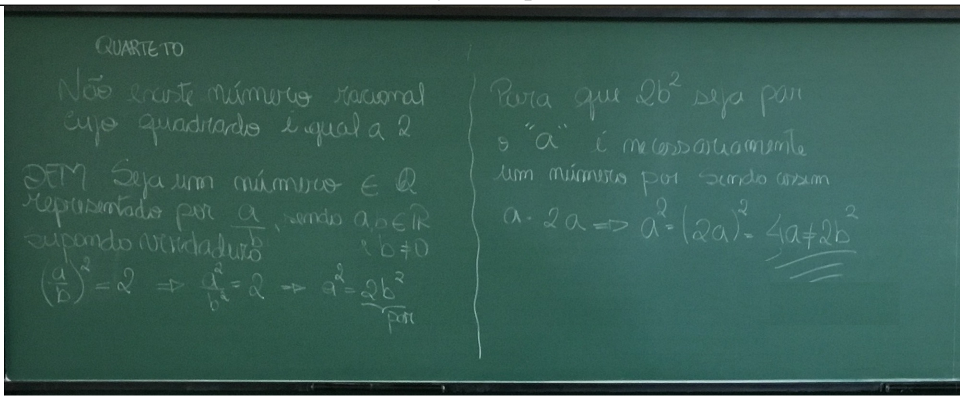
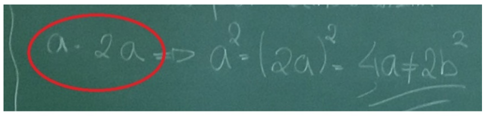


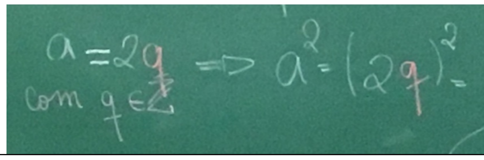
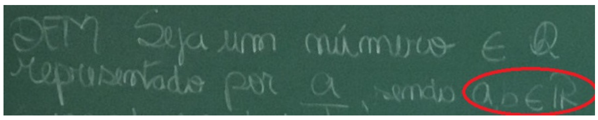
Figura 3.6: Soluções do quarteto (acima) e quinteto (abaixo)

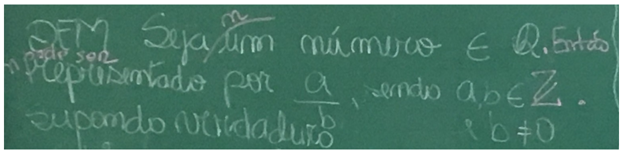
A seguir, o quarteto foi convidado pelas ministrantes a iniciar a apresentação de sua resolução, por ser essa a resolução que não explicitou o uso de máximo divisor comum. O objetivo das ministrantes nessa etapa era de oportunizar uma discussão que culminasse na correção e complementação dessa resolução pelo grande grupo, antes de fazer o mesmo com a resolução do quinteto, para só então produzir a construção de uma demonstração pelo grande grupo.

A cada afirmação, as ministrantes questionavam o grande grupo sobre a concordância com a mesma. Se um participante não concordava com ela, era estimulado a justificar sua discordância; se todos concordavam, mas as ministrantes consideravam a afirmação incompleta ou mesmo errada, elas dirigiam perguntas aos participantes que problematizavam tal afirmação, com o objetivo de estimular a reflexão do grupo e a correção dessa afirmação. Muitos foram os momentos em que os próprios participantes corrigiram/reformularam as afirmações, conforme ilustra a Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Resultado das discussões sobra a resolução realizada pelo quarteto

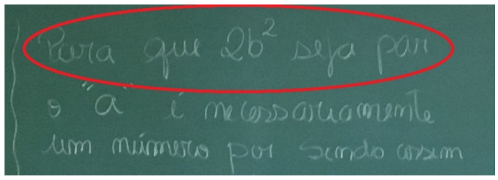
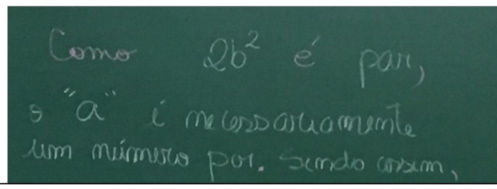
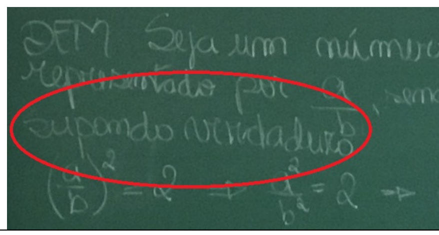
<table>
<tr><td colspan="2">Resolução do quarteto</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Discussão</td><td>Resultado da discussão (intervenção na redação)</td></tr>
<tr><td>Inicialmente, as ministrantes questionaram se a notação/nomenclatura utilizada na argumentação do quarteto estava clara para todos. No primeiro comentário um participante apontou para o erro na última linha da resolução, onde foi escrito $a = 2a$. Corrigiu-se para $a = 2q$.</td><td>

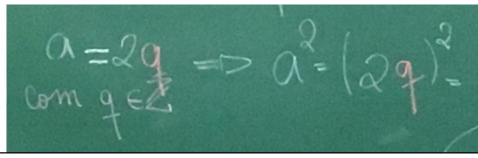
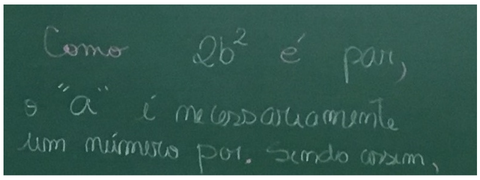

</td></tr>
<tr><td>Um participante questionou se os números a,b deveriam mesmo pertencer ao conjunto $\mathbb{R}$. Outro participante questionou se não deveria ser o conjunto $\mathbb{N}$. Nesse momento uma das ministrantes questionou: “ Não deveria ser ou é?”</td><td>
</td></tr>
</table>

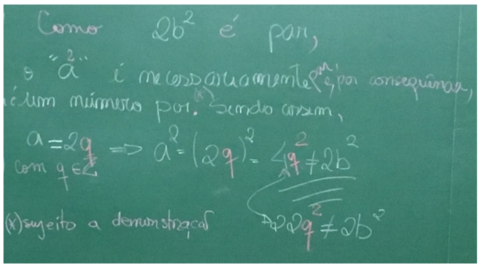
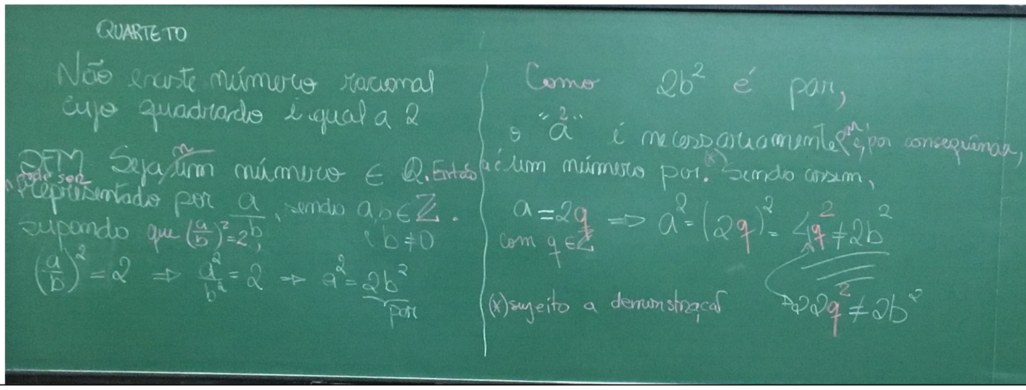
Antes de ser proposta uma reformulação para este comentário, as ministrantes questionaram a frase "*Seja um número racional representado por* $\frac{a}{b}$*,...*": não se estaria com ela sugerindo que existem números racionais que não podem ser representados dessa forma? O questionamento de um participante sobre se o número "deveria ser representado por" ou se "deveria ser igual a $\frac{a}{b}$" oportunizou uma pequena discussão sobre o conceito de número (quantidade) *versus* representação de número, que culminou com a reformulação da frase inicial.	 "Seja n um número racional. Então n pode ser representado por $\frac{a}{b}$, sendo $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$".

Seguiu-se uma discussão interessante sobre o quanto é importante o professor preparar perguntas que instiguem a reflexão do aluno. Para não perder o foco do minicurso, foi retomada a discussão sobre o texto da resolução apresentada pelo quarteto (Tabela 3.2).

Tabela 3.2: Resultado das discussões sobre a resolução realizada pelo quarteto (continuação)

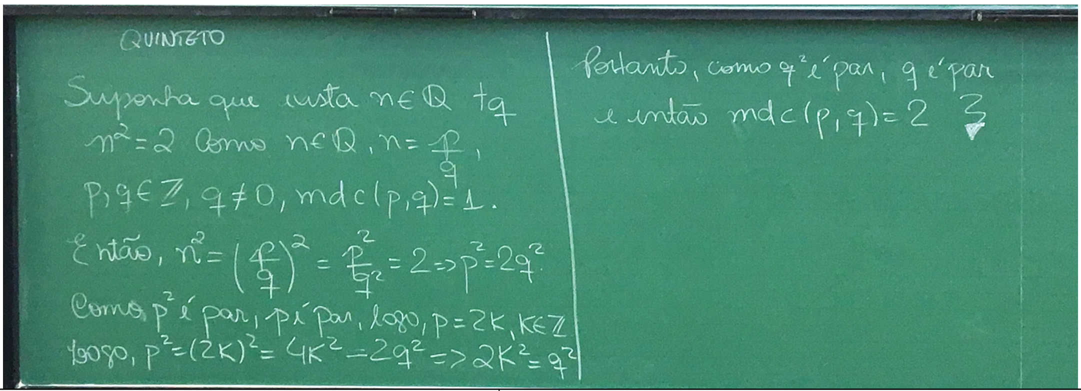
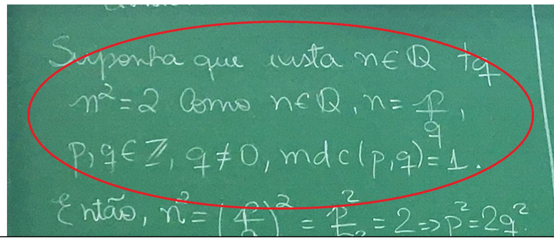
Discussão	**Resultado da discussão (intervenção na redação)**
Um dos participantes sugeriu a reformulação da frase que se inicia por "Para que $2b^2$ seja par...", trocando a expressão "Para que $2b^2$" por "Como $2b^2$ é par", dando a ideia de consequência, o que foi acatado por todos.	 
Um dos participantes chamou a atenção para a expressão "Supondo verdadeiro" e questionou "o que é verdade?" Foi então sugerido pelo mesmo que a expressão fosse substituída por: "Suponha que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$".	

<table>
<tr>
<td>Também foi chamada a atenção que na expressão “$a = 2q \Rightarrow a^2 = (2q)^2$...” o conjunto ao qual q pertencia não havia sido explicitado. Complementou-se então: “com $q \in \mathbb{Z}$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Os participantes, ao analisarem a expressão “Como $2b^2$ é par, o a é necessariamente um número par” observaram que, em uma primeira dedução, a^2 é um número par, e não a. Logo, foi questionada a necessidade de provar-se que “ a é um número par, sabendo-se que a^2 é um número par”. As ministrantes intervieram na discussão, enfatizando que a necessidade de realizar tal demonstração depende do público a quem se escreve. Dessa forma, foi decidido não explicitá-la naquele momento, deixando-se apenas registrado “sujeito a demonstração”.</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Após a intervenção do grande grupo na resolução do quarteto

</td>
</tr>
</table>

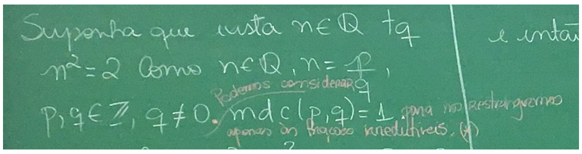
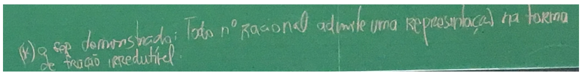
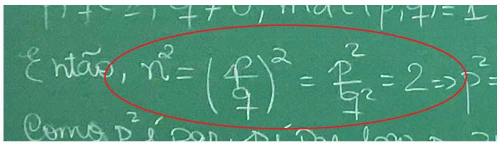
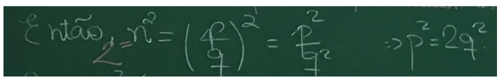
Na sequência, o grande grupo foi convidado a concentrar-se no registro da resolução do quinteto (Tabela 3.3). Conforme ocorreu anteriormente, na discussão da redação da resolução do quarteto, as ministrantes questionaram os participantes sobre a notação/nomenclatura utilizada e sobre a redação.

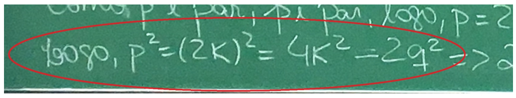
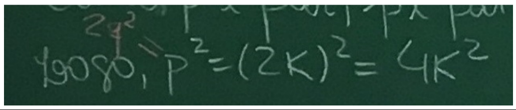
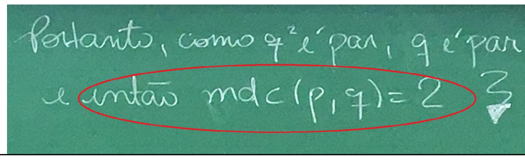
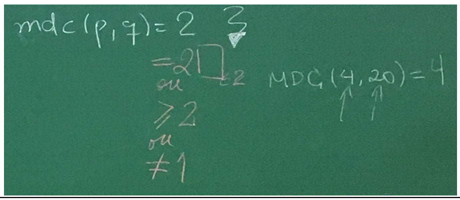
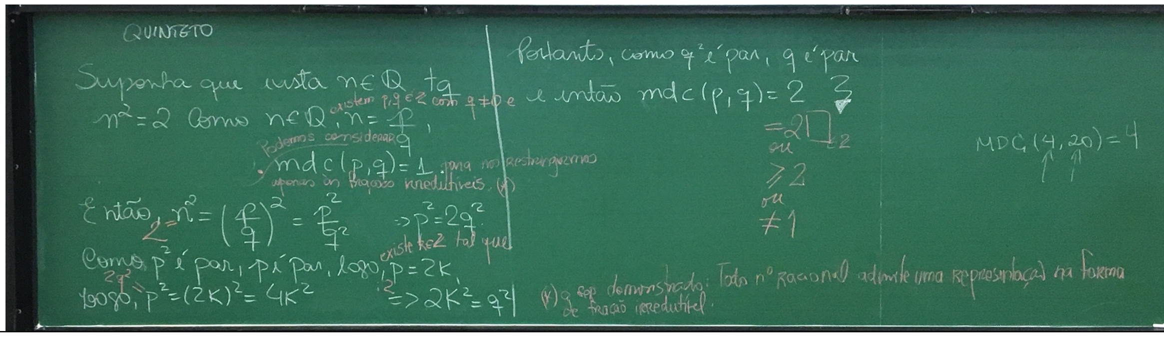
Tabela 3.3: Resultado das discussões sobre a resolução realizada pelo quinteto

<table>
<tr><td colspan="2">Resolução do quinteto

</td></tr>
<tr><td>Discussão</td><td>Resultado da discussão (intervenção na redação)</td></tr>
<tr><td>Como não houve nenhuma manifestação sobre a notação/nomenclatura, optou-se por realizar a leitura das duas primeiras frases, voltando-se a questionar se havia algum comentário relativo a elas.</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
Como ainda assim não ocorreu nenhuma manifestação, foi questionada pelas ministrantes a necessidade da expressão $mdc(a,b) = 1$. Ainda sem nenhuma resposta, foram levantadas as seguintes questões pelas ministrantes:

• Fração irredutível precisa aparecer na definição de número racional ou não?
• Todas as frações são irredutíveis?
• Para todas as frações $\frac{p}{q}$, sempre acontece $mdc(p,q) = 1$?
• Ao considerarmos todas as frações irredutíveis, estamos considerando todos os números racionais?

Tais questões não foram discutidas sequencialmente, mas sim em meio à discussão de como melhorar (ou não) a redação do primeiro parágrafo. Em um dado momento, um dos participantes sugeriu que fosse então “Podemos considerar $mdc(p,q) = 1$” , porém não justificou por quê. Após nova discussão, chegou-se à redação “todo número racional admite uma representação na forma de fração irredutível”, ficando tal afirmação para ser demonstrada.
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
Uma das ministrantes chamou a atenção para a redação da igualdade $n^2 = (\frac{p}{q})^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$”, visto que na sequência apresentada poderia confundir o leitor. Nesse momento, iniciou-se uma discussão sobre a redação de um argumento. As ministrantes ressaltaram a importância do registro do raciocínio na ordem em que ele acontece. Assim, não é $\frac{p^2}{q^2}$ que é igual a 2 mas sim n^2 que é igual a 2.
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>Um participante apontou que, pela mesma razão, a expressão $$p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2q^2$$ deveria ser reorganizada. Reformulou-se então a afirmação</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ao analisar-se a última frase da resolução, as ministrantes questionaram a validade da igualdade $mdc(p, q) = 2$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Como nenhum dos participantes contestou, uma das ministrantes indagou: “Qual o mdc $(4, 20)$?”. Nesse momento, um dos participantes chamou a atenção de que o mdc (p, q) não seria necessariamente igual a 2, sugerindo uma nova redação.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Após a intervenção do grande grupo na resolução do quinteto

</td></tr>
</table>

Após finalizada a discussão sobre a resolução do quinteto, a resolução apresentada pelo quarteto foi retomada. Ocorridas algumas discussões, foi apresentada uma nova redação, ilustrada na Figura 3.7

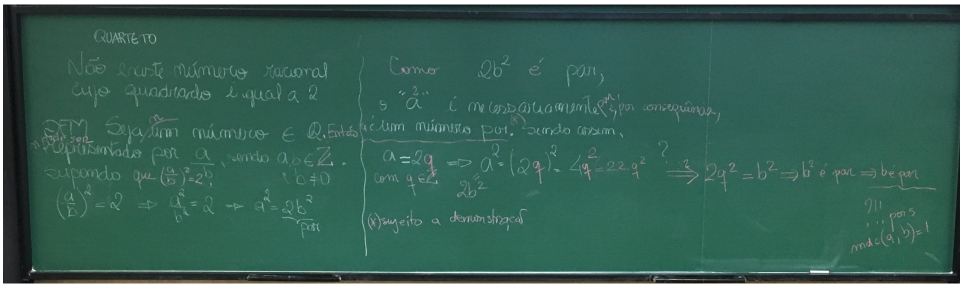
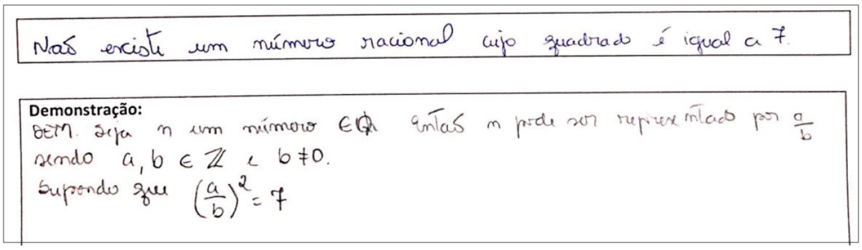


Figura 3.7: Intervenções na redação da resolução do quarteto

Finalizadas as discussões, um dos participantes questionou: “Será possível generalizar o resultado demonstrado, se não exigirmos que $mdc\,(p, q) = 1$?”, antecipando a segunda parte do exercício, que se referia ao 8º Momento do planejamento original, a saber: *Solicita-se a demonstração da afirmação: “Não existe um número racional cujo quadrado é igual a 7”.*

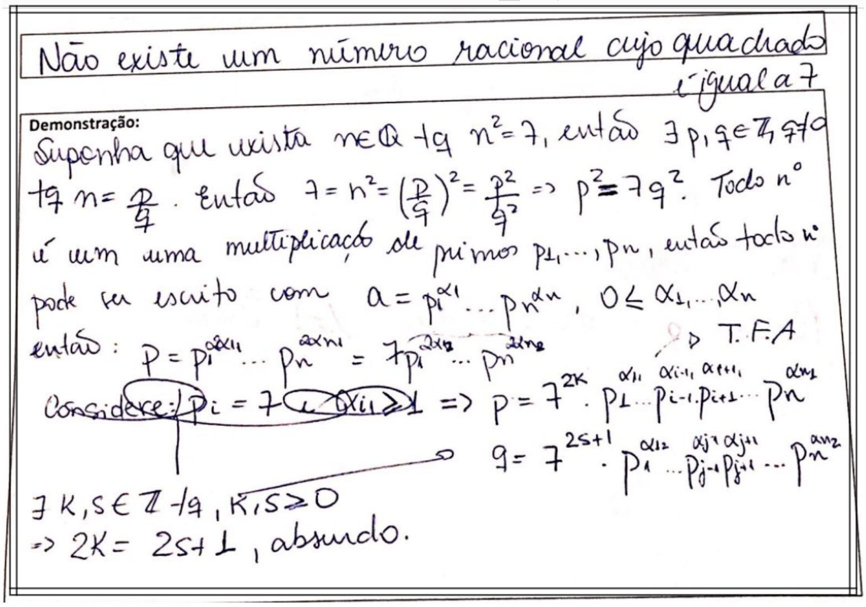
Nessa etapa, os participantes trabalharam em grupos (os mesmos quarteto e quinteto). O quarteto apresentou uma tentativa de resolução que consistiu, inicialmente, da substituição do número 2 pelo número 7 na resolução corrigida do quarteto, no entanto não conseguiram “adaptar” a resolução por completo (Figura 3.8).


Não existe um número racional cujo quadrado é igual a 7.

Demonstração:
DEM. Seja n um número $\in \mathbb{Q}$ Então n pode ser representado por $\frac{a}{b}$
sendo $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.
Supondo que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 7$

Figura 3.8: Resolução apresentada pelo quarteto na Parte II

Para ser finalizada a tarefa do quarteto, foi necessária a intervenção das ministrantes, e, após alguns questionamentos e auxílio dos demais participantes, foi completada a adaptação, ilustrada na Figura 3.9.


Não existe um número racional cujo quadrado é igual a 7

Demonstração:
Suponha que exista $n \in \mathbb{Q}$ tq $n^2 = 7$, então $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ tq $n = \frac{p}{q}$. Então $7 = n^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 7q^2$. Todo nº é um uma multiplicação de primos $p_1, \dots, p_n$, então todo nº pode ser escrito com $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$, $0 \leq \alpha_1, \dots \alpha_n$ $\Rightarrow$ T.F.A
então: $p = p_1^{\alpha_{11}} \dots p_n^{\alpha_{n1}} = 7 p_1^{\alpha_{12}} \dots p_n^{\alpha_{n2}}$
Considere: $p_i = 7$ e $\alpha_{i1} \geq 1 \Rightarrow p = 7^{2K} \cdot p_1^{\alpha_{11}} \dots p_{i-1}^{\alpha_{i-1,1}} p_{i+1}^{\alpha_{i+1,1}} \dots p_n^{\alpha_{n1}}$
$q = 7^{2S+1} \cdot p_1^{\alpha_{12}} \dots p_{j-1}^{\alpha_{j-1}} p_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \dots p_n^{\alpha_{n2}}$
$\exists\, K, S \in \mathbb{Z}$ tq, $K, S \geq 0$
$\Rightarrow 2K = 2S + 1$, absurdo.

Figura 3.9: Inicio da adaptação na redação da resolução do quarteto na Parte II

Nessa etapa do minicurso foi necessário questionar os participantes sobre a demonstração da afirmação "*Se a^2 é par, então a é par*" para, a seguir, questionar-se se uma tal demonstração poderia ser adaptada para a nova proposição, ou seja: seria verdade que se a^2 é múltiplo de 7 então a é múltiplo de 7? Alguns participantes deram sugestões (por absurdo, por exemplo). Após uma discussão sobre possíveis técnicas de demonstração a serem utilizadas (por contraposição ou direta, dividindo-se em casos), a participante F interveio, ressaltando que, no caso anterior (a^2 par $\Longrightarrow a$ par), existia a necessidade de avaliar-se apenas dois casos (resto zero ou resto um na divisão de a por 2), mas que, para a demonstração da implicação

$$a^2 \text{ é múltiplo de } 7 \Rightarrow a \text{ múltiplo de } 7, \ (*)$$

seria necessário avaliarem-se sete casos (relativos a todos os possíveis restos da divisão de a por 7), o que poderia dispender algum tempo e esforço.

Após esses encaminhamentos, partiu-se para a discussão da resolução encontrada pelo quinteto. Uma participante do quinteto conseguiu convencer seus colegas que era suficiente contar o número de fatores primos iguais a 7 na fatoração de a^2 e de $7b^2$. A sua resolução foi registrada no quadro (figura 3.10).

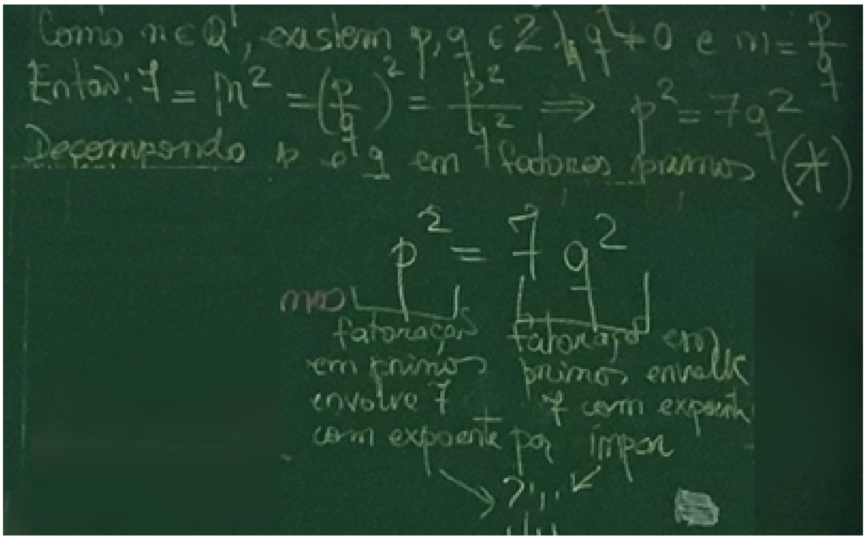


Figura 3.10: redação da Parte II, apresentada pelo quinteto

A partir dessa resolução e das discussões que seguiram, concluiu-se, de uma maneira um tanto natural, que é possível utilizar o mesmo tipo de argumentação dessa prova para demonstrar que não existe um número racional cujo quadrado seja um número primo, bastando substituir o primo 7 por um primo genérico p. Foi comentado, também, que essa argumentação (contar o número de fatores primos iguais ao primo p em $a^2 = pb^2$) é uma redação mais simples, visto que não precisa utilizar o conceito de fração irredutível. Além disso, um dos participantes ressaltou que a escolha da demonstração pode ou não levar a uma generalização. As ministrantes consideraram abordado mais um momento do planejamento original (9º Momento), que consistia em questionar-se ao grupo:

- Essas demonstrações apresentadas podem ser adaptadas para demonstrar a afirmação:

Se p é um número primo, então não existe um número racional cujo quadrado é igual a p?

Após encerrar essa etapa do minicurso, as ministrantes voltaram a atenção ao que tinha sido originalmente planejado como o 3º Momento, ou seja a apresentação ao grande grupo das categorias de erros classificados na disciplina do Profmat, que foram:

- Reflexão do sujeito sobre seu conhecimento matemático.
- Argumentação do sujeito sobre suas próprias afirmações.
- Familiaridade do sujeito com a escrita matemática.
- Preocupação do sujeito com a transposição do resultado para a sala de aula.

Nesse sentido, foram realizados os seguintes questionamentos: "os participantes conseguem classificar os erros cometidos nas resoluções apresentadas nesse minicurso em alguma dessas categorias?" Existem outras categorias que não foram citadas?" Os participantes conseguiram identificar os erros cometidos e realizaram uma breve classificação dos mesmos nas categorias apresentadas, sem incluir nenhuma nova categoria.

O fechamento do minicurso foi realizado conforme o planejado, ou seja, os participantes teceram comentários sobre o minicurso e responderam (por escrito) as questões: *1) Você acredita que atividades similares à desenvolvida neste minicurso são adequadas para sala de aula? 2) Em caso afirmativo, que tipo de atividade similar você faria?*

Assim, os participantes tiveram a oportunidade de expor suas opiniões sobre o minicurso e sugerir aprimoramentos para o mesmo. A Figura 3.11 ilustra uma das avaliações realizadas.

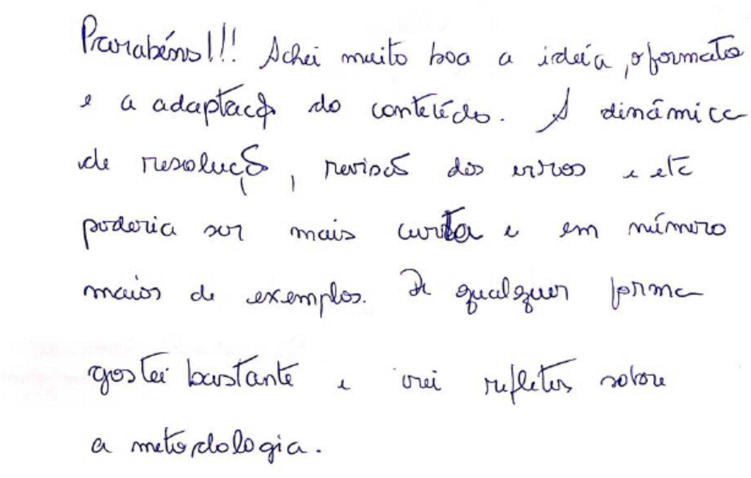

Parabéns!!! Achei muito boa a idéia, o formato
e a adaptação do conteúdo. A dinâmica
de resoluções, revisões dos erros e etc
poderia ser mais curta e em número
maior de exemplos. De qualquer forma
gostei bastante e vou refletir sobre
a metodologia.

Figura 3.11: Avaliação realizada por um dos participantes

Outro participante incluiu em sua avaliação, uma sugestão de leitura, que aborda um pouco do processo apresentado (Figura 3.12)

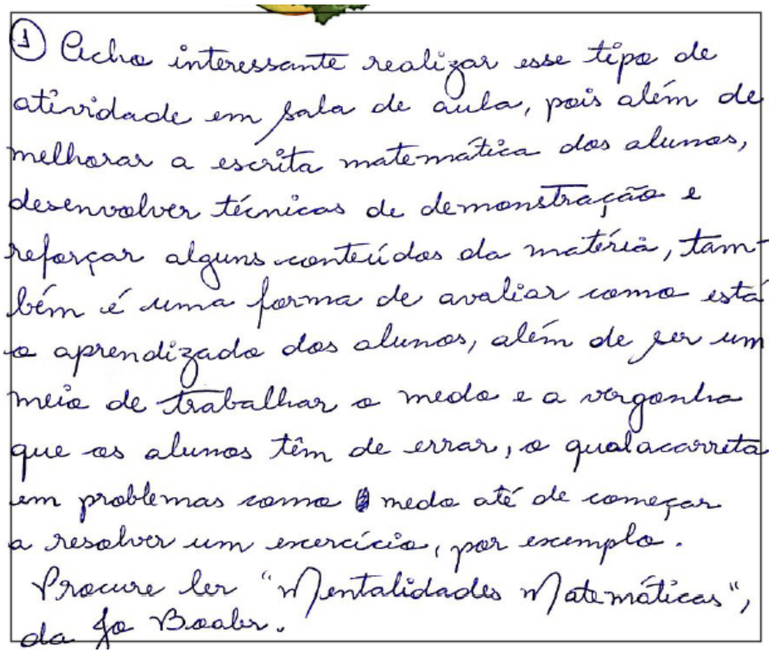

1 Acho interessante realizar esse tipo de
atividade em sala de aula, pois além de
melhorar a escrita matemática dos alunos,
desenvolver técnicas de demonstração e
reforçar alguns conteúdos da matéria, tam-
bém é uma forma de avaliar como está
o aprendizado dos alunos, além de ser um
meio de trabalhar o medo e a vergonha
que os alunos têm de errar, o qual acarreta
em problemas como medo até de começar
a resolver um exercício, por exemplo.
Procure ler "Mentalidades Matemáticas",
da Jo Boaler.

Figura 3.12: Avaliação realizada por um dos participantes

Capítulo 4

Considerações Finais

Neste trabalho procurou-se, em uma atividade de demonstração matemática, tratar do erro como processo, sendo ele considerado como um procedimento construtivo, baseado na Análise de Erros de [5]. Como embasamento teórico para as discussões realizadas no decorrer do Minicurso, foi utilizada a reflexão de grupo.

O planejamento original, baseado na análise de erros, foi sendo reformulado pelas ministrantes durante o minicurso, devido ao público-alvo e às intervenções desse. Assim, não foi realizada uma completa análise de erros , preferindo-se priorizar uma redação coletiva a partir de uma reflexão de grupo, explorando a demonstração das afirmações apresentadas. Precisamente, a adaptação que foi realizada no minicurso foi principalmente a não categorização dos erros, os quais foram apenas apontados por todo o grupo. Além disso, a correção dos mesmos foi realizada de forma coletiva, por meio de indagações das ministrantes aos participantes, com o intuito de motivá-los a perceber as dificuldades em se escrever e acompanhar uma demonstração, oportunizando assim a reflexão dos participantes sobre argumentações em sua prática docente.

A escolha da atividade revelou-se adequada e frutífera, pois foram apresentadas diferentes tentativas de demonstração, com diferentes níveis de precisão de linguagem, inclusive dúvidas em relação a técnicas de demonstração; por exemplo, demonstração por contraposição.

A existência de apenas dois grupos de trabalho, devido ao número de participantes, oportunizou um bom engajamento entre os mesmos e revelou-se bem adequada, contando com a efetiva participação de todos até o encerramento do minicurso. Esse fato levou as ministrantes a repensarem o número de vagas a ser ofertado em uma outra oportunidade.

Consideramos que o minicurso foi bem-sucedido, já que se chegou a uma demonstração construída de forma coletiva, onde cada frase que constituiu o argumento foi questionada e muitas vezes reformulada pelo grupo até atingir-se consenso e correção.

O público-alvo do minicurso foi heterogêneo, sob vários aspectos: nível de formação (estudantes de primeiro ano, formandos, professora experiente e pedagoga), faixa etária e maturidade matemática. A dificuldade de argumentar em matemática foi comum a todos os participantes e foi unânime o reconhecimento do valor da precisão matemática tanto oral como escrita na prática docente. Por isso, somos de opinião que a reflexão de grupo combinada com a análise de erros na prática da argumentação matemática é bastante relevante na formação dos professores e deve ser repetida em outras oportunidades, abordando outras temáticas.

Referências Bibliográficas

[1] BARDIN, L. *A Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70, 1979.

[2] CARRARO, P. R.; ANDRADE, A. S. *O professor do ensino fundamental em grupos de reflexão.* Rev. Mal-Estar Subj.,Vol. 11 (4), pp. 1339-1378, Dez., 2011

[3] CAVASOTTO, M. *Dificuldades na aprendizagem de cálculo: o que os erros cometidos pelos alunos podem informar.* Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

[4] CURY, H. N. *Uma proposta para inserir a análise de erros em cursos de formação de professores de matemática.* Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Vol. 15 (3), pp. 547-562, 2013a

[5] CURY, H. N. *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.* Autêntica, 2013b

[6] DE ALMEIDA, L. M. W. *Modelagem Matemática: um Caminho para o Pensamento Reflexivo dos Futuros Professores de Matemática.* Revista Contexto & Educação 21.76, pp. 115-126, 2013.

[7] HANNA, G. *Challenges to the Importance of Proof, For the Learning of Mathematics.* FLM Pub.Ass., Vol. 15 (3), pp. 42-49, Nov., 1995

[8] DREYFUS, T. *Advanced Mathematical Thinking Process.In: Advanced Mathematical Thinking.* Netherland: Kluwer Academic Publishers, p.25-41. 2002

[9] KAPUT, J. J. *Teaching and learning a new algebra. In: Mathematics classrooms that promote understanding.* Routledge, p. 145-168. 1999

[10] MESTRE, C.; OLIVEIRA, H. *A co-construção da generalização nas discussões coletivas: Um estudo com uma turma do 4.º ano.* Quadrante. XXI. 111-137. 2012

[11] PINTO, N. B.*O Erro como Estratégia Didática: Estudo do Erro no Ensino da Matemática elementar.* Campinas: Papirus, 2000

[12] PIVETTA, H. M. F. ; ISAIA, S; M; de A. *Grupo reflexivo de professores da educação superior: Estudo sobre seus movimentos construtivos.* Rev. Port. de Educação, Vol. 27 (1), p.111-132, Jun., 2014.

[13] PONTE, J. P., PEREIRA, J. HENRIQUES, A. *O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior*. Praxis Educativa, Vol. 7 (2), pp. 355-377. 2012

[14] PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS A. *Álgebra no ensino básico.*. Artmed, 2009

[15] POSTHUMA, B. *Mathematics teachers' reflective practice within the context of adapted lesson study*. Pythagoras, [S.l.], Vol. 33 (3), Nov. 2012. Disponível em `https://pythagoras.org.za/index.php/pythagoras/article/view/140/219`. Acesso: abr. 2018

[16] RICHIT, A. *Apropriação do Conhecimento Pedagógico –Tecnológico em Matemática e a Formação Continuada de Professores.* Tese (Doutorado em Educação Matemática) –Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, SP, 2010

[17] ROSA, C. C. da; KATO, L. A. *A Modelagem Matemática e o Exercício do Professor Reflexivo: a experiência de Elias*. Perspectivas da Educação Matemática, Vol. 7 (14), pp. 220-235. 2014

[18] SIMÃO, A., et al. *Formação de professores em contextos colaborativos. Um projecto de investigação em curso.* Sísifo. Revista de Ciências da Educação Vol. 8, pp. 61-74. 2009

[19] TORRE, S. de La. *Aprender com os erros: o erro como estratégia de mudança.*. Artmed, 2007

Capítulo 5

Apêndice A

MINICURSO REFLEXÕES DE GRUPO E ANÁLISE DE ERROS:

UMA ALTERNATIVA PARA A SALA DE AULA?

PARTE I

Não existe número racional cujo quadrado é igual a 2

Nome:

Demonstração individual:

Nome da dupla:

Demonstração da dupla:

Nomes da outra dupla:

Demonstração do quarteto

PARTE II

Demonstração: