III SIMPÓSIO DA FORMAÇÃO
DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA
DA REGIÃO NORTE

DIVIDIR E BRINCAR COM PAPEL:

a dobradura no ensino de frações

Débora Alfaia da Cunha

Ilustração: Suzana Alfaia da Cunha

ANPMat
Associação Nacional dos Professores
de Matemática na Educação Básica

DIVIDIR E BRINCAR COM PAPEL:

a dobradura no ensino de frações

Dividir e brincar com papel: a dobradura no ensino de frações.

Capa: Gabriel Brasil Nepomuceno
Projeto gráfico: Gabriel Brasil Nepomuceno
Diagramação e Assessoria Editorial: Yunelsy Nápoles Alvarez

ISBN: 978-65-88013-12-7

Distribuição
Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
http://www.anpmat.org.br / email: editoraanpmat@anpmat.org.br

III SIMPÓSIO DA FORMAÇÃO
DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA
DA REGIÃO NORTE

DIVIDIR E BRINCAR COM PAPEL:

a dobradura no ensino de frações

Débora Alfaia da Cunha

Ilustração: Suzana Alfaia da Cunha

1ª edição

2021

Belém-PA

ANPMat
Associação Nacional dos Professores
de Matemática na Educação Básica

Sobre os autores

Débora Alfaia da Cunha

Débora Alfaia da Cunha. Doutora em Educação pela Universidade de Brasília (UnB). Professora efetiva da Universidade Federal do Pará (UFPA), vinculada a Faculdade de Pedagogia, do Campus de Castanhal. Leciona disciplinas de Fundamentos teóricos e metodológicos do ensino de Matemática, Estatística aplicada à Educação, Ludicidade, Corporeidade e Motricidade humana. Pesquisadora na área de Educação para as relações étnico-raciais, interculturalidade, ludicidade e estudos decoloniais.

Suzana Alfaia da Cunha. Ilustradora da obra. Possui graduação em Artes Visuais pela Universidade da Amazônia (UNAMA), possuindo experiência na área de ilustração, desenho digital e cenografia.

Suzana Alfaia da Cunha

Sumário

Lista de Figuras

Prefácio

O presente *e-book* é uma versão ampliada da apostila elaborado para a oficina "Dividindo e brincando com papel: a dobradura no ensino de frações", ministrada pela prof.ª Dra. Débora Alfaia da Cunha e a graduanda Amanda da Costa. Tal oficina integrou a programação do 3º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Norte, modalidade *on-line*, realizado de 18 a 20 de junho de 2021, pela Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica (ANPMat) em parceria com a Universidade Federal do Pará (UFPA).

A obra apresenta ilustrações da artista visual Suzana Alfaia, elaboradas especialmente para este *e-book*. As ilustrações ampliam a inteligibilidade do livro, pois permitem visualizar e compreender a sequência das dobraduras e recortes. Além disso, a oficina e a produção de materiais didáticos constituem ações do Projeto de Extensão universitária "Ludicidade, interculturalidade e educação: Produção de materiais didáticos e de metodologias para a educação das relações étnico-raciais" coordenada pela Prof.ª Débora Alfaia e pelo prof. Claudio Lopes de Freitas.

Entre os objetivos do referido projeto de extensão encontra-se o de promover a formação de professores e alunos do Ensino Fundamental em temas interculturais. Na versão de 2021 do projeto, o foco definido foi a alfabetização matemática e a realização de atividades culturais e lúdicas pautadas nas contribuições da etnomatemática de Ubiratan D'Ambrósio e Paulus Gerdes. Muitas das ações planejadas partem da valorização da matemática e da ludicidade africana e afro-brasileira. Contudo, o projeto de extensão realiza diálogos interculturais com outras tradições, como se pode perceber na oficina de dobradura, com a arte japonesa do origami. Assim, a oficina traz para a formação de professores o encontro da cultura infantil com a tradição asiática, aproximando a técnica do origami com as brincadeiras com papéis, para o ensino de frações na escola fundamental.

O *e-book* apresenta dois momentos. O primeiro, mais teórico, voltado ao debate sobre a importância de materiais manipulativos para a aprendizagem matemática, bem como os desafios do ensino de frações em seus diferentes significados. O segundo apresenta a sequência de atividades realizadas na oficina, durante o 3º Simpósio da ANPMat. As atividades práticas não devem ser pensadas como receitas prontas, mas como sugestões para o uso do papel como material lúdico, como caminhos para aliar a alegria ao aprendizado matemático.

Belém-PA, junho de 2021.

Débora Alfaia

Agradecimentos

Agradeço à Universidade Federal do Pará (UFPA) e ao *campus* universitário de Castanhal pelo apoio às ações extensionistas.

Introdução

O ensino de Matemática não se limita apenas aos conteúdos matemáticos, mas liga-se a outros elementos. Como explica Patrono (2011), é preciso incluir nesse processo, de ensinar e aprender matemática, elementos que também impactem no sucesso ou fracasso dessa tarefa, tais como as relações interpessoais entre professores e alunos, a dinâmica das aulas, os recursos pedagógicos utilizados, a concepção de aprendizagem docente etc. Assim, vários aspectos precisam ser considerados para uma aula realmente educativa. Partindo dessa compreensão, a oficina – apresentada no 3º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Norte, realizado pela ANPMat e organizado pela UFPA (Campus Belém) – focou nos recursos didáticos para o ensino de matemática, apresentando a folha de papel como material manipulativo. Tais recursos, que permitem exploração tátil, tornam as aulas de matemática, conforme Rodrigues e Gazire (2012), mais dinâmicas e compreensíveis, pois aproximam a teoria matemática da ação prática, da linguagem lúdica e da investigação lógica. Nesse contexto, os objetivos da oficina e da presente publicação podem ser resumidos em:

- Debater sobre recursos manipulativos no ensino de matemática;
- Dialogar sobre a especificidade do número fracionário e quais usos desse número devem ser trabalhados nos anos iniciais do fundamental (até o 5º ano);
- Apresentar o papel como recurso manipulativo, usando em atividades de dobradura, recorte, colagem e origami;
- Realizar atividades de exploração do número fracionário durante a confecção de origamis;
- Representar o significado de fração como parte-todo com atividades de dobras consecutivas em folha de papel;
- Demonstrar a resolução de problemas envolvendo frações, tomadas como divisão, utilizando o recorte de papel;
- Comparar frações equivalentes em atividades de dobradura, recorte e colagem;
- Explorar a determinação, a soma e a subtração visual de frações, utilizando dobraduras.

Capítulo 1

Conversando sobre o ensino de frações

1.1 O uso de materiais manipulativos e de situações lúdicas no ensino de matemática

> A utilização de materiais concretos no ensino de 1º Grau deve ser organizada de modo a propiciar a cada aluno situações de experiências físicas bem como situações de experiências lógico-matemáticas, onde ele possa realizar tanto abstrações empíricas quanto abstrações reflexivas. (FAGUNDES, 1977, s/p).

Como dito, a oficina privilegiou o uso da folha de papel como recurso manipulativo para o ensino-aprendizagem de frações. O ensino de frações é um tema amplamente discutido na literatura específica da área de educação matemática, em virtude das dificuldades de aprendizagem observadas na introdução dos números racionais. Como destacam Nunes e Bryant (1997), Nunes (2003), Romanatto (1997), Rodrigues *et al.* (2004) e Merlini (2005), os alunos, em especial dos anos iniciais, possuem dificuldades na aprendizagem de fração, por não compreenderem sua natureza e articularem erroneamente as frações aos números naturais. Entre as explicações desse fenômeno, os autores indicam as questões metodológicas e de formação docente.

Do ponto de vista da metodologia, vários autores destacam a excessiva valorização da nomenclatura e da aplicação de regras pelos docentes, sem a real preocupação em fazer os discentes compreenderem os usos e significados do número fracionário, bem como a redução e repetição de exemplos que limitam a fração apenas a sua representação parte-todo. (NUNES; BRYANT, 1997 e MERLINI, 2005).

A formação docente também é outro desafio no sentido de inserir novas abordagens no ensino de matemática, com destaque aqui aos conteúdos fracionários, pois sem formação adequada os professores tendem a reproduzir as metodologias tradicionais que vivenciaram na época de estudantes. (NUNES, 2003).

1.2 A fração como elemento integrativo no currículo de matemática

> *The proper study of fractions provides a ramp that leads students gently from arithmetic up to algebra. But when the approach to fractions is defective, that ramp collapses, and students are required to scale the wall of algebra not at a gentle slope but at a ninety degree angle. (WU, 2001, pg.1).*

O número fracionário é fundamental para a compreensão de outros conteúdos matemáticos, como equações, proporções e cálculos algébricos, por isso a defasagem e insucesso na introdução desse tema possuem consequências no percurso da escolarização dos discentes, criando desmotivações e até aversão às aulas de matemática, em especial aos conteúdos que extrapolam os números naturais (Cf. WU, 2001). Tais conteúdos, como o conjunto dos números racionais, terminam sendo considerados como abstratos demais e desvinculados da realidade, do mundo da vida.

Essa situação evidencia a necessidade de uma introdução motivadora do número fracionário, o que exige romper com a ênfase inicial em nomenclaturas e regras, que muitas vezes tornam-se sinônimos do ensino de fração. Antes mesmo de nomear o novo número apresentado para a criança, é preciso que ela compreenda a necessidade lógica dele e algumas de suas especificidades, demonstrando, desde dos primeiros estudos, que a lógica do campo do número natural não se aplica aos novos desafios matemáticos apresentados pelo professor.

1.3 A fração como produto sócio-histórico: a aula de matemática como espaço de cultura

Uma introdução correta aos estudos de fração precisa articular o novo número apresentado ao aluno as práticas sociais e ao cotidiano das crianças. É fundamental que os discentes percebam a necessidade das frações na resolução de problemas cotidianos, demonstrando que o surgimento histórico desse número ocorreu por razões práticas ligadas às questões geométricas e de medidas, onde o resultado não era um número inteiro, mas um pedaço da unidade (BOYER; MERZBACH, 2012).

Assim, articular a necessidade do número fracionário à vida, significa respeitar a própria sociogênese desse campo numérico. Para Perlin e Lopes (2013) foi da realidade prática que a humanidade construiu a ideia tanto dos números naturais quanto dos números racionais, sendo que o número natural surgiu da necessidade da contagem e o racional dos desafios postos pela medida. Ainda para as autoras, apoiando-se em Boyer (1991), a necessidade de medir irá aparecer em sociedades mais complexas, que apresentavam organização política e econômica estratificada, como a civilização egípcia na Idade do Bronze, que cobrava taxas proporcionais ao tamanho dos terrenos e que precisou resolver o problema de recalcular os tributos em alguns períodos do ano, pois as terras eram alagadas pelo rio Nilo. Como nos narra Perlin e Lopes (2013, pg. 6):

> Nas obras de Boyer (2001), Caraça (1984) e Cajori (2007) encontram-se trechos do Livro II das Histórias de Heródoto nas quais ele diz que o rei Sesótris dividiu a terra entre todos os egípcios, a fim de obter lucros por meio do recolhimento anual de impostos, de modo que cada pessoa receberia uma porção retangular de mesmo tamanho. Porém, durante o período de inundação do rio Nilo, correspondente aos meses de julho a outubro, algumas demarcações que haviam na terra acabavam se perdendo. Várias pessoas, sentindo-se lesadas, pois teriam perdido um pedaço de suas terras, notificaram o rei sobre esse fato e ele mandou seus medidores descobrirem o quanto cada terreno ficou menor para que pudessem calcular, proporcionalmente ao tamanho desse, a taxa anual estabelecida.
> A unidade de medida padrão utilizada pelos seus medidores, também chamados "estiradores de corda", para fazer as medições da terra era o cúbito ou côvado. Essa unidade era conhecida como unidade do faraó, pois o comprimento do cúbito era equivalente à distância compreendida entre a ponta do dedo médio e o cotovelo do faraó. As cordas dos estiradores possuíam diversos nós, cuja distância entre dois nós consecutivos era a medida do cúbito, o que hoje seria aproximadamente 45 cm. "A corda com vários nós compunha um instrumento de medida, uma 'régua' primitiva utilizada por agrimensores daquela época" (DIAS; MORETTI, 2011, p. 120). Para medir, os estiradores comparavam a corda com o contorno da porção de terra a ser medida, assim a medida encontrada era a quantidade de vezes que o cúbito cabia nesse contorno. Porém, nem sempre o cúbito cabia um número inteiro de vezes no comprimento a ser medido e a necessidade de fazer medições com mais precisão, levou os egípcios a criarem subunidades do cúbito, ou seja, fracionar a unidade de medida.

Ao trazer a necessidade histórica dos números fracionários, a aula de matemática também pode se converter em um momento de valorização cultural. Ao localizar o Egito como um dos locais de surgimento das frações, importa também destacar a presença africana no desenvolvimento da matemática, informando aos discentes que essa grande civilização habitava o continente africano. Essas referências permitem aos alunos irem compreendendo que o saber matemático não é exclusivo de um grupo ou de uma raça, mas produto presente, em maior ou menor grau de formalização, em todas as culturas. Além disso, a referência às contribuições africanas permitem valorizar a negritude e combater o racismo, transformando a aula de matemática em mais um espaço de difusão de uma pedagogia antirracista.

Como ensina Paulus Gerdes (2012) as contribuições africanas para a matemática escolar são muitas vezes não referenciadas, enquanto a participação europeia tende a ser divulgada, aparecendo em termos como geometria Euclidiana, teorema de Pitágoras e plano Cartesiano, evidenciando uma preferência cultural baseada em uma perspectiva eurocêntrica de matemática e em um *continuum* dos efeitos da colonização nas Américas e demais colônias.

Exemplo dessa preferência é falta de crédito cultural para o uso da representação fracionária, com o traço posicionando o numerador em cima e o denominador embaixo que, segundo Gerdes (2012) é originaria do norte da África, sendo preservada em um texto do matemático negro Abdallah Ibn al-Yasamin. Sobre esse matemático, narra-nos Gerdes (2012, pg. 143):

> Abdallah Ibn al-Yasamin significa 'filho da flor jasmim'. A mãe dele era chamada flor de jasmim. A mãe era uma escrava negra, proveniente da África ao sul do Saara. O pai era um norte-africano da população Berbere. Tendo tido um filho com um homem 'livre', a mãe, em concordância com a lei da época, ganhou a liberdade. O 'filho sem pai', descrito na época como 'tão negro como a mãe', educado inicialmente pela 'flor de jasmim', estudou em Sevilha (Andaluzia) e tornou-se um matemático, jurista e poeta famoso.
> Como professor, teve a ideia de escrever poemas para facilitar a aprendizagem da matemática por parte dos seus alunos. Durante séculos os seus 'poemas matemáticos' foram decorados por estudantes.
> Não se conhecem bem as razões, talvez pelo sucesso que teve ou pelas posições publicamente assumidas, Ibn al-Yasamin foi assassinado em 1204 em Marrakech no Marrocos. Crianças no Brasil e em muitas partes do mundo atual aprendem algumas ideias e símbolos inventados pelo 'filho da flor jasmim' ou do seu tempo e cultura.

Além de valorizar a diversidade étnica, a introdução da fração também deve ser uma oportunidade de investigação de práticas sociais com os números fracionários, incentivando os alunos a observarem os locais onde aparecem o uso desse novo número, como em receitas culinárias, textos de noticiários, jornais, medidores de combustíveis, informações censitárias, divisão de comida ou do valor do lanche entre amigos, em atividades lúdicas, na linguagem cotidiana (meio, um terço, um quarto etc).

1.4 Os desafios dos números racionais: aprendendo uma nova lógica

Ao iniciar os estudos com o número fracionário, os alunos já estão relativamente familiarizados com o conjunto dos números naturais, o que lhes permite compreender vários procedimentos, como a possibilidade de operações, mas que também lhes causam confusões ao tentar aplicar diretamente a lógica dos números naturais ao campo das frações. Assim, um dos desafios no ensino de frações é apresentar situações que permitam demonstrar a especificidade dos números fracionários, como sua diversidade de representações, lógica do campo multiplicativo, ordem e equivalência, que não seguem os modelos já aprendidos com os números naturais.

Assim, os alunos possuem vários desafios de aprendizagem ao se depararem com esse novo número. O primeiro é sua multiplicidade de representações, pois pode ser apresentado de forma pictórica (como o desenho da *pizza* dividida), como fração ordinária (organizada em numerador e denominador), percentual (com o todo equiparado a uma fração de denominador 100) ou ainda decimal (surgindo o zero e a virgula). Aliado às representações surgem também as novas nomenclaturas que esse campo introduz: meio, um terço, vinte décimos, vinte porcento etc.

Outro desafio é compreender a fração como um número e não como um traço que divide dois números naturais, de compreender $\frac{a}{b}$ sendo $b \neq 0$ como um quociente entre dois números inteiros quaisquer, sendo o denominador diferente de zero.

A equivalência é outro desafio, pois, segundo Merlini (2005), é necessário compreender que uma fração pode ser representada por diversas e infinitas representações, pois $\frac{1}{2}$ é equivalente $\frac{2}{4}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{12}{24}$ etc.

O campo multiplicativo também traz novas possibilidades, pois nos números naturais os discentes tendem a relacionar a multiplicação ao aumento do número inicial, e a divisão à diminuição desse, como se observa em $2 \times 2 = 4$ e $4 \div 2 = 2$. Contudo, no mundo das frações essa lógica não pode ser afirmada, como se observa em $2 \times \frac{1}{2} = 1$ ou em $2 \div \frac{1}{2} = 4$.

Assim, o ensino e a aprendizagem de frações envolvem muitos elementos para além das nomenclaturas e a aprendizagens de regras, sendo fundamental que os discentes experienciem diversas situações problemas que lhes permitam ir construindo e compreendendo a especificidade do número fracionário, bem como as novas lógicas que esse demanda e que abalam as percepções construídas no campo dos números naturais. (MERLINI, 2005).

1.5 Os diversos significados da fração: para além do clássico parte-todo

Assim como a humanidade sentiu a necessidade de um número que fracionasse o inteiro, segundo Smole e Diniz (2016), também é preciso levar os alunos a vivenciarem diversas situações que envolvam e necessitem do número fracionário e os façam analisar os diferentes significados das frações, no caso: como número, parte-todo, quociente, divisão, razão e operador.

Além disso, é preciso distinguir que, em alguns casos, apesar do significado de duas frações ser o mesmo – por exemplo, como relação parte/todo – pode ser que essas estejam lidando com grandezas diferentes, operando, por exemplo, sobre grandezas contínuas (ex: medida de uma barra de chocolate) ou discretas (ex: quantidade de crianças), o que também impacta na forma de compreensão do problema e de apresentação do resultado. Assim, há um campo de significados que precisam ser trabalhados com as crianças para dar conta da compreensão do número fracionário.

Como explica Merlini (2005), um dos significados que se deve trabalhar com os alunos é que a fração é um número e, como tal, não precisa necessariamente se referir a quantidades especificas, e pode ser localizada na reta numérica, em especial na sua representação decimal. Exemplo desse significado é o problema: Uma reta numérica, que vai de 0 a 2, foi dividida em oito partes iguais entre cada número natural. Considerando essas divisões, desenhe a reta e indique a localização dos seguintes números: dezesseis oitavos, dois quartos, um meio, um quarto, dez oitavos, quatro oitavos, três meios. (Adaptado de MANDARINO E SANT'ANNA, 20195).

Outro significado é a relação parte-todo, onde a fração indica a partição de um todo (contínuo ou discreto) em n partes iguais, onde cada parte pode ser representada por $\frac{1}{n}$ (MERLINI, 2005). Exemplo desse significado é o problema: se eu dividir uma barra de chocolate em 3 partes e comer uma, quantas eu vou guardar? Resposta: vou ter $\frac{2}{3}$ para guardar.

A fração como um quociente ocorre em situações associadas à ideia de partição, onde "o quociente representa o tamanho de cada grupo quando se conhece o número de grupos a ser formado" (CASTRO, 2014, pg. 40). O que diferencia esse significado do de parte-todo é que a partição não diz respeito a um único todo. Exemplo dessa situação é o problema: dividindo 2 barras de chocolates para 3 crianças, quanto cada uma irá receber? Resposta: $\frac{2}{3}$.

Ainda para Merlin (2005) o significado de operador multiplicativo surge quando a fração realiza transformações em uma quantidade específica, mudando o seu valor, ou seja, a fração modifica outro número por meio de operações, como multiplicação e divisão.

A fração assume o significado de medida em situações de quantidade extensivas e intensivas, nas quais se busca calcular quantas unidades de referência "cabem" em um determinado inteiro (MANDARINO E SANT'ANNA, 2019). Explica e exemplifica Castro (2014, pg. 41):

> Estão presentes nesse significado duas visões. Uma relacionada à ideia de dividirmos uma unidade em partes iguais (subunidades), e verificarmos quantas dessas partes caberão naquele que se quer medir. Exemplo: Um tambor pode conter 11 litros de leite. Quantas canecas de 2 litros serão necessárias para encher esse tambor? Esse exemplo remete-nos a medida referindo-se a quantidade extensiva (medida de quantidade de mesma natureza). A outra ideia refere-se às quantidades intensivas (medida de quantidades de naturezas diferentes). Um exemplo seria a mistura de um suco contido em uma jarra pequena (80% de concentrado e 20% de água) se despejássemos o suco contido em um copo (com a mesma concentração do anterior) em uma jarra maior. Qual seria a concentração total de concentrado no final da mistura?

Por fim, o significado de razão ocorre quando a fração indica um índice comparativo entre duas grandezas de naturezas diferentes, não existindo necessariamente uma relação com uma unidade ou um todo (CASTRO, 2014). Exemplo dessa situação é o índice de massa corporal que é resultado da razão entre peso e altura, logo, IMC = $\frac{\text{peso}}{\text{altura}}$.

Como se pode constatar, a diversidade de significados do número fracionário exige uma pluralidade de situações problemas que permitam explorar essas possibilidades.

Contudo, o objetivo da oficina aqui apresentada não foi dar conta de todos os significados do número fracionário, mas afirmar que entre a diversidade de situações que devem compor os estudos de frações é fundamental a inclusão de atividades lúdicas e desafiadoras, do ponto de vista cognitivo e motor, pois os alunos dos anos iniciais são crianças e, como tais, possuem nos jogos e brincadeiras sua forma natural de aprender.

Assim, articular os números racionais ao cotidiano das crianças é incluir esse conjunto numérico nas suas vivências lúdicas e problemas reais do mundo infantil. Como explica Masetto (1997), o aluno, ao perceber que possui na aula um ambiente estimulante e divertido, articulado as suas vivências e aberto a diálogo sobre suas questões e inquietações, compreende a sala de aula como um espaço preenchido de vida e de significado.

1.6 A dobradura no ensino de frações

Quando a chuva cessava e um vento fino
franzia a tarde tímida e lavada,
eu saía a brincar, pela calçada,
nos meus tempos felizes de menino.
(Soneto. Guilherme de Almeida).

Como dito, o objetivo da oficina foi propor atividades que articulem a prática lúdica da dobradura aos estudos do número fracionário, mobilizando memórias afetivas na aula de matemática, pois o papel está presente em diferentes práticas infantis e sociais. O papel é suporte da pintura, da colagem e do recorte desde a educação infantil. Ganha os ares nas pipas e rabiolas. Surge tridimensional nas dobraduras que decoram a infância: o barquinho, o avião, o chapéu e o cata-vento. Torna-se técnica e arte nas dobraduras de origami da cultura tradicional japonesa.

Apesar de o papel ter sido criado na China, o origami, como técnica de dobradura de papel, surge como produto cultural do Japão. Sua origem remonta ao século VI d.C., a partir da introdução do papel no território japonês pelos monges budistas. A palavra "origami" deriva das palavras japonesas "*ori*" que significa dobrar e "*kami*" que significa papel. Tradicionalmente, o origami designa a técnica e a arte de criar figuras diversas utilizando-se apenas papéis e dobraduras, sem uso de recorte ou colagem. (FREITAS; NOGUEIRA, 2016). No Brasil, os primeiros origamis chegaram com as famílias portuguesas mais abastadas e foram se popularizando, em especial após a imigração japonesa. Assim, trazer o papel para aula de matemática para debater sobre números racionais e ir ao encontro do mundo da vida, e, por consequência, preencher de vida e cultura a aula de matemática.

Capítulo 2

Propostas de atividades didáticas

A sequência a seguir foi elaborada a partir da adaptação de atividades matemáticas coletadas na *internet*, em especial nas obras de Costa (2007), Mandarino e Sant'anna (2019), Merlini (2005), Nunes (2003), Patrono (2011), Prevê; Sheneckemberg e Munhoz (2014), Vasconcelos (2017) entre outros.

2.1 Contando histórias, dobrando e brincando com o papel

A introdução, na sala de aula, de atividades de dobraduras pode acontecer de forma interdisciplinar e lúdica, por meio da contação de histórias ou da leitura de poemas sobre brinquedos de papel, como barquinhos e aviões.

O recurso ao texto permite a apresentação das técnicas de dobraduras em um contexto de grande apelo ao imaginário infantil. Ao mesmo tempo que conta a história, o docente realiza a dobradura e os alunos e alunas repetem os movimentos e vão interagindo com o papel, conhecendo sua textura, características etc.

Como sugestão de histórias com dobraduras vale destacar:

- "Mário Marinheiro", de Lena Aschenbach, que se encontra na obra *A arte e magia das dobraduras*. Editora Scipione.
- *A menina, a folha de papel e uma aventura no mar*, de Débora Alfaia da Cunha.
- "A folha de papel que queria ser um barquinho". *História Contada*/Infantil. Mundo Serelepe.

Além disso, a apresentação do origami permite debater com os alunos a imigração japonesa e a presença dessa cultura no Brasil, bem como trazer para a sala de aula algumas lendas da mitologia asiática, como dos tsurus (grou) e a presença desse origami de pássaro no "Dia da Paz", 6 de agosto, em memória das vítimas do bombardeio atômico a cidade de Hiroshima em 1945.

As atividades com papéis podem ainda ser usadas como um encontro de culturas pela apresentação de atividades de tecelagem com tiras de papel e bolas trançadas, que permitem contextualizar os estudos matemáticos, incluindo o de frações, com elementos da cultura africana e dos povos originários das Américas. Nesse aspecto, indica-se a obra *Mundial de Futebol e de Trançados* de Paulus Gerdes (2011) que apresenta atividades de confecção de bolas, coroas e traçados com fitas de cartolinas coloridas, baseadas na cestaria e em bolas de diferentes culturas.

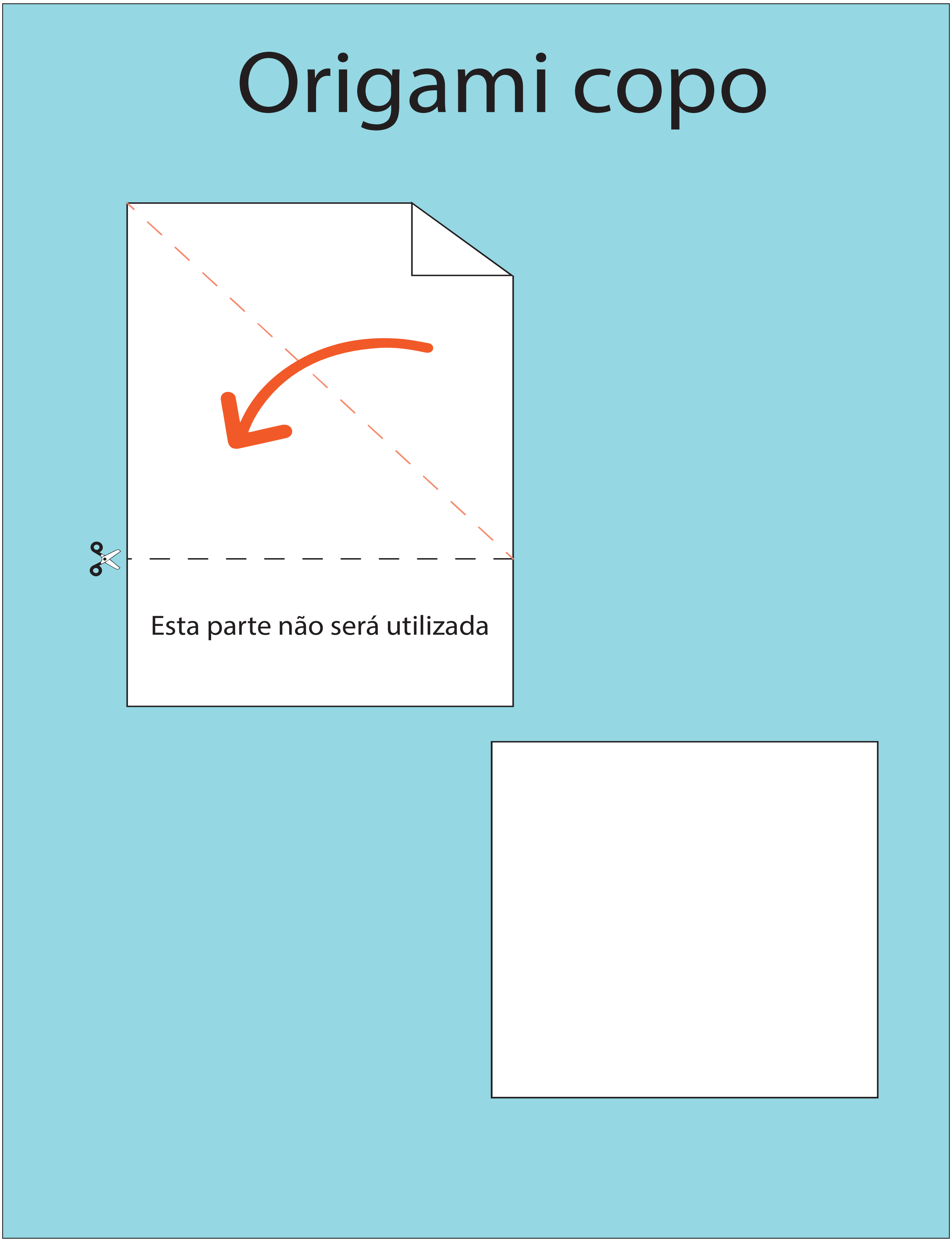
Pelo exposto, a dobradura, como atividade interdisciplinar, permite uma vasta gama de debates e de situações motivadoras não apenas para as aulas de matemática, mas também para atividades em língua portuguesa, história, geografia e artes.

2.2 Tomar água é sempre importante: construindo e estudando o origami do "copo"

Primeiro é importante dobrar o origami com as crianças. Fazer desse momento um tempo lúdico e criativo. Depois passa-se para a exploração matemática. Pode-se fazer 2 ou vários copos. Um para abrir e debater sobre os aspectos matemáticos e outros para brincar livremente, pintar e decorar.

O esquema do copo é apresentado a seguir.

Figura 1: Esquema do origami do copo.



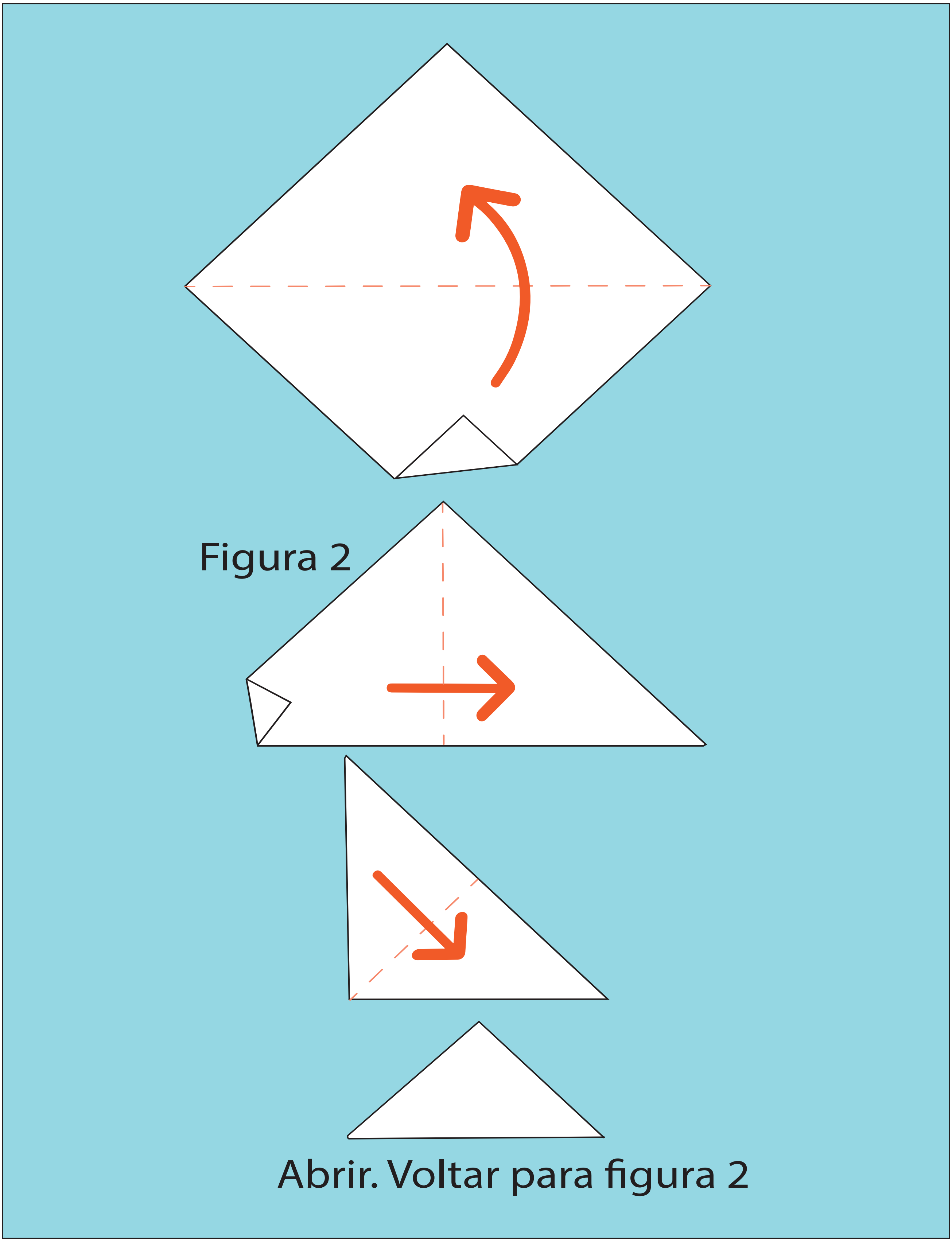
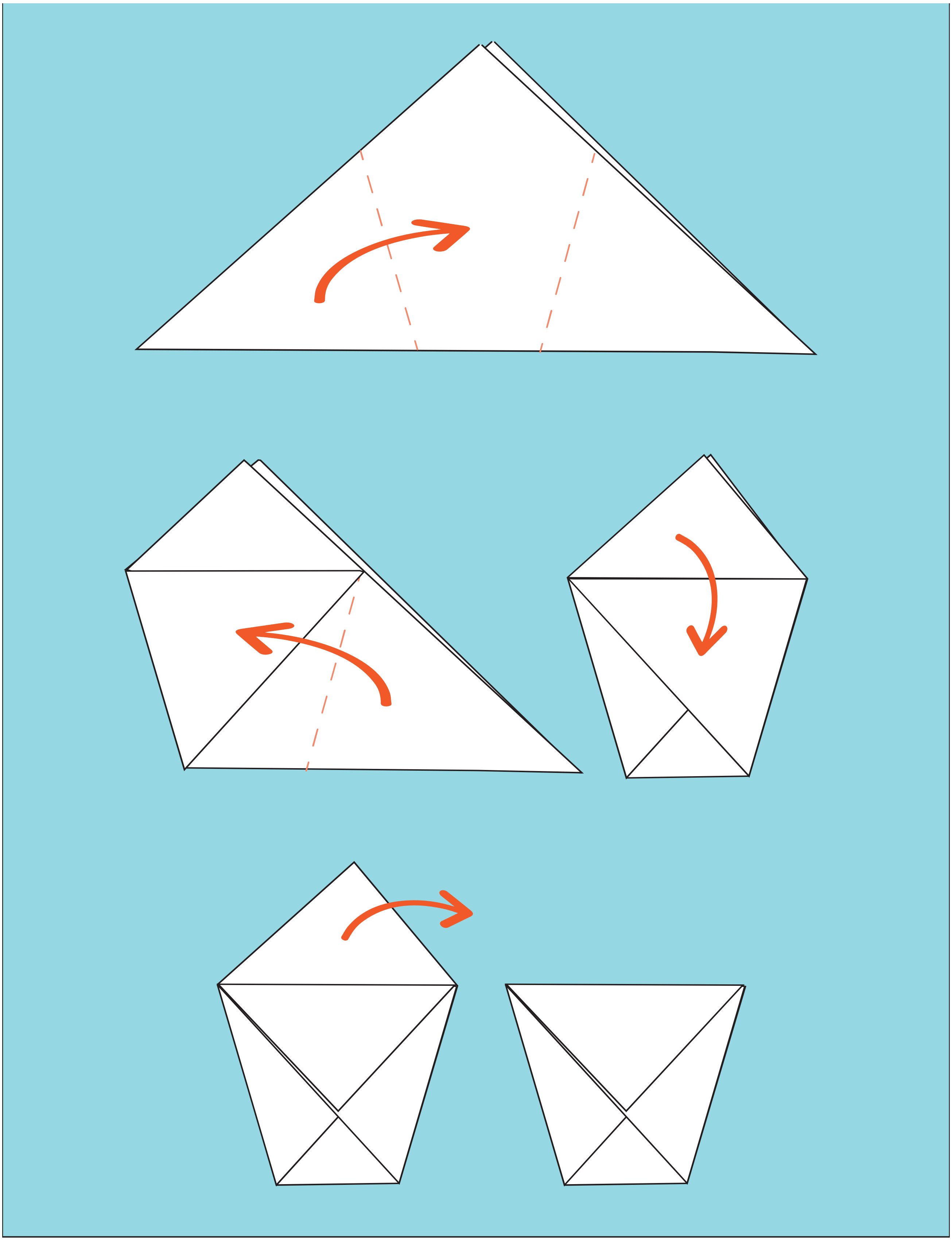


Figura 2
Abrir. Voltar para figura 2



Fonte: Suzana Alfaia, 2021

Agora vamos pensar juntos...

a) Analisando o processo de construção do copo, quais figuras geométricas planas surgiram?

b) Ao realizar a 1ª dobra no papel quadrado, surgem duas figuras. O que se pode afirmar sobre o tamanho dessas figuras? São iguais ou diferentes? Cada uma dessas figuras representa quanto, em relação ao papel inteiro? Como se pode representar em fração essa folha dividida em duas partes?

c) Ao realizar a 2ª dobra no papel quadrado, surgem quatro figuras. O que se pode afirmar sobre o tamanho dessas figuras? São iguais ou diferentes? Como se pode representar em fração essa folha dividida em quatro partes?

d) Ao realizar a 3ª dobra no papel quadrado, surgem oito figuras. O que se pode afirmar sobre o tamanho dessas figuras? São iguais ou diferentes? Cada uma dessas figuras representa (em fração) quanto em relação ao papel inteiro?

e) Considerando que a folha de papel inteira representa a unidade original (1), podemos afirmar que:

   Na primeira dobra há duas frações. Assim: 1 = +

   Na segunda dobra há quatro frações. Assim: 1 = + + +

   Na terceira dobra há oito frações. Assim: 1 = + + + + + + +

2.3 Dobrando papel: cuidado, nem toda divisão é uma fração!

Pegue uma folha de papel. Dobre ao meio e corte. Ficam dois pedaços de papel do mesmo tamanho. Em uma delas dobre ao meio corretamente (folha A). A outra dobre fora do meio, deixando um lado maior que o outro (folha B).

Agora vamos pensar juntos...

a) Em qual das folhas dobradas (A ou B) é possível representar a fração 1/2? Por quê?

2.4 A fração é uma divisão: distribuindo chocolates com o apoio de uma folha retangular

Dobre uma folha de A4 ao meio. Abra e dobre cada parte ao meio novamente. Faça o mesmo em outra folha. O tutorial é apresentado na próxima página.

Corte as 4 tiras em cada folha. Ao final teremos 8 tiras do mesmo tamanho.

Em uma folha:

- A primeira tira deixe inteira. Ela representa o valor 1.
- A segunda tira dobre ao meio. Cada parte representa $\frac{1}{2}$.
- A terceira tira dobre em três partes iguais. Cada parte representa $\frac{1}{3}$.
- A quarta tira dobre em quatro partes iguais. Cada parte representa $\frac{1}{4}$.

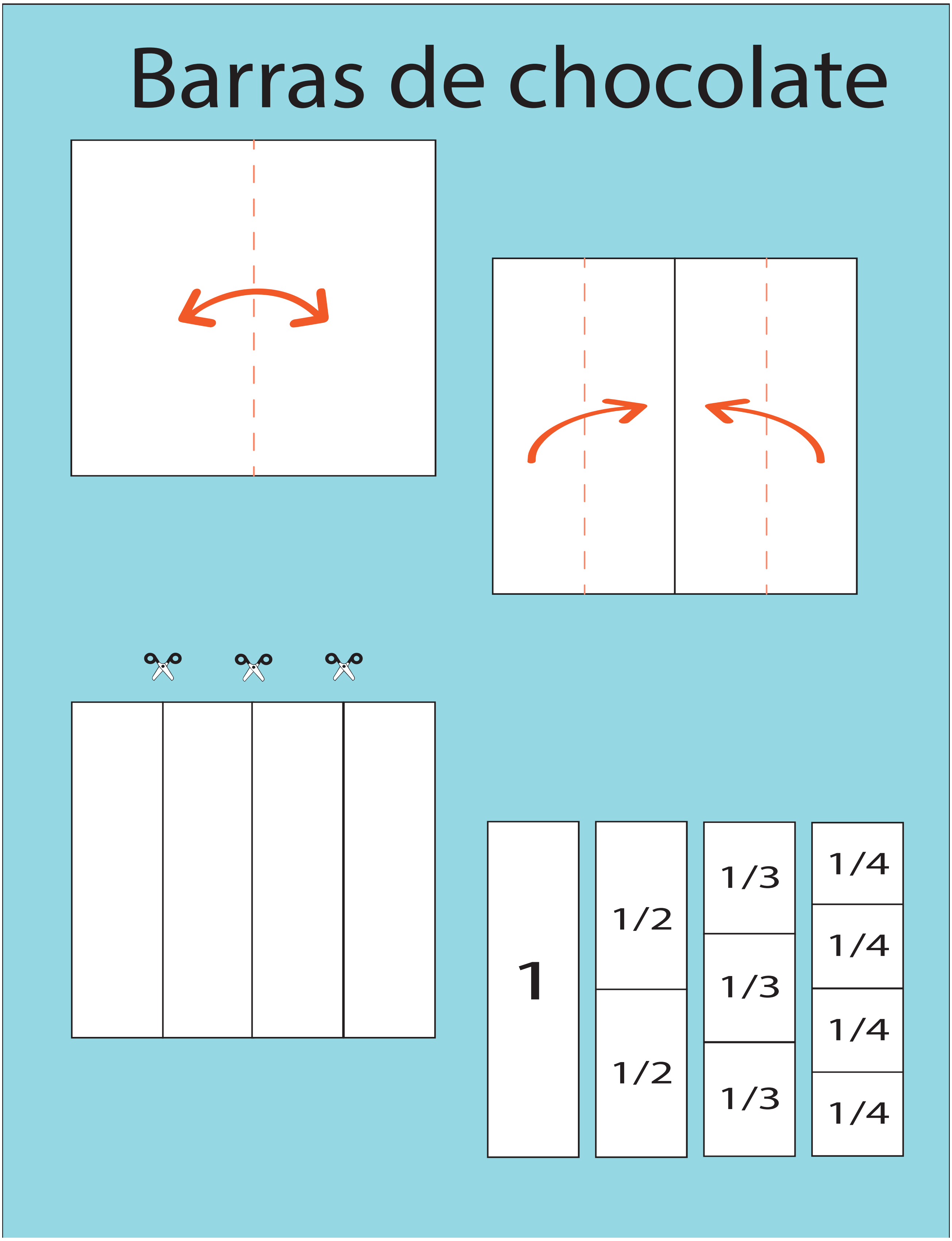
Na outra folha:

- A quinta dobre em cinco partes iguais. Cada parte representa $\frac{1}{5}$.

- A sexta tira dobre em seis partes iguais. Cada parte representa $\frac{1}{6}$.
- A sétima tira dobre em sete partes iguais. Cada parte representa $\frac{1}{7}$.
- A oitava tira dobre em oito partes iguais. Cada parte representa $\frac{1}{8}$.

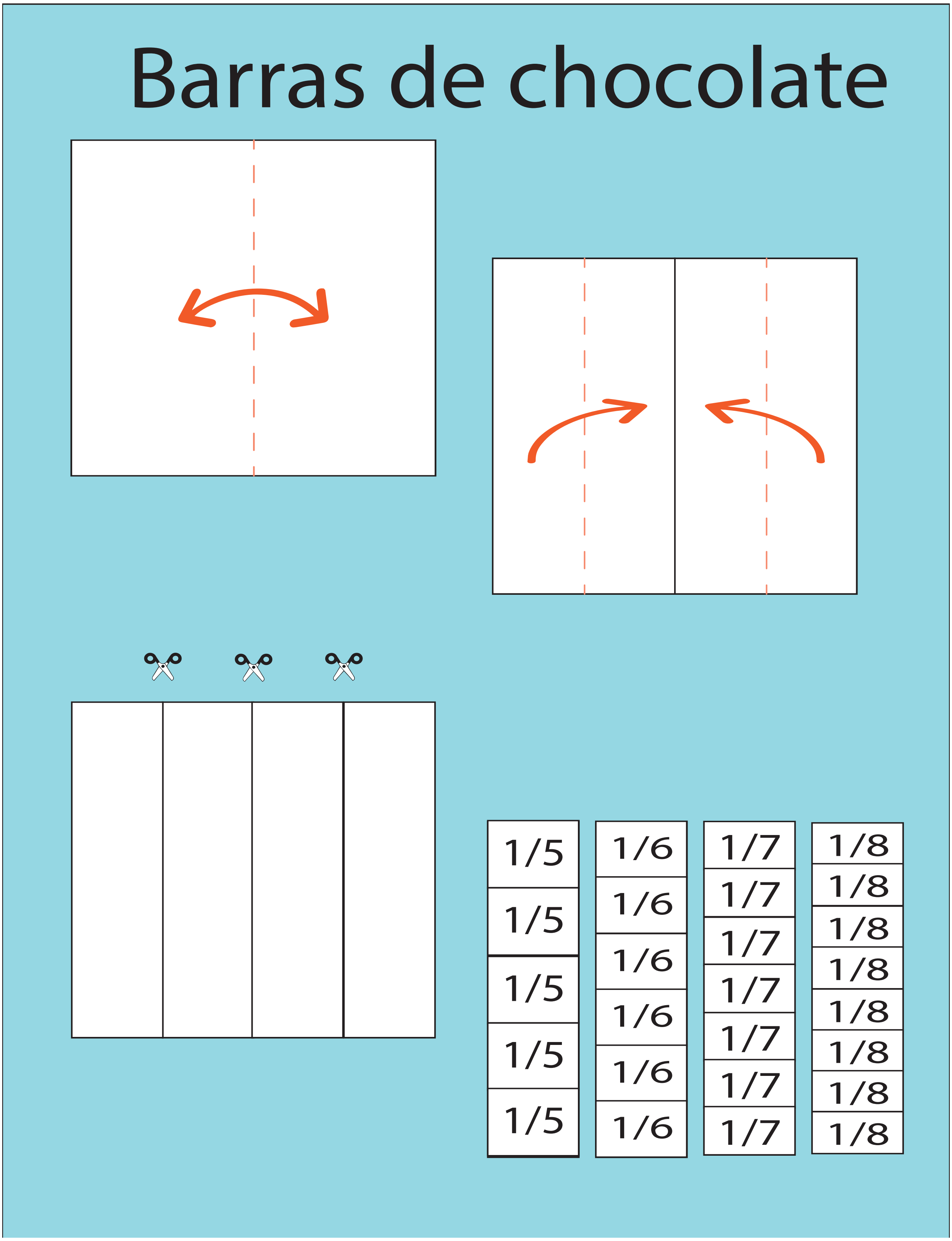
Agora vamos brincar. Faz de conta que cada tira é uma barra de chocolate. Vamos dividir sempre o mesmo tamanho de barra de chocolate. Use as barras para ajudar a solucionar os problemas partitivos.

Figura 2: Esquema para confecção das barras francionárias I



Fonte: Suzana Alfaia, 2021

Figura 3: Esquema para confecção das barras francionárias II



Fonte: Suzana Alfaia, 2021

2.5 Problemas partitivos

a) Duas amigas vão dividir uma barra de chocolate igualmente. Quanto cada uma ganhou?

b) Três amigos vão dividir uma barra de chocolate igualmente. Quanto cada um ganhou?

c) Sabendo que as barras de chocolate são do mesmo tamanho, quem comeu mais chocolate: os meninos ou as meninas?

d) Temos duas barras de chocolate e queremos dividi-las entre três crianças igualmente. Quanto cada criança irá receber? Represente em fração quanto cada criança irá receber.

e) Temos três barras de chocolate e queremos dividi-las entre cinco crianças igualmente. Represente em fração quanto cada criança irá receber.

f) Temos três barras de chocolate e queremos dividi-las entre oito crianças igualmente. Represente em fração quanto cada criança irá receber.

g) Tenho três barras de chocolate e quero dividir entre duas crianças igualmente. Quanto cada criança vai receber?

h) Temos cinco barras de chocolate e queremos dividi-las entre três crianças igualmente. Represente em fração quanto cada criança irá receber.

i) Temos oito barras de chocolate e queremos dividi-las entre sete crianças igualmente. Represente em fração quanto cada criança irá receber.

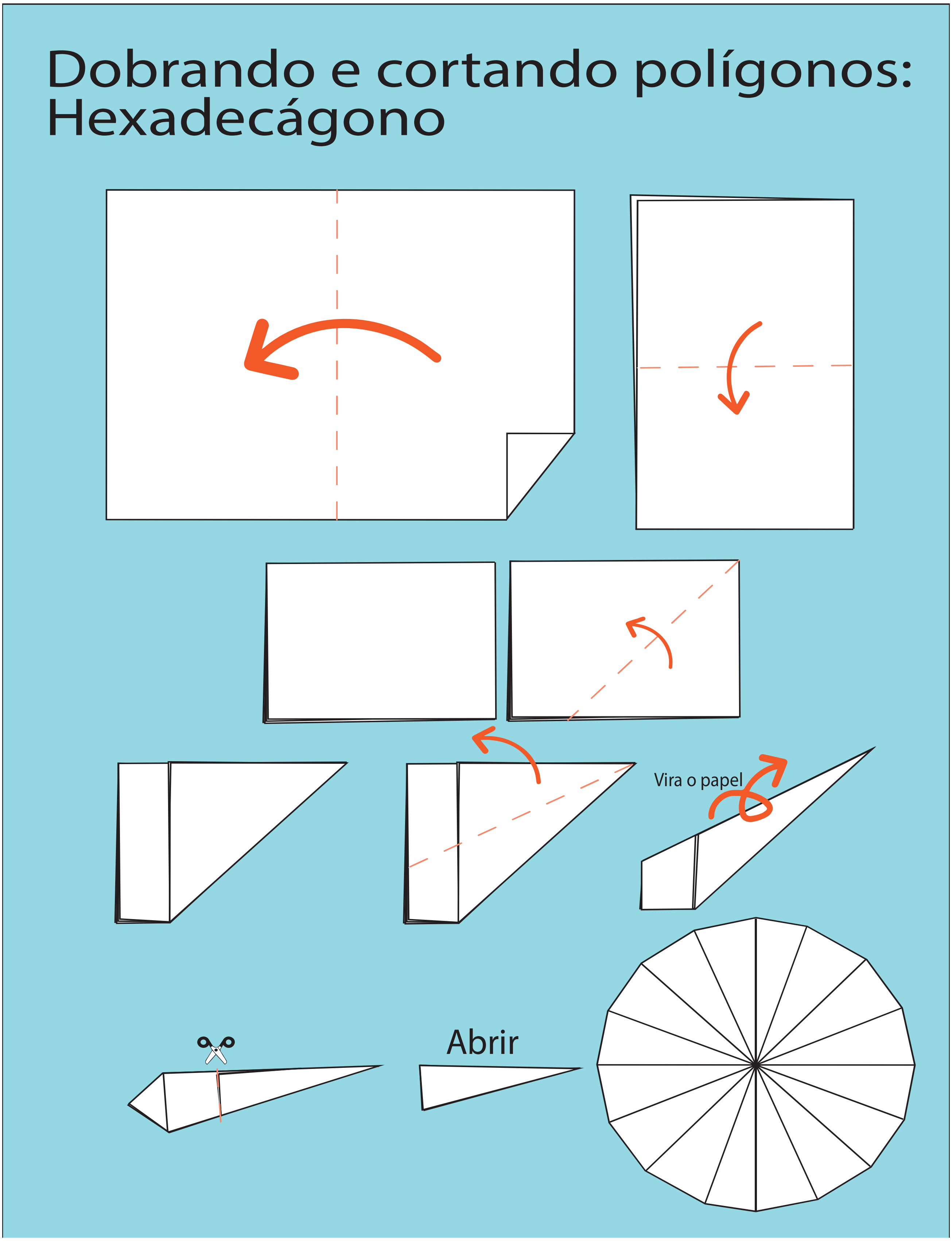
j) A professora levou 20 chocolates para distribuir na sala do 4º ano. Foram 30 alunos nesse dia. Cada aluno recebeu a mesma quantidade. Quanto cada aluno recebeu?

2.6 Problemas de divisão medida por cota: dobrando e cortando polígonos

Pegue duas folhas de papel quadrado.

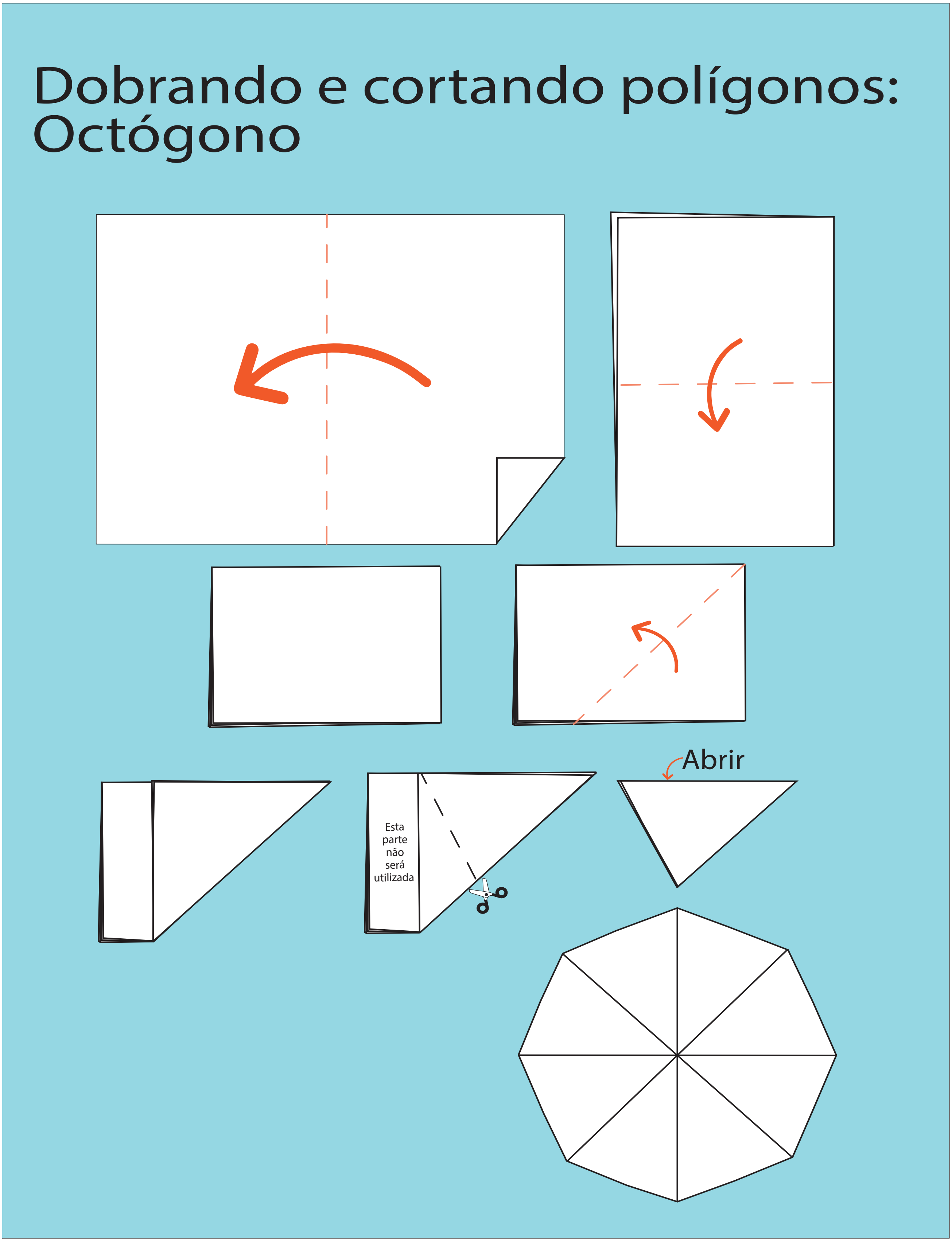
- Na primeira, dobre ao meio 4 vezes. Corte a ponta, formando um hexadecágono (16 lados). O tutorial é apresentado nas próximas páginas. Escreva a fração adequada a cada fatia.
- Na segunda dobre ao meio 3 vezes. Corte a ponta, formando um octógono. O tutorial é apresentado nas próximas páginas. Escreva a fração adequada a cada fatia.

Figura 4: Esquema para confecção de polígonos de papel I



Fonte: Suzana Alfaia, 2021

Figura 5: Esquema para confecção de polígonos de papel II



Fonte: Suzana Alfaia, 2021

Agora vamos pensar juntos...

Faz de conta que cada polígono é uma *pizza*. Vamos usar as linhas que dividem as *pizzas* para ajudar “a ver” a solução dos problemas a seguir.

Dica: vá dobrando e movimentando os polígonos, um sobre o outro, para compreender melhor as situações.

Situações:

a) Um grupo de amigos juntou dinheiro e foi à pizzaria. Compraram uma *pizza* grande. Cada um comeu $1/8$. Esse grupo possui quantas pessoas?

b) Maria vai fazer 7 anos. A mãe dela fará a festinha em uma pizzaria. Ela irá comprar 6 *pizzas* grandes. Cada criança poderá comer $1/4$ de *pizza*. Quantas crianças uma *pizza* irá servir? Quantos amiguinhos Maria poderá convidar no total?

c) A mãe de Ana também quer comemorar o aniversário da filha em uma pizzaria. Ela também quer comprar 6 *pizzas* grandes, mas quer que cada criança coma $1/8$ de *pizza*. Quantas crianças uma *pizza* irá servir? Quantos pessoas a mãe de Ana está pensando em convidar?

d) Se as duas festas de aniversário (de Ana e de Maria) fossem no mesmo dia e horário. Qual você iria preferir ir? Por quê?

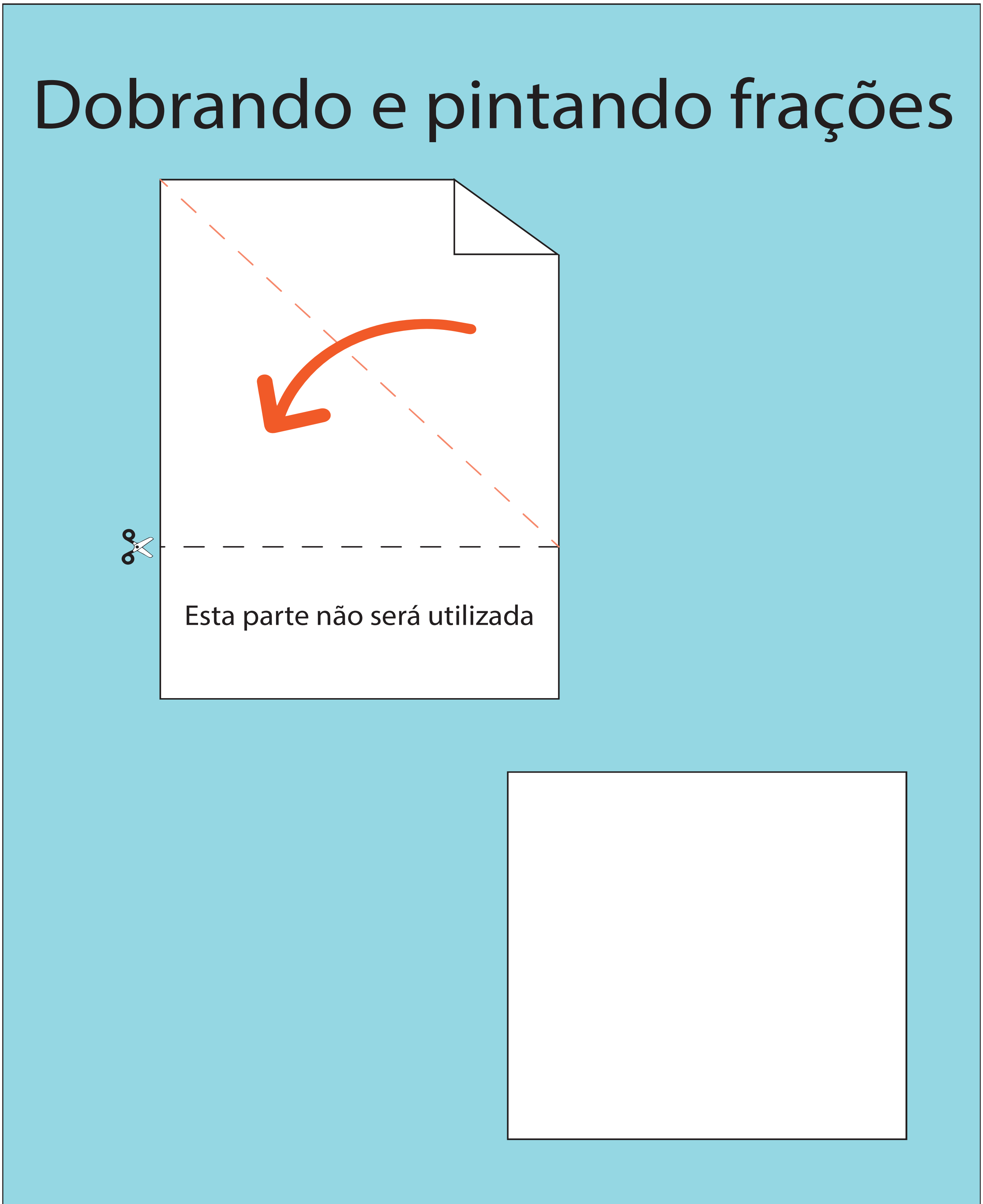
e) Em uma aula, a professora levou 30 *minipizzas*, como lanche do Dia das Crianças. Cada aluno recebeu 1 *minipizzas* e $1/2$. Quantos alunos compareceram à aula nesse dia?

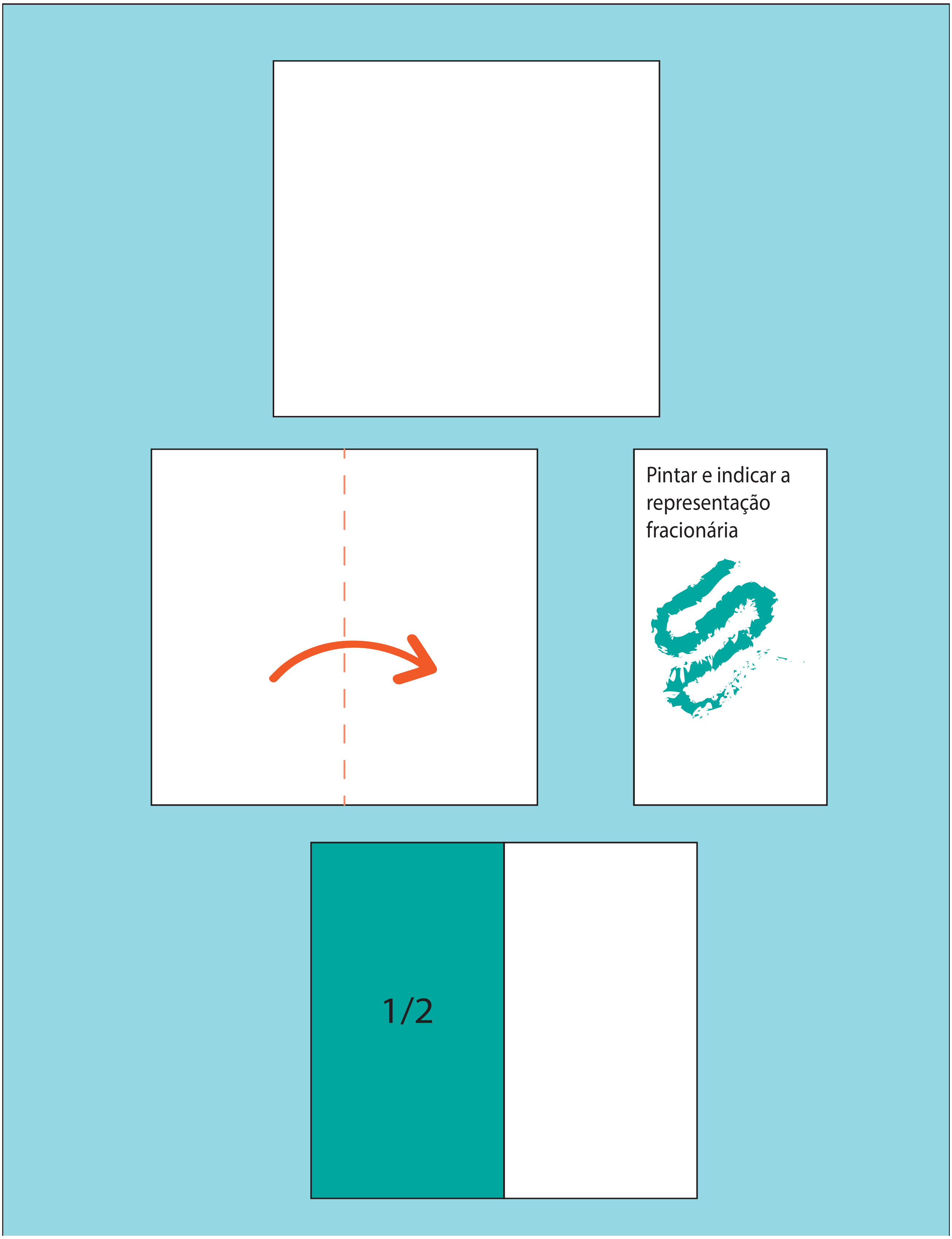
2.7 A fração é uma parte de um inteiro: dobrando e pintando papel quadrado

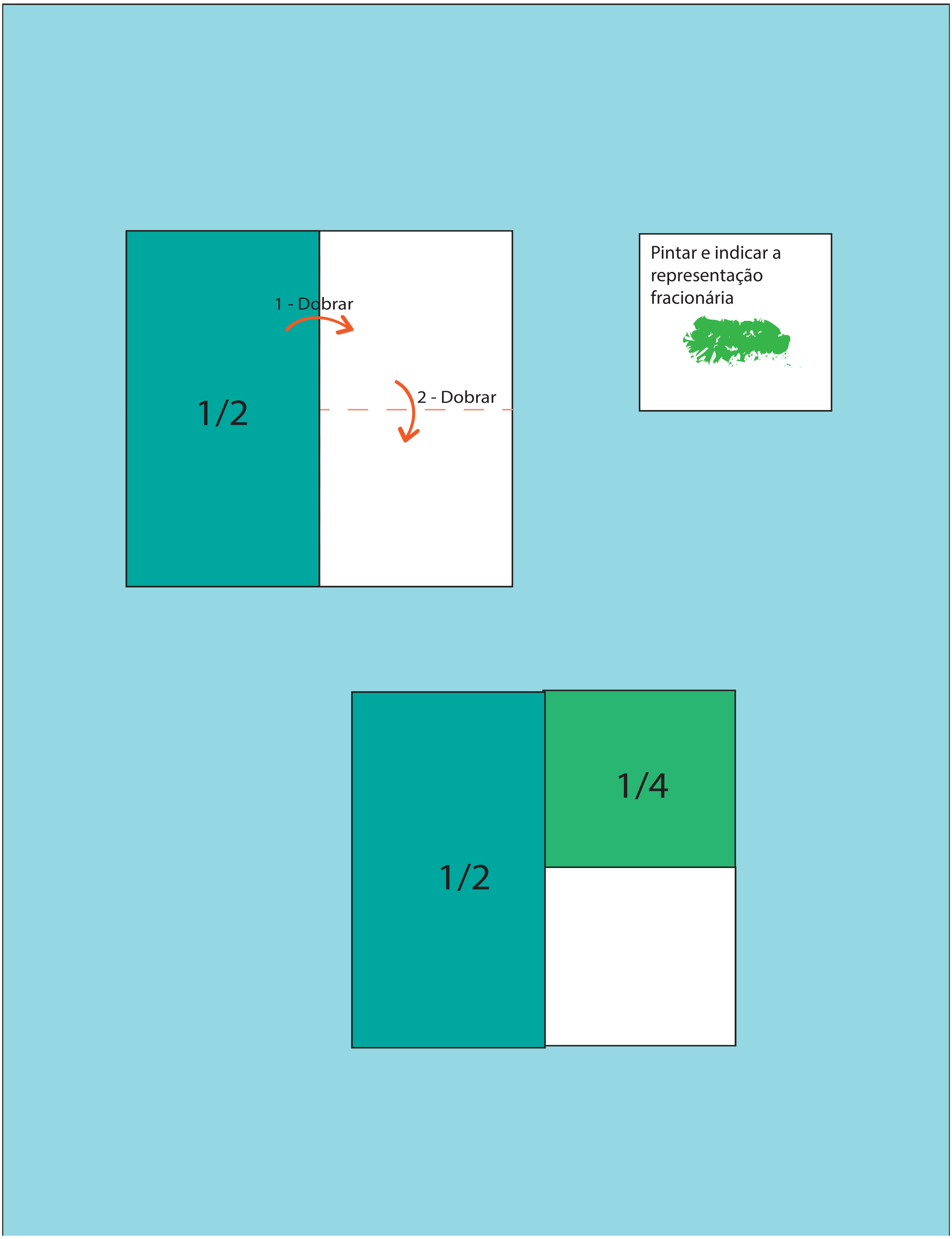
Em uma folha de papel quadrado, dobre e marque as seguintes frações: $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{16}$.

O tutorial é apresentado nas próximas páginas.

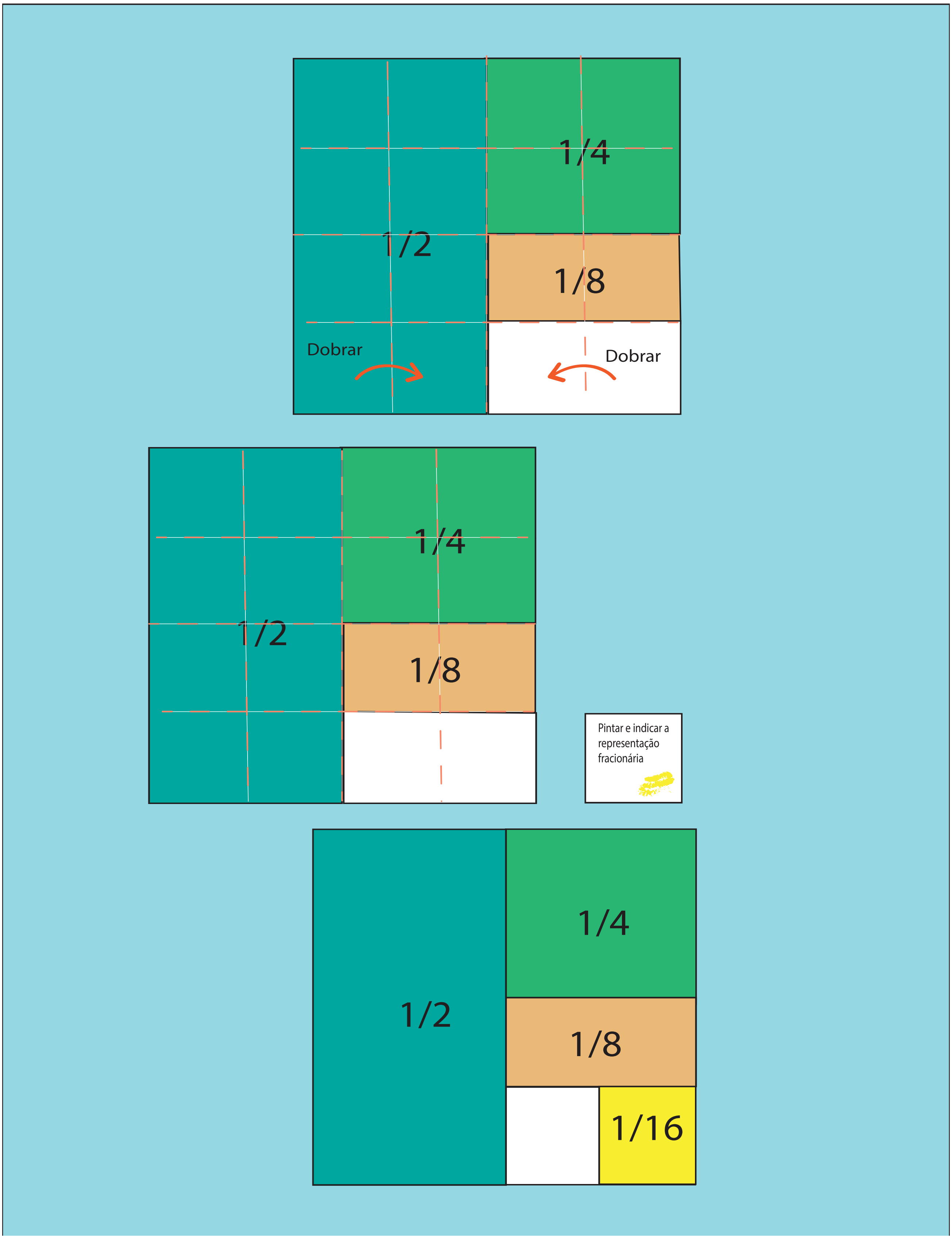
Figura 6: Esquema para confecção do quadrado fracionário




Pintar e indicar a representação fracionária
1/2


1 - Dobrar
2 - Dobrar
1/2
Pintar e indicar a representação fracionária
1/2
1/4


1/2
1/4
2 - Dobrar
3 - Dobrar
1/2
1/4
Pintar e indicar a representação fracionária
1/2
1/4
1/8



Fonte: Suzana Alfaia, 2021

Agora vamos pensar juntos...

Utilize o quadrado pintado para ajudar “a ver” a solução dos problemas a seguir.

a) Com auxílio da folha dobradura e preenchida, organizar as frações em ordem decrescente.

b) Somar todas as frações.

c) Transformar as frações em decimais.

d) Somar todos os decimais.

e) Transformar os decimais em percentuais. Somar todos os percentuais.

f) Equivalências de frações: o retângulo azul (metade do quadrado original) é igual a quantos quadrados verdes? Represente a igualdade em fração.

g) Equivalências de frações: o quadrado verde é igual a quantos quadrados amarelos? Represente a igualdade em fração.

h) Equivalências de frações: o quadrado verde é igual a quantos retângulos de cor rosa? Represente a igualdade em fração.

i) Equivalências de frações: o retângulo azul (metade do quadrado original) é igual a quantos retângulos de cor rosa? Represente a igualdade em fração.

j) Equivalências de frações: tomando a figura azul (o retângulo) como referência (1/2), estabeleça relações de igualde com todas as outras cores.

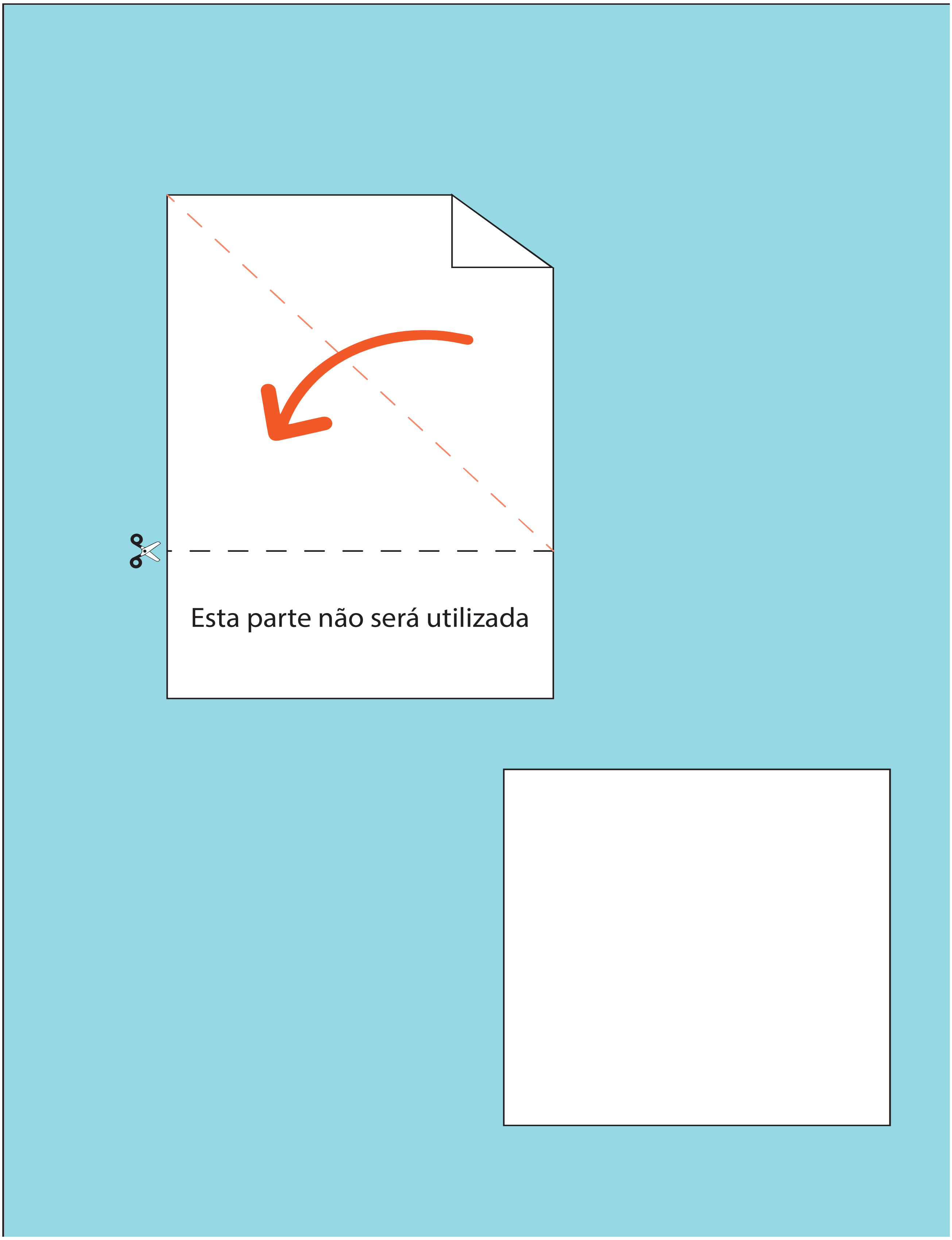
k) Equivalências de frações: considerando que o quadrado de papel inteiro representa a unidade original (1), estabeleça algumas relações de igualdade, utilizando sinais de adição, subtração ou multiplicação.

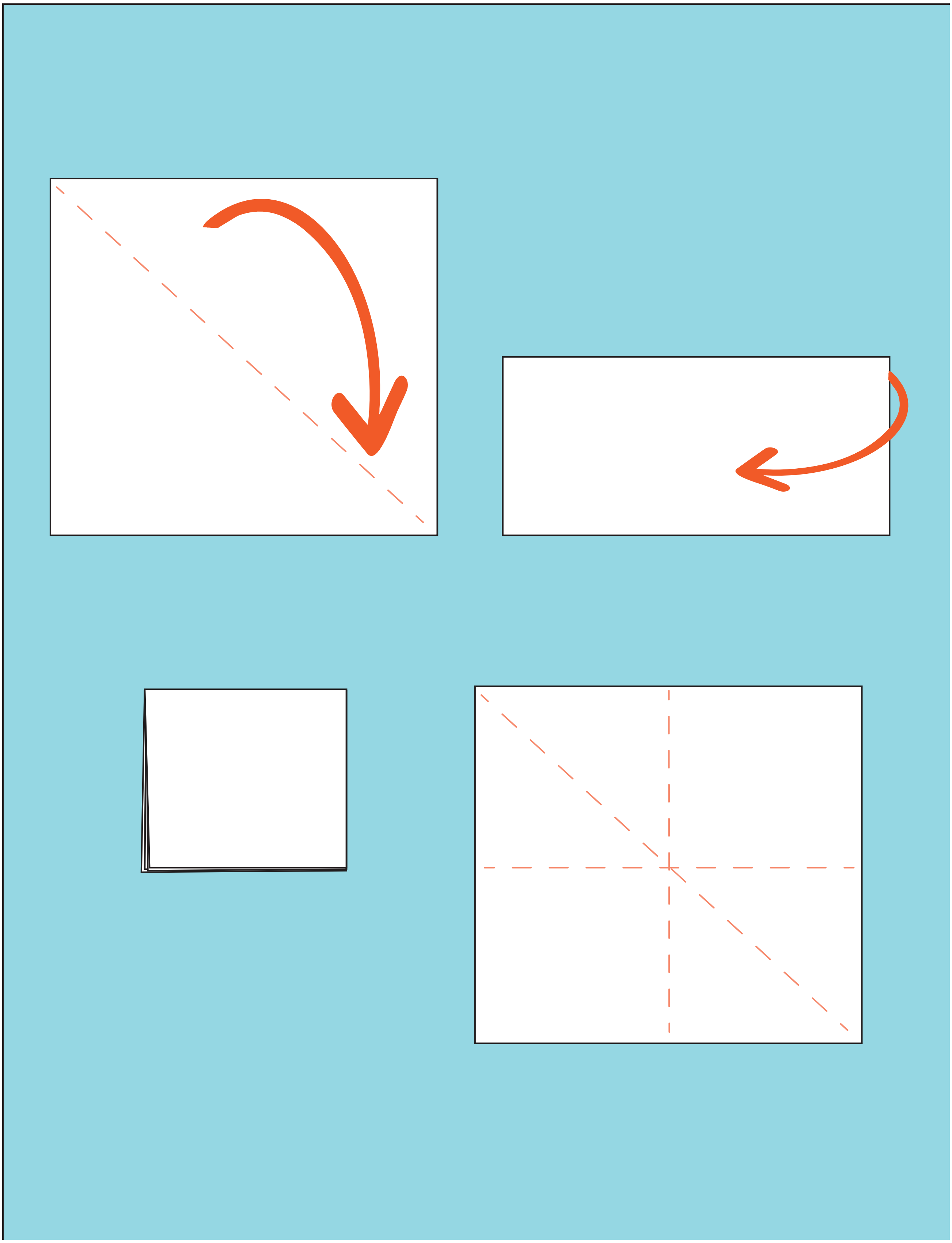
$$\text{Exemplo:}1 = 4 \times \frac{1}{4}.$$

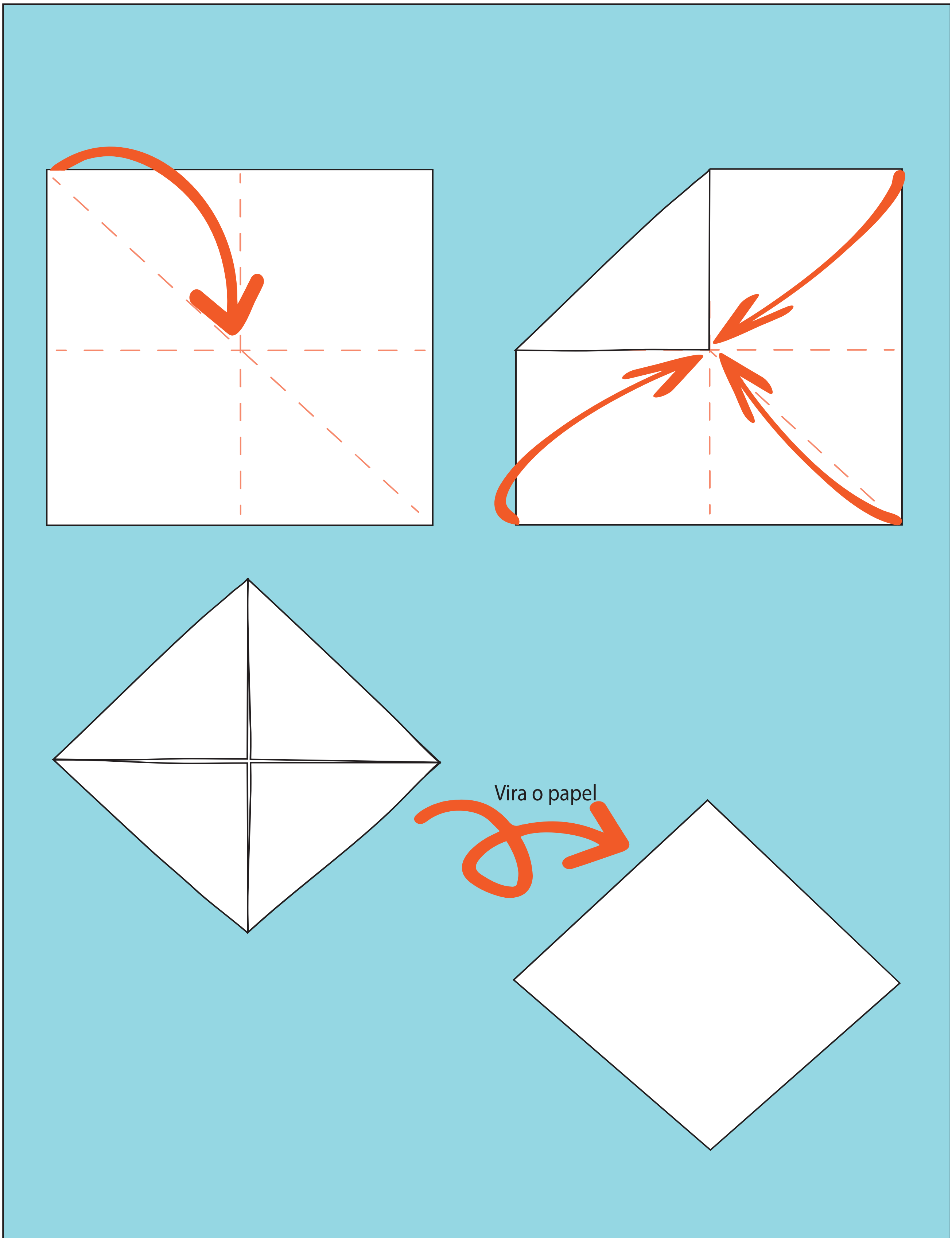
2.8 Calculando frações: construindo o origami “abre e fecha”

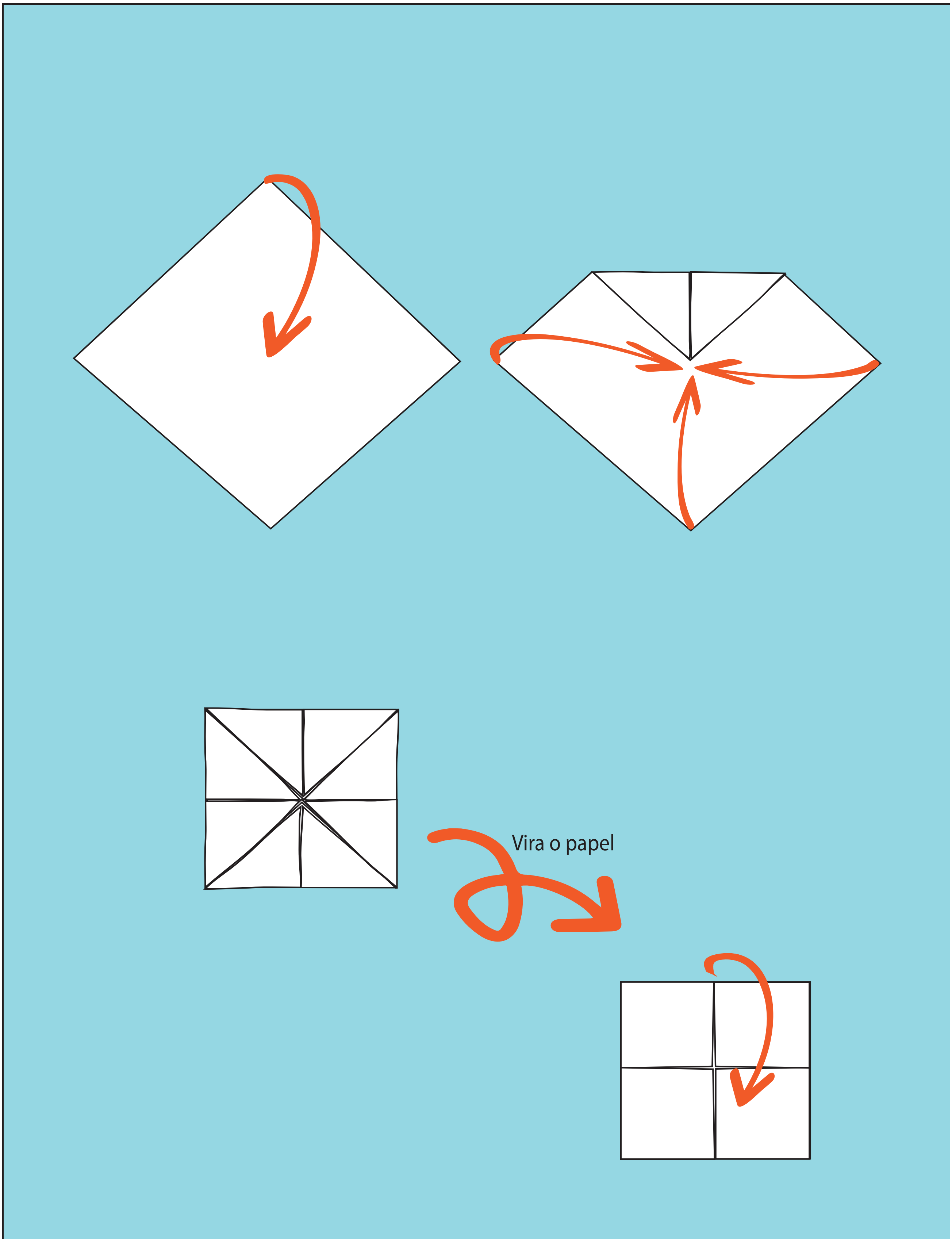
Vamos aprender uma dobradura engraçada? O tutorial é apresentado nas próximas páginas.

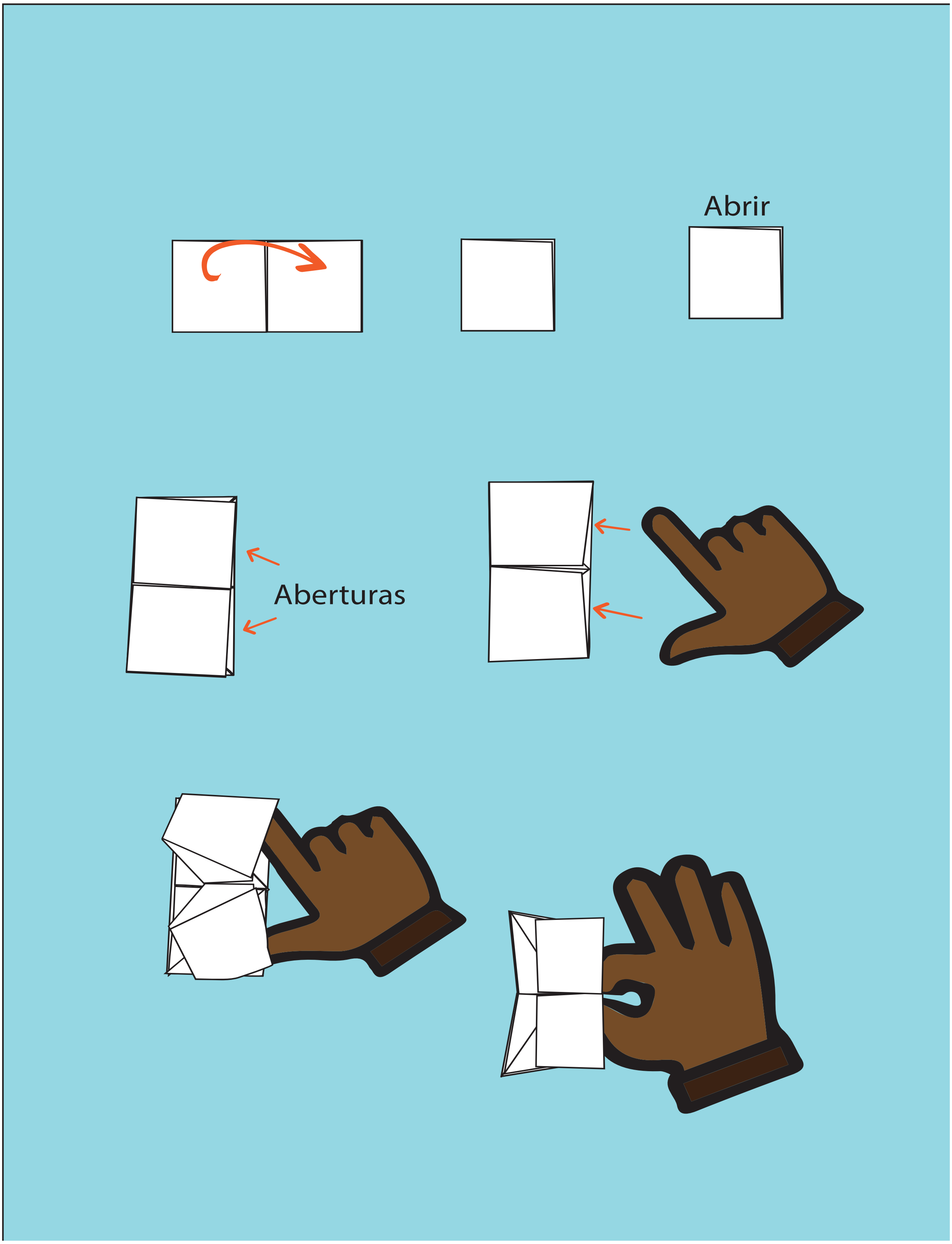
Figura 7: Esquema para confecção do origami "abre e fecha"



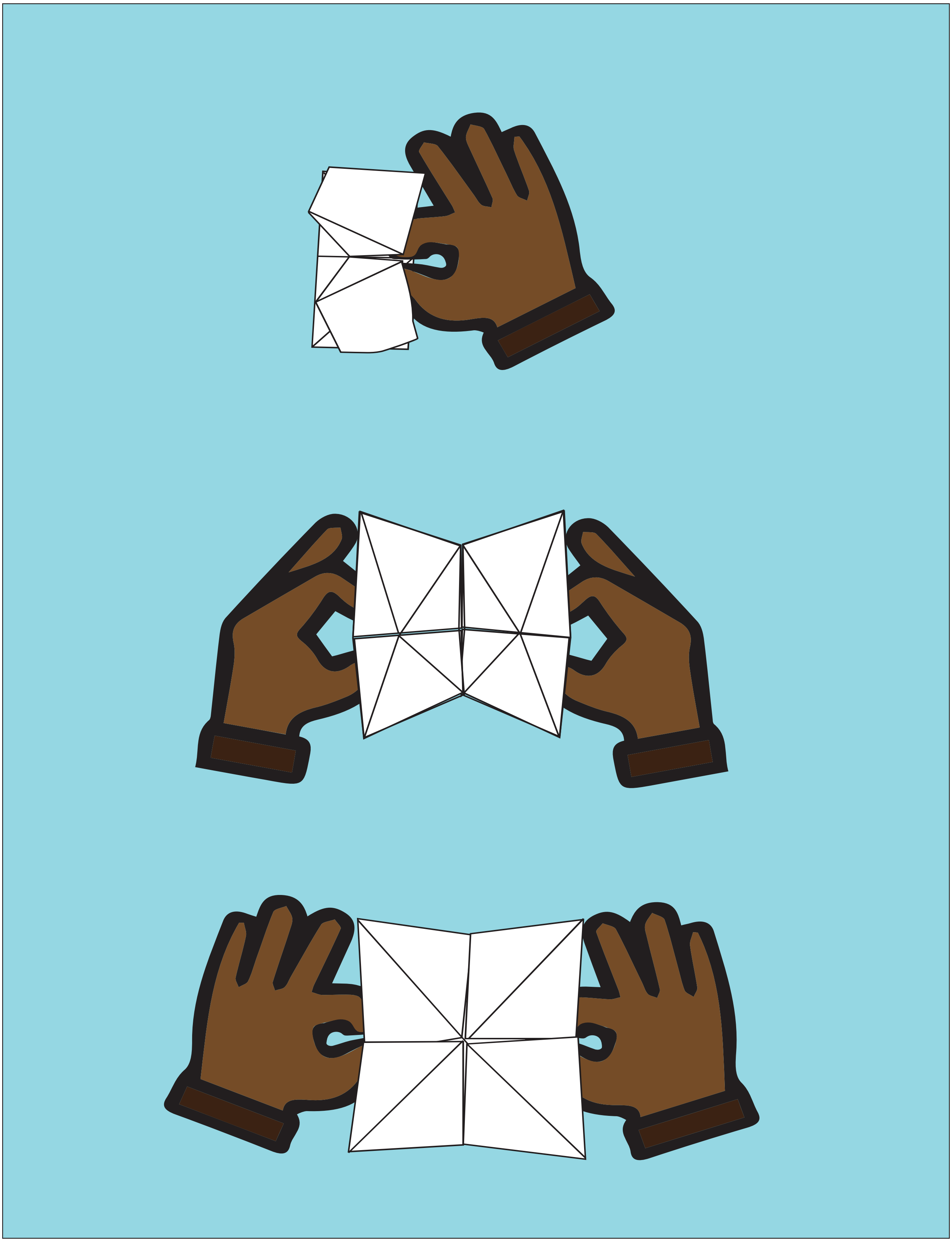


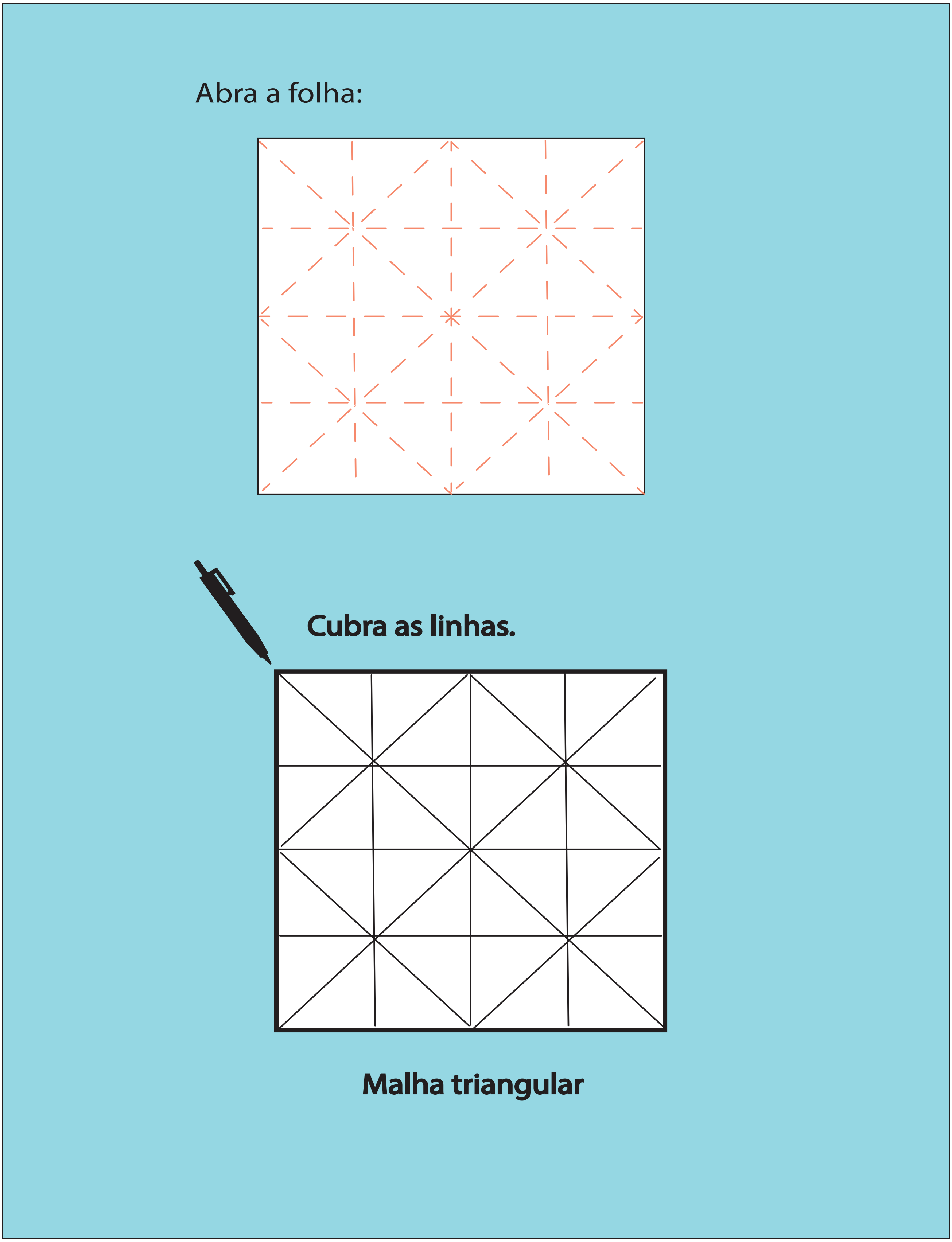

Vira o papel


Vira o papel



Fonte: Suzana Alfaia, 2021





Fonte: Suzana Alfaia, 2021

Agora vamos pensar juntos...

Utilize a malha triangular originada no origami "abre e fecha" para ajudar "a ver" a solução dos problemas a seguir.

a) Tomando os pequenos quadrados criados pelas linhas, em quantas partes o quadrado original (que representa a unidade) está dividido?

b) Cada parte quadrada pode ser representada por qual fração?

c) Tomando os triângulos criados pelas linhas, em quantas partes iguais a figura está dividida?

d) Qual fração, em relação ao todo, representa cada triangulo?

e) Se juntarmos 8 quadradinhos da figura, qual fração essa nova organização irá representar? Simplifique a fração encontrada e discuta o resultado.

f) Se juntarmos 4 triângulos da figura qual fração esse conjunto passa a representar? Simplifique a fração encontrada e discuta o resultado.

g) Utilizando a figura, dê o resultado das somas a seguir:

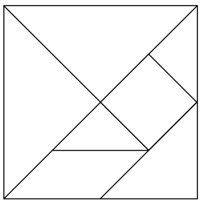
i) $1/32 + 1/32 =$ simplificando:

ii) $3/16 + 1/16 =$ simplificando:

iii) $1/32 + 1/32 + 3/16 =$ simplificando:

2.9 Dobrando o tangram: estimando frações e porcentagens

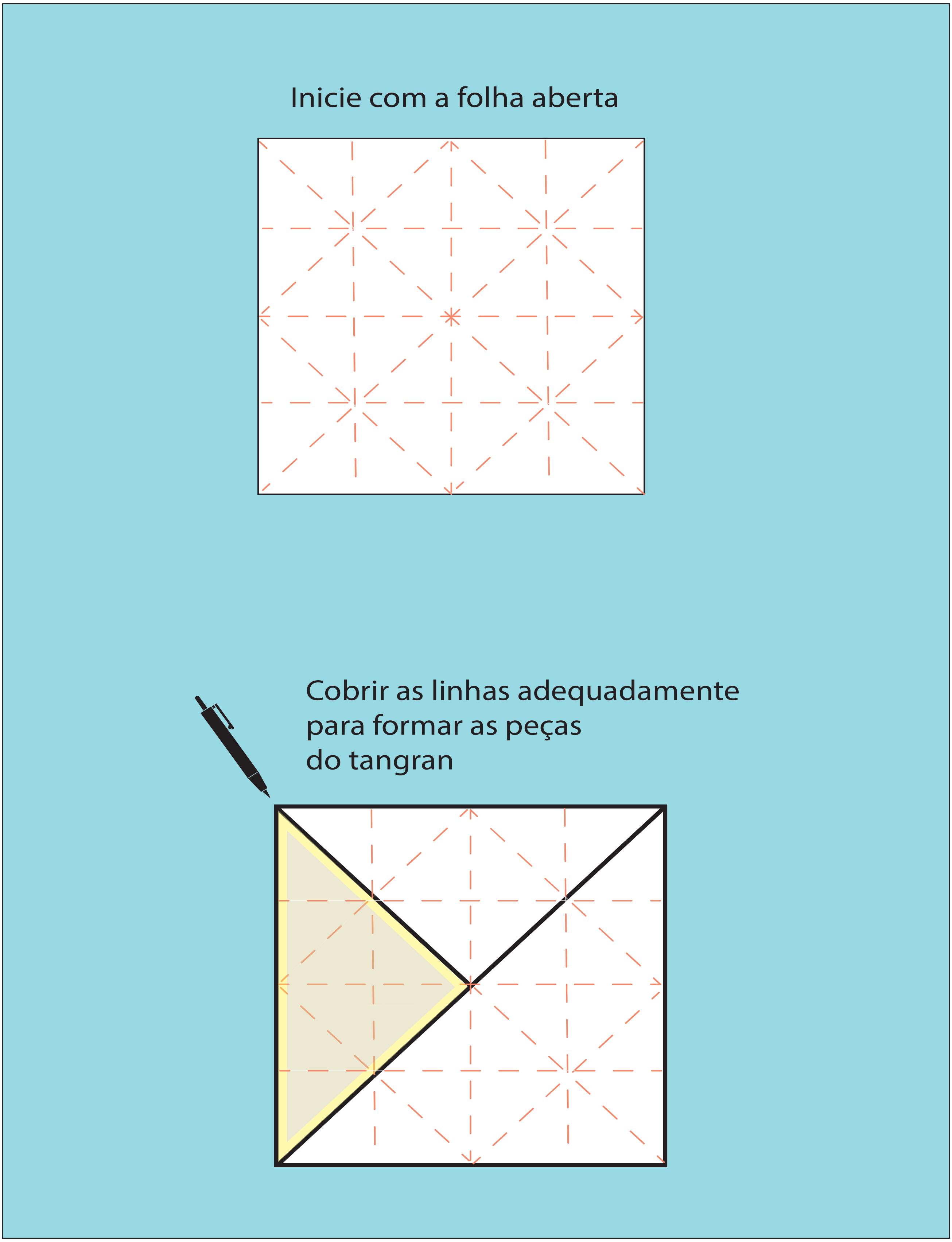
a) Com o auxílio de uma régua, desenhe um tangram sobre o papel que foi dobrado o "abre e fecha". O tutorial é apresentado nas próximas páginas.

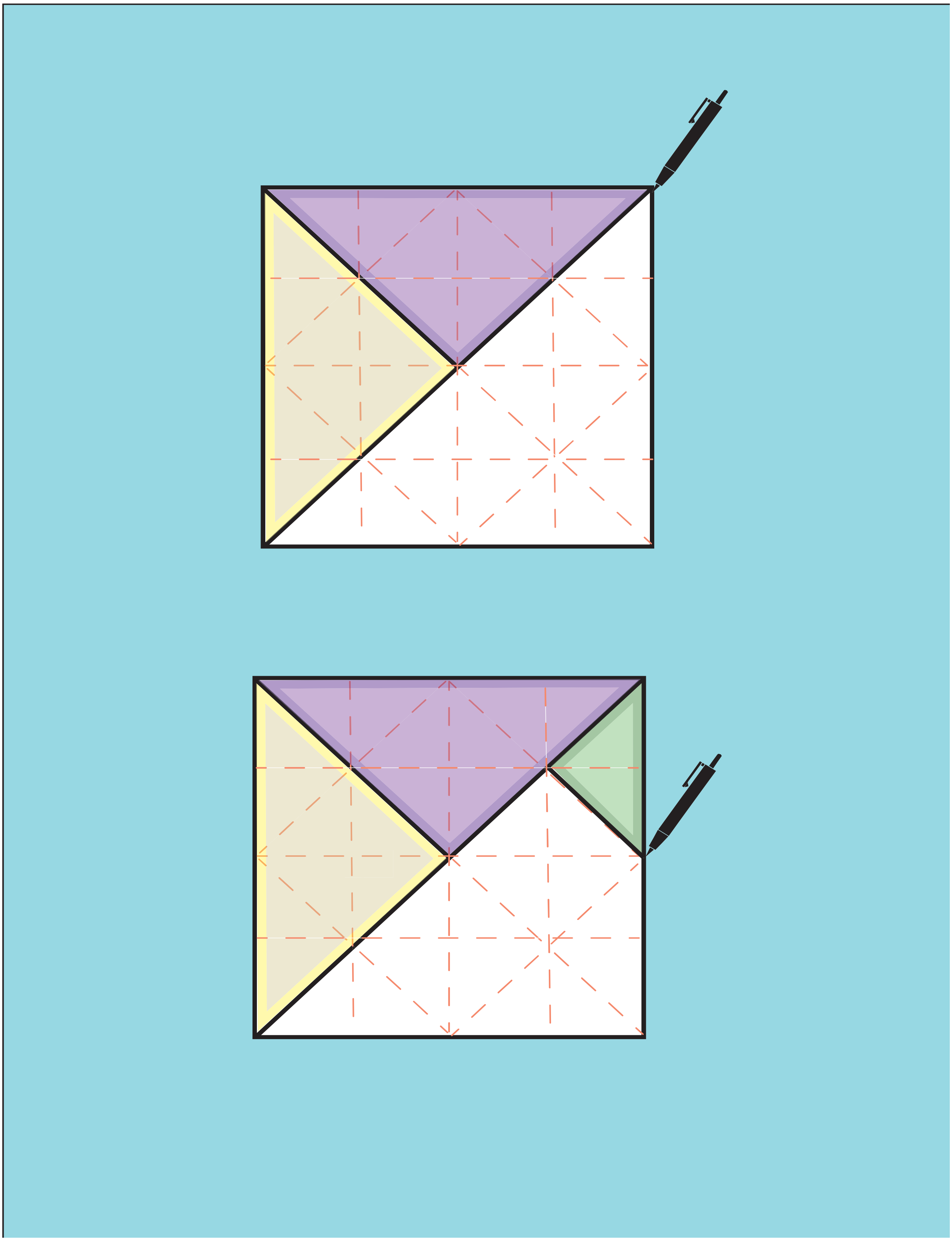


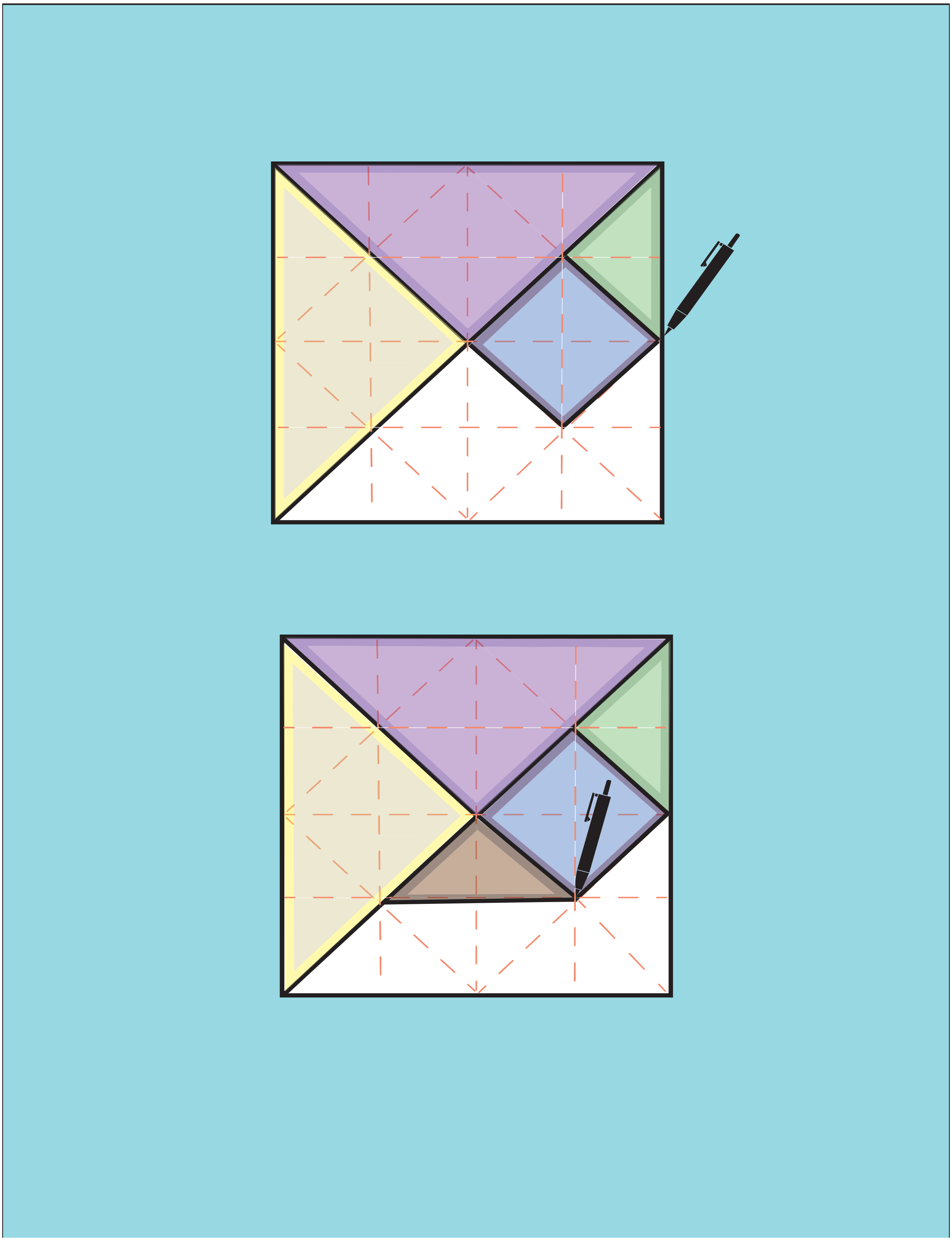
Dica: Deixe os alunos tentarem desenhar o tangram antes de mostrar o resultado. De início forneça apenas o modelo das 7 peças unidas formando o quadrado (como apresentado ao lado) e desafie os discentes a "enxergarem as peças" na malha triangular.

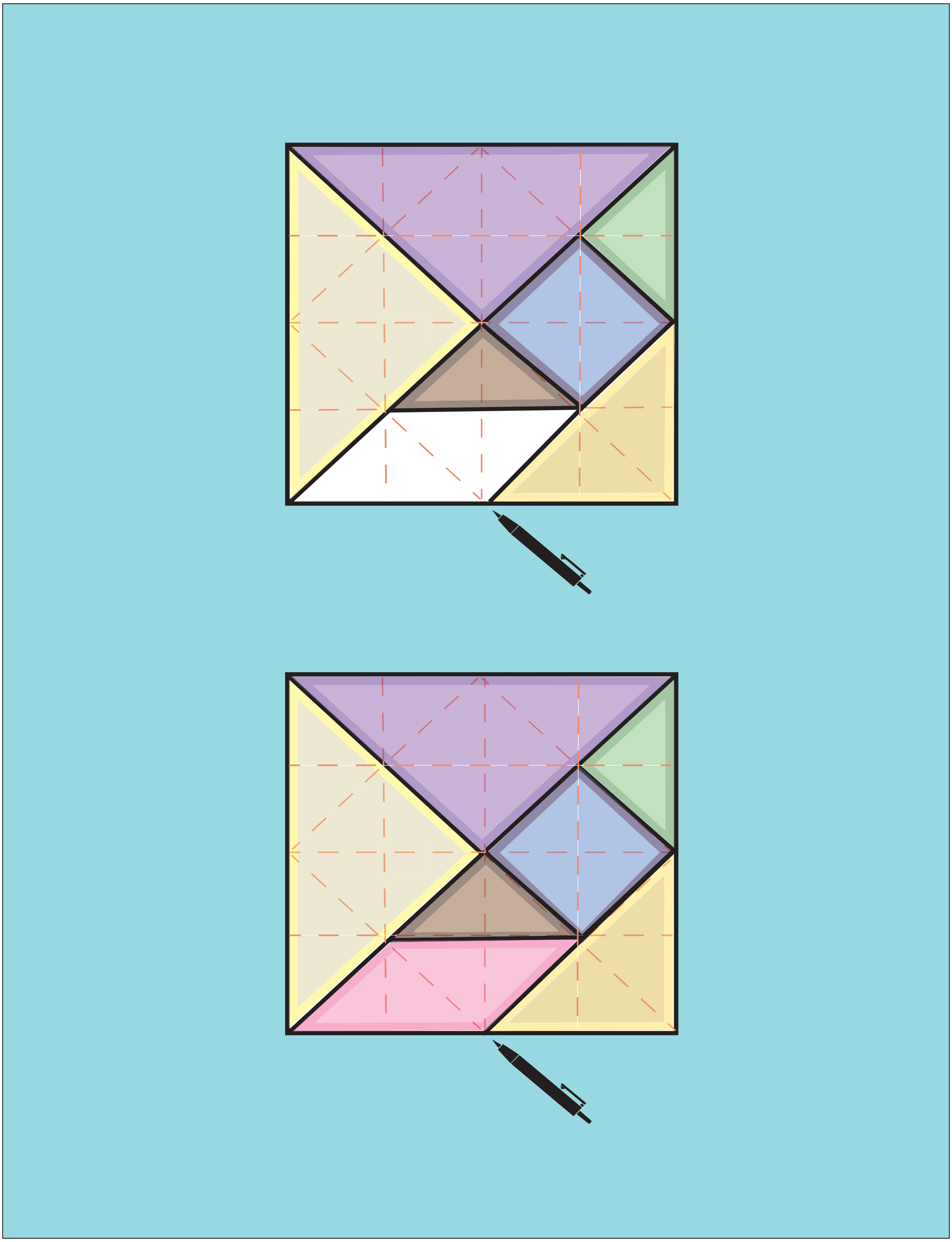
b) Trabalhando em grupo: converse com seus colegas e indique, em fração e em percentual, quanto equivale cada uma das 7 peças do tangram em relação ao quadrado total.

Figura 8: Esquema para desenho do tangram sobre a malha do origami "abre e fecha"









Fonte: Suzana Alfaia, 2021

Capítulo 3

Considerações finais

As atividades apresentadas neste *e-book* não pretendem ser "receitas", mas ideias que permitam aos professores que ensinam matemática perceberem as possibilidades do papel como material manipulativo, servindo de apoio à compreensão de conceitos matemáticos inicialmente difíceis para os alunos dos anos iniciais, como é o caso dos números fracionários. Assim, as atividades aqui apresentadas não esgotam o tema. O grande propósito delas é convidar os docentes à elaboração de atividades criativas, lúdicas e culturalmente relevantes para as aulas de matemática.

Além disso, o papel, como material manipulativo, não insere nos estudos matemáticos apenas a cultura asiática, apesar da força e beleza do origami. É possível também utilizar o papel como um recurso de caráter intercultural. Tiras de papel podem ser utilizadas para atividades de tecelagem, permitindo um mergulho na geometria, tapeçaria e cestaria de povos originários das Américas e do continente africano, bem como a folha de papel permite trocas com as culturas lúdicas da infância, em suas produções de jogos, brinquedos e brincadeiras.

Nesse sentido, a aula de matemática, no ensino fundamental, possui potencialidades de se constituir em um espaço-tempo intercultural, onde modos de ser, fazer e saber dialogam com a linguagem matemática, evidenciando a profunda articulação da matemática com as culturas e com o mundo da vida.

Como ensina um provérbio africano: "o eco da primeira palavra fica sempre no coração". Que a alfabetização matemática possa ecoar nos corações dos alunos e alunas como uma lembrança de aprendizagem divertida e desafiadora, permitindo superar a tradicional aversão aos cálculos que ainda hoje assombra o ensino de matemática. Esta é a esperança que guiou a elaboração da obra que aqui se encerra.

Como dizem os contadores populares:

"Entrou pelo pé do pato, saiu pelo pé do pinto, quem quiser conte mais cinco".

Apêndice A

Respostas do tangram

Figura 9: Representação fracionária e percentual das peças do tangram

Fonte: Suzana Alfaia, 2021

Referências Bibliográficas

BOYER, Carl Benjamim; Uta C. MERZBACH. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

CASTRO, F. C. **Quantidades intensivas**: análises de uma intervenção com alunos do 5º ano no ensino fundamental. 2014, 210 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.

COSTA, Eliane Moreira da. **Matemática e Origami**: Trabalhando Frações – Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

FREITAS. Aline Claro de; NOGUEIRA. José Roberto. **Origami**: o uso como instrumento alternativo no ensino da geometria. XII Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016.

GERDES, Paulus. **Ideias matemáticas originárias da África e a educação matemática no Brasil**. Tópicos Educacionais, Recife,v. 18, n.1-2, jun./dez. 2012.

GERDES, Paulus. **Mundial de Futebol e de Trançados**. Centro Moçambicano de Pesquisa Etnomatemática Cultura, Matemática, Educação Maputo, Moçambique. 2011.

MANDARINO, Silvana Pires Fonseca; SANT'ANNA, Neide da Fonseca Parracho. **Fração na reta numérica**: experimentar, representar, compreender. A introdução ao ensino de frações nos anos iniciais do ensino fundamental. 1.ed. - Rio de Janeiro: Imperial Editora, 2019. 63 p.

MASETTO, M. T. Didática: **A aula como centro**. São Paulo: FTD, 1997.

MERLINI, Vera Lucia. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. 2005. 238 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, Terezinha. "Criança pode aprender frações. E gosta!" *In*: GROSSI, E. (Org.) **Por que há ainda quem não aprende?** A teoria. Petrópolis: Vozes, 2003.

PATRONO, R. M. **A aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6º ano do ensino fundamental**: análise de uma proposta de ensino. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, 2011.

PERLIN, Patrícia; LOPES, Anemari RLV. "A necessidade histórica da criação das frações e a organização do ensino do professor dos anos iniciais". *In* **Anais do VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática**. Campus Canoas da Universidade Luterana do Brasil, 2013.

PREVÊ, D. T.; SHENECKEMBERG, C. M.; MUNHOZ, R. H. "Lúdico no ensino de frações". *BoEM - Boletim on-line de Educação Matemática*, v. 2, nº. 2, p. 88–99, 2014.

RODRIGUES, *et al.* **Números racionais no Ensino Fundamental**: subconstructos, o papel da linguagem e dos materiais manipulativos. *In*: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Recife, 2004.

RODRIGUES, F. C.; GAZIRE, E. S. "Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão". **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, nº. 2, 2012.

ROMANATTO, Mauro Carlos. **Número Racional**: relações necessárias à sua compreensão. Tese (Doutorado em Educação) – Unicamp, Campinas, 1997.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Materiais Manipulativos para o Ensino de Frações e Números Decimais**. Porto Alegre, RS: Penso Editora, 2016. v. 3. Coleção Mathemoteca.

VASCONCELOS, I. C. P. **Números fracionários**: a construção dos diferentes significados por alunos de 4ª a 8ª séries de uma escola do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-graduação em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, RS. 2017.

WU, H. **How To Prepare Students for Algebra**. American Federation ff Teachers. Summer 2001. Disponível em: https://www.aft.org/sites/default/files/periodicals/algebra.pdf Acesso em: 12 de julho de 2021.

III SIMPÓSIO DA FORMAÇÃO
DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA
DA REGIÃO NORTE

Realização e Organização

ANPMat

Associação Nacional dos Professores
de Matemática na Educação Básica

ISBN: 978-65-88013-13-7

9 786588 013137