III SIMPÓSIO DA FORMAÇÃO
DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA
DA REGIÃO NORTE

EXEMPLIFICAÇÃO MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA PEDAGÓGICA

Ion Moutinho

ANPMat
Associação Nacional dos Professores
de Matemática na Educação Básica

EXEMPLIFICAÇÃO MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA PEDAGÓGICA

Exemplificação matemática como ferramenta pedagógica.

Capa: Gabriel Brasil Nepomuceno
Projeto gráfico: Gabriel Brasil Nepomuceno
Diagramação e Assessoria Editorial: Yunelsy Nápoles Alvarez

ISBN: 978-65-88013-15-1

Distribuição
Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
http://www.anpmat.org.br / email: editoraanpmat@anpmat.org.br

III SIMPÓSIO DA FORMAÇÃO
DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA
DA REGIÃO NORTE

EXEMPLIFICAÇÃO MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA PEDAGÓGICA

Ion Moutinho

1ª edição

2021

Belém-PA

ANPMat
Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

Sobre o autor

Ion Moutinho
ion.moutinho@gmail.com

Nasceu em Niterói e bacharelou-se em Matemática na Universidade Federal Fluminense (1989), universidade na qual leciona desde 1991. Obteve grau de Mestre em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (1991) e o de Doutor em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos (2006). Realizou pesquisas na área de Geometria Diferencial.

Desde 2013 passou a desenvolver estudos na área de Educação Matemática. Em 2018 trabalhou na Simon Fraser University, como pesquisador visitante e sob orientação de Rina Zazkis. Suas pesquisas focam, de modo geral, no conhecimento especializado do professor de Matemática e tem grande interesse no desenvolvimento de estratégias e materiais didáticos que possam ser utilizados por professores que ensinam Matemática.

Gosta de falar e conversar sobre Educação Matemática e praticar atividades físicas, como andar por pelo menos duas horas em trilhas entre florestas e montanhas, uma ótima maneira de criar novas ideias de pesquisa.

Sumário

Prefácio

Abordamos o papel dos exemplos no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática. Procurando respeitar o conhecimento profissional específico de professores que ensinam Matemática, apresentamos o assunto a partir de referenciais da área de Educação Matemática.

O objetivo é munir o professor de recursos que permitam uma prática docente mais diversificada e alternativa àquela que tem o professor como transmissor e fonte de conhecimento. Um ponto de destaque é a atenção para a questão da integração da avaliação de conhecimentos de alunos ao processo de ensino e aprendizagem. Mais precisamente, vamos introduzir, em língua portuguesa, algumas das principais e mais recentes concepções trabalhadas e desenvolvidas em estudos e pesquisas da área da Educação Matemática que tornam a exemplificação matemática uma poderosa ferramenta pedagógica.

O texto produzido é resultado de estudos sobre o assunto, exemplificação matemática, a partir de artigos científicos e textos acadêmicos, além de pesquisas, em andamento e já produzidas, e de diversas vivências. Uma curiosidade é que materiais existentes sobre o assunto são predominantemente em língua estrangeira.

Esperamos que o conteúdo apresentado na sequência possa contribuir para a formação (continuada) do professor que ensina Matemática, porém é possível que algumas discussões desenvolvidas também funcionem como inspiração para temas de pesquisa na área de ensino e educação matemática.

Teresópolis, setembro de 2021.

Ion Moutinho

Introdução

Ao que tudo indica, cursos de licenciatura em Matemática privilegiam os conhecimentos da Matemática Científica, deixando de lado saberes mais necessários à futura prática docente, tanto no Brasil (p. ex. FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013; MOREIRA; FERREIRA, 2013) como no exterior (p. ex. BALL, 1990; BALL *et al.*, 2009). A questão de que somente a compreensão do conteúdo disciplinar não é suficiente para a formação e prática do professor passou a ter atenção especial a partir de 1983, quando Lee Shulman, psicólogo educacional americano, apresenta o termo Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK, abreviação para o termo em inglês "Pedagogical Content Knowledge") fazendo referência ao conhecimento profissional específico de professores. A partir de então, iniciou-se uma linha de estudos a respeito da capacidade de o professor transformar o conhecimento do conteúdo que ele possui em formas pedagogicamente poderosas.

Um tema que virou assunto de atenção do PCK para o professor de Matemática mais recentemente é a exemplificação matemática. São inúmeros estudos, pesquisas e materiais didáticos (p. ex. TALL; VINNER, 1981; ARCAVI; HADAS, 2000; ZAZKIS; LEIKIN, 2007; KALEFF, 2008; FIGUEIREDO; CONTRERAS; BLANCO, 2009; e SINCLAIR; WATSON; ZAZKIS; MASON, 2011) que mostram que o papel da exemplificação matemática é muito mais abrangente do que o de servir como modelo de soluções detalhadas de exercícios apresentados pelo professor ou pelo livro didático. Inclusive, além de presente no processo de ensino e aprendizagem, a exemplificação pode ser considerada também no processo de avaliação. Estranhamente, a exemplificação matemática parece não receber maior atenção no Brasil, conforme pesquisa realizada por Castro (2021).

Nosso objetivo geral com o presente texto é introduzir, em língua portuguesa, algumas das principais e mais recentes concepções trabalhadas e desenvolvidas em estudos e pesquisas da área da Educação Matemática que tornam a exemplificação matemática uma poderosa ferramenta pedagógica. Ou seja, mostraremos como o entendimento dos diferentes papéis dos exemplos matemáticos pode viabilizar a transformação do conhecimento do conteúdo que o professor de Matemática possui em um conhecimento específico de sua profissão.

Com essa perspectiva, abordaremos conhecimentos acerca de:

- Os diferentes papéis dos exemplos na formação de conceitos matemáticos.
- A geração de exemplos por alunos como estratégia de ensino.
- A produção de exemplos por alunos como recurso para promoção de aprendizagem.
- A produção de exemplos por alunos como recurso de avaliação.
- Estratégias para elaboração de atividades didáticas.
- A geração de exemplos como metodologia ativa de ensino-aprendizagem.

Em resumo, esperamos que o conteúdo apresentado a seguir possa contribuir para uma prática docente do professor de Matemática com intencionalidade matemática e didática.

Capítulo 1

Exemplos no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática

Exemplos são parte integral da Matemática. E isso acontece desde os registros humanos mais antigos, como nos tabletes de argila produzidos na antiga Mesopotâmia, quando procedimentos gerais para a resolução de certos problemas eram registrados por meio de inúmeros casos particulares, e não por fórmulas ou teoremas (Aaboe, 1984). Encontramos até exemplos protagonizando a história da Matemática, como a crise nos fundamentos da Matemática grega acarretada pela descoberta de um segmento que não podia ser medido por uma expressão numérica, de acordo com os conhecimentos e convenções da época. A saber, a diagonal de um quadrado de lado com medida 1, e que representaria a raiz quadrada de 2, segundo o Teorema de Pitágoras para triângulo retângulo, não podia ser medida por nenhum submúltiplo da unidade.

Voltando-nos para a educação matemática, vemos de imediato que os exemplos têm um papel instrucional de destaque no processo de ensino e aprendizagem, pois constituem uma componente constantemente presente em materiais didáticos ou em explicações de professores. É necessário, porém, que se lance mão de um bom conhecimento matemático e pedagógico a fim de se aproveitar todo o potencial e importância dos exemplos. "A escolha e o uso de exemplos representam um desafio para o professor, envolvendo muitas considerações que devem ser ponderadas, especialmente porque a escolha específica de exemplos pode facilitar ou impedir a aprendizagem dos alunos" (ZODIK; ZASLAVSKY, 2007, p. 265).

Neste capítulo fazemos uma breve revisão de fundamentos da área de Educação Matemática que propiciam o uso dos exemplos matemáticos como ferramentas pedagogicamente poderosas.

1.1 Exemplos instrucionais

Inicialmente, vemos os exemplos matemáticos como *exemplos instrucionais*, isto é, são os exemplos oferecidos por um professor ou livro didático no contexto de aprendizagem de um determinado tópico. Essa terminologia está de acordo com Zalavsky (2010). Rissland-Michener (1978) introduz uma descrição dos exemplos instrucionais em quatro classes, não necessariamente disjuntas.

Exemplos iniciais: na primeira abordagem de uma teoria existem exemplos que sobressaem fácil e imediatamente; são esses que nos permitem iniciar o estudo de um novo tema e que utilizamos para as primeiras definições e resultados, dando, assim, ocasião para que surjam as primeiras intuições úteis.

Exemplos de referência: são aqueles exemplos aos quais nos referimos repetidamente. São básicos e largamente aplicáveis, e proporcionam um marco de referência a partir do qual muitos resultados e conceitos estão ligados entre si. São usados também para verificar a compreensão de conceitos, resultados ou processos.

Exemplos modelo: são exemplos paradigmáticos e genéricos. Eles sugerem e sistematizam expectativas e assunções automáticas sobre resultados e conceitos. São os exemplos que nos indicam casos gerais. Dada a sua natureza genérica, os exemplos modelo estão frequente e intimamente ligados aos argumentos "sem perda de generalidade".

Contraexemplos: esses exemplos são utilizados para se refutar um determinado argumento ou para revelar melhor as diferenças entre conceitos.

Tal categorização já nos mostra como a utilização de exemplos pode ser uma tarefa complexa, ou não trivial, e como exemplos são essenciais para generalização, abstração e raciocínio analógico.

Com o objetivo de ressaltar a necessidade de um exemplo instrucional ser efetivamente útil, Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson e Zaslavsky (2006) sugerem que um exemplo deve ser transparente e generalizador. Um *exemplo transparente* é aquele que dirige facilmente a atenção do educando para as características que o tornam exemplar. Um *exemplo generalizador* é aquele que destaca as características específicas necessárias que constituem um exemplo do assunto em questão e, ao mesmo tempo, aponta para as características arbitrárias e mutáveis. Exemplos transparentes e generalizadores têm o potencial de servir como exemplo de referência ou exemplo modelo.

O exemplo de equação de circunferência, $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2$, é transparente com relação às coordenadas do centro da curva e de seu raio, pois pode ser imediatamente traduzido para uma interpretação geométrica que corresponde à definição de circunferência. De fato, a equação dada traduz-se por $d((x,y),(1,-2)) = 3$, isto é, a distância do ponto (x,y) ao ponto $(1,-2)$ é 3. A mesma curva, porém, se estiver representada por $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 4 = 0$, deixa de ser um exemplo transparente para a propriedade de ser uma circunferência, pois pode ser confundida com um exemplo de elipse ou, eventualmente, de parábola ou hipérbole.

Exemplos de parábolas dados por equações como $y = 3(x-5)^2 - 1$ são transparentes e generalizadores para algumas propriedades importantes desse tipo de curva. Esse exemplo é transparente, pois vemos facilmente aqui que -1 é o menor valor que y pode assumir, e isso acontece quando $x = 5$, e vemos que existe uma simetria nos valores com relação ao eixo $x = 5$. E temos que o exemplo é generalizador, quando vemos que essas características podem ser novamente obtidas a partir de outros exemplos similares. Assim, se quisermos uma parábola com vértice em $(2, 5)$, um exemplo seria $y = 3(x-2)^2 + 5$.

Exemplos de equações quadráticas como $y = x^2 - 2x + 3$ não são transparentes nem generalizadores para o conhecimento do vértice de uma parábola e para a existência e definição de um eixo de simetria da curva.

Triângulos retângulos podem ser ótimos exemplos iniciais para o estudo da fórmula da área de triângulos, mas dificilmente poderão ser considerados como um exemplo modelo para a explicação de que a área de um triângulo é dada pela metade do produto da base do triângulo pela sua altura.

No Capítulo 2 exploraremos um pouco mais os tipos de exemplos instrucionais.

1.2 Exemplos instrucionais em uma perspectiva cognitivista

Recorrentemente, encontramos a orientação de que a formalização de um conceito seja precedida pela sua compreensão. Abordagens assim, com uma perspectiva cognitivista, naturalmente demandarão novas utilidades para o uso dos exemplos, pois assumirão um papel que vai além de ilustrar definições, teoremas e procedimentos. Vamos considerar agora uma abordagem defendida por Shlomo Vinner, segundo o qual saber a definição de um conceito de cor não garante a compreensão de tal conceito (VINNER, 2002).

