2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Centro-Oeste

O ÁBACO VIRTUAL DOS NÚMEROS INTEIROS:

UM RECURSO PARA O ENSINO PRESENCIAL E REMOTO

Franciele M. Meinerz
Luísa R. Doering
Cydara C. Ripoll

ANPMat
Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

O ÁBACO VIRTUAL DOS NÚMEROS INTEIROS:

UM RECURSO PARA O ENSINO PRESENCIAL E REMOTO

O ábaco virtual dos números inteiros: uma proposta para o ensino presencial e remoto

Projeto gráfico e capa: Gabriel Brasil Nepomuceno
Diagramação e Assessoria Editorial: Yunelsy Nápoles Alvarez

ISBN: 978-65-88013-21-2

Distribuição
Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
http://www.anpmat.org.br / email: editoraanpmat@anpmat.org.br

2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Centro-Oeste

O ÁBACO VIRTUAL DOS NÚMEROS INTEIROS: UM RECURSO PARA O ENSINO PRESENCIAL E REMOTO

Franciele M. Meinerz

Luísa R. Doering

Cydara C. Ripoll

1ª edição

2022

Campo Grande, MS

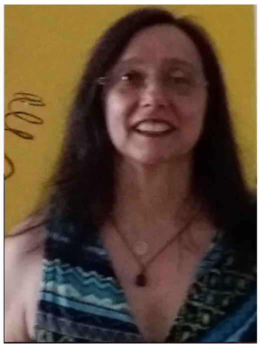
ANPMat

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

Sobre as autoras

Franciele Marciane Meinerz
francielemeinerz@hotmail.com

Nasceu em Estrela, RS; possui graduação em Licenciatura em Matemática (2015) e Mestrado em Ensino de Matemática (2020) pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Atualmente atua como professora de Matemática na Prefeitura Municipal de Porto Alegre (EMEF Heitor Villa Lobos) e no Colégio Província de São Pedro. Tem interesse em pesquisas que focam no desenvolvimento do pensamento matemático na Escola.



Luisa Rodríguez Doering
ldoering@mat.ufrgs.br

Nasceu em Porto Alegre, RS; possui graduação em Licenciatura em Matemática (1985) e Bacharelado em Matemática (1986) pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), onde também realizou o seu mestrado em Matemática (1990). Doutorou-se em Matemática por RUTGERS: The State University of New Jersey, EUA em 1997. Leciona, desde 1989, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul e participa do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática desde 2009. Suas pesquisas focam, em geral, no desenvolvimento do pensamento matemático na Escola.

Cydara Cavedon Ripoll
cydara@mat.ufrgs.br

Nasceu em Porto Alegre, RS; tem Licenciatura em Matemática (1977) e Mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (1981), Doutorado em Matemática pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (1991) e pós-doutorado na Universidade de Heidelberg (Alemanha) (1992). É professora titular aposentada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Tem experiência nas áreas de Álgebra Comutativa e de Teoria dos Números e há 15 anos dedica-se ao ensino de Matemática, atuando no Pós-Graduação em Ensino de Matemática como docente convidada, sendo autora de livros relacionados ao ensino de matemática.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Prefácio

Neste *e-book* é apresentada a ferramenta Ábaco Virtual dos Números Inteiros (disponível em <www.mundojogos.com.br/abaco>), viável para aulas remotas e com a qual é possível abordar as operações de adição, subtração e multiplicação de números inteiros. Ela tem potencial para desafiar o estudante a refletir, a criar conjecturas, a descobrir as chamadas regras de sinais, e a deduzi-las, aspecto que torna essa ferramenta ímpar.

Essa ferramenta mostrou-se muito eficiente durante o ensino remoto, nos anos de 2020 e 2021, o que motivou a proposta do minicurso intitulado "O Ábaco Virtual dos Números Inteiros: uma proposta para o ensino remoto" e, posteriormente, motivou o presente *e-book*.

Além de apresentar várias potencialidades para o uso do Ábaco Virtual em sala de aula, tem-se aqui o objetivo de enaltecer o ábaco como uma ferramenta que pode ressaltar aspectos elementares, não só da construção dos números inteiros bem como de suas propriedades. Também pretende-se destacar a ferramenta como um elo entre a matemática abordada na formação inicial do professor (curso de Licenciatura) e a matemática ensinada na escola.

Agradecemos à ANPMat pela oportunidade e apoio dados à escrita deste trabalho e à oferta do minicurso "O Ábaco Virtual dos Números Inteiros: uma proposta para o ensino remoto" no 2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Centro-Oeste em Novembro de 2021.

Agradecemos ao Alexandre Gustavo Wermann por auxiliar na programação da ferramenta virtual utilizada neste trabalho e à Érica Machado da Silva por gentilmente criar a animação que transforma a reta numérica dos inteiros em um ábaco dos inteiros.

Porto Alegre, abril de 2022

As autoras

Introdução

Ensinar números inteiros e suas operações no Ensino Fundamental é um desafio para todo o professor (SILVA, 2016). De fato, algumas complexidades surgem ao ampliarmos o universo numérico dos naturais para os inteiros. Por exemplo, para introduzir-se o conceito de número negativo passa-se pela ampliação do próprio conceito de número. Até então, os números expressavam quantidades, e estavam relacionados às abstrações das noções concretas de contagem ou de medida. Agora os números deixam de expressar apenas uma quantidade (resultante de uma comparação entre grandezas, por meio de contagem ou de medida), e passam a expressar uma quantidade munida de uma orientação. Por sua vez, o zero passa a significar, além de "ausência de quantidade" também um "referencial". (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2016, p. 3-4)

Outra complexidade inevitável que surge com a ampliação para o universo numérico dos números inteiros e pouco ressaltada na Escola é o fato de que, enquanto entre números naturais o sinal "$-$" denota apenas a operação de subtração, em $\mathbb{Z}$ o sinal "$-$" tem 3 significados[1]: ele pode indicar uma quantidade negativa, como em -8, pode indicar a operação de subtração, como em $3 - 5$ ou ainda indicar "o oposto de", como o primeiro "$-$" em $-(-3)$.

No que diz respeito ao ensino e aprendizagem dos números inteiros, Dirks (1984) aponta que resultados fáceis de serem enunciados – tais como subtrair um número negativo é o mesmo que somar o seu oposto, bem como o produto de dois números negativos é um número positivo – impõem dificuldades ao estudante e desafios ao professor (DIRKS, 1984, p. 50)

O ábaco é mencionado em documentos oficiais como um possível recurso didático para a sala de aula. De fato, na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é ressaltado que "recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas." (BRASIL, 2018, p.276). Já nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o ábaco dos inteiros é mencionado nas orientações para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental (que hoje correspondem ao segundo segmento do Ensino Fundamental), apontando-se lá que a ferramenta/recurso "consiste em duas varetas fixadas num bloco, nas quais se indica a que vai receber as quantidades positivas e a que vai receber as quantidades negativas, utilizando argolas de cores diferentes para marcar pontos. (...) ao manipular as argolas nas varetas os alunos poderão construir regras para o cálculo com números inteiros" (BRASIL, 1998, p. 99).

Dirks ressalta que muitos livros didáticos usam a reta numérica para ensinar as operações com inteiros, e que alguns autores fazem uso de argumentos formais envolvendo as

[1] Na construção formal dos números inteiros (Ferreira (2013), por exemplo) faz-se uso de apenas 2 significados para o sinal "-" : oposto e subtração. Na escola, é inevitável o significado que denominamos "nome do número", como em -8, porque a busca por registrar faltas ou perdas é o ponto de partida para introduzir números inteiros na escola.

propriedades associativa, comutativa e distributiva enquanto outros completam padrões para sugerir as regras de cálculo, como em

$$
\begin{aligned}
&(+3)\times(+4) = (+12)\\
&(+2)\times(+4) = (+8)\\
&(+1)\times(+4) = (+4)\\
&0\times(+4) = 0\\
&(-1)\times(+4) = ?\\
&(-2)\times(+4) = \ ?, \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

Para o autor, todas essas estratégias são bastante abstratas, corroborando o pensamento de Galbraith e Vaughan que sugerem que a demanda de pensamento formal requerida pelos cálculos com números inteiros excede o nível piagetiano alcançado pela maioria dos estudantes que se deparam com esse tópico na escola. Bartolini encontrou em uma representação pictórica do ábaco uma forma de ensinar adição e subtração de inteiros. (DIRKS, 1984, p.50)

No mesmo trabalho, Dirks faz uso do ábaco para introduzir a aritmética com números inteiros, considerando-o efetivo para estudantes de oitavo ano, pois esses puderam realizar operações concretas no ábaco, dando significado a afirmações aritméticas. Ressalta ainda sua convicção de que o ábaco é de implementação direta e simples, no sentido de não requerer instruções preliminares como o material Cuisenaire. (DIRKS, 1984, p.50)

Apresentamos neste trabalho o Ábaco Virtual dos Números Inteiros, uma outra forma de representação do universo numérico $\mathbb{Z}$ criado pela primeira autora em versão virtual e já implementado, com êxito, em suas turmas de sexto ano em 2016. Uma cópia física do mesmo foi utilizada nas suas salas de aula em 2017, 2018 e 2019. No ano de 2020, por conta da pandemia do Covid-19, o Ábaco Virtual dos Números Inteiros revelou-se um recurso didático muito útil para as aulas remotas. São incluídas também neste trabalho sugestões de atividades com tal ferramenta apoiadas nas ideias de Raymond Duval e já implementadas com sucesso em sala de aula pela primeira autora no ensino presencial e remoto. Seus resultados confirmam a crença das autoras de que a representação oportunizada pelo Objeto Digital de Aprendizagem Ábaco Virtual dos Números Inteiros permite a construção do conhecimento sobre esses números, auxiliando os estudantes na compreensão dos processos envolvidos nas operações com números inteiros.

Capítulo 1

Referencial teórico

Este texto apoia-se em dois autores por razões diferentes: em Duval e sua Teoria de Representações Semióticas, porque a ferramenta que aqui apresentamos é uma representação e em Felix Klein, por ter este apontado para duas rupturas na formação inicial de um professor de Matemática que são ainda atuais, sendo uma delas tratada aqui, no contexto dos números inteiros. Apresentamos neste capítulo brevemente a Teoria de Representações Semióticas de Duval e a dupla descontinuidade mencionada por Felix Klein.

1.1 A Teoria de Representações Semióticas de Duval

Raymond Duval ressalta que "os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, diferentemente dos objetos comumente ditos 'reais' ou 'físicos'" (DUVAL, 2012, p. 268). O autor defende que é preciso, portanto, trabalhar com diferentes representações para um mesmo objeto matemático (figuras, gráficos, escritas simbólicas, língua natural, etc) as quais ele denomina de representações semióticas. A compreensão do objeto matemático pelo estudante é alcançada quando o mesmo realiza conversões entre diferentes representações e realiza seu tratamento em cada registro.

Duval (2012, p. 271) ressalta também que os registros de representação devem permitir três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose (apreensão ou produção de uma representação semiótica): i) a formação de uma representação identificável, com regras bem estabelecidas e que possa ser entendida facilmente pelo sujeito; ii) o tratamento de uma representação no mesmo registro onde ela foi formada e; iii) a transformação de um registro em outro, de maneira parcial ou total, a qual ele denomina conversão. Segundo Duval (2012, p. 279), a conversão independe do tratamento, mas a mudança de registro pode ser bastante útil, para permitir a realização do tratamento de maneira mais econômica e potencializada em algumas situações. Nesse sentido, a representação que aqui exploramos, o Ábaco Virtual dos Números Inteiros, atende os três quesitos mencionados:

- é uma representação para os números inteiros com regras bem estabelecidas, derivadas e em conexão com o conhecimento prévio do estudante sobre números inteiros;
- permite o tratamento das operações de adição, subtração e multiplicação nesta representação;
- admite conversões tanto para a representação dos números inteiros na reta numérica como para as expressões aritméticas.

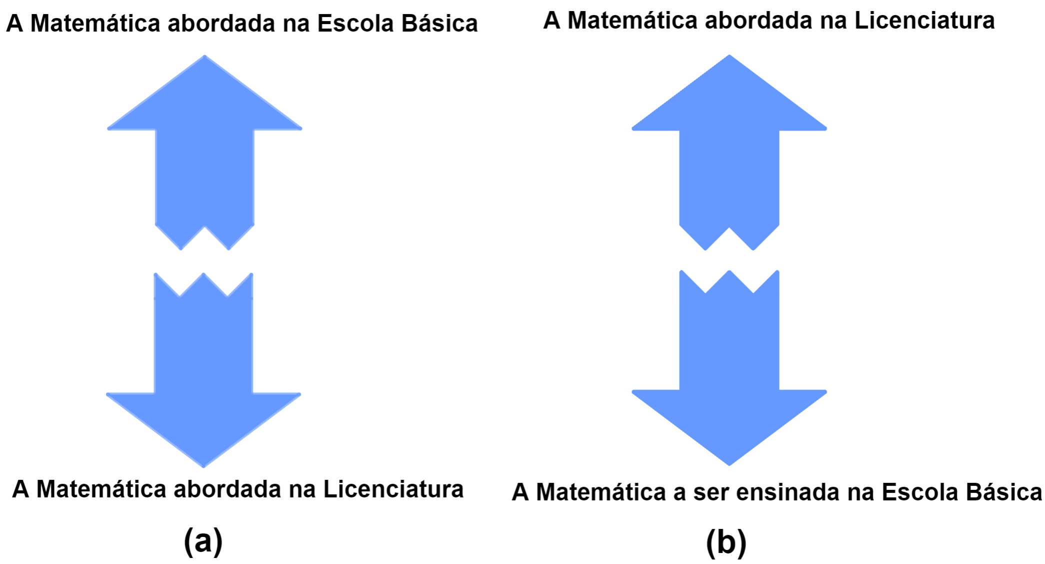
De fato, enquanto os alunos operam com o ábaco, estão realizando o tratamento nessa representação, além de já terem feito a conversão do registro numérico para o registro apresentado no ábaco.

1.2 A dupla descontinuidade apontada por Felix Klein

Em 1908, Felix Klein apontou para duas descontinuidades existentes, naquela época, na formação de um professor de matemática. A primeira delas refere-se à conexão entre a matemática que o licenciando aprendeu na escola (Figura 1(a)) e a que ele aprende em sua formação inicial (Licenciatura); a segunda diz respeito à conexão entre a matemática que o professor aborda na sua sala de aula e aquela que ele aprendeu na sua formação inicial (Figura 1(b)):

> O jovem universitário viu-se, desde o início, confrontado com questões que não sugerem, em nada, aquelas abordadas na escola. (...) Quando, após terminar sua formação, tornou-se professor, de repente viu-se obrigado a ensinar a matemática elementar à velha e tradicional maneira; e, uma vez que ele mal era capaz de discernir, sem ajuda, quaisquer conexões entre a tarefa de ensinar e a matemática universitária, ele logo aderiu ao método de ensino consagrado pelo tempo, (...) (KLEIN, 1932, p. 1, tradução das autoras)

Figura 1: As duas descontinuidades apontadas por Félix Klein



Fonte: Ripoll e Doering (2022)

Felix Klein teve uma grande importância dentro da Matemática, preocupando-se também com o seu ensino e com a inserção de novos conteúdos dentro dos currículos escolares.

> No *13th International Congress on Mathematical Education* (ICME-13) ocorrido em 2016 em Hamburgo, a "Tarde Temática" intitulada "O Legado de Felix Klein" forneceu uma visão geral das ideias de Felix Klein. (...) discutiu-se o significado, a importância e o legado das ideias de Klein hoje e no futuro, em um contexto internacional, global. (...) Felix Klein foi um cientista sensível que reconheceu problemas, pensou de forma visionária, e agiu de forma eficaz. (...) muitas ideias de Felix Klein podem ser interpretadas no contexto da situação atual (...) Nesse espírito, velhas ideias permanecem jovens, mas é preciso competência, pessoas comprometidas e assertivas para dar vida a essas ideias. (WEIGAND *et al.*, 2019, p.2-3, tradução das autoras)

A dupla descontinuidade apontada por Klein é apenas um de seus legados e tem sido de particular preocupação das autoras deste *e-book*. Por exemplo, no âmbito da Divisão Euclidiana, a dupla descontinuidade foi constatada entre os participantes da oficina relatada em (CARRER; DOERING; RIPOLL, 2019), bem como no âmbito de Números Irracionais em (MATHIAS; DOERING; RIPOLL, 2020). No Capítulo 7 exploramos a conexão entre a construção formal dos inteiros e a construção do universo dos números inteiros na escola, utilizando o Ábaco Virtual dos Números Inteiros e ressaltando a motivação para as definições apresentadas na construção formal.

Capítulo 2

Apresentação da ferramenta Ábaco Virtual dos Números Inteiros

2.1 Pré-Requisitos

Historicamente, "os números negativos foram concebidos a partir da incorporação de uma ideia de falta na noção de contagem, que corresponde à necessidade de se registrar ganhos e perdas em situações em que se precisa tanto aumentar como diminuir quantidades indefinidamente." (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2016, p. XXXIV). Na Escola, a motivação histórica de registrar faltas ou perdas é usualmente utilizada como estratégia para introduzir números inteiros. Essa estratégia permite atribuir uma noção de quantidade aos números negativos e explorar a ordem dos números inteiros, enfatizando também o novo papel do zero que, além de ausência de quantidade, agora serve também de referencial. Assim, antes de iniciar o estudo das operações no conjunto dos números inteiros, é importante que sejam abordados em sala de aula os conceitos básicos do conjunto $\mathbb{Z}$ tais como: o zero como referencial, os conceitos de oposto (em relação ao referencial), antecessor, sucessor e valor absoluto (ou módulo) de um número inteiro, a relação de ordem nos inteiros e os inteiros na reta numérica.Também é importante reconhecer, da construção do conjunto $\mathbb{Z}$, que os números inteiros positivos são os números naturais que os estudantes já conheciam.

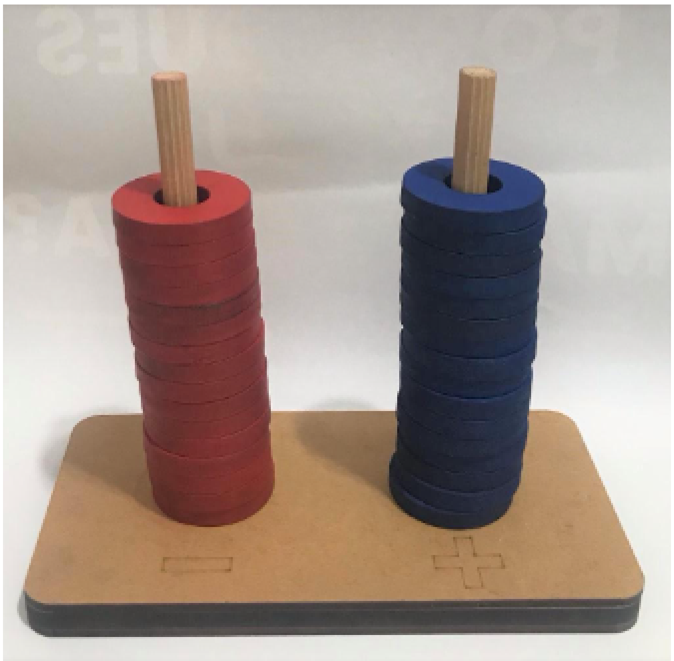
A partir da ideia de ganhos e perdas, é importante que os estudantes reconheçam que juntar um ganho e uma perda de igual quantidade resulta em zero, escrita simbolicamente na forma de adição, por exemplo $(+1) + (-1) = 0$, resultado que "pode ser compreendido pelos alunos a partir de exemplos simples, envolvendo as tradicionais situações que ilustram os números negativos". (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2016, p. 88). Essa propriedade é fundamental para a compreensão da utilidade dos botões Acrescentar Zero e Retirar Zero do Ábaco Virtual (ver a seguir).

2.2 O Ábaco Virtual dos Inteiros

O Ábaco Virtual dos Números Inteiros (disponível em <www.mundojogos.com.br/abaco>) teve sua primeira versão criada em 2016 pela primeira autora, inspirada no ábaco físico dos inteiros (Figura 2), que, de acordo com Coelho (2005), foi referenciado pela primeira vez por Bartolini (1976). O Ábaco Virtual assemelha-se ao ábaco físico dos inteiros pelo fato de fazer uso de argolas em hastes, e diferencia-se pelo acréscimo de seis botões, que traduzem para o Ábaco Virtual as ações realizadas no manuseio do ábaco físico dos inteiros[1] (Figura 3).

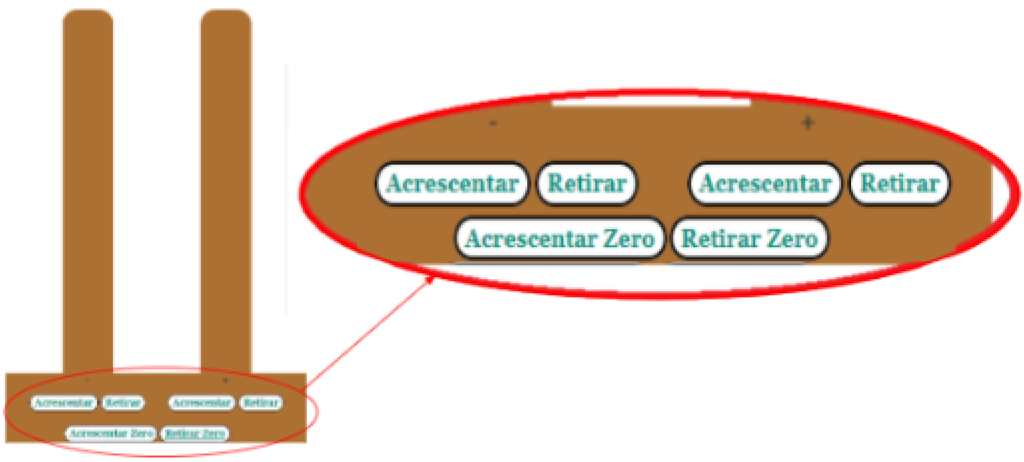
[1] A segunda autora está construindo com a mestranda Vanessa Pacheco uma ferramenta inspirada no ábaco físico dos inteiros para deficientes visuais.

Figura 2: Ábaco físico dos inteiros



Fonte: Acervo das autoras.

Figura 3: Ábaco virtual dos inteiros



Fonte: Acervo das autoras.

O Ábaco Virtual foi criado com o objetivo de proporcionar aos estudantes uma ferramenta que auxiliasse no estudo das operações no conjunto dos números inteiros. Essa ferramenta mostrou-se muito eficiente também durante o ensino remoto, nos anos de 2020 e 2021, o que motivou a proposta do minicurso intitulado "O Ábaco Virtual dos Números Inteiros: uma proposta para o ensino remoto", no 2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Centro-Oeste (<https://anpmat.org.br/simposio-centro-oeste-2/>), e, posteriormente, do presente *e-book*.

Apresentamos aqui a versão atualizada do Ábaco Virtual, que surgiu ao longo da produção deste *e-book*.

O Ábaco Virtual dos Números Inteiros (Figura 3) também é formado por duas hastes verticais paralelas, por argolas nas cores vermelho e azul[2] e distingue-se da ferramenta concreta pela inclusão de botões "Acrescentar", "Retirar", "Acrescentar Zero" e "Retirar Zero". Como na versão concreta, convenciona-se que as argolas vermelhas representam unidades negativas e as azuis unidades positivas, e que a haste da esquerda é utilizada para inserir as unidades negativas, enquanto a haste da direita é utilizada para inserir as unidades positivas. Por isso, vamos, simplificadamente, chamá-las "haste negativa" e "haste positiva", respectivamente[3]

Os botões Acrescentar e Retirar, abaixo de cada haste, são utilizados para acrescentar ou retirar argolas na ou da respectiva haste, e traduzem para a versão virtual as ações que são básicas no manuseio da ferramenta concreta. Cada vez que o botão Acrescentar abaixo de uma haste é acionado, uma argola é adicionada nessa haste. Analogamente, cada vez que o botão Retirar abaixo de uma haste é acionado, uma argola é retirada dessa haste. Nessa ferramenta virtual, podem ser acrescentadas até 16 argolas em cada haste.

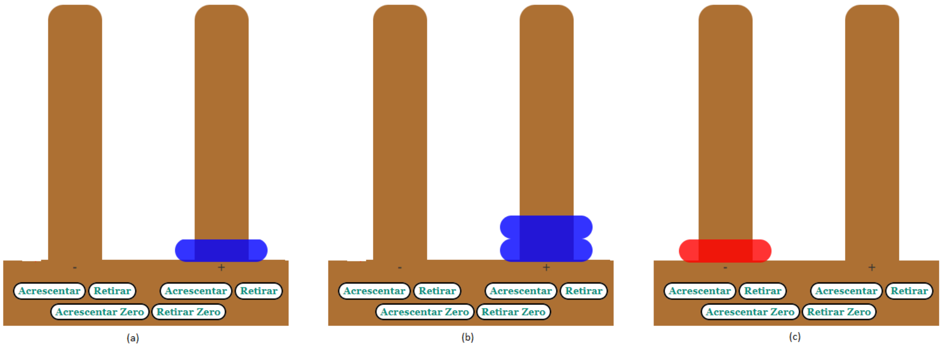
O botão Retirar Zero, quando acionado, elimina simultaneamente uma argola em cada haste; assim, ele só funciona quando houver pelo menos uma argola de cada cor no ábaco. O botão Acrescentar Zero, quando acionado, acrescenta simultaneamente uma argola em cada haste, desde que tenha-se no máximo 15 argolas em cada haste. O uso dos botões Retirar Zero e Acrescentar Zero é uma das vantagens do Ábaco Virtual em relação ao ábaco físico, uma vez que, utilizando esses botões, o estudante não corre o risco de acrescentar ou retirar quantidades diferentes das duas hastes nos momentos de retirar ou acrescentar zero (ou seja, quantidades iguais de unidades nas duas hastes).

A partir da convenção estabelecida para as argolas vermelhas e azuis, é natural uma primeira representação, em uma única haste, para números positivos e números negativos. Por exemplo, com uma argola azul no ábaco e nenhuma vermelha, estamos representando o número $+1$ (Figura 4 (a)); com duas argolas azuis e nenhuma vermelha, estamos representando o número $+2$ (Figura 4 (b)); com uma argola vermelha no ábaco e nenhuma azul, estamos representando o número -1 (Figura 4 (c)). Com nenhuma argola nas hastes, estamos representando o número 0 (zero). Assim, o ábaco sem argolas é o referencial zero e o ponto de partida para registrar qualquer quantidade, bem como para realizar qualquer operação.

[2] As cores azul e vermelha são utilizadas para representar quantidades negativas em outros trabalhos sobre números inteiros, como nos dominós em (MALAGUTTI; BALDIN, 2010, p. 67 e 98)

[3] Apesar da redundância das convenções, a convenção haste da esquerda negativa e haste da direita positiva vai facilitar posteriormente a conversão para a reta numérica. Na Seção 7.1 é discutida e justificada essa redundância de convenções.

Figura 4: Representação dos números inteiros $+1$, $+2$ e -1 em uma só haste



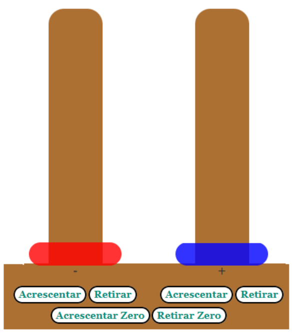
Fonte: Acervo das autoras.

É possível concluir daí que, se pudéssemos imaginar um Ábaco Virtual com hastes de comprimentos suficientemente grandes (na verdade infinitos), qualquer número inteiro poderia ser representado no ábaco utilizando apenas uma haste. Da experiência da primeira autora, essa abstração tem se revelado natural para os estudantes.

No entanto, queremos também associar a uma configuração que faz uso das duas hastes do ábaco um número inteiro. Pensando que uma tal configuração está juntando unidades positivas e unidades negativas, e que juntar é o significado da operação de adição, é natural (também para os estudantes) passar-se a interpretar uma configuração que faz uso das duas hastes como uma adição de unidades positivas e unidades negativas.

Comecemos pelo exemplo mais simples: $(+1) + (-1)$ já mencionado entre os pré-requisitos. Assim, tem-se na Figura 5 uma representação para o zero.

Figura 5: Uma representação do zero utilizando as duas hastes



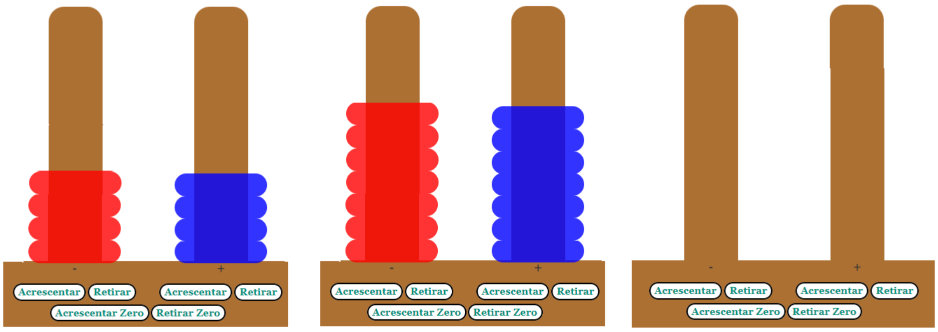
Fonte: Acervo das autoras.

Além disso, quando acrescentamos uma argola/unidade vermelha e uma argola/unidade azul utilizando o botão Acrescentar Zero, estamos acrescentando zero à quantidade ali representada, ou seja, o número inteiro representado não está sendo alterado. O processo inverso, isto é, a retirada simultânea de uma unidade negativa e uma unidade positiva, pode ser implementado pelo botão Retirar Zero, e também o número inteiro representado não está sendo alterado, Conclusão: **os botões Acrescentar Zero e Retirar**

Zero, quando acionados, não alteram o número que já estava representado no ábaco. Por exemplo, na configuração apresentada na Figura 5, se utilizarmos o botão Retirar Zero, ficamos sem argolas nas hastes. Temos aí mais uma