IV Simpósio Nacional
da Formação do Professor de Matemática

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE PARA TODAS AS IDADES: UM TRABALHO DE REFLEXÃO DE GRUPO

Luisa Rodríguez Doering
Cydara Cavedon Ripoll

ANPMat
Associação Nacional dos Professores
de Matemática na Educação Básica

Critérios de divisibilidade para todas as idades: Um trabalho de reflexão de grupo

Critérios de divisibilidade para todas as idades: Um trabalho de reflexão de grupo

Capa: Pablo Diego Regino
Projeto gráfico: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Distribuição
Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
https://www.anpmat.org.br / email: secretaria@anpmat.org.br

ISBN 978-65-88013-02-1

IV Simpósio Nacional
da Formação do Professor de Matemática

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE PARA TODAS AS IDADES: UM TRABALHO DE REFLEXÃO DE GRUPO

Luisa Rodríguez Doering
Cydara Cavedon Ripoll

1ª edição
2020
Rio de Janeiro

ANPMat

Dedicamos este *e-book* a todos os Professores de Matemática e Educadores em geral que continuam na busca de um ensino de matemática com significado.

Sumário

Lista de Figuras

Prefácio

O objetivo deste trabalho é apresentar um relato – permeado de reflexões das autoras – do minicurso "Critérios de Divisibilidade na Escola: uma reflexão em grupo"ministrado em Vitória, ES, durante o IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática, bem como relatar os minicursos de mesmo nome oferecido em Juazeiro, BA, durante o III Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste, e em Porto Alegre, RS, durante a Semana Acadêmica da Matemática da UFRGS.

Agradecimentos

Agradecemos à ANPMat pela oportunidade e apoio dados à escrita deste trabalho e à oferta do minicurso de mesmo nome. Agradecemos também a Claus Ivo Doering pela digitação deste trabalho, disponibilidade e paciência até o apagar das luzes.

Capítulo 1

Introdução

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, [2]) é recomendada, no sexto ano, a seguinte Habilidade relativa ao Objeto de Conhecimento "Múltiplos e divisores de um número natural":

> (EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. (p.301)

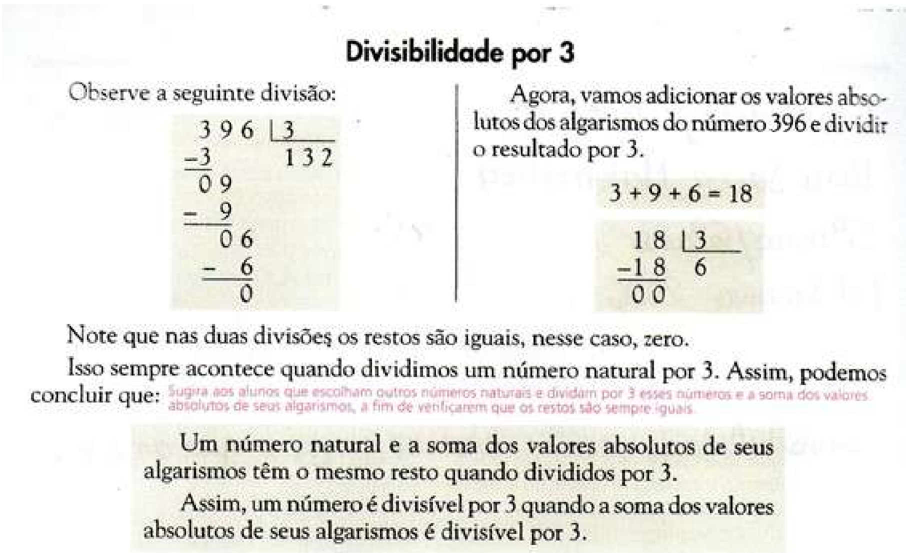
Tais critérios, em geral, já aparecem nos livros didáticos do Ensino Fundamental, porém muitas vezes são apresentados apenas alguns exemplos que confirmam a propriedade e que não são suficientes como justificativa de sua validade.

De fato, na Figura 1.1 tem-se um recorte de um livro didático de 6º ano no qual pode-se ler a orientação ao professor: "Sugira aos alunos que escolham outros números naturais e dividam por 3 esses números e a soma dos valores absolutos de seus algarismos, a fim de verificarem que os restos são sempre iguais" sugerindo ao professor (e consequentemente aos seus alunos) contentar-se com um número limitado de exemplos para estabelecer uma propriedade que diz respeito a infinitos casos, a saber, a divisibilidade por 3.

Neste Minicurso, por meio de reflexão em grupo, propomos discutir a Matemática envolvida em alguns critérios de divisibilidade, desafiando os participantes a elaborarem argumentos que culminem em diferentes demonstrações para eles. Dessa forma, espera-se que os participantes percebam e defendam que atividades de raciocínio e prova podem ser utilizadas não só para atingir a habilidade EF06MA05, como também algumas delas podem ser adaptadas para os anos iniciais e outras generalizadas para os anos finais do Ensino Fundamental e também para o Ensino Médio.

Assim, tem-se como objetivo oportunizar reflexões sobre a prática docente sobre um conteúdo matemático específico, bem como evidenciar aos participantes a relevância do *conhecimento matemático para o ensino* — na terminologia utilizada em [1] — na medida em que serão convidados a aplicar seus conhecimentos matemáticos na elaboração, para a sala de aula, de propostas que envolvam o pensamento matemático. É nossa expectativa que os participantes farão uso das ideias embutidas nas demonstrações produzidas pelo grupo, já que muitas das demonstrações existentes para critérios de divisibilidade são do tipo "demonstrações que explicam":

> Achamos importante que os alunos, nas aulas de Matemática, sejam rotineiramente encorajados a argumentar, transformando-se em um processo natural e que, sempre que possível, o professor escolha as chamadas demonstrações que explicam e não apenas demonstram. ([5])



Divisibilidade por 3

Observe a seguinte divisão:

396 | 3
−3   132
09
− 9
06
− 6
0

Agora, vamos adicionar os valores absolutos dos algarismos do número 396 e dividir o resultado por 3.

3 + 9 + 6 = 18

18 | 3
−18   6
00

Note que nas duas divisões os restos são iguais, nesse caso, zero.

Isso sempre acontece quando dividimos um número natural por 3. Assim, podemos concluir que: Sugira aos alunos que escolham outros números naturais e dividam por 3 esses números e a soma dos valores absolutos de seus algarismos, a fim de verificarem que os restos são sempre iguais.

Um número natural e a soma dos valores absolutos de seus algarismos têm o mesmo resto quando divididos por 3.

Assim, um número é divisível por 3 quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é divisível por 3.

Figura 1.1: Divisibilidade por 3 tratada em [3], p.88

E, ao mesclarmos o conhecimento matemático com o conhecimento matemático para o ensino, acreditamos estar também minimizando a dupla descontinuidade mencionada em [6].

Assim, o presente trabalho visa contribuir para a formação do professor de Matemática do ensino básico e para o aprimoramento do seu conhecimento de Matemática para o ensino por meio de uma reflexão em grupo, seguindo passos análogos aos do minicurso "Reflexões de Grupo e Análise de Erros: Uma Alternativa para a Sala de Aula?" ministrado em 2018 no Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Sudeste pelas autoras juntamente com a colega da Universidade Federal de Santa Maria, Carmen Vieira Mathias ([7]).

Capítulo 2

Aportes Teóricos

Nesta seção apresentamos as ideias de alguns autores que serviram de inspiração para a elaboração deste Minicurso.

Escolhemos orientar o Minicurso por meio de reflexão em grupo, por concordarmos com Richit quando este afirma:

> A formação continuada, baseada na prática reflexiva, considera o professor um sujeito da ação, valoriza suas experiências pessoais, suas incursões teóricas, seus saberes da prática e possibilita-lhe atribuir novo significado à sua prática ao longo do seu processo de formação, bem como permite-lhe compreender e enfrentar as dificuldades com as quais se depara diariamente no exercício da profissão. ([9], p.67)

Sobre o processo de reflexão em cursos de formação de professores de Matemática, encontramos trabalhos que tratam da reflexão sobre a prática ([8] é um exemplo), os quais são focados basicamente na reflexão sobre práticas de ensino, ou seja, incluem tópicos como definição de metas, planos de ensino, como enfrentar os problemas dos alunos em sala aula, pontos fracos e fortes da prática docente etc. Neste Minicurso propomos algo diferente, no sentido de que não serão realizadas reflexões sobre a prática docente por si só, mas reflexões sobre um conteúdo matemático específico que oportunizem reflexões sobre a prática docente.

Além disso, nossa experiência com minicursos de outro tema fazendo uso da reflexão em grupo é de que o entendimento é muito diferente por parte dos participantes. "Se chegássemos aqui e listássemos no quadro critérios de divisibilidade provavelmente todos concordariam com eles; ao chegarmos aqui propondo que vocês enunciem os critérios que vocês conhecem, toda uma discussão é oportunizada e muitas outras ligações aparecem", foi um comentário das autoras durante uma das discussões oportunizadas em um dos minicursos ministrados sobre o tema.

Gilla Hanna, pesquisadora da Universidade de Toronto, defende que demonstrações voltem à escola, principalmente aquelas que explicam, como já mencionado na Introdução. Essa posição permeou o planejamento dos minicursos. Ela justifica sua posição dizendo

> No ensino de Matemática, explicação e compreensão andam juntas. O objetivo é entender; assim, toda explicação é oferecida com o objetivo de que alguém entenda por que uma afirmação matemática é verdadeira. Isso implica que uma demonstração, para ser útil na sala de aula, deve conter uma explicação. (...) Os educadores terão que continuar a recorrer a múltiplos recursos, confiar em seu julgamento e ser pragmáticos ao procurar identificar ou construir provas que sejam suficientemente explicativas para atender seus objetivos pedagógicos. ([5], p.4)

Além disso, pretendemos promover o que Stylianides em [11] descreve como *raciocínio-e-prova*, fazendo uso da expressão hifenada raciocínio-e-prova para ressaltar o processo de demonstrar, que considera muito maior do que a demonstração em si, por englobar exploração empírica, conjectura, generalização, refinamento, explicação e, por fim, a demonstração em si.

Além disso, buscamos nesta proposta minimizar a dupla descontinuidade referenciada por Felix Klein há mais de cem anos. Segundo Klein, por um lado, durante a formação inicial dos professores, há pouca identificação da Matemática estudada com aquela anteriormente aprendida por eles enquanto alunos da escola básica; por outro lado, durante sua vida profissional, há pouca identificação entre a Matemática praticada em sala de aula e aquela estudada nos cursos de formação ([6], p.1).

Finalmente, nesta proposta, foram levadas em conta as sugestões citadas em ([12], p.296) para melhorar o ensino/compreensão das ideias relacionadas a argumentação e prova: "professores devem engajar seus alunos nos seguintes tipos de atividades:

- identificar contraexemplos para afirmações que reconheçam falsas;
- avaliar o valor lógico de uma afirmação matemática, sendo capaz de justificá-la;
- analisar argumentações de colegas e determinar se nelas há errros.

Capítulo 3

Relato: Parte I

Já foram oferecidos três minicursos sobre o tema critérios de divisibilidade, todos desenhados objetivando uma reflexão em grupo. Tiveram como resumo:

> Este minicurso propõe, a professores e licenciandos em Matemática e Pedagogia, uma reflexão em grupo sobre critérios de divisibilidade. Parte de uma discussão sobre as ideias envolvidas nos critérios de divisibilidade que estão recomendados na Base Nacional Comum Curricular ([2]) para o 6º ano, elaborando-se, com os participantes, argumentos que culminem em diferentes demonstrações. A seguir, desafia os participantes a adequarem tais demonstrações a este ano escolar, defendendo, assim, que demonstrações voltem às salas de aula, principalmente aquelas "que explicam" ([5]). Dessa forma, objetiva-se promover o pensamento matemático na Escola Básica, especificamente, raciocínio e prova ([11]), e uma maior ligação entre a ciência matemática e a prática da sala de aula ([6]) por meio de uma experiência sobre o conhecimento de Matemática para o ensino. ([1])

Os três minicursos foram implementados com base em um planejamento prévio, registrado no Apêndice, e que as ministrantes consideram o ideal para atingir os objetivos propostos. No entanto, em nenhum dos minicursos implementados o tempo foi suficiente para serem cumpridas todas as etapas desse planejamento.

O primeiro Minicurso aconteceu no III Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste em Juazeiro (BA), em junho de 2019. Teve duração de quatro horas e contou com 21 participantes, sendo 5 professores e 16 alunos de graduação; o segundo foi oferecido aos alunos da Licenciatura em Matemática da UFRGS durante a Semana Acadêmica (outubro de 2019); teve duração de três horas e meia e contou com 18 participantes, todos já tendo cursado ou cursando a disciplina de Aritmética. O terceiro foi oferecido no IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática em Vitória, ES (novembro de 2019), também com quatro horas de duração, e teve 3 participantes, sendo dois deles professores do Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) que já lecionaram a disciplina Aritmética, e um estudante de graduação que é bolsista de Iniciação Científica na área de Teoria de Números.

No que segue, intercalamos o relato das três implementações. Cabe ressaltar que alguns pontos do planejamento não foram abordados em todas as ofertas e outros pontos não foram abordados, em geral devido à exiguidade de tempo que se teve. Optou-se por incluí-los todos no Apêndice, com a esperança de que venham a ser úteis ao leitor interessado em implementar a proposta.

A título de motivação, no início de cada minicurso foi apresentada aos participantes a Habilidade EF06MA05 da BNCC que diz respeito ao Objeto de Conhecimento "Números primos e compostos" dentro da Unidade Temática "Números" para o 6º ano (sem dar, em um primeiro momento, muita atenção à expressão "por meio de investigações", expressão que as ministrantes consideram no mínimo matematicamente imprecisa, portanto inadequada, a um documento regulador):

> (EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. (p.301)

A seguir, os participantes dos dois primeiros minicursos foram divididos em pequenos grupos, e o trabalho de reflexão em grupo foi iniciado sendo-lhes propostas as seguintes questões:

1. *Quais os critérios de divisibilidade que você conhece?*

2. *Enuncie os critérios que você listou na primeira pergunta.*

No terceiro minicurso, devido ao pequeno número de participantes, cada um trabalhou sozinho neste momento.

Um aspecto importante a ser observado nas respostas à segunda questão é se o termo *critério* estava claro em Matemática para todos os participantes, aspecto essencial para as próximas etapas do trabalho.

No minicurso oferecido em Juazeiro a questão "o que significa um *critério* em Matemática?" foi colocada aos participantes antes de os pequenos grupos começarem a responder às duas questões iniciais. Uma participante refletiu em voz alta: "se o número termina em 4 então ele é divisível por 2. Eu não vejo isso como um critério... O fato de eu dizer que o número termina em 4 não está contemplando o universo de números que podem ser divisíveis por 2. A afirmação é apenas um exemplo, um caso ..." As ministrantes reforçaram os pontos importantes de tal reflexão: de fato, os números cuja representação decimal termina em 4 não abrangem todos os números que são divisíveis por 2. Portanto, não temos aí um critério. E completaram: "Em Matemática, quando procuramos por um critério para determinada propriedade, procuramos por uma condição que contemple todos os objetos que têm aquela propriedade." Ao serem perguntados por um exemplo de um número que tenha a propriedade de ser divisível por 2 mas cuja representação decimal não termina em 4, os participantes rapidamente mencionaram o número 10, fazendo inclusive uso do termo *contraexemplo*.

As ministrantes deram o fechamento: "Usando linguagem matemática: a afirmação

Se um número natural tem representação decimal terminando em 4,
então ele é divisível por 2

é um exemplo de uma implicação matemática. No entanto, buscamos por uma propriedade que seja contemplada por todo número que seja divisível por 2. Então, procuramos por uma caracterização que sirva também para a implicação recíproca, ou seja, procuramos por uma condição que diga que um número é divisível por 2 *se, e só se*, tal condição acontece. E o que vimos foi que a propriedade terminar em 4 não é uma condição que dê conta de ambas as implicações. (...) Assim, procuramos por uma condição ou propriedade tal que todo número que satisfaz essa condição é divisível por 2 e reciprocamente, todo o número que é divisível por 2 satisfaz essa condição."

Com tal discussão, esperava-se, nesse Minicurso de Juazeiro, que os enunciados trazidos como respostas à questão 2 já seriam dados na forma de equivalência, o que não aconteceu (vide primeira coluna do Quadro 1).

Ainda no Minicurso de Juazeiro, antes de começarem a responder a questão 2, uma participante preocupou-se com a escrita dos enunciados: deveria ser a resposta formulada com vistas ao ensino ou ao conhecimento do professor? Foi então esclarecido a todos os participantes que deveriam responder a questão com base em seu conhecimento matemático, sem preocupar-se, nesse momento, com a escola.

Quadro 1 Critérios elencados em Juazeiro (BA), antes e depois da reflexão em grupo, ficando subentendido que $a = a_n \ldots a_1 a_0$ representa a escrita do número a no sistema de numeração decimal.

Resposta à questão 2, antes da reflexão em grupo: **Um número $a = a_n \ldots a_1 a_0$ é divisível por**	**Reenunciado após a reflexão de grupo:** **Um número natural $a = a_n \ldots a_1 a_0$ é divisível por**
2 quando um número natural termina em 0, 2, 4, 6 e 8	2 se, e só se, termina em 0, 2, 4, 6 ou 8. Ou seja, simbolicamente: 2 se, e só se, a_0 é igual a 0, 2, 4, 6 ou 8.
3 quando a soma dos seus algarismos for divisível por 3	3 se, e só se, a soma dos seus algarismos for divisível por 3. Ou seja, simbolicamente: 3 se, e só se, $a_n + \cdots + a_0$ é divisível por 3.

4 quando os dois últimos algarismos são divisíveis por 4	4 se, e só se, os dois últimos algarismos formam um número divisível por 4. Ou seja, simbolicamente: 4 se, e só se, a_1a_0 é divisível por 4.
5 quando termina em 5 ou em 0	5 se, e só se, termina em 5 ou em 0. Ou seja, simbolicamente: 5 se, e só se, $a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$.
6 quando é divisível por 2 e 3 simultaneamente	6 se, e só se, é divisível por 2 e 3.
8 quando terminar em 000 ou os três últimos algarismos forem divisíveis por 8	8 se, e só se, os três últimos algarismos formam um número divisível por 8. Ou seja, simbolicamente: 8 se, e só se, $a_2a_1a_0$ é divisível por 8.
9 quando a soma dos seus algarismos for divisível por 9	9 se, e só se, soma de todos os algarismos é divisível por 9. Ou seja, simbolicamente: 9 se, e só se, $a_n + \cdots + a_0$ é divisível por 9.
10 quando terminar em zero	10 se, e só se, terminar em zero.

Em geral, os participantes de todos os minicursos tentaram enunciar critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10. Alguns participantes afirmaram saber que existe um critério para 7, porém não lembravam do seu enunciado. No Minicurso de Juazeiro parece que os participantes ficaram meio frustrados por ninguém conseguir lembrar de um critério de divisibilidade por 7, momento em que foram confortados pelas ministrantes: "Não é gratuito que ninguém lembre – o recado está dado: a ideia é que um critério apresente uma condição que seja mais simples ou mais rápida do que fazer a divisão; se a condição mencionada no critério for tão complicada ou demandar mais tempo do que realizar a própria divisão, então o critério perde seu propósito."

Durante a socialização das respostas à questão 2, um grupo do Minicurso da UFRGS que contou, entre seus participantes, com estudantes mais adiantados no curso de Licenciatura, preocupou-se logo com generalizações, citando critérios de divisibilidade por potências de 2 e por potências de 10. (Ver Figura 3.10, à página 19.)

Cabe ressaltar que, além das respostas aí relatadas, no Minicurso de Juazeiro apareceram também como critérios de divisibilidade as afirmações "Todo número par é divisível por 2", apresentada por vários grupos, bem como "Números primos são aqueles que são divisíveis por 1 e por eles mesmos, ou seja, possuem apenas dois divisores" apresentada por algum grupo mas aceita pelos demais grupos, sendo inclusive mantidas na resposta à questão 3 que lhes foi colocada posteriormente (ver adiante o seu enunciado).

Nenhum participante mostrou-se incomodado com menção a "número par" ou a "número primo", evidenciando-se aí uma confusão entre *definição* e *critério*, a saber: a segunda afirmação nada mais é do que a definição de número primo (faltando aí incluir a hipótese "maior do que 1"); já a primeira afirmação não atentou para a redundância (o que é um número par senão todo o número natural que é divisível por 2?) tornando-se portanto inócua a afirmação se pensarmos que estamos na busca por um critério de divisibilidade por 2. Assim, antes de ser discutida a primeira coluna do Quadro 1 e construída a segunda, houve em Juazeiro um momento de discussão sobre os conceitos de número par e de número primo.

Além disso, foi perguntado ao grupo por que ocorreu a eles "números primos" ao se mencionar o tema critérios de divisibilidade. O fechamento dessa discussão revelou-se bem esclarecedor aos participantes: ambos os temas (divisibilidade e número primo) remetem à divisão, no entanto as ministrantes ressaltaram: para verificarmos se um número é primo (por exemplo, 13), devemos responder a questão: quem são os divisores de 13?, portanto a incógnita é o divisor na divisão (Figura 3.3).

Figura 3.1: Primalidade

enquanto que nos critérios de divisibilidade (por exemplo, por 13), devemos responder a questão: quais são os números que admitem o 13 como divisor?, portanto a incógnita é o dividendo na divisão por 13 (Figura 3.2).

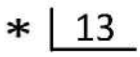


Figura 3.2: Divisibilidade por 13

Foi registrado no quadro o resumo da discussão (Figura 3.3)

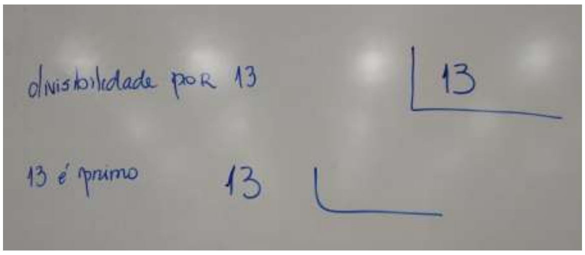


Figura 3.3: Discussão sobre primos $\times$ critério de divisibilidade

Houve também, em Juazeiro, uma discussão relevante sobre a afirmação sugerida por um grupo que tentou imitar o critério de divisibilidade por 6: "Um número é divisível por 8 se, e só se, é divisível por 2 e por 4". Ao serem questionados sobre a validade dessa afirmação, houve alguma dificuldade em encontrarem 12 como um contraexemplo e decidirem se pelo menos uma das implicações nela envolvidas é válida. Maior dificuldade ainda foi encontrada quando as ministrantes questionaram: mas por que um tal argumento vale para o 6 mas não vale para o 8? A propriedade que ampara esse fato (2 e 3 são relativamente primos, enquanto que 2 e 4 não são) foi apenas ressaltada oralmente, e não foi generalizada.

No Minicurso oferecido na UFRGS esperou-se primeiro as respostas à questão 2 para depois lançar-se a discussão sobre o significado de *critério* em Matemática. Ficou evidente nas respostas dadas que nem todos os grupos atentaram para o significado desse termo (Figura 3.4).

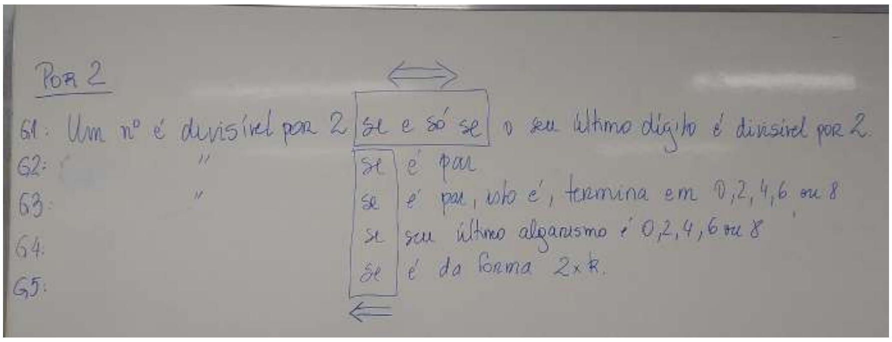


Figura 3.4: Enunciados do critério por 2 no Minicurso da UFRGS

Nessa ocasião, a partir do registro no quadro das frases construídas pelos grupos, perguntou-se se todas as redações eram "da mesma forma", e uma participante apontou para a questão da lógica, atingindo o objetivo da pergunta das ministrantes: "Um grupo usou 'se, e só se,' enquanto os demais usaram só o 'se"'. Seguiu-se então uma discussão sobre o que é um *critério* em Matemática e a adequação da resposta dada pelo Grupo 1 ao fazer uso do "se, e só se," momento em que foi também salientada a notação simbólica para os enunciados apresentados, por exemplo, para tornar precisa a expressão "o último dígito" utilizada pelo Grupo 1, $a = a_n \ldots a_1 a_0$ representa a escrita do número a no sistema de numeração decimal. Discutiu-se também a resposta dada pelo Grupo 2 com relação à definição de número par, e o grande grupo concluiu que a afirmação é inócua e que houve aí uma confusão entre *critério* e *definição*.

No Minicurso oferecido em Vitória, a discussão sobre em que consiste um *critério* foi motivada a partir da proposta de critério de divisibilidade por 2: "um número é divisível por 2 se, e só se, é par". Quando questionados se essa afirmação é, efetivamente, um critério, os participantes rapidamente se deram conta de que a afirmação é uma definição, portanto não servindo como critério de divisibilidade por 2.

A questão 3 a seguir diz respeito ao conhecimento de conteúdo para o ensino de um professor; porém, devido à exiguidade do tempo, ela só foi abordada nos minicursos de Juazeiro e de Vitória.

3. *Ordene os critérios elencados por ordem de complexidade (quais são, na sua opinião, os mais fáceis/mais naturais? Justifique.)*

O objetivo da questão 3 é oportunizar uma discussão sobre o tipo de complexidade que seria aqui considerado e uniformizado. Por exemplo, provavelmente neste momento os participantes prestariam atenção apenas à complexidade dos enunciados, e não à complexidade das ideias envolvidas em suas demonstrações, e assim, adiante, depois de todos terem relembrado e discutido essas demonstrações, objetivava-se retomar tal questão perguntando aos participantes se eles trocariam a ordem dos critérios (ver Momento 8 do Apêndice), sendo a expectativa das ministrantes para esse momento que, sim, os participantes trocariam a ordem dos critérios, porque agora escolheriam como critério a complexidade dos argumentos utilizados nas demonstrações.

No entanto, novamente devido à exiguidade do tempo, essa retomada só aconteceu no Minicurso de Juazeiro, conforme será relatado adiante por ocasião da discussão dos critérios de divisibilidade por 3 e por 9.

Muitos participantes do Minicurso de Juazeiro concordaram que os critérios por 2, por 5 e por 10 são os mais fáceis “por serem os mais intuitivos e dispensarem qualquer cálculo”; no que diz respeito à ordem de complexidade, não houve unanimidade.

Em Vitória a questão 3 foi discutida em paralelo com a adequação dos critérios para a escola, e por isso será relatada no próximo capítulo.

Uma vez registrados no quadro critérios de divisibilidade aceitos por todo o grande grupo, as ministrantes desafiaram os participantes a demonstrar algum dos “critérios” registrados no quadro com a questão.

4. *Demonstre algum dos enunciados elencados no quadro.*

Muitos dos participantes do Minicurso de Juazeiro evidenciaram grande dificuldade com demonstrações, incluindo sua estrutura e o próprio conceito de demonstração.

A primeira demonstração apresentada no quadro foi a do critério de divisibilidade por 9. Os alunos iniciaram a demonstração partindo de $a = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ e usando que $10^n = 9k_n + 1$, e escreveram a como um múltiplo de nove mais um "resto". (Figura 3.5).

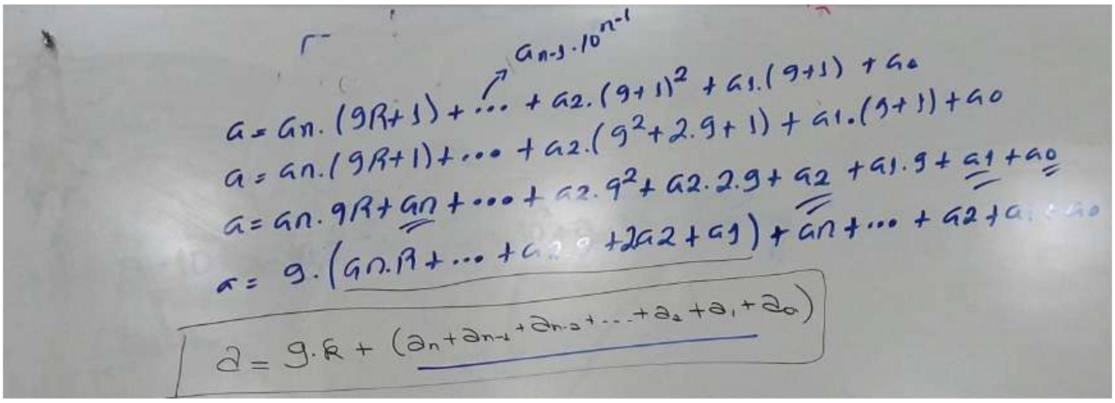


Figura 3.5: Inicio da demonstração do critério de divisibilidade por 9 em Juazeiro

E logo seguiram com a demonstração. (Figura 3.6).

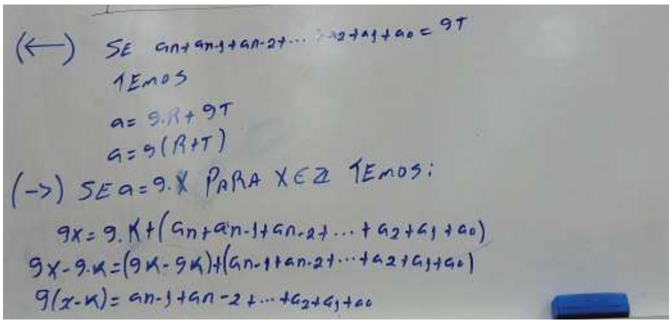


Figura 3.6: Demonstração para o critério de divisibilidade por 9 em Juazeiro

A seguir foi discutido o critério de divisibilidade por 3, reconhecendo-se que muitos dos passos do critério de divisibilidade por 9 poderiam ser aproveitados, já que todo número divisível por 9 é também divisível por 3, ou, equivalentemente, todo múltiplo de 9 é também múltiplo de 3. (Figura 3.7).

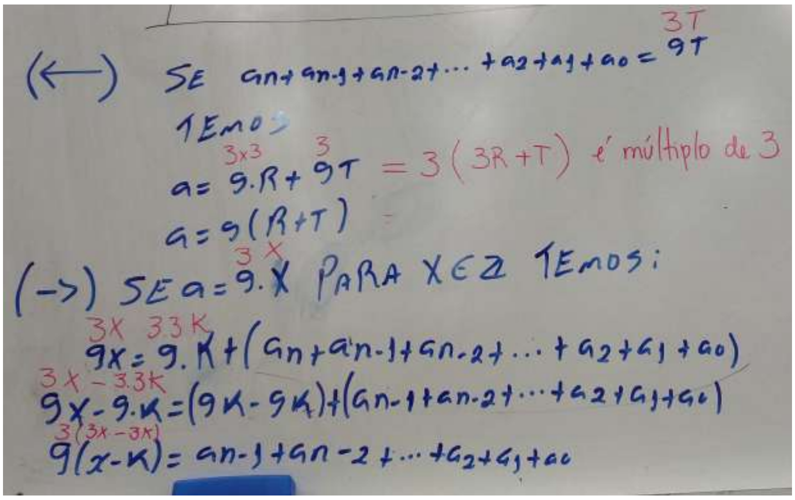


Figura 3.7: Argumento adaptado do critério por 9 para o critério 3 em Juazeiro

Nesse momento as ministrantes retomaram a ordem de complexidade listada pelos pequenos grupos como resposta à questão 3, salientando-se que todos haviam mencionado o critério por 3 como mais simples do que o critério por 9. No entanto, viu-se que o argumento para o critério por 3 exige um passo a mais, a saber, todo número divisível por 9 é também divisível por 3, logo, se $a = 9k + a_n + \ldots + a_1 + a_0$, então, $a = 3M + a_n + \ldots + a_1 + a_0$.

Uma participante apontou, então, que, naquele primeiro momento de discussão sobre a complexidade dos critérios, prestou-se atenção apenas aos enunciados e ao tamanho do número ($3 < 9$), e não às suas demonstrações. No entanto "na sala de aula faria a decomposição do 10 como $9 + 1$, do 100 como $99 + 1$ e do 1000 como

$999 + 1$, o que é mais simples do que a argumentação para o critério por 3, que requer reescrever 9 como 3×3 e 10 como $3 \times 3 + 1$, o 100 como $3 \times 33 + 1$, o 1000 como $3 \times 333 + 1$." Assim, as ministrantes consideraram atingido o objetivo da questão 3 no Minicurso de Juazeiro.

A expectativa das ministrantes era de que, durante o momento seguinte, a saber, o de socialização das respostas à questão 4 no grande grupo, surgissem, para alguns critérios, mais de uma demonstração, o que serviria de motivação para as próximas etapas do planejamento. Isto não aconteceu no Minicurso de Juazeiro e aconteceu no Minicurso da UFRGS para o critério de divisibilidade por 3, quando um grupo fez uso da congruência módulo 3 e de suas propriedades enquanto outro grupo adaptou a demonstração do critério de divisibilidade por 9 (Figura 3.8).

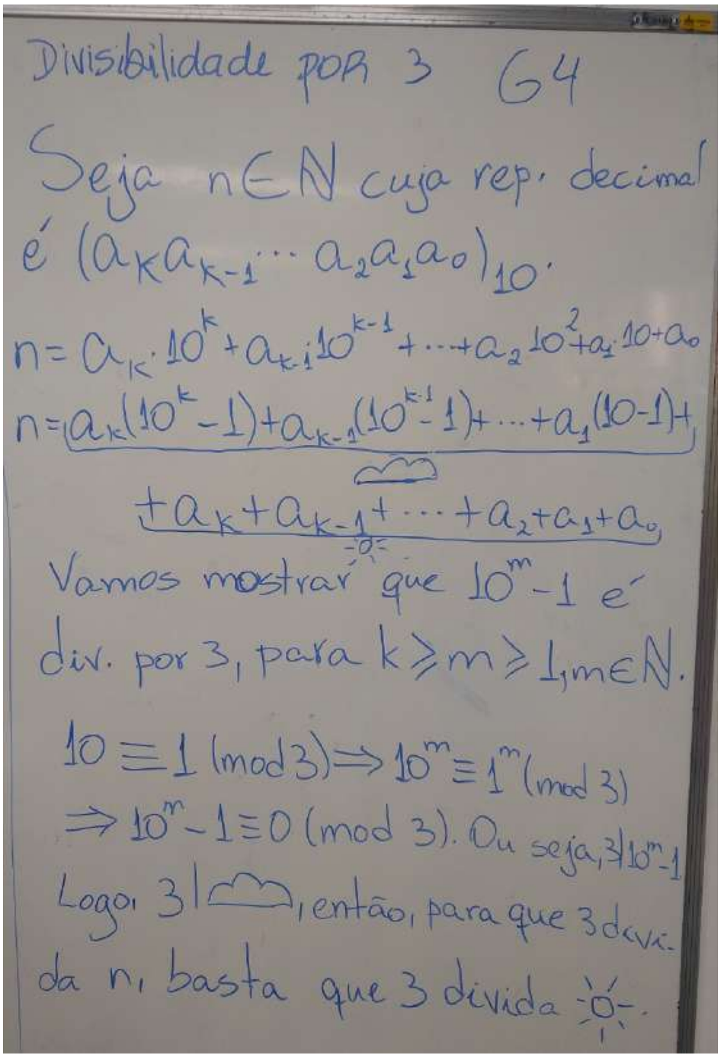


Figura 3.8: Demonstração do critério de divisibilidade por 3 usando congruência

Cabe salientar que o grupo que adaptou a demonstração do critério de divisibilidade por 9 para um critério de divisibilidade por 3, fez uso do Lema a seguir.

Lema. 9 é um divisor de $10^s - 1$, qualquer que seja o natural s.

Sua demonstração (por indução) foi registrada no quadro pelo grupo (Figura 3.9).

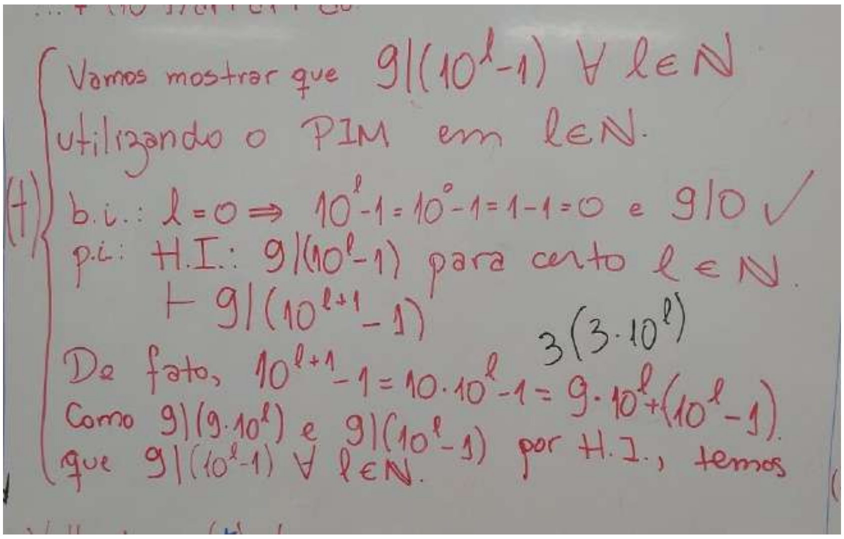


Figura 3.9: Demonstração do Lema no Minicurso da UFRGS

No Minicurso da UFRGS, durante a apresentação da demonstração de cada critério, foram sendo anotados os pré-requisitos necessários para o caso de esse critério vir a ser apresentado em um 6º ano. Com isso, ficou antecipado para os participantes que as próximas etapas do minicurso seriam destinadas à discussão sobre uma adaptação dos critérios de divisibilidade para uma sala de aula de 6º ano. No entanto, pela falta de tempo, esse momento não aconteceu.

As propriedades elencadas como pré-requisitos para o 6º ano foram: - associatividade da adição e distributividade da multiplicação em relação à adição; - se n é divisor da soma $(a+b)$ e n é divisor de uma das parcelas então n é necessariamente divisor da outra parcela; - 9 é divisor de $(10^n - 1)$, qualquer que seja o número natural n; -se k é divisor de a e k é divisor de b então k é divisor de $(a + b)$; - se k é divisor de a então k é divisor de ab, qualquer que seja o número natural b.

Os participantes ficaram em dúvida se potenciação seria ou não um pré-requisito, argumentando que dependeria como seria adaptada a um 6º ano a demonstração do critério de divisibilidade por 9. Estavam aqui, com razão, levando em conta a problemática: como adaptar para a Escola o enunciado e a demonstração do lema que serviu de pré-requisito para a demonstração desse crtiério?

Com relação à resolução da questão 2 do Minicurso da UFRGS, o Grupo 1 foi além das expectativas das ministrantes, pois tomou a iniciativa de tentar generalizar, por exemplo, o critério de divisibilidade por 10, sendo inclusive capaz de enunciar e demonstrar um critério de divisibilidade por potências de 10 (Figura 3.10), revelando-se esse momento um ponto alto desse minicurso, pois tais colegas serviram de consolo a uma participante que cursava o primeiro ano da Licenciatura, que afirmou, ao final do minicurso, que, ao ver colegas mais adiantados tão confortavelmente explicando até generalizações pensou “Também posso chegar lá!”

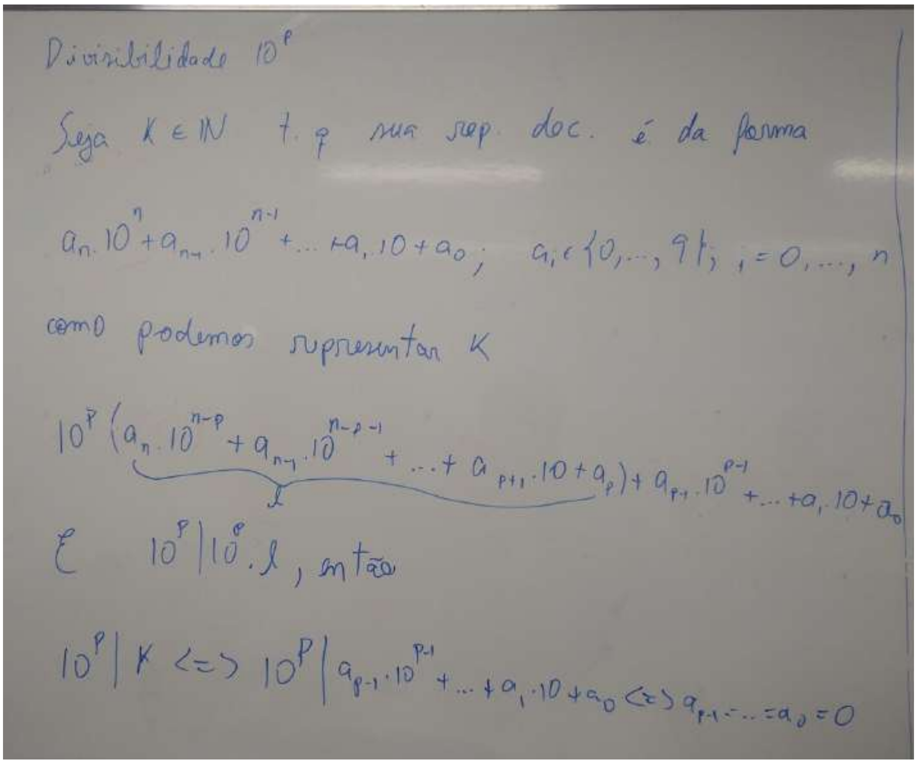


Figura 3.10: Critério de divisibilidade por potências de 10 no Minicurso da UFRGS

Em todos os minicursos o tempo revelou-se curto para discutir-se sobre a possibilidade de generalizar argumentos, porém, conforme já relatado, no Minicurso da UFRGS duas generalizações apareceram espontaneamente.

No Minicurso de Vitória, os participantes rapidamente apresentaram demonstrações para os critérios de divisibilidade elencados, porém, em todas elas, fizeram uso de congruência, argumento que é utilizado no livro de Aritmética do PROFMAT. Após ressaltar-se que congruência não é Objeto de Conhecimento para o 6º ano na BNCC, os participantes foram desafiados a obter demonstrações sem o uso de congruências, já que um dos objetivos do minicurso é poder aproximar essas demonstrações da escola. Inicialmente, cada um dos participantes ficou responsável por dois dos critérios por eles elencados, e durante a apresentação/socialização dos mesmos, as reflexões e sugestões dos colegas eram apontadas, e aproveitadas para outras demonstrações, o que aconteceu, por exemplo, na argumentação para os critérios de divisibilidade por 2, por 5 e por 10 (Figuras 3.11 e 3.12), para as quais foi utilizado o resultado: "Dados $n = a + b$ e $s \in \mathbb{N}^*$, tem-se que, se a e n são divisíveis por s então b é também divisível por s".

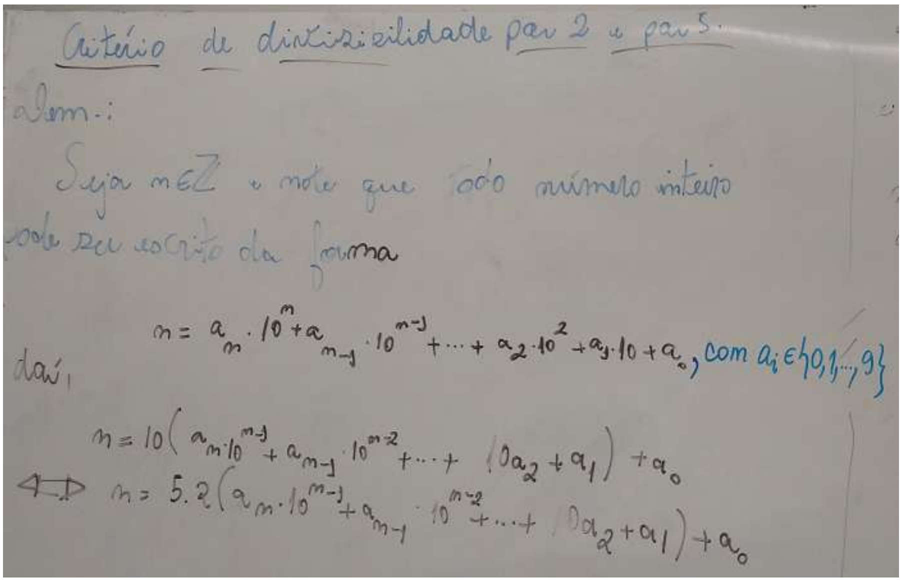


Figura 3.11: Critério de divisibilidade por 2, por 5 e por 10 em Vitória – parte 1

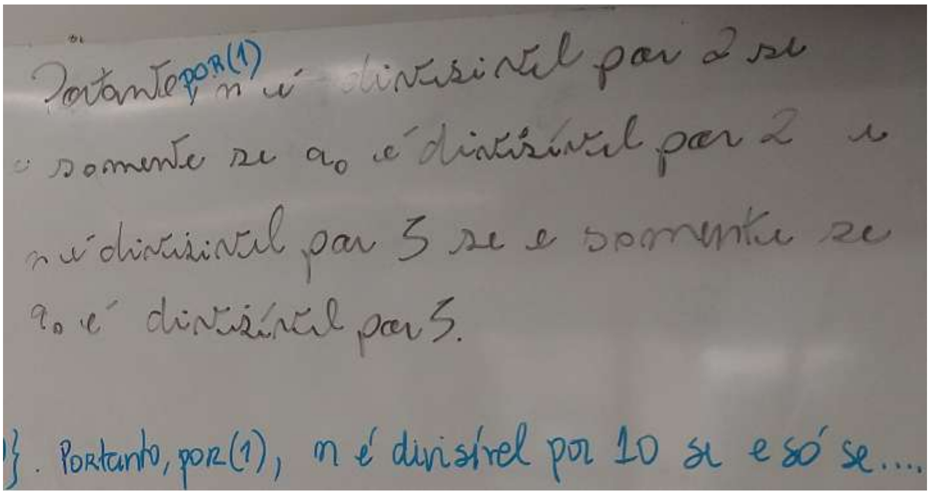


Figura 3.12: Critério de divisibilidade por 2, por 5 e por 10 em Vitória – parte 2

As demonstrações dos critérios por 3 e por 9 em Vitória fizeram uso de argumentos semelhantes aos utilizados nos outros minicursos e aqui já relatados. O interessante é que, em Vitória, ocorreu aos participantes adaptarem a argumentação do lema que apoia o critério de divisibilidade por 9 para obter um resultado análogo que servisse de apoio a um critério de divisibilidade por 11, buscando responder a questão

Quais potências de 10, quando somadas ou subtraídas a uma unidade, tornam-se múltiplas de 11?

concluindo que, para n par, $10^n - 1$ é um múltiplo de 11, enquanto que, para n ímpar, $10^n + 1$ é um múltiplo de 11. A partir daí, enunciaram um critério de divisibilidade por 11 e apresentaram sua demonstração (Figuras 3.13 e 3.14).

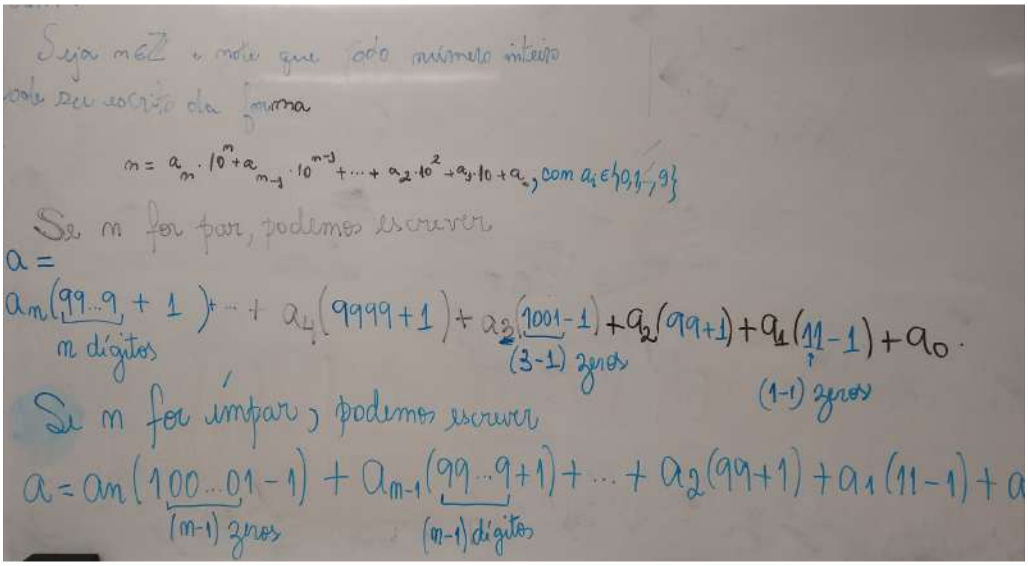


Figura 3.13: Critério de divisibilidade por 11 em Vitória – parte 1

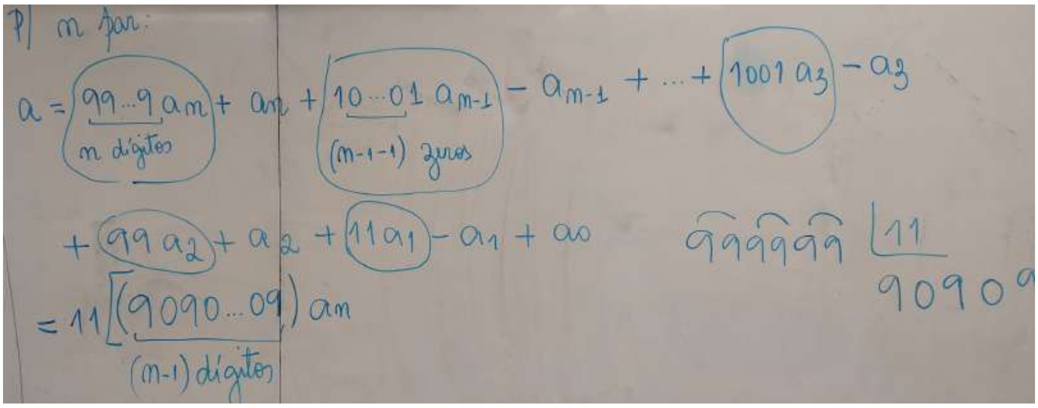


Figura 3.14: Critério de divisibilidade por 11 em Vitória – parte 2

Capítulo 4

Relato: Parte II

A Parte II do minicurso foi planejada buscando uma proposta de abordagem de critérios de divisibilidade para a Escola que seja adequada ao 6º ano, contemplando, assim, as ideias de Hanna de defender que demonstrações voltem às salas de aula, principalmente aquelas "que explicam" ([5]). Dessa forma, objetivou-se também promover o pensamento matemático na Escola Básica, especificamente, o que Stylianides chama de *raciocínio-e-prova* ([11]), e uma maior ligação entre a ciência matemática e a prática da sala de aula discutida por Klein em ([6]) por meio de uma experiência sobre o *conhecimento de Matemática para o ensino*, na terminologia utilizada por Ball,Thames e Phelps em [1].

Infelizmente esta Parte II não aconteceu no Minicurso da UFRGS, que foi mais curto do que os demais. No Minicurso de Juazeiro a Parte I requereu dos participantes quase a totalidade do tempo disponível, sendo possível apenas discutir brevemente as questões a seguir, que constituíram a introdução à reflexão sobre a abordagem de critérios de divisibilidade na Escola:

5. *Em que ano(s) você considera apropriado(s) a abordagem desses critérios?*

Em Juazeiro, muitos dos participantes que já são professores responderam 6º ano do Ensino Fundamental; alguns participantes mencionaram 5º ano e alguns estudantes mencionaram 3º ano (restrigindo-se aos critérios de divisibilidade por 2, por 5 e por 10). Uma participante salientou que, no entanto, a abordagem deveria evitar linguagem simbólica neste ano escolar, obtendo a concordância de todos os presentes.

6. *O que você considera pré-requisitos necessários para abordar esse assunto?*

As respostas obtidas em Juazeiro foram: conhecimento prévio das quatro operações básicas; conceito de primo, de múltiplo e de divisor; conhecimento da tabuada (da divisão e da multiplicação).

7. *Você já teve a oportunidade de lecionar algum critério de divisibilidade?*

Vários participantes em Juazeiro responderam que pelo menos um critério já haviam ensinado, e um deles respondeu "mas não desta forma". Ao ser solicitado a se explicar melhor, relatou "não todos os critérios, apenas os mais simples, por 2 e por 3". Uma participante relatou que não os abordou como um tópico específico, mas pela necessidade do aluno (por exemplo, na simplificação de frações).

Em Vitória, a experiência matemática dos participantes requereu menos tempo na Parte I, oportunizando uma maior discussão sobre a adequação à escola. Cabe ressaltar a inexperiência dos três participantes com a Escola Básica, o que contribuiu para uma direta aceitação da orientação da BNCC para o 6º ano como resposta à questão 5. Quanto aos pré-requisitos solicitados na questão 6, os participantes elencaram, em um primeiro momento, as seguintes propriedades:

(1) Dados $n = a + b$ e $s \in \mathbb{N}^*$, tem-se que, se a e n são divisíveis por s então b é também divisível por s.

(2) Para todo $n \in \mathbb{N}$, 9 é divisor de $10^n - 1$.

Quanto à questão 7, a resposta dos dois professores do PROFMAT foi que sim, durante o curso de Aritmética, porém sempre usando congruências. O terceiro participante afirmou nunca ter lecionado qualquer critério.

A próxima etapa consistiu em tentar adequar a argumentação sobre os critérios de divisibilidade para um 6º ano. A primeira problemática que se colocaram os participantes neste momento foi quanto à ordem com que os critérios deveriam ser abordados na escola. E com isso veio à tona a discussão sobre a ordem de complexidade daqueles até então elencados, e uma classificação para tal complexidade.

Quadro 2 Classificação dos critérios de divisibilidade elencados por ordem de complexidade no Minicurso de Vitória.

Por ordem de complexidade das demonstrações		**Por ordem de complexidade dos enunciados**	
particular	**geral**	**particular**	**geral**
$10, 5 \approx 2$	$10^n, 5^n \approx 2^n$	$10, 5, 2$	$10^n, 5^n \approx 2^n$
$9, 3$		$3 \approx 9$	

Quando estimulados a pensar sobre algum recurso visual para auxiliar na argumentação em um 6º ano, os participantes disseram não ter ideia. As ministrantes precisaram relembrar o significado de arranjo retangular para a multiplicação (Figura 4.1).

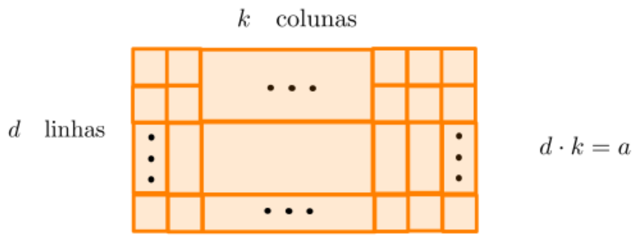
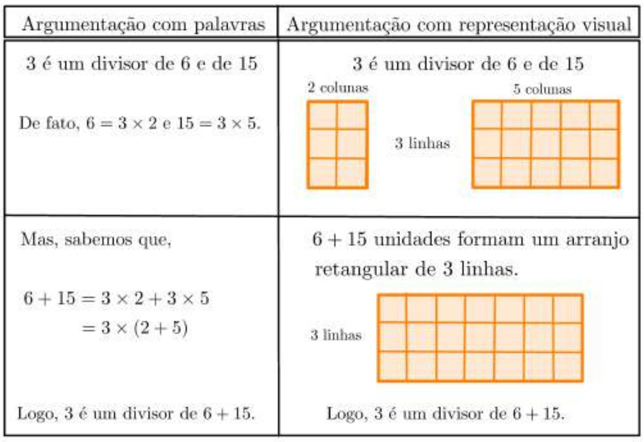


Figura 4.1: Arranjo retangular de d linhas e k colunas

Também foi apresentada a possibilidade de sua utilização para visualizar pelo menos a propriedade (1) elencada nos pré-requisitos (Quadro 3, no qual, na primeira coluna, é utilizada a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, enquanto que, na segunda coluna, é utilizada a sua visualização, na forma de adição com o significado de juntar).

Quadro 3 Argumentação em um caso particular, porém suficientemente genérica para abordar a propriedade (1)



Argumentação com palavras	Argumentação com representação visual
3 é um divisor de 6 e de 15 De fato, $6 = 3 \times 2$ e $15 = 3 \times 5$.	3 é um divisor de 6 e de 15 2 colunas 5 colunas 3 linhas
Mas, sabemos que, $6 + 15 = 3 \times 2 + 3 \times 5$ $= 3 \times (2 + 5)$ Logo, 3 é um divisor de $6 + 15$.	$6 + 15$ unidades formam um arranjo retangular de 3 linhas. 3 linhas Logo, 3 é um divisor de $6 + 15$.

Daí, a partir das decomposições em dezenas, tais como $23 = 2$ dezenas $+$ 3 unidades e $134 = 13$ dezenas $+ 4$ unidades, gerou-se, no quadro, uma imagem explicativa genérica do critério de divisibilidade por 10, do tipo da Figura 4.2.

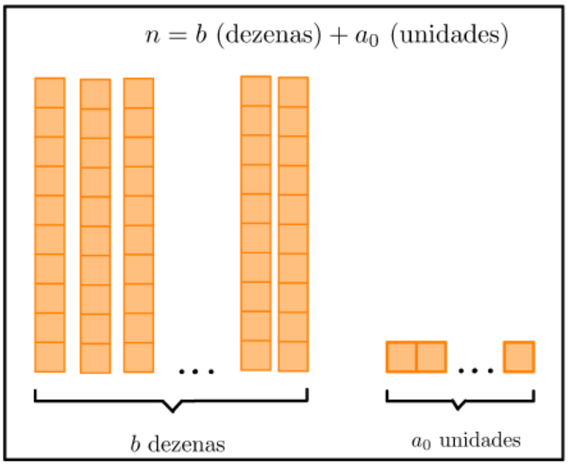


Figura 4.2: Imagem genérica amparando o critério de divisibilidade por 10

A ideia de arranjo retangular foi também utilizada para outras afirmações, tais como "soma de pares é par" e a generalização da propriedade apresentada na tabela acima e no Quadro 3.

Os participantes do Minicurso em Vitória ficaram empolgados com o recurso visual que pode ser aproveitado para a Escola Básica e reconheceram que as reflexões oportunizadas no minicurso mostraram que é possível obter demonstrações para critérios de divisibilidade bem mais próximas da escola do que aquelas conhecidas por eles e que faz uso da congruência.

Capítulo 5

Considerações Finais

O objetivo maior dos minicursos foi sempre discutir a argumentação para os critérios de divisibilidade na escola, especificamente no 6º ano do Ensino Fundamental. No entanto a etapa de discussão das argumentações matemáticas para esse nível, inclusive os enunciados, aspectos que dizem respeito ao conhecimento matemático que todo professor deveria possuir, tomaram todo o tempo dos minicursos implementados em Juazeiro e na UFRGS, com exceção daquele em Vitória, que contou com dois professores que já lecionaram o curso de Aritmética do PROFMAT e com um bolsista de Iniciação Científica de Teoria dos Números. Nesse último, chegou-se a discutir a ideia de arranjo retangular como recurso para apoio à argumentação em sala de aula, o que se revelou uma novidade para esses participantes.

Com a reflexão em grupo encaminhada nos três minicursos, ficou evidente para os participantes que não é fácil escrever-se com clareza, o que, na Matemática, é essencial. De fato, foi ressaltado aos participantes que, a partir da reflexão em grupo, com as observações de cada um, oportuniza-se o aprimoramento da escrita e dos conceitos e propriedades envolvidas na discussão, o que contribui não só para o conhecimento matemático de cada um mas também para o seu conhecimento matemático para o ensino.

Em nenhum dos minicursos implementados o tempo foi suficiente para serem cumpridas todas as etapas do planejamento, apresentado na íntegra no Apêndice. A falta de tempo foi também mencionada por uma participante do Minicurso de Juazeiro: "Passa-se por esse problema também nas salas de aula, quando nos vemos obrigados a fazer opções e deixar coisas de lado, no entanto, se abordarmos de uma forma profunda algumas coisas com os estudantes, o efeito pode ser mais positivo, como aconteceu aqui neste minicurso." De fato, apesar de não se ter demonstrado em Juazeiro todos os critérios de divisibilidade, a demonstração do critério por 9 e a discussão sobre a sua adaptação para o critério por 3 certamente surtiram nessa participante um efeito maior do que aquele que seria oportunizado se as ministrantes tivessem provado todos os critérios, sem oferecer tempo aos participantes para as próprias reflexões.

Em Juazeiro foi também salientado aos participantes que se uma reflexão em grupo semelhante à desenvolvida no minicurso for aplicada algumas vezes com os estudantes na sala de aula, estaremos oportunizando a eles uma ideia melhor do que efetivamente é a Matemática. Por exemplo, demonstrando os critérios de divisibilidade por 10, por 2 e por 5, estaremos corroborando o que Hanna defende, no sentido de que devemos levar demonstrações para a sala de aula, principalmente aquelas que explicam. De fato, essas demonstrações no caso ajudam o estudante a melhor compreender o sistema de numeração decimal.

O fato de os participantes evidenciarem dúvidas sobre o que vem a ser um *critério* em Matemática, sobre a diferença entre *definição* e *critério*, bem como entre *implicação* e *equivalência*, além do próprio conhecimento matemático sobre o conteúdo "critérios de divisibilidade"motivou as autoras desses minicursos e escreverem um livro sobre o assunto, discutindo-o com vistas ao olhar para a sala de aula, e que ainda se encontra em preparação.

Referências Bibliográficas

[1] BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. (2008). "Content knowledge for teaching: What makes it special?"*Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

[2] BRASIL. (2017). *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC). Brasília: Ministério da Educação. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em 13 de junho de 2017.

[3] CAVALCANTE, L. G.; SOSSO, J.; VIEIRA, F.; POLI, E. (2006). *Para Saber Matemática, 5a. série/6^o. ano*. Ed. Saraiva.

[4] HANNA, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. For the Learning of Mathematics, 15(3), FLM Pub.Ass., 42-49.

[5] HANNA, G. (2016). Reflections on proof as explanation. 13th International Congress on Mathematical Education Hamburg, 24-31.

[6] KLEIN, F. (2009). *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*. Volume I, Parte I: Aritmética. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

[7] MATHIAS, C.; DOERING, L. R.; RIPOLL, C. *Reflexões de Grupo e Análise de Erros: Uma alternativa para a sala de aula?*.E-Book do II Simpósio (ANPMat) da Formação do Professor de Matemática da Região Sudeste. SBM. Disponível em: https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2020/08/Reflexoes-em-grupo.pdf . Acesso em outubro de 2020.

[8] POSTHUMA, B. (2012). Mathematics teachers' reflective practice within the context of adapted lesson study. Pythagoras, [S.l.], 33(3). Disponível em https://pythagoras.org.za/index.php/ pythagoras/article/view/140/219. Acesso: abr. 2018

[9] RICHIT, A. (2010). Apropriação do Conhecimento Pedagógico-Tecnológico em Matemática e a Formação Continuada de Professores. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, SP, 279 f.

[10] ROSA, C. C. da; KATO, L. A. (2014). A Modelagem Matemática e o Exercício do Professor Reflexivo: a experiência de Elias. Perspectivas da Educação Matemática, 7(14), 220-235.

[11] STYLIANIDES, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. Mathematical thinking and learning, 11(4), 258–288.

[12] THOMPSON, D. R.; SENK, S. L.; JOHNSON, G. J. (2012). "Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks". *Journal for Research in Mathematics Education*, 43, 253–295.

Apêndice

Resumo Este Minicurso propõe uma reflexão de grupo sobre critérios de divisibilidade. Parte de uma discussão sobre a Matemática envolvida nos critérios de divisibilidade recomendados na Base Nacional Comum Curricular para o 6º ano, e busca elaborar, com os participantes, argumentos que culminem em diferentes demonstrações. A seguir, desafia os participantes a adequarem tais demonstrações aos diferentes segmentos do Ensino Básico (anos iniciais, segundo segmento do Ensino Fundamental e Ensino Médio), contemplando, assim, as ideias de [5]. Dessa forma, objetiva-se promover: o pensamento matemático na Escola Básica, especificamente, raciocínio e prova; uma maior ligação entre a ciência matemática e a prática da sala de aula ([6]); a formação continuada de professores e um aprimoramento do seu conhecimento de Matemática para o ensino.

PARTE I

A primeira parte deste Minicurso concentra-se no conhecimento de Matemática do professor sobre o tema "divisibilidade".

Momento 1

Apresentação dos objetivos do Minicurso e projeção da Habilidade da BNCC

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é recomendada, no sexto ano, a seguinte Habilidade relativa ao Objeto de Conhecimento "Múltiplos e divisores de um número natural":

> (EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. (p.301)

Para os Ministrantes: Ressaltamos a ambiguidade do termo “por meio de investigações”. Será que se espera aqui, por exemplo, uma exploração do pensamento matemático que culmine na demonstração dos critérios aqui mencionados? É dessa forma que vamos aqui encarar o termo, encontrando respaldo na BNCC que traz a orientação de que, nos anos finais do ensino fundamental, é recomendável destacar-se a importância da comunicação, da representação e da argumentação ([**?**]).

Momento 2

Discussão: Em que consiste um critério em Matemática?

Para os Ministrantes: Essa é uma pergunta que não é feita em muitos cursos de Licenciatura, portanto não é surpresa que seja este o primeiro momento em que um professor se depare com ela.

Essa pergunta pode ser adiada para a socialização do Momento 3, após ser observado, nas respostas à pergunta 2, se os participantes fizeram uso da equivalência lógica ("se e só se") nos enunciados dos critérios de divisibilidade.

Caso os participantes hesitem na resposta a essa pergunta, pode-se adicionar a questão "É verdadeira a frase 'Se um número tem representação decimal terminando em 4 então esse número é divisível por 2'? E é ela um critério de divisibilidade por 2?"

Acreditamos que, com um tal questionamento, os participantes dar-se-ão conta de que a afirmação não é um critério, mas sim apenas o que é chamado em Matemática de um "critério parcial" e que, em Matemática, quando procuramos por um critério para determinada propriedade, procuramos por uma condição que contemple todos os objetos que têm aquela propriedade.

Momento 3 (10 minutos)

Os participantes são convidados a responder individualmente as questões a seguir.

1. Quais os critérios de divisibilidade que você conhece?
2. Enuncie os critérios que você listou na primeira pergunta.
3. Quais são, na sua opinião, os mais fáceis/naturais? Justifique.
4. Ordene os critérios que você listou segundo o grau de complexidade do seu enunciado.
5. Em que ano(s) você considera apropriado(s) a abordagem desses critérios?
6. O que você considera pré-requisitos necessários para abordar esse assunto?
7. Você já teve a oportunidade de lecionar algum critério de divisibilidade?

Para os Ministrantes: Sugere-se atentar para o que os participantes consideram que seja "enunciar", bem como se os critérios efetivamente fazem uso da equivalência lógica ("se e só se") ou de apenas uma implicação ("se...então").

Momento 4

Socialização das respostas individuais em grupos de 4 participantes culminando com um breve relato da discussão do grupo.

Para os Ministrantes: Sugere-se nesse momento circularem pelos grupos, eventualmente problematizando ou fazendo intervenções por meio de questionamentos.

Momento 5

Socialização dos relatos dos quartetos no grande grupo, com elaboração de um documento único do grande grupo.

Para os Ministrantes: Podem ser registrados no quadro os critérios elencados por todos os grupos antes de iniciar-se uma discussão sobre a equivalência entre os mesmos (dizem a mesma coisa com outras palavras), a clareza da redação etc. Pode-se deixar a correção matemática para o próximo momento, quando os grupos deverão demonstrar os critérios elencados. Neste momento, não conseguirão uma demonstração para a frase que não é correta matematicamente.

Momento 6

Uma vez de posse da lista dos critérios aceita por todo o grupo, vem a proposta da seguinte atividade em duplas: Demonstre algum dos enunciados elencados no documento do grande grupo.

Para os Ministrantes: Sugere-se nesse momento circularem pelos grupos, eventualmente problematizando ou fazendo intervenções por meio de questionamentos. O objetivo desse momento é dar a oportunidade para todos os participantes argumentarem e sedimentarem seus argumentos, aprimorando a redação da demonstração, tendo em vista ser comum entre professores e professores em formação existir uma dificuldade com demonstrações.

Momento 7

Socialização das demonstrações em grupos de 4 com elaboração de demonstrações de consenso do quarteto.

Para os Ministrantes: Sugere-se que sejam unidas duplas que ficaram ou com a demonstração de um mesmo critério ou que sejam unidas as duplas que ficaram com os critérios por 2 e por 5 e , bem como as duplas que ficaram com os critérios por 3 e por 9. O objetivo desse momento (juntar duas duplas) é dar a oportunidade para todos os participantes argumentarem e sedimentarem seus argumentos, aprimorando a redação da demonstração, bem como perceber semelhanças em demonstrações de critérios diferentes (2 e 5, bem como 3 e 9).

Momento 8

Socialização das demonstrações dos quartetos no grande grupo, com elaboração de uma ou mais demonstrações de consenso para cada critério, seguida da pergunta: Você trocaria a ordem elencada como resposta à Questão 4?

Para os Ministrantes: Sugere-se, como finalização de cada demonstração aprimorada no grande grupo, lançar as seguintes questões preparatórias para a Parte II:

Quais conceitos, resultados e/ou propriedades foram aqui utilizados?
São todos eles abordáveis na Escola? Em que nível?

PARTE II

Uma vez explorado na Parte I o conhecimento matemático do professor sobre critérios de divisibilidade, a segunda parte deste Minicurso concentra-se no conhecimento de Matemática para o ensino do professor sobre o mesmo tema.

Assim, o restante do Minicurso consistirá da elaboração de uma proposta de abordagem de critérios de divisibilidade para a Escola, adequados a diferentes níveis escolares, sem deixar de explorar o pensamento matemático (Stan), levando, tanto quanto possível, demonstrações para a sala de aula ([5]):

Momento 9

• divisão dos participantes em grupos, por segmento do ensino básico: anos iniciais, ensino fundamental II e ensino médio;

• proposta do desafio didático: cada grupo deverá construir uma proposta de justificativa/prova dos critérios já discutidos que seja adequada para o segmento do ensino básico pelo qual seu grupo é responsável. Todos os conceitos, resultados e/ou propriedades utilizados deverão ser reescritos na linguagem apropriada à faixa etária dos estudantes, acompanhadas de demonstrações também adequadas a esse nível.

Para os Ministrantes: Sugere-se que seja disponibilizado material concreto para os participantes, tais como Cuisinaire, material dourado, folha quadriculada, lápis de cor

Momento 10

Socialização das propostas dos subgrupos com o grande grupo.

Para os Ministrantes: Sugere-se que seja questionado, sempre que possível, sobre eventuais generalizações do critério apresentado para o nível considerado.

Momento 11

Encerramento: Retomada dos objetivos do Minicurso (foram alcançados?) e aplicação de um questionário de avaliação do Minicurso:

Questionário de avaliação do Minicurso

1. Você acha que o Minicurso contribuiu para sua reflexão sobre a Habilidade EF06MA05 da BNCC? Em caso afirmativo, de que forma?

   > EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. (p.301)

2. Você tem algum outro comentário sobre o Minicurso?

REALIZAÇÃO

ANPMat
Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

ORGANIZAÇÃO

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

ISBN 978-65-88013-02-1