Definições matemáticas têm papel fundamental, como o de estabelecer uniformidade na comunicação matemática, além de capturar a essência de um conceito, muitas vezes transmitindo suas propriedades caracterizadoras. Vinner adota o termo *conceito definição* para se referir a uma forma de se expressar por palavras que explica precisamente determinado conceito.

De forma complementar Vinner utiliza o termo *conceito imagem* a fim de considerar a estrutura cognitiva total que pode estar associada com o nome do conceito. Isso significa que o conceito imagem pode ser composto por propriedades e processos e por qualquer coisa não verbal associados na nossa mente ao nome do conceito; podem ser figuras mentais, símbolos, representações diversas, ou mesmo uma coleção de experiências e impressões. Ou seja, a composição do conceito imagem de um educando depende dos exemplos vivenciados por ele.

Como ilustração, se atentarmos para o nome, fração, podemos encontrar pessoas fazendo referência a interpretações como a de parte-todo ou de divisão, ou à ideia de uma *pizza* sendo fatiada. Essas lembranças podem ser consideradas como parte do conceito imagem de fração. Exemplos como $2/3$, $1/5$, $8/2$ também podem fazer parte desse conceito imagem.

Vinner (*ibid.*) considera que adquirir um conceito significa formar um conceito imagem. Indo além, na aprendizagem informal de um conceito precisamos mais do conceito imagem, pois dificilmente o educando acessará o conceito definição. Por outro lado, na aprendizagem formal o conceito definição torna-se necessário e mais presente no processo de ensino, espera-se que o aluno faça uso dessas definições para resolver problemas e apresentar argumentos. As definições podem ser ensinadas para o educando, porém é comum o educando reformular o conceito definição, criar versões pessoais, principalmente quando fica muito tempo sem consultar a definição do conceito. Por vezes, a nova definição pode ser equivalente à convenção matemática, mas nem sempre é o que acontece. Por exemplo, se uma pessoa, quando ouve ou pensa no termo, fração, pensa só nos exemplos $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ etc., ela pode reconstruir o conceito definição de fração como sendo um pedaço do todo, ou da unidade.

Continuando com o termo fração, parece que não é comum encontrarmos explicações sobre o conceito ou apresentação do conceito definição, quando o assunto envolve números reais. E isso é um problema, pois não podemos manter certas interpretações e significações. Por exemplo, não podemos interpretar a fração $1/\sqrt{2}$ como sendo a unidade dividida em $\sqrt{2}$ partes iguais, nem podemos dizer que a fração $5/\pi$ é o resultado da divisão de 5 por π, não no sentido da divisão com resto. Ou seja, o conceito imagem de fração de números reais é bem diferente do conceito imagem de fração de números inteiros, mesmo que o conceito definição possa, eventualmente, ser o mesmo em ambos os contextos, isto é, se a/b for definido como o produto $a \cdot b^{-1}$, onde b^{-1} denota o inverso multiplicativo de $b \neq 0$.

Considerando a importância de se praticar a consulta da definição de conceitos envolvidos em demonstrações matemáticas ou em resolução de problemas, reservamos a Seção 3.1 para a ilustração de casos em que alunos reformulam definições com versões pessoais um tanto inusitadas.

Hershkowitz (1994) é um ótimo caso de aplicação das ideias defendidas por Vinner voltada para conceitos geométricos e ilustra bem a importância dos exemplos como ferramenta didática. A pesquisadora introduziu a noção de exemplo prototípico (ou protótipo). *Exemplos prototípicos* são exemplos bastante particulares que acompanham um conceito e devem ser considerados pelo professor com muita atenção, pois podem levar educandos a confundir o objeto matemático com a figura, a não reconhecer as mesmas figuras, quando em situação diferente da prototípica, e a reconhecer propriedades pela associação com tais figuras.

A altura de um triângulo serve bem para ilustrar os efeitos dos exemplos prototípicos na relação entre conceito imagem e conceito definição. Não é incomum que alunos formem o conceito imagem de altura com a noção de verticalidade com relação à linha horizontal do papel e/ou com a noção de segmento no interior do triângulo (p. ex. GRAVINA, 1996).

Existe também a questão da conceituação de ceviana. Muitos textos definem *ceviana* de um triângulo como sendo qualquer segmento com um extremo em um dos vértices do triângulo e o outro extremo no lado oposto ao vértice considerado. O problema é que muitos desses textos adotam essa definição e afirmam que a altura é uma ceviana. E o problema pode ser mais grave, pois existe a possibilidade de autores estarem reformulando a definição de ceviana, moldando-a de acordo com um conceito imagem particular, pois existem textos que definem *ceviana* como sendo um segmento que parte de um vértice do triângulo e termina na reta suporte do lado oposto. Essa alteração de definição muda completamente as características das cevianas. Para essa última definição podemos, sim, dizer que a altura de um triângulo é um caso de ceviana.

A Figura 1.1 mostra um desenho bastante popular usado para ilustrar o conceito de altura de triângulo, o triângulo ABC. Notemos que a figura representa um triângulo acutângulo e que a altura é com relação ao lado AB, desenhado paralelo à base da folha. O triângulo ABC parece ser uma figura prototípica, de acordo com os comentários apresentados nos parágrafos anteriores: a altura é vertical, com relação à base da folha, e é um segmento interno. A figura do triângulo DEF ilustra como deve ser a definição de ceviana, caso queiramos que a altura do triângulo seja classificada como um caso de ceviana, mas ela ainda pode ser prototípica com relação à imagem de que a altura é sempre vertical.

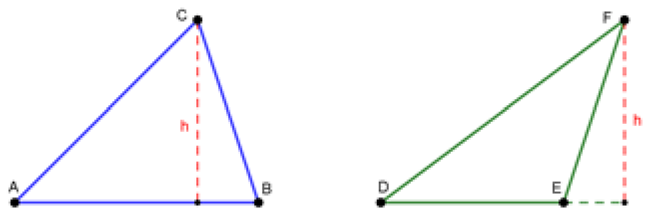

Figura 1.1: Imagem de triângulos prototípicos com relação à definição de altura de triângulo.

O leitor está convidado a fazer um exercício de pesquisa. Utilize algum programa localizador da internet para procurar por imagens a partir das palavras ”altura de triângulo”, veja quais são as figuras mais populares, veja se a ideia de que a altura é sempre referente ao lado paralelo à base da folha e interior ao triângulo é compatível com as figuras encontradas. Outro exercício é procurar pela definição de ceviana. Veja se o conceito obtido é compatível com as imagens obtidas na primeira parte da pesquisa.

Hershkowitz (*ibid.*) aprofunda-se na questão dos diferentes papéis dos exemplos instrucionais ao se referir a dois tipos de atributos que podemos encontrar nos exemplos. Os *atributos relevantes* de um conceito são as características que aparecem em qualquer exemplo do conceito, enquanto os *atributos irrelevantes* de um conceito são aqueles que apenas alguns exemplos do conceito apresentam. Assim, a característica - ter todos os ângulos internos iguais - é um atributo relevante para o conceito de quadrado, mesmo que existam exemplos com esses atributos que não sejam quadrados: os retângulos de modo geral. A característica - a altura é uma ceviana - é um atributo irrelevante para o conceito de triângulo, pois existem triângulos que não possuem esse atributo. De fato, em triângulos obtusângulos uma das três alturas não é uma ceviana. (Bom, essa questão depende da definição de ceviana que está sendo adotada, agora foi considerada a definição aparentemente mais popular, quando se diz que ceviana é um segmento com extremos sendo um vértice e um ponto do lado oposto do triângulo.)

Podemos descrever melhor o conceito de exemplo prototípico utilizando os termos, atributos relevantes e atributos irrelevantes. Um *exemplo prototípico* é aquele que possui todos os atributos relevantes, mas também possui muitos atributos irrelevantes. Com base nessa descrição podemos facilmente afirmar que um triângulo equilátero com base horizontal é um exemplo prototípico para o conceito de triângulo.

Com a classificação por atributos relevantes e irrelevantes, encontramos outros tipos de exemplos. Na perspectiva de construir com o educando o conceito estudado, Kaleff (2008) faz um questionamento significativo quanto ao uso do termo contraexemplo. Como, ao longo do estudo de um certo conceito, o educando ainda não conhece sua definição, pois ele ainda está desenvolvendo o conceito imagem, não podemos trabalhar com a ideia de um exemplo que refuta uma afirmação. A sugestão é usar o termo, ”não exemplo”.

Seguindo a terminologia introduzida por Hershkowitz, *exemplo positivo* é aquele que apresenta todos os atributos que fazem parte de um conceito definição, e *não exemplo* é aquele que não possui todos os atributos relevantes.

Evidentemente todo não exemplo será um contraexemplo para uma conjectura implícita. Um losango pode ser visto como um não exemplo de quadrado, pois não possui o atributo de ter todos os ângulos internos iguais, mas pode ser visto como um contraexemplo para a conjectura de que um quadrilátero de lados iguais e diagonais perpendiculares é um quadrado. O confronto entre exemplos positivos e não exemplos pode ser uma estratégia didática para favorecer a construção do significado de um conceito.

1.3 A geração de exemplos por alunos

Até o momento falamos dos exemplos instrucionais, aqueles que são oferecidos por uma autoridade, o professor ou o livro didático, com a expectativa de que o aluno aprenda a partir desses. Contudo, é possível que a produção de exemplos assuma, no processo de ensino, de aprendizagem e de avaliação de Matemática, um papel que aparentemente é incomum na prática docente tradicional. Com essa perspectiva, descreveremos uma dinâmica de trabalho envolvendo exemplificação que é bem diferente, pois espera-se que os próprios alunos gerem os exemplos, enquanto o professor é quem aprende durante o processo. O que falaremos a seguir é fundamentado principalmente no excelente livro de Watson e Mason (2005).

Segundo Watson e Mason (*ibid.*), os exemplos que os alunos produzem surgem de uma pequena piscina de ideias que simplesmente aparecem em resposta a tarefas específicas, em situações específicas. Eles chamam essas piscinas de *espaços de exemplos*. Pesquisas na área de Educação Matemática indicam que a atenção didática, por parte do professor, aos espaços de exemplos dos alunos pode promover a aprendizagem, além de agir como uma ferramenta de avaliação que opera como uma ”janela” para a mente de um aprendiz (ZAZKIS; LEIKIN, 2007). Essa perspectiva informa como o conhecimento pessoal é estruturado e o que pode melhorar essa estrutura, além de oferecer dinâmicas de trabalho em sala de aula bem interessantes. Watson e Mason (*ibid.*) exploram diversas estratégias de geração de exemplos por alunos e possíveis efeitos cognitivos que tais tarefas propiciam. Vejamos algumas dessas estratégias.

A tarefa de pedir por *três exemplos diferentes de um mesmo objeto* é muito interessante, além de ser surpreendentemente simples. Um exemplo de tarefa assim pode ser:

- Apresente um exemplo de gráfico de função constante.
- Apresente um exemplo de gráfico de função constante que seja diferente do exemplo anterior.
- Apresente um exemplo de gráfico de função constante que seja diferente dos dois exemplos anteriores.

Uma sequência de tarefas assim leva um educando a se forçar além do convencional e a criar suas próprias estratégias e perguntas. O segundo pedido de exemplo muitas vezes encoraja o aluno a mexer com a imagem que ele tem sobre o objeto matemático em questão. O terceiro pedido de exemplo pode levar o aluno a fazer perguntas como "O que mais é possível?", em vez de simplesmente tentar ajustar suas primeiras ideias sobre o assunto. Uma experiência em sala de aula envolvendo exatamente essas perguntas sobre função constante é relatada em Moutinho (2020).

Outra estratégia é uma variação da anterior, consiste em pedir por *mais exemplos do mesmo objeto*, nos seguintes moldes:

- Ache um exemplo de ... que seja diferente de qualquer exemplo feito por seus colegas de sala.
- Ache um exemplo de ... que seja diferente de qualquer exemplo feito por qualquer pessoa no mundo todo.

Existe também a estratégia de *variar a exemplificação.* Watson e Mason (*ibid.*) ilustram esse tipo de estratégia com a interessante sequência de pedidos de exemplificação de quadriláteros.

- Desenhe um quadrilátero.
- Desenhe um quadrilátero com um par de lados iguais.
- Desenhe um quadrilátero com um par de lados iguais e um par de lados paralelos.
- Desenhe um quadrilátero com um par de lados iguais, um par de lados paralelos e um par de ângulos opostos iguais.

A tarefa ilustrada fica ainda mais interessante quando é pedido para o aluno voltar e verificar se, em cada estágio, seu exemplo não satisfaria a próxima restrição. Então, pede-se, se necessário, que o aluno produza um novo exemplo que não se encaixe na próxima restrição.

A produção de exemplos variados é importante para, por exemplo, que o aluno não tenha em mente apenas exemplos prototípicos.

Outra estratégia que destacamos aqui é a *produção de exemplos com restrições.* A expectativa é de que a produção de exemplos assim ajude a promover a consciência da vasta gama de elementos, de uma dada classe de objetos matemáticos, oferecendo, desse modo, prática no uso de elementos não familiares. Um exemplo de tarefa desse tipo poderia ser: Apresente um exemplo de função crescente com concavidade para cima e uma assíntota vertical. A geração de exemplo para essa tarefa pode deixar o aluno alerta para o fato de que funções não precisam estar definidas em toda a reta dos reais. Ou pode deixá-lo ciente de que função com concavidade para cima não se restringe às parábolas.

São inúmeras estratégias de geração de exemplos discutidas em Watson e Mason (*ibid.*). Apresentamos aqui um resumo dos principais modelos de pedidos por exemplos.

- Ache exemplos de ...
- Ache um exemplo que ...
- Ache o exemplo que ...
- Ache exemplos que ...
- Ache todos os exemplos que ...

- Ache um exemplo de ... e outro e outro.
- Ache um exemplo que mostre que você entende como usar a técnica para ...
- Ache o mais difícil, o mais complicado, o mais simples, o mais fácil, o mais estranho ...
- Ache um exemplo que seja o mesmo dessa maneira, mas diferente dessa maneira para ...
- Ache ...

O conceito de espaço de exemplos apresentado por Watson e Mason fornece um critério de aprendizagem, assim como de ensino e de avaliação. Eles explicam que a ”aprendizagem é vista como crescimento e adaptação (extensão) de espaços de exemplos; o ensino envolve o fornecimento de situações nas quais isso possa ocorrer”. Os exemplos são úteis se, e somente se, os alunos ganharem familiaridade com eles, internalizá-los e integrá-los em seu espaço de exemplos o suficiente para que venham à mente em situações diferentes.

De forma complementar aos exemplos gerados por alunos, os autores adotam o termo *espaços de exemplos convencionais*, para nos referirmos aos exemplos considerados por matemáticos e livros didáticos, são os exemplos que professores esperam que seus alunos adquiram. De outro modo, espaços de exemplos convencionais determinam os exemplos instrucionais trabalhados por autoridades (professor e livro didático). Eles também estabelecem que ”compreender a matemática significa, entre outras coisas, estar familiarizado com os espaços de exemplos convencionais” (WATSON; MASON, 2005, p. 64).

Acabamos de ressaltar uma série de orientações didáticas, além de um critério de ensino, de aprendizagem e de avaliação de Matemática. São informações que consideram aquela que, provavelmente, é ação mais básica e presente na educação matemática de nossos alunos: a exemplificação. Nas próximas seções apresentamos diversas ilustrações, muitas provenientes da sala de aula, a respeito de tudo que foi exposto até aqui.

Capítulo 2

Classificando exemplos instrucionais

Vamos falar um pouco sobre como pode ser o trabalho de um professor, ou autor de livro didático, de classificação de exemplos instrucionais. Ilustraremos essa questão discutindo a exemplificação de números reais. Ou melhor, vamos falar sobre o espaço de exemplos convencionais para números irracionais.

Vejamos a questão a partir da pesquisa de González-Martín, Giraldo e Souto (2013) que descreve a apresentação dos números reais nos livros didáticos brasileiros. Resultados obtidos indicam que livros didáticos brasileiros iniciam a abordagem fornecendo definições e propriedades articuladas como listas de regras e procedimentos injustificados a saber. A abordagem dominante é algébrica e a maioria das tarefas requer a reprodução de técnicas exemplificadas.

A raiz quadrada de 2, $\sqrt{2}$, é um exemplo de destaque nesse processo de exemplificação de definições e de verificação de propriedades. Dessa forma, é interessante entender de que modo $\sqrt{2}$ é um bom exemplo, ou se é mesmo um bom exemplo para o ensino e aprendizagem dos números reais. Precisamos, então, saber se $\sqrt{2}$ serve como exemplo inicial, exemplo de referência, exemplo modelo e/ou contraexemplo, ou se existem outros exemplos mais adequados.

2.1 O Número $\sqrt{2}$ é um Bom Exemplo Inicial?

Existem restrições aqui, mas defendemos que a resposta é afirmativa.

Sendo um exemplo para as primeiras definições, é importante que a autoridade tenha em mente qual definição será usada para a formalização do conceito de número real, principalmente de irracional. Se o objetivo é formalizar um número irracional como aquele que é representado com uma dízima infinita e periódica, $\sqrt{2}$ não parece ser um bom exemplo inicial, pois é difícil (para não dizer impossível) detectar por inspeção direta a não existência de dízima periódica, ou mesmo o fato de a dízima ser infinita. Nessa linha, provavelmente exemplos numéricos dados por representações decimais como 0,1010010001... ou 43,212211222111... sejam mais apropriados como exemplos iniciais. Esses exemplos deixam evidente as características envolvidas na definição em questão.

É interessante destacar mais um papel para esses dois últimos exemplos, o de confrontar e, portanto, ajudar a enfatizar as características das representações decimais para um número racional. Tais características, provavelmente, já devem ter sido apresentadas ao educando, uma vez que esses podem utilizar ideias de existência de algum padrão (não necessariamente de dízima periódica) como caracterização dos números racionais (p. ex. ZAZKIS; SIROTIC, 2004).

Usando outro tipo de linguagem, podemos dizer que a raiz quadrada de 2, seja escrita como $\sqrt{2}$ ou como $1,414213...$, não é transparente para a propriedade de que sua representação decimal é infinita e não periódica.

Existem outras características que definem um bom exemplo inicial, isto é, também queremos escolher um exemplo que se sobressaia fácil e imediatamente no contexto escolar. O número $\sqrt{2}$ tem destaque na história da Matemática, aparece em registros produzidos pelos povos antigos da Mesopotâmia (ver Figura 2.4) e foi protagonista em uma crise matemática envolvendo a escola pitagórica. Mais ainda, está relacionado com outros conteúdos escolares já no ensino fundamental, como a medição de segmentos notáveis (no caso, a diagonal do quadrado de lado um) e em aplicações do Teorema de Pitágoras para triângulos retângulos.

Existe um aspecto que pode favorecer a escolha de $\sqrt{2}$ como um exemplo que introduz o conceito de número irracional: o fato de que tal número está associado ao operador raiz quadrada, $\sqrt{}$, um operador que muito dificilmente produz um número com dízima finita. Ou seja, pode ser (estamos sugerindo, seria o caso de o professor sondar com seus alunos) que números obtidos pela raiz quadrada não façam parte do conceito imagem de "números racionais". De outro modo, pode ser que uma ideia preexistente de que raiz quadrada de números que não são quadrados perfeitos é sempre indeterminada já esteja compondo o conceito imagem do conceito de número irracional - que está prestes a ser definido, ou que acabou de ser definido - pensando em um contexto de ensino tradicional.

Como vimos, para saber se um número é um bom exemplo inicial, precisamos saber qual definição será trabalhada com os alunos. A definição de número irracional por meio de representação decimal provavelmente é a mais praticada, porém também é questionada. Por exemplo, Sirotic e Zazkis (2007) acreditam que a ênfase na representação decimal de números irracionais não contribui para a compreensão conceitual da irracionalidade. Por outro lado, não podemos esquecer que existe a caracterização dos números reais pela correspondência com pontos da reta numérica.

Se o objetivo é formalizar os números reais por essa última propriedade, o número $\sqrt{2}$ pode, sim, ser um ótimo exemplo inicial, pois a sua representação na reta numérica é bastante simples de ser obtida, conforme ilustrado na Figura 2.1 (podemos comparar com a representação na reta numérica de números como $\sqrt[3]{7}$ ou $\phi = (1+\sqrt{5})/2$, o número de ouro, π ou e, o número de Euler, ou considerarmos a representação na reta numérica de números como 0,1010010001...).

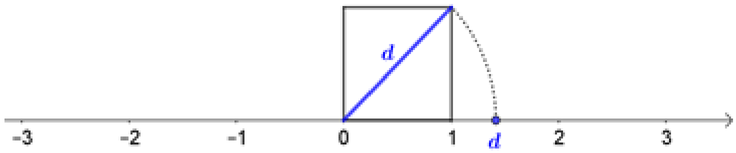

Figura 2.1: Representação da diagonal de um quadrado de lado 1 sobre a reta numérica.

2.2 O número $\sqrt{2}$ é um bom exemplo de referência?

De fato, vamos mostrar que existem inúmeras referências a esse número no contexto escolar.

O número $k = \sqrt{2}$ aparece em trigonometria, no valor do cosseno e do seno do ângulo de medida 45°. Aparece como exemplo no cálculo de raiz quadrada de um número que não seja quadrado perfeito e acaba se relacionando com a equação $x^2 = 2$ ou com a fatoração do polinômio $x^2 - 2$. Também aparece nesse belo problema de Aritmética, "Que número positivo é o dobro de seu inverso multiplicativo?". A $\sqrt{2}$ também se relaciona com o conceito de grandezas diretamente proporcionais, quando aparece na fórmula $d = \sqrt{2}l$, onde d e l representam, respectivamente, a diagonal e o lado de um quadrado. A $k = \sqrt{2}$ aparece novamente como constante de proporcionalidade em outro contexto, na definição das folhas da série A, aquelas folhas que se caracterizam pela propriedade de que quando dobradas ao meio continuam com a mesma proporção da folha original. Por exemplo, a folha A4 dobrada ao meio fica do tamanho da folha A5 e também é metade da folha A3. Esse tipo de folha é útil para se trabalhar com ampliação e redução de figuras.

Só para deixar clara a relação de $\sqrt{2}$ com as folhas da série A, consideremos uma folha de dimensões a e ka, onde $k > 1$ é a constante de proporção entre o lado maior e o menor da folha. Se dobramos o lado maior ao meio, a nova folha terá dimensões $ka/2$ e a. Se elas têm a mesma proporção (propriedade que caracteriza esse tipo de folha), temos que $ka/a = a/(ka/2)$, donde $k = 2/k$, donde $k^2 = 2$, donde $k = \sqrt{2}$ (assumimos que $k > 0$, logo descartamos a possibilidade $k = -\sqrt{2}$).

O número $\sqrt{2}$ aparece até na decoração de construções, desde a Roma antiga, conforme ilustrado na figura 2.2.

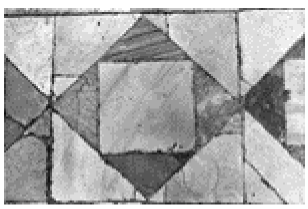

Figura 2.2: Padrão geométrico utilizado em construções na Roma antiga: $https://www.nexusjournal.com/the-nexus-conferences/nexus-1996/104-n1996-carol-watts.html$.

Outro ponto que torna $\sqrt{2}$ uma referência é com relação às demonstrações matemáticas, a prova de que $\sqrt{2}$ não pode ser um número racional certamente é uma das mais citadas e reproduzidas até os dias de hoje. E é uma prova cujos conteúdos envolvidos são acessíveis a alunos do ensino básico.

Antes de iniciarmos o próximo tópico de discussão, deixamos um exemplo de problema relacionado ao padrão utilizado na Roma antiga aplicado ao estudo de progressões geométricas. É uma ilustração de como um professor pode criar situações que testem a capacidade do aluno de dispor de exemplos conhecidos em situações diferentes, conforme orientação de Watson e Mason (2005).

Problema: Considere a sequência, Q_1, Q_2, Q_3, ..., de quadrados crescentes da Figura 2.3. A figura mostra quatro quadrados, mas a sequência pode se estender indefinidamente. O primeiro quadrado, o menor, coincide com a unidade de medida, ou seja, seu lado mede 1 e sua área é 1. O objetivo da questão é explorar a sequência de valores dados pela medida dos lados e das áreas dos quadrados Q_n. (Sugestão: Lembrar da fórmula $d = \sqrt{2}l$.)

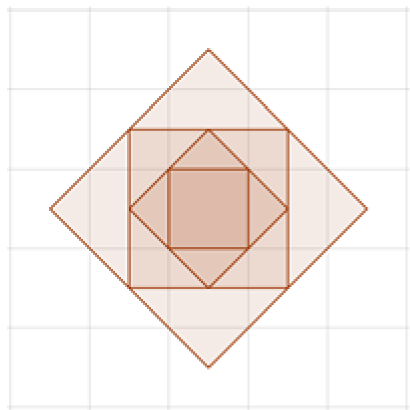

Figura 2.3: Figura de apoio para problema.

1. Mostre (justifique) que o lado l_2 do segundo quadrado da sequência mede $\sqrt{2}$.
2. Calcule a área A_2 do segundo quadrado da sequência.
3. Calcule o lado l_3 e a área A_3 do terceiro quadrado da sequência.
4. Calcule o lado e a área do quarto quadrado da sequência.
5. Calcule o lado e a área do 12º quadrado da sequência.

Apresentamos uma sugestão de gabarito para a questão proposta.

Solução:

1. O lado do segundo quadrado é congruente à diagonal do quadrado unitário, isto é, sua medida é $\sqrt{2}$. Logo, $l_2 = \sqrt{2}$.

2. A área de Q_2 é $A_2 = (\sqrt{2})^2 = 2$ (lado ao quadrado).

3. O lado de Q_3 é congruente à diagonal d_2 de Q_2. Usando a fórmula $d = \sqrt{2}l$, vemos que $d_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ (podemos verificar esse valor também pela figura). Logo, $l_3 = 2$. Assim, $A_3 = 2^2 = 4$.

4. O lado de Q_4 é congruente à diagonal d_3 de Q_3. Assim, $l_3 = d_3 = \sqrt{2}l_3 = \sqrt{2} \cdot 2 = 2\sqrt{2}$. Logo, $A_4 = (2\sqrt{2})^2 = 8$.

5. Podemos ver que existe um padrão na determinação do lado e da área dos quadrados Q_n. Vejamos os valores obtidos até agora.

Para os lados: 1, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, ...

Para as áreas: 1, 2, 4, 8, ...

As duas sequências formam uma progressão geométrica. A sequência de lados forma uma progressão geométrica com primeiro termo 1 e razão $\sqrt{2}$. A sequência das áreas forma uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão 2. Assim, temos as respectivas fórmulas do termo geral:

$l_n = (\sqrt{2})^{n-1}$,
$A_n = 2^{n-1}$.
Logo, $l_{12} = 2^5\sqrt{2} = 32\sqrt{2}$ e $A_12 = 2^{11} = 2048$.

2.3 O número $\sqrt{2}$ é um bom exemplo modelo?

Essa é uma questão bastante delicada, mas vamos ver que esse número também pode ser utilizado como um exemplo modelo.

Em primeiro lugar, notemos que a prova de que não existe solução de $x^2 = 2$ no conjunto dos números racionais não serve apenas para justificar um fato. Ela serve como uma generalização de verificação de que vários números reais são de fato um número irracional. Vejamos a questão com mais calma.

Provaremos que não existe um número racional p/q, com p, q sendo números inteiros positivos, tal que $(p/q)^2 = 2$. De fato, se isso fosse verdade, teríamos que $p^2 = 2q^2$. Fatorando p e q em números primos, teríamos

$$p_1^2 p_2^2 \cdots p_n^2 = 2q_1^2 q_2^2 \cdots q_m^2,$$

uma fatoração que contraria o Teorema Fundamental da Aritmética, pois no primeiro existe um número par de fatores primos, enquanto o segundo membro apresenta um número ímpar de fatores primos.

Os argumentos apresentados nessa prova podem ser reproduzidos com diversos outros números em forma de raiz, por exemplo $\sqrt{7}$ ou $\sqrt[5]{3}$. Bom, não podem ser reproduzidos para qualquer número representado por meio de radicais, mas certamente a prova de irracionalidade de $\sqrt{2}$ é um modelo para generalizações. Contudo, existe um problema maior e mais delicado envolvendo a questão de $\sqrt{2}$ ser um exemplo modelo.

A ideia de utilizar radical para produzir irracionais é bastante frutífera, mas está longe de ser representativa. Os números reais são de dois tipos, os números algébricos, aqueles que são raiz de um polinômio com coeficientes inteiros, e os números transcendentes, aqueles que não são algébricos. (Aliás, esse é mais um conceito com o qual $\sqrt{2}$ se relaciona, isto é, quando se torna um exemplo de referência.) É aqui que a questão fica delicada, pois os números algébricos (conjunto que inclui os racionais) são muito poucos, em comparação com os transcendentes. Mais precisamente, os números reais algébricos são enumeráveis, enquanto os números reais transcendentes são não enumeráveis. Isso significa, explicando de modo intuitivo, que se uma pessoa escolher arbitrariamente um ponto da reta, imaginando que isso fosse possível, a chance de o número escolhido ser algébrico é zero! Desse ponto de vista, vemos que $\sqrt{2}$ e sua caracterização como solução positiva da equação $x^2 = 2$ estão longe de servir como um exemplo modelo para os números reais.

A Matemática é uma área de conhecimento muito rica, ela é cheia de recursos internos, pois seus objetos possuem diferentes caracterizações, interpretações, procedimentos e formas de representação. E com os números reais não é diferente. Uma abordagem visando a formalização dos números reais pode ocorrer pela ideia de medição de grandezas escalares, as grandezas que são comparáveis e de natureza contínua. Neste sentido, o que se espera dos reais é que seus elementos possam ser comparados, ou medidos. E, por esse ângulo, $\sqrt{2}$ é, sim, um bom exemplo modelo. Vejamos melhor essa questão.

É interessante entender como $\sqrt{2}$ foi apresentado na Matemática babilônica. Eles registraram em tabletes de argila um quadrado de lado medindo 30 unidades e mediram a diagonal do quadrado. Então, determinaram uma expressão numérica para o que seria a raiz quadrada de 2 pela divisão da medida da diagonal pela medida do lado, ou seja, determinaram uma expressão para $\sqrt{2}$ por meio da fórmula $\sqrt{2} = d/l$.

Figura 2.4: Tablete de argila babilônico que registrou o valor de $\sqrt{2}$: *https : //en.wikipedia.org/wiki/YBC*$_7$289.

Essa ideia pode ser generalizada para outros números reais; por exemplo, é assim que normalmente livros didáticos apresentam o número π, isto é, como resultado da divisão da circunferência pelo seu diâmetro. E é agora que a discussão sobre escolha de exemplos fica mais interessante. No lugar de um professor, qual exemplo modelo da ideia de medição e comparação você escolheria, $\sqrt{2}$ ou π? Vejamos a minha posição para essa questão.

Os dois números, $\sqrt{2}$ e π, podem ser trabalhados com o mesmo tipo de tarefa, a de pegar uma representação do objeto geométrico, uma figura ou um objeto concreto, medir as dimensões envolvidas e realizar a divisão dos valores obtidos. Qual exemplo parece melhor para esse tipo de tarefa? Parece-me ser mais fácil, no sentido prático, medir com mais precisão a diagonal e o lado de uma figura ou objeto com forma de quadrado do que o diâmetro e a circunferência de uma figura ou objeto com forma circular. Assim, $\sqrt{2}$ parece ser um bom exemplo modelo, melhor do que o número π, para uma atividade didática envolvendo medições.

2.4 O número $\sqrt{2}$ é um bom contraexemplo?

Vejamos que $\sqrt{2}$ pode, sim, destacar as diferenças entre racionais e irracionais.

Existe a ideia de que todo segmento pode ser medido por um racional. Provavelmente o leitor não concordará com essa afirmação. Bem, é claro que ela não é verdadeira, mas não é esse o ponto. Estamos considerando que um aluno, em algum momento, pense que essa propriedade seja verdadeira. Foi assim na história, quando os pitagóricos afirmaram que todas as coisas são números. Já aconteceu assim em aulas minhas, quando estimulei alunos a medirem com recursos da Geometria Dinâmica.

É interessante deixar nosso aluno fazer suas conjecturas e, assim, explorar didaticamente a possibilidade de serem refutáveis. Como $\sqrt{2}$ é um número irracional fácil de ser representado na reta numérica, pode ser um ótimo contraexemplo para a ideia que iniciou o parágrafo anterior.

E, como já abordamos aqui, $\sqrt{2}$ também funciona como contraexemplo, quando aparece como protagonista de um grande escândalo da história da Matemática que envolveu a escola pitagórica, pois seus membros acabaram descobrindo que nem tudo pode ser explicado por números, justamente ao descobrirem que a diagonal do quadrado de lado 1 não possui um número racional correspondente.

É sempre bom lembrarmos que a representação do objeto matemático não é o objeto propriamente, é apenas uma representação mesmo. E o número real que corresponde à diagonal do quadrado de lado 1 possui diversas representações: é a solução positiva da equação $x^2 = 2$, é $\sqrt{2}$, é 1,414213..., é a representação geométrica dada pela diagonal da figura de uma quadrado de lado 1 etc. E tem mais essa representação um tanto especial, a representação por fração contínua, a bela expressão

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}}$$

Tal representação particular coloca $\sqrt{2}$ como um contraexemplo para a ideia de que números irracionais não podem ser escritos completamente ou totalmente conhecidos, ou ideias do tipo.

2.5 Exemplos transparentes e generalizadores

A análise do número $\sqrt{2}$ como exemplo de número real foi um exercício de uso dos conceitos apresentados na seção 1.1 a respeito dos exemplos instrucionais. A escolha específica desse número deu-se pelo fato de ser esse um exemplo bastante presente em livros didáticos, além de parecer ser um belo exemplo, considerando os diversos papéis que pode desempenhar.

Neste exercício ilustramos também como $\sqrt{2}$, em sentidos específicos, funciona como exemplo transparente e generalizador. Essa ilustração de exemplo transparente e de exemplo generalizador podia ser, porém, mais bem desenvolvida. Ainda assim, vamos parar por aqui, pois existe uma ótima referência, também em português, que trabalha muito bem esses tipos de exemplos, a saber, o artigo de Figueiredo, Contreras e Blanco (2009). Recomendo fortemente o seu estudo!

Capítulo 3

Relatos de experiência

O Capítulo 1 é uma apresentação teórica a respeito da exemplificação no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática. Mesmo que os conceitos introduzidos tenham sido bastante ilustrados, levá-los para a prática docente é uma questão completamente diferente. Como observou D'Ambrósio (1996, p.79), "partir para a prática é como um mergulho no desconhecido".

Neste capítulo vamos abordar algumas experiências minhas em sala de aula (virtual, algumas vezes) que foram justamente baseadas nos conhecimentos apresentados no primeiro capítulo. A fim de considerar da melhor maneira possível os fatores que podem estar envolvidos na prática de um professor, como afetivos e sociais, inclusive, vou desenvolver o texto de forma bastante informal, muitas vezes como um diálogo virtual com o leitor, que estou considerando como um colega professor de Matemática.

3.1 Reformulação de definição

Segundo Vinner (2002), espera-se que definições sejam usadas na hora de provarmos um teorema ou de resolvermos um problema. Contudo, conforme explicado na seção 1.2, é possível que alunos não consultem o conceito definição, muitas vezes eles simplesmente reformulam ou criam uma versão pessoal, o que pode ser um problema, pois nem sempre as novas versões estão de acordo com a convenção matemática. Vamos apresentar algumas situações vivenciadas por mim em sala de aula que ilustram essa problemática.

Certa vez, em uma avaliação a distância, quando o aluno resolvia as questões em casa, elaborei uma questão que pedia por um exemplo fazendo restrições, isto é, pedi para alunos apresentarem dois números irracionais e, em seguida, para apresentarem um racional entre os dois irracionais obtidos. Um aluno apresentou uma resposta muito interessante. Ele escreveu $6/17 = 0{,}35294...$ e $9/13 = 0{,}6923076...$ como apresentação dos dois números irracionais. E depois escreveu 0,555... como número racional entre os dois irracionais obtidos. Ele ainda se deu ao trabalho de reescrever o último número na forma fracionária, $5/9$, para enfatizar a racionalidade do número.

Certamente, o aluno autor da resposta dominava procedimentos aritméticos e conhecia as definições de número racional e irracional, mas tudo indica que ele não consultou algum manual e provavelmente atentou para aspectos parciais que caracterizam os números irracionais.

Uma curiosidade: quando eu corrigi essa prova, não estava preparado para avaliar respostas desse tipo. Aliás, uma dica: quando planejamos questões que fogem do convencional, também temos que estar preparados para respostas nada convencionais. Na hora, foquei no que foi pedido, os três exemplos atendendo as condições. Como meu aluno não apresentou os dois números irracionais, ele recebeu metade do ponto da questão (eu ainda considerei que ele produziu um racional a partir de uma representação que indicava dois irracionais). Essa avaliação foi na correria, com prazo para entregar as notas dos diversos alunos da turma. Mas, depois me arrependi. Quando tirei um momento para refletir sobre a questão que eu tinha planejado (isso foi consciente, quis pôr em prática uma das orientações de Watson e Mason, 2005) e revi a resolução do aluno, percebi que a questão tinha mostrado que o aluno dominava várias habilidades aritméticas, bem mais interessantes do que a de conhecer a classificação entre racional e irracional. Eu podia ter dado o ponto todo para ele, ou descontado só um décimo. O ideal mesmo seria ter levado a questão para debate em sala, o que agora venho fazendo. Vou falar mais sobre essa nova prática mais adiante.

Em uma turma com licenciandos em Matemática, em ambiente virtual de aprendizagem, iniciou-se uma abordagem didática pedindo aos alunos por exemplos do cotidiano que fizessem referência ao conceito de ângulo. Isso ocorreu de forma assíncrona, com a ferramenta Fórum de Discussão. Após essa etapa pedi para os alunos formalizarem o conceito matemático de ângulo, em outro tópico de discussão. No ambiente virtual eles tinham acesso imediato ao material didático que incluía o assunto em questão, até a definição de ângulo. Vejamos algumas das respostas apresentadas.

- "Ângulo é a região do plano formada por duas semirretas que se encontram num ponto comum".
- "Ângulo é o encontro de duas retas, com origem no vértice, e, no momento em que elas se encontram, forma o ângulo $A\hat{O}B$".

- "É a região do encontro de duas semirretas de mesma origem".
- "Ângulo é a medida da abertura entre duas semirretas que possuem a mesma origem".
- "Figura delimitada por duas retas que partem do mesmo ponto ou por dois planos que partem da mesma reta".
- "Sendo assim a medida da inclinação relativa de duas retas que partem do mesmo ponto".
- "Ângulo é a junção de duas retas formando um vértice".
- "Eu defino ângulo como toda a região formada entre dois seguimentos de retas. A medida não se altera se for afastando-se do vértice".
- "Conjunto de pontos situados entre duas semirretas de mesma origem".

As respostas listadas mostram como de fato alunos muitas vezes não recorrem ao livro didático para estabelecer um conceito definição. Cabe notar que algumas explicações não são muito claras ou precisas com relação à descrição do conceito, mas algumas chegam apresentar inconsistências. Por exemplo, leitor, você prestou atenção na terceira resposta, no que ela significa? O que está escrito pode nos levar a entender que ângulo é um ponto, a região de encontro das duas semirretas. As respostas mais comuns apresentaram ângulo como uma medida. Aproveitei essas respostas para discutir com os licenciandos como que temos que ter cuidado no uso de termos coloquiais no contexto técnico, e utilizei relação equivocada entre ângulo e medida de ângulo para iniciar o terceiro tópico de discussão, que era justamente sobre medida de ângulo.

Parece que até professores podem reformular o conceito definição na realização de tarefas, inclusive apresentando versões com inconsistências. Em uma turma de licenciados, em um curso de formação continuada, certa vez pedi para os alunos explicarem o fato de os números reais formarem um conjunto ilimitado. O objetivo era ver como eles acessavam o conceito de conjunto ilimitado e ver como eles elaboravam um argumento envolvendo números reais. Uma fração significativa dos alunos não apresentou uma ideia clara do que significava o conjunto ser ilimitado, e a maioria deles argumentou fazendo referência ao fato de o conjunto ser infinito. Ou seja, alguns professores reformularam o conceito de conjunto ilimitado como sendo o de conjunto infinito. Para os números inteiros esses conceitos confundem-se, mas não para os reais, ou mesmo os racionais.

Depois que comecei a prestar a atenção em como alunos recorrem às definições, a impressão que ficou é de que a criação de versões pessoais é bastante comum, talvez mais do que o aceitável ou desejável, considerando a expectativa de que definições sejam consultadas nos manuais. Talvez fosse o caso de se desenvolver um debate maior sobre o assunto. De qualquer modo, esse comportamento só reforça a importância de se coordenarem os espaços de exemplos com os respectivos espaços de exemplos convencionais. Bom, estou assumindo, isto é, estou conjecturando, mesmo, que um bom domínio de um espaço de exemplos convencionais ajude na criação pessoal do conceito definição associado, consistente com a convenção matemática.

3.2 Produção de exemplos com restrição

Já comentamos, no início da seção anterior, sobre um caso de tarefa de produção de exemplo com restrições, quando foi pedido para alunos escolherem dois números irracionais e um racional entre eles. Vejamos mais casos desse tipo.

Foi dado o problema de encontrar um irracional que fosse solução da inequação $3x < 1$. Alguns alunos apresentaram respostas corretas, mas com justificativas reveladoras. Por exemplo, um aluno apresentou $\pi/11$ como uma solução e explicou que "$\pi/11 = 0,28$". Além de mostrar que não está atento para o uso convencional do sinal de igualdade (é realmente interessante ver como que essas tarefas não rotineiras são acompanhadas de respostas inesperadas), o aluno mostrou também uma possível preferência por trabalhar com a substituição do número irracional por um racional próximo, em vez de trabalhar com o próprio número.

O aluno poderia ter verificado a veracidade da desigualdade $3 \cdot (\pi/11) < 1$ reescrevendo-a como $\pi < 11/3$ (utilizando transformações algébricas sobre os objetos, inclusive o número irracional π). Mas, ele optou por realizar a divisão, por aproximação. Pode ter escolhido $\pi \approx 3,14$ e ter realizado a divisão $3,14 \div 11$. Assim, utilizou $\pi/11 \approx 0,28$ para verificar que $3 \cdot 0,28 = 9,24 < 1$. O interessante é que essa é uma estratégia arriscada, pois sucessivas operações com aproximações podem gerar um resultado que não corresponde ao esperado para o objeto original.

A partir do exemplo que descrevi, quando a solução do aluno alertou-me para um comportamento que até então nunca havia despertado minha atenção, passei a olhar melhor para a questão de como alunos podem lidar com os números irracionais. Em uma questão de conta simples, certa vez um aluno desenvolveu o seguinte cálculo:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2} = \frac{2+1,73}{(1+1,73)^2} = \frac{3,75}{7,45}.$$

Um resultado que é diferente de: (Nem estou atentando para o uso inapropriado do sinal = nas contas do aluno.)

$$\frac{2+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2} = \frac{2+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}+3} = \frac{2+\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

A seguinte questão é bem mais interessante. Foi pedido para alunos resolverem a equação $\sqrt{3}x - 4 = 2x - 2$ e representar a solução na reta numérica. A intenção era avaliar se o aluno sabia diferenciar quando aproximações podem ser usadas de forma adequada, e quando não podem. Alunos teriam que achar a solução usando apenas procedimentos algébricos e fazer uso de aproximações somente para a marcação na reta numérica.

Tratando a equação algebricamente, chegamos na resposta $x = 2/(\sqrt{3}-2)$ ou, se quisermos racionalizar, $x = -4 - 2\sqrt{3}$. É a representação numérica/algébrica que, substituída no lugar da variável, torna a equação do problema verdadeira. Usando a substituição de $\sqrt{3}$ pelo valor aproximado 1,73, obtemos que a solução x é um número entre -8 e -7.

O maior problema nessa questão ocorreu quando alguns alunos usaram 1,7 como valor aproximado para $\sqrt{3}$. E o curioso é que a marcação na reta mudava, dependendo de alunos usarem a primeira resposta ou a versão racionalizada. Alunos que usaram 1,7 na resposta racionalizada ainda conseguiram uma marcação entre -8 e -7. Já alunos que usaram 1,7 na primeira resposta obtiveram uma marcação entre -7 e -6. Essa questão apresentou uma discussão entre os alunos bastante rica sobre a aproximação de números irracionais por racionais.

A propósito, leitor, aprendi a trazer para sala de aula para os próprios alunos analisarem as respostas inesperadas ou discutíveis que encontro. Essa dinâmica tem se mostrado bastante frutífera.

Voltando às tarefas que pedem por exemplos com restrições, tudo indica que essas podem funcionar como uma tarefa do tipo não rotineira, quando a resolução do problema colocado dificilmente se dará pela substituição de dados em um problema genérico já resolvido anteriormente. Isso é muito interessante, pois levará alunos a administrarem seus conhecimentos de modo diferente do usual. No caso de números irracionais, conforme ilustrado aqui, o pedido por exemplos com certas restrições tem acarretado em uso controverso, por alunos, de aproximações por racionais. Um resultado dessa discussão pode ser a tomada de consciência, por parte do professor, da existência de alguns obstáculos de aprendizagem que até então poderiam não estar claros. Dessa forma, o professor pode, por exemplo, rever suas tarefas didáticas a fim de tentar promover junto aos alunos o domínio no tratamento de números irracionais como um objeto matemático independente, sem a necessidade da utilização de recursos de aproximações. Para o leitor que se interessa por fundamentos da Educação Matemática, esses últimos comentários podem ser interpretados em termos de uma dualidade processo-objeto, segundo Sfard (1991).

3.3 Exemplos prototípicos

Certa vez desafiei meu filho, de 13 anos, a adivinhar o número que eu tinha pensado. Disse-lhe que tinha duas chances para acertar e que o número imaginado estava entre 0 e 3. Ele não gosta de falar sobre Matemática comigo, mas não vacilou com essa chance de vencer um desafio meu. Disse logo o número 2, e eu respondi que tinha errado. Então, meu filho disse o número 1, já comemorando, mas respondi novamente que tinha errado. Ele não entendeu de imediato, mas, então, percebeu que eu não estava me referindo somente a números naturais. Esse pensamento direcionado a exemplos particulares está longe de ser um caso isolado. Vejamos um exemplo no contexto universitário.

Já fiz a seguinte experiência, até com alunos da disciplina de Análise, do curso de Matemática. Ao perguntar se a propriedade $(x \in \mathbb{R}$ e $x > 0) \Rightarrow 1/x \leq 1$ é verdadeira ou falsa, muitos respondem afirmativamente e justificam analisando a desigualdade $1/x \leq 1$ com x assumindo valores 1, 2, 3 etc. Talvez exista aqui também a influência do conceito imagem, talvez a representação $1/x$ remeta o aluno à ideia de fração da unidade no sentido coloquial, algo claramente menor do que 1, e não ao conceito definição da expressão. E pode ser que números inteiros figurem como exemplos prototípicos dos números reais.

Uma explicação: quando digo que talvez ... ou que pode ser que ..., isso significa que estou fazendo descobertas sobre como meus alunos entendem a Matemática que eu ensino, mas que ainda são apenas indícios. Isso quer dizer que eu preciso investigar a questão melhor, planejar novas tarefas didáticas que permitam revelar mais informações a respeito do raciocínio matemático dos alunos, registrar com mais cuidado as respostas de toda a turma e analisar os resultados obtidos, até fazendo uso de referenciais teóricos da área de Educação Matemática. Como explica D'Ambrósio (1996), é a pesquisa que permite a interface interativa teoria e prática.

Tenho adotado em minhas aulas, principalmente nas aulas remotas em tempos de pandemia, a prática de aplicar minitestes, com questões rápidas onde o aluno provavelmente não consultará materiais didáticos e resolverá os problemas mentalmente. Gosto de usar esses minitestes, não exatamente os resultados, as porcentagens de acertos e erros, para motivar a discussão do conteúdo em um segundo momento. Por exemplo, as questões com maior índice de erros costumam render as melhores discussões. Para não caracterizar que o erro foi por falta de conhecimento, procuro também moldar os enunciados para que eles tenham algum grau de ambiguidade. Esse elemento garante ótimas discussões! Vejamos uma simulação de miniteste com questões que já apresentei.

Questão 1: Um conjunto da reta numérica diferente de vazio que não tem elemento máximo ou elemento mínimo é um conjunto ilimitado. Verdadeiro ou falso?

Questão 2: Quanto maior o número inteiro, maior é o número de fatores primos. Verdadeiro ou falso?

Questão 3: Escolha quais representações indicam com certeza um número irracional.

( ) (a) $\sqrt{2}/(3\sqrt{2})$

( ) (b) 1,41421...

( ) (c) 23,230193854738547...

( ) (d) $-0,5$

( ) (e) 0,1010010001...

Em uma turma com professores, praticamente 50% dos participantes erraram a Questão 1. Aparentemente, pela discussão que tivemos em sala, eles tinham em mente que os conjuntos ilimitados da reta são conjuntos relacionados com os intervalos ilimitados, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ ou $(-\infty, b]$. Contudo, a questão era falsa, podemos pensar no intervalo aberto $(0, 1)$ como contraexemplo. O mais curioso é que esses são os mesmos alunos que entenderam que o conceito de conjunto ilimitado confundia com o conceito de conjunto infinito, situação discutida na seção 3.1. Uma questão a se descobrir aqui é se os intervalos ilimitados aparecem para educandos, de modo geral, como exemplos prototípicos de conjuntos sem elemento máximo ou sem elemento mínimo.

Confesso que antes de escrever a última frase do parágrafo anterior, não tinha pensado em sondar a questão com os alunos. Ou seja, seria preciso saber se existe uma oferta mais ampla de exemplos, além dos intervalos ilimitados, para os conjuntos sem elemento máximo ou elemento mínimo, ou se esses são de alguma forma os exemplos mais populares. E seria preciso saber melhor se alunos baseiam-se, principalmente, nesses exemplos, quando pensam na questão de não existir elemento máximo ou elemento mínimo em um conjunto.

Certamente a Questão 2 envolve a influência de exemplos prototípicos, aquela figura de um número com vários fatores primos e/ou potências altas, algo como $p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \cdots \cdot p_n^{r_n}$. Contudo, como os números primos são infinitos, sabemos que sempre podemos conseguir um número grande, tão grande quanto se queira, com um único fator, o que mostra que a questão é falsa. Quase 50% da mesma turma de licenciados não acertou essa questão. Nas discussões sobre o miniteste, todos os alunos assumiram que não existia qualquer dúvida de entendimento referente às Questões 1 e 2. Os erros ocorreram simplesmente por não terem analisado melhor os problemas.

A questão 3 é bastante discutível. Já a apliquei entre licenciandos e licenciados e os resultados são semelhantes. A maioria foca nas opções (b), (c) e (e). A polêmica mesmo acontece quando descobrem que eu considero que a opção (b) não satisfaz o enunciado, isto é, a representação 1,41421... não garante que o número se trata de um irracional. Quando os alunos teimam com minha posição, argumento que, da mesma maneira que 1,41421... representa um irracional, teríamos que 1/131, que aparece, depois de vários cálculos ou recorrendo a uma calculadora, como 0,0076335877862595..., representaria com certeza um número irracional. Por outro lado, muitos também questionam a razão de 23,230193854738547... não representar um irracional. Em geral, não percebem a existência de um período de repetição ou, simplesmente, se deixam levar pelo grande número de casas decimais terminadas com os pontinhos. No final, aparentemente todos passam a entender o ponto de vista que defendo. Leitor, independentemente de saber quais são as opções corretas na questão 3, o fato é que as respostas insistentes de alunos na opção (b) parecem indicar que alunos percebem o exemplo, $\sqrt{2} = 1,4142...$, como um exemplo prototípico, pois confundem a representação com o objeto, reconhecem a propriedade, não ter dízima periódica, com a representação do objeto matemático.

A partir das terminologias que estamos adotando aqui, poderíamos dizer que a única resposta para a Questão 3 que é transparente para a propriedade de um número ser irracional é a opção (e).

O meu objetivo em trabalhar com questões rápidas, onde se espera que o aluno resolva os problemas mentalmente, é tentar avaliar melhor o conhecimento intuitivo utilizado por educandos e verificar se eles são influenciados por exemplos prototípicos. De outro modo, nesse tipo de tarefa, eu, como professor, procuro saber quais são os exemplos mais acessíveis e acessados dos espaços de exemplos de meus alunos. É uma forma de conhecer um pouco mais sobre meus alunos.

Antes de encerrar o tema, exemplos prototípicos, deixo para o leitor a sugestão de tarefa de pesquisa: procurar pela internet por imagens, a partir das palavras, soma de vetores. O leitor irá verificar que as figuras mais populares são exemplos prototípicos, pois indicam que a soma de dois vetores é sempre maior do que os vetores, ou que a soma é a diagonal maior do paralelogramo gerado pelos vetores dados. Quando descobri que alunos podem ter essa imagem a respeito do conceito de soma de vetores, utilizei, em uma turma minha de Álgebra Linear, esse conhecimento para produzir novas tarefas. Agora elaboro tarefas perguntando sobre como é possível obter uma soma de vetores cujo comprimento seja menor do que as duas parcelas, ou menor do que apenas uma das parcelas. A ideia é sempre promover a ampliação dos espaços de exemplos dos alunos.

Uma tarefa de pesquisa mais natural é simplesmente estudar os exemplos oferecidos por livros didáticos, verificar se eles trabalham com exemplos mais populares e se esses são prototípicos, de alguma forma. Uma tarefa desafiadora é o leitor verificar se os exemplos que vivencia em sala de aula, seja como professor, seja como aluno, são, em sua maioria, prototípicos.

3.4 Uma dinâmica ativa e colaborativa

Vamos falar de algumas experiências em sala de aula envolvendo geração diversificada de exemplos por alunos e como essas me levaram a praticar uma dinâmica didática muito interessante.

Com relação à geração de exemplos por alunos, aprendi com colegas pesquisadores que uma dinâmica frutífera é pedir aos alunos, já dispostos em sala em uma roda, para dar exemplos de um determinado tipo objeto matemático. Cada aluno fala um exemplo, e deve sempre ser diferente de todos os exemplos já falados. Uma possibilidade é pedir para alunos citarem números menores do que 10, digamos. A graça dessa pergunta é não especificar o conjunto universo. O tipo de resposta varia muito, de acordo com as turmas. Se for uma turma de alunos do ensino fundamental, provavelmente as respostas ficarão, inicialmente, em torno dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Talvez o zero seja um dos últimos exemplos citados, ou talvez seja uma daquelas respostas que envolvem a necessidade de atender às expectativas do professor e ocorrem na forma de pergunta, "o zero conta?", ou algo assim. Devido à restrição de opções numéricas, em algum momento alunos passam a pensar em outras classes numéricas. Aí, passam a falar números com casas decimais. Alguém pode citar alguma fração, mas a maioria fica nas representações decimais. Bom, estou falando de minhas experiências. Não é difícil ver algum aluno falando um número irracional, normalmente $\sqrt{2}$ ou π, claro. O mais curioso é que dificilmente encontro alunos citando números negativos. Quando eles descobrem essa possibilidade, definitivamente a brincadeira perde a graça. Mas, ela pode continuar.

Até onde experimentei, normalmente alunos não exploram bem as frações. Então, mudo a regra do jogo, peço por frações menores do que 10 e maiores do que zero. A sequência natural de respostas é de frações menores do que 1. Quando a possibilidade de produção infinita é evidente, eu estimulo os alunos a produzirem frações maiores do que 1, mas ainda menores do que 10. Logo a brincadeira volta a ficar sem graça.

O próximo passo é pedir por números irracionais positivos, primeiro menores do que 10, depois peço por irracionais entre 0 e 1. Tem um momento muito interessante nessa dinâmica de trabalho em sala. Principalmente nessa parte de gerar números irracionais, alguns alunos podem não saber responder. Não tem problema, a ideia aqui é que as respostas sejam relativamente rápidas. Se um aluno não souber responder, o professor pula logo para o próximo. O que é interessante nisso é que o aluno que não soube responder pode se inspirar em alguma resposta de outro colega. Por exemplo, um aluno não soube apresentar um irracional entre 0 e 1, mas depois viu o colega dar o exemplo $\pi - 3$. Inspirado nessa resposta, esse aluno pode pensar no exemplo $\sqrt{2} - 1$. Quando algum aluno descobre o exemplo $\sqrt{2}/2$ ou $\sqrt{2}/3$, a quantidade de exemplos vira infinito. O que podia ser uma dificuldade para toda a turma, acaba virando um assunto quase banal.

A brincadeira de produzir números pode ir longe, caso os alunos achem muito fácil produzir irracionais. O professor pode pedir por exemplos de irracionais formados só com zeros e uns, como $0,1010010001\ldots$ ou $0,0101101110\ldots$. Inclusive, se for uma turma de alunos do curso de Matemática, essa tarefa pode levar a questionamentos bem interessantes, como saber se é possível produzir infinitos irracionais só com zeros e uns e, nesse caso, se tal conjunto é enumerável ou não. Surpreendentemente a resposta é, tal conjunto é infinito e não enumerável.

Existem duas questões importantes nesse tipo de atividade. A primeira é que ela possibilita a avaliação dos alunos, é um tipo de avaliação integrada ao processo de ensino e aprendizagem. O professor pode avaliar como os alunos dominam o assunto que está sendo exemplificado, pois essa dinâmica é de fato reveladora, principalmente quando eles pegam ritmo e passam a falar espontaneamente. Um exemplo de como alunos podem revelar sobre como entendem a matéria aconteceu quando, uma vez, pedi por um número menor que 5 e o aluno esforçou-se para gerar um exemplo que fosse diferente dos produzidos por todos os colegas, ele apresentou o número $4,999\ldots$.

O outro aspecto é que esse tipo de atividade promove a aprendizagem dos alunos, de forma ativa e colaborativa. De fato, a aprendizagem nessa dinâmica caracteriza-se como uma metodologia ativa, pois possui como principal característica a inserção do aluno como agente principal responsável pela sua aprendizagem - o professor atua como mediador, estimulando a todo momento a participação do aluno no processo de ensino-aprendizagem. E caracteriza-se como metodologia colaborativa, pois alunos aprendem com os seus pares e contribuem para a aprendizagem deles. Conta-se com o envolvimento de todos em um processo interativo, e que tem funções cognitivas.

A partir desse tipo de experiência, passei a utilizar a estratégia de pedir por três exemplos diferentes de um mesmo tipo de objeto de uma maneira bem particular, visando justamente essa dinâmica ativa e colaborativa. Fiz isso uma vez quando iniciei uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral para alunos do curso de Economia. No primeiro dia de aula pedi aos alunos por três exemplos de função constante, um diferente do outro, todos desenhados no plano cartesiano. A dinâmica ativa e colaborativa ocorreu quando reproduzi cada tipo de desenho gerado pelos alunos no quadro negro e pedi para eles comentarem/analisarem cada exemplo, independentemente de quem fosse o autor. O interessante é que muitos desenhos fugiam da noção convencional de função constante, alguns fugiam bastante. Por exemplo, um dos casos mais desenhados era o de uma reta inclinada, saindo da origem e desenhada no primeiro quadrante. Nessa turma a discussão em torno de todos os exemplos foi muito rica e produtiva, discutimos sobre vários aspectos que envolvem o conceito de função. E eu passei a conhecer toda a turma logo no primeiro dia de aula. Mais informações sobre essa experiência podem ser encontradas em Moutinho (2020). Para o leitor ter uma ideia de como a atividade foi produtiva, os próprios alunos, quando perceberam o papel do domínio na definição de uma função, apresentaram em certo momento da discussão essa figura (um aluno foi no quadro negro e a desenhou) como exemplo de função constante.

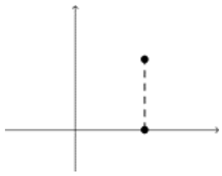

Figura 3.1: Exemplo de função constante criado por alunos em um contexto colaborativo.

Em outra oportunidade, com uma turma de licenciandos em Matemática, apliquei uma dinâmica semelhante, mas a respeito de funções crescentes. Nas discussões a partir dos exemplos produzidos por eles, partiu dos próprios alunos a necessidade de se saber mais precisamente o conceito definição de função crescente; eles queriam saber se funções com partes sendo constantes podiam ser consideradas como crescente. Nesse momento eu expliquei sobre as terminologias que existem sobre o assunto: função crescente, função estritamente crescente, função não decrescente etc.. São termos específicos, mas que muitas vezes não chamam a atenção do aluno para os detalhes que justificam essas diferenciações, são mais importantes principalmente na disciplina de Análise. Vejamos mais sobre os exemplos produzidos pelos alunos.

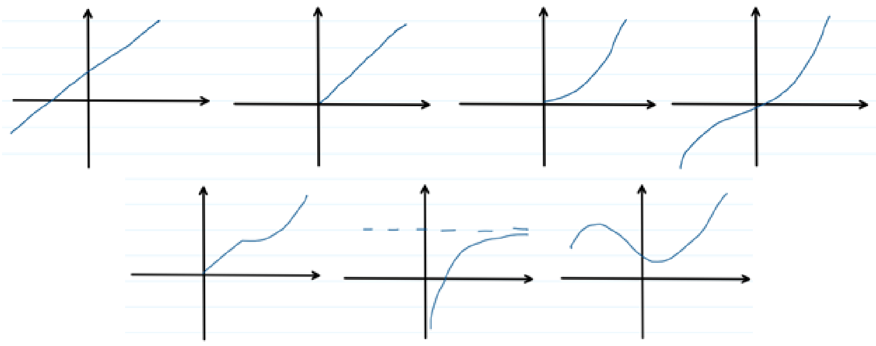

Figura 3.2: Exemplos de funções crescentes produzidos por alunos.

A Figura 3.2 traz a reprodução de alguns desenhos apresentados pelos alunos. Podemos ver que todos os exemplos produzidos eram dados por funções contínuas, e não existia uma preocupação com o domínio, que era sempre a reta completa ou a semirreta dos números positivos. Praticamente, todos os exemplos eram típicos de uma função conhecida, dada por uma única regra de formação (como ax, x^3, $\sqrt[3]{x}$, $\ln x$ etc.) Só um aluno incluiu assíntota, e outro aluno fez um desenho onde a função tinha um ponto onde não era diferenciável. Um aluno, na tentativa de produzir outro exemplo diferente, apresentou uma função que não era mais crescente; isso é muito comum.

Mas, a dinâmica nessa turma continuou, e eu lancei um desafio. Depois das discussões envolvendo os primeiros exemplos, pedi por mais um exemplo de função crescente, mas que fosse diferente de qualquer exemplo que pudesse ser feito pelos colegas de sala. Enquanto na primeira rodada de exemplos os alunos foram bem conservadores, com exemplos bem simples, nesta segunda etapa, surpreenderam. Vou reproduzir alguns comentários que alunos fizeram, depois que pedi para analisar a atividade - afinal, eles eram licenciandos e aproveitamos para discutir o que estava sendo feito em sala, os objetivos didáticos e matemáticos da atividade de exemplificação.

- "... depois que eu vi os exemplos dos meus colegas, meu cérebro começou a mostrar os tantos exemplos que se encaixavam na exigência que eu não me lembrei".
- "Quando tive que pensar em um exemplo diferente dos outros já dados, me senti mais reflexivo em torno do conceito e da quantidade de opções que podem se enquadrar na definição do conceito".
- "Quando foi necessário que eu fizesse uma função diferente da de todos, busquei em meu repertório de exemplos o mais difícil que tinha em mãos, utilizando-me de funções partidas e etc".

Vejamos alguns exemplos produzidos na segunda rodada.

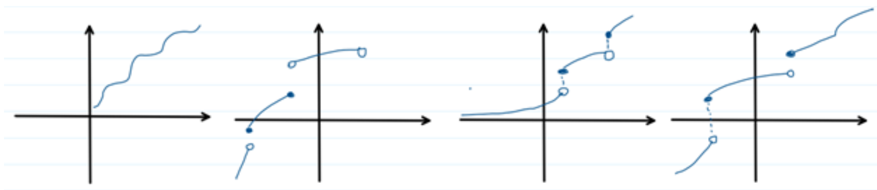

Figura 3.3: Exemplos considerando que nenhum outro colega da turma faria igual.

O leitor está convidado a analisar a riqueza de informações que agora os alunos passaram a considerar. Por exemplo, no quarto desenho, o aluno teve o cuidado de apresentar um caso onde a função com valores negativos e positivos não tem uma raiz. Em uma experiência recente com alunos do curso de Farmácia, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, após um trabalho de produção de exemplos de funções crescentes, mas sem a dinâmica de discussão, boa parte dos alunos defendeu que toda função crescente com um valor negativo e outro positivo teria uma raiz, todos os desenhos produzidos na turma eram prototípicos, no sentido de todos representarem funções contínuas.

Voltando à figura anterior, com os licenciandos em Matemática, podemos ver que agora os alunos se preocupam com as possíveis concavidades e até com a taxa de variação; só um exemplo era de função contínua. Podemos ver que o segundo exemplo possui um domínio nada prototípico. E o terceiro exemplo é uma função positiva, em particular limitada inferiormente. Definitivamente, os espaços de exemplos dos alunos tornaram-se mais próximos de um espaço de exemplos convencionais para funções crescentes.

Caro leitor, só posso dizer que, como professor, tornei-me fã dessa dinâmica de aula baseada na geração de exemplos, principalmente por funcionar como uma dinâmica ativa e colaborativa. Além do mais, o esforço no planejamento de aulas assim é relativamente simples. Inclusive, essa é muito boa para seguir as orientações de Vinner (2002) de desenvolver o conceito imagem antes, e estabelecer o conceito definição no final de um processo.

Basicamente a ideia é começar pedindo, simplesmente, por três exemplos diferentes de um mesmo objeto, algo relacionado com o que se quer formalizar. Exemplos inusitados aparecerão e exemplos prototípicos serão predominantes, um ótimo material de debate com os alunos! Uma das vantagens de se adiar o conceito definição é que o aluno pode falar o que quiser sem medo de ser julgado, de falar algo errado, pois ainda não existe o certo. Como o conceito não foi definido, toda imagem é aceitável, mas passível de ser discutida. Um exemplo dessa situação é quando meus alunos pediram pela formalização do conceito de função crescente para saberem se alguns exemplos eram aceitáveis ou não. Uma vez que a ideia foi desenvolvida, podemos estender o pedido por novos exemplos, um exemplo que seja diferente de todos da turma, ou de qualquer um no mundo todo. Dessa forma, o aluno passa a ser mais cuidadoso com os exemplos criados e a procurar por exemplos não prototípicos.

Mais uma curiosidade: em tempos de ensino remoto precisei substituir a dinâmica de organizar os alunos em roda, na sala de aula. Os encontros com alunos por videoconferência vem funcionando bem também. Dependendo do conteúdo, peço para alunos apresentarem exemplos, falando ou escrevendo na área de mensagens da chamada, ou peço para os alunos mostrarem suas respostas, quando é desenho, pela câmera ou usando recurso de apresentação. Os alunos conseguem fazer isso de forma dinâmica.

3.5 Exemplificação com recursos da Geometria Dinâmica

Costumo usar bastante o GeoGebra como ferramenta didática, principalmente no ensino remoto, inclusive no contexto de geração de exemplos. Inspirado em orientações apresentadas por Arcavi e Hadas (2000), procuro desenvolver cenários que permitam trabalhar problemas não rotineiros, quando apresento ao aluno algum problema e peço que ele faça previsões explícitas e ponderadas. A ideia é que o aluno recorra à construção interativa para visualizar as informações do problema. A capacidade de poder transformar os objetos em tempo real, e de poder visualizá-los, possibilita a descoberta de relações que se destacam ao permanecerem invariantes por tais transformações. Essa facilidade na experimentação de diversos exemplos viabiliza, assim, a formação de conjecturas, ou também pode ajudar a produzir um exemplo que eventualmente refute determinada conjectura.

A resposta rápida que essas animações eletrônicas oferecem funciona como um *feedback* imediato para as ações de testagem realizadas pelo aluno e tem o potencial de promover surpresas com relação às previsões feitas para a situação-problema considerada. A ideia é que resultados inesperados despertem no aluno o interesse em um novo exame de seus conhecimentos e suposições. Vejamos algumas situações que vivenciei.

Em diferentes situações já pedi a participantes para se posicionarem com relação aos seguintes problemas.

Questão 1: Em um quadrilátero as diagonais sempre se interceptam?

Questão 2: Um polígono gerado por quatro vértices tem quatro lados?

Já trabalhei essas questões com crianças, jovens, pedagogos, licenciandos e licenciados em Matemática, e a quase totalidade das respostas, para as duas questões, é sim. Quando planejo essas experiências, costumo pedir para os participantes realizarem a estratégia de produção de três exemplos diferentes de quadriláteros. Se o público não é de licenciandos ou licenciados em Matemática, os exemplos de modo geral ficam entre as seguintes figuras.

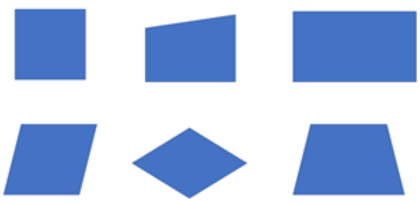

Figura 3.4: Espaço de exemplos de quadriláteros de alunos em geral.

Com licenciandos e licenciados em Matemáticas já é possível encontrar casos de produção de figuras não prototípicas, no sentido que vou descrever em instantes.

O trabalho com as duas questões ainda não acabou, nem em minhas experiências, nem no presente texto. O próximo passo é pedir para os participantes visitarem uma animação muito simples que construí e que permite a produção de quadriláteros de toda forma (*link* para a construção: https://www.geogebra.org/m/hgthn8ws).

É imediato ver o resultado do uso desse recurso tecnológico. Participantes passam a considerar figuras completamente diferentes daquelas imaginadas inicialmente, e a primeira surpresa revelada por todos é a descoberta de contraexemplos para a conjectura de que as diagonais de um quadrilátero sempre se interceptam.

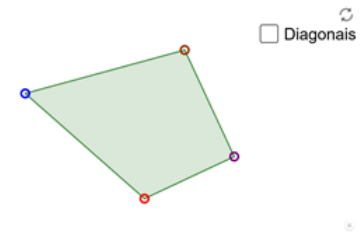

Figura 3.5: Construção no GeoGebra, Espaço de exemplos de quadriláteros.

O leitor pode ver alguns dos exemplos produzidos a partir da animação eletrônica na Figura 3.6. O primeiro exemplo deixa claro que existem quadriláteros cujas diagonais não se interceptam. Agora, os outros três exemplos já são mais problemáticos e mais ricos para o trabalho do professor. A Questão 2 deve parecer, à primeira vista, bastante simples (aposto que o leitor pensou que a resposta para ela era "sim").

Mas, quando vemos os diversos exemplos de figuras geradas por quatro pontos, fica claro que existe um problema bem maior para ser discutido. Afinal, o que é um quadrilátero? Qual é, mais precisamente, o conceito definição de quadrilátero? Não é meu objetivo discutir aqui sobre qual seria a melhor definição de quadrilátero, mas fica a ilustração de como a geração de exemplos pode motivar a revisão de conceitos. Ah, é claro que a resposta para a Questão 2 vai depender do conceito definição de quadrilátero estabelecido.

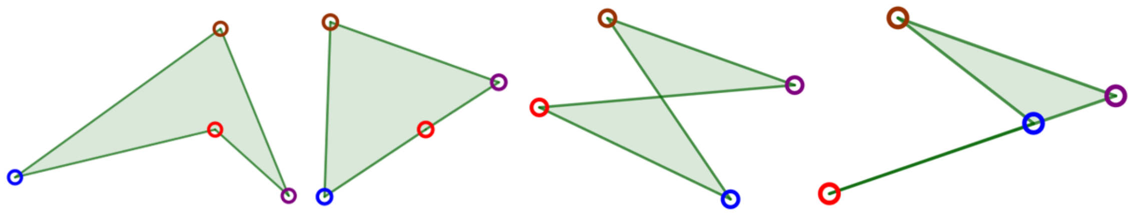

Figura 3.6: Exemplos não prototípicos de figuras geradas por quatro vértices.

Vamos terminar esta seção com mais um exemplo de construção. A questão dos exemplos prototípicos é realmente séria, deveria ser muito bem considerada pelas autoridades (professor e livro didático). Pensando sobre isso, com relação aos meus alunos de Cálculo Diferencial e Integral, fiz uma animação que permite produzir diferentes exemplos de funções definidas em um intervalo, fechado ou aberto, e permite representar uma reta tangente ao gráfico da função em um ponto variável. A Figura 3.7 reproduz a tela inicial da animação (*link*: https://www.geogebra.org/m/ncHDfwqM).

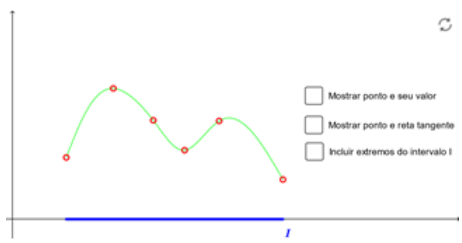

Figura 3.7: Construção no GeoGebra, Espaço de exemplos de funções deriváveis.

Esta animação é acompanhada de vários pedidos por exemplos com restrição. Um deles é por um exemplo de função com ponto de extremo que não seja ponto crítico. Na Figura 3.8 temos um exemplo prototípico de função com ponto de extremo e outro não prototípico produzidos na animação. Em geral, alunos têm dificuldade de produzir o segundo, pois costumam acreditar que todo ponto de extremo é um ponto crítico (o que não é verdade, a segunda imagem é um contraexemplo para essa ideia).

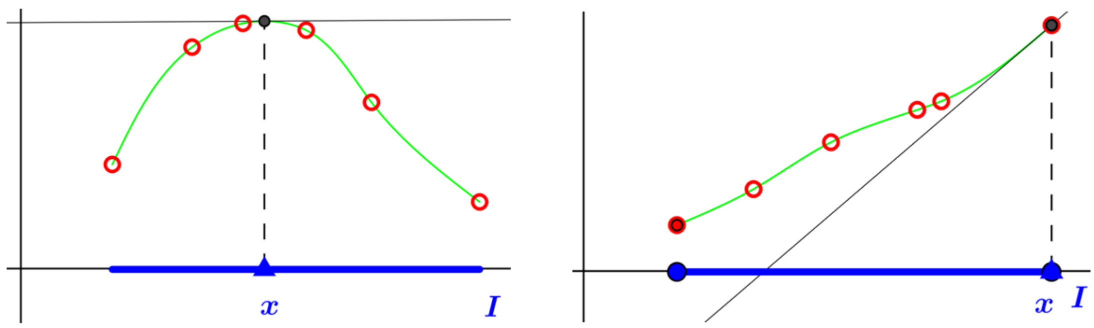

Figura 3.8: Exemplos de funções deriváveis produzidos.

3.6 Considerações didáticas finais

Provavelmente o assunto mais explorado no presente texto seja a avaliação integrada ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática, e talvez meu texto não tenha deixado isso tão claro. Assim, cabe ressaltar esse aspecto agora. O leitor pode conferir que meus relatos de experiência ilustram bem como a geração de exemplos pelos próprios alunos, de fato, favorece a avaliação do professor. Essa avaliação durante as aulas funciona como um *feedback* imediato para os alunos, principalmente quando os exemplos são discutidos com os alunos, e como parâmetro para o professor planejar as próximas atividades didáticas, até na composição dos espaços de exemplos convencionais.

Vimos como a exemplificação pode influenciar na formação de conceitos matemáticos. Os exemplos instrucionais devem ser cuidadosamente escolhidos pela autoridade, pois são vários critérios que devem ser considerados para que um exemplo seja de fato exemplar. O destaque aqui são os exemplos prototípicos, esses têm enorme influência na formação de conceitos matemáticos, influência negativa.

A geração de exemplos por alunos, segundo resultados obtidos em pesquisas, e relatos de minhas experiências, mostra-se uma poderosa ferramenta didática. Funciona como recurso de ensino, de aprendizagem e de avaliação.

É muito interessante notar como as estratégias de elaboração de atividades didáticas que pedem por geração de exemplos são bastante simples. E o potencial didático dessas atividades aumenta muito, quando utilizadas em uma dinâmica ativa e colaborativa. Por outro lado, o professor, ciente das diferentes funções dos exemplos instrucionais e da importância de o aluno estar familiarizado com os espaços de exemplos convencionais, precisa explorar atividades que promovam a integração dos exemplos instrucionais nos espaços de exemplos de seus alunos. As discussões a respeito da raiz quadrada de 2 como exemplo instrucional exemplar para os números reais pode ilustrar bem como um professor pode pensar diferentes atividades para um mesmo exemplo, dependendo de sua intenção didática e matemática.

Claramente, a exemplificação matemática apresenta um papel de destaque no desenvolvimento de conhecimentos matemáticos e no conhecimento profissional específico de professores que ensinam Matemática. Em particular, são muitas perspectivas que podem envolver o uso dessa ferramenta. Seria interessante adotar algum referencial teórico que ajudasse a organizar todos esses tipos de conhecimentos. Terminamos, então, sugerindo para o leitor um referencial que pode ajudar a desenvolver os conhecimentos acerca da exemplificação matemática apresentados aqui. É o conceito de conhecimento especializado do professor de Matemática estabelecida por Carrillo, Climent, Contreras e Muñoz-Catalán (2013).

Referências Bibliográficas

[1] AABOE, A. *Episódios da história antiga da matemática.* Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

[2] ARCAVI, A.; HADAS, N. ”Computer mediated learning: An example of an approach”. *International journal of computers for mathematical learning*, v. 5, n° 1, p. 25-45, 2000.

[3] BALL, D. L. ”The Subject Matter Preparation of Prospective Mathematics Teachers: Challenging the Myths”. *In*: HOUSTON, W. R. (Ed.). *Handbook of research on teacher education.* New York: Macmillan, 1990. p. 437-449.

[4] BALL, D.; CHARALAMBOUS, Y. C.; LEWIS, J.; THAMES, M.; BASS, H.; COLE, Y.; KWON, M.; KIM, Y. ”Mathematical Knowledge for teaching: Focusing on the work teaching and its demands”. *In: Proceedings of 33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education.* 2009. p. 133-139.

[5] BILLS, L.; DREYFUS, T.; MASON, J.; TSAMIR, P.; WATSON, A.; ZASLAVSKY, O. ”Exemplification in Mathematics education”. *In*: NOVOTNA, J. (Ed.). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Prague, Czech Republic: PME, 2006.

[6] CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MUÑOZ-CATALÁN, M. D. C.. ”Determining specialised knowledge for mathematics teaching”. *In*: *Proceedings of the CERME.* 2013. p. 2985-2994.

[7] D’AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática.* Papirus Editora, 1996.

[8] CASTRO, C. M. de. *Os Múltiplos Papéis dos Exemplos no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática.* Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática e Estatística, Niterói, 2021.

[9] FIGUEIREDO, C. A.; CONTRERAS, L. C.; BLANCO, L. J. ”A transparência e a variação dos exemplos utilizados na aprendizagem de conceitos matemáticos”. *Zetetike*, v. 17, n° 2, 2009.

[10] FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. de C. C. de. ”O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas?”. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 27, p. 917-938, 2013.

[11] GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S.; GIRALDO, V.; SOUTO, A. M. ”The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks”. *Research in Mathematics Education*, v. 15, n° 3, p. 230-248, 2013.

[12] GRAVINA, M. A. ”Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria”. *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, v. 1, p. 1-13, 1996.

[13] HERSHKOWITZ, R. ”Aspectos psicológicos da aprendizagem da geometria”. *Boletim GEPEM*, v. 32, p. 3-31, 1994.

[14] KALEFF, A. M. M. R. *Tópicos Geometria: A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria.* Rio de Janeiro: UFF/UAB/CEDERJ, 2008.

[15] MOREIRA, P. C.; FERREIRA, A. C. O lugar da matemática na licenciatura em matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 27, p. 981-1005, 2013.

[16] MOUTINHO, I. *Evitando falar que o aluno errou - uma experiência durante uma revisão sobre funções.* 2020. Disponível em: <https://www.laboratoriosustentaveldematematica.com/2020/06/evitando-falar-que-o-aluno-errou-uma.html>. Acesso em: maio, 2021.

[17] RISSLAND-MICHENER, E. ”Understanding Mathematics”. *Cognitive Science*, n 2, p. 361-383, 1978.

[18] SFARD, A. ”On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin”. *Educational studies in mathematics*, v. 22, n° 1, p. 1-36, 1991.

[19] SINCLAIR, N.; WATSON, A.; ZAZKIS, R.; MASON, J.. ”The structuring of personal example spaces”. *The Journal of Mathematical Behavior*, v. 30, n° 4, p. 291-303, 2011.

[20] SIROTIC, N.; ZAZKIS, R. ”Irrational numbers on the number line? Where are they?”. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 38, n° 4, p. 477-488, 2007.

[21] SHULMAN, L S. ”Those who understand: Knowledge growth in teaching”. *Educational researcher*, v. 15, n° 2, p. 4-14, 1986.

[22] SHULMAN, L. ”Knowledge and teaching: Foundations of the new reform”. *Harvard educational review*, v. 57, n° 1, p. 1-23, 1987.

[23] TALL, D.; VINNER, S. ”Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity”. *Educational studies in mathematics*, v. 12, n° 2, p. 151-169, 1981.

[24] VINNER, S. ”The role of definitions in the teaching and learning of mathematics”. *In*: *Advanced mathematical thinking. Springer*, Dordrecht, 2002. p. 65-81.

[25] WATSON, A.; MASON, J. *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples.* Routledge, 2006.

[26] ZASLAVSKY, O. ”The explanatory power of examples in mathematics: Challenges for teaching”. *In*: *Instructional explanations in the disciplines.* Springer, Boston, MA, 2010. p. 107-128.

[27] ZAZKIS, R.; LEIKIN, R. ”Generating examples: From pedagogical tool to a research tool”. *For the learning of mathematics*, v. 27, n° 2, p. 15-21, 2007.

[28] ZAZKIS, R.; SIROTIC, N. ”Making Sense of Irrational Numbers: Focusing on Representation”. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2004.

[29] ZODIK, I.; ZASLAVSKY, O. ”Is a visual example in geometry always helpful”. *In*: *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* 2007. p. 265-272.

III SIMPÓSIO DA FORMAÇÃO
DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA
DA REGIÃO NORTE

Realização e Organização

ANPMat
Associação Nacional dos Professores
de Matemática na Educação Básica

ISBN: 978-65-88013-15-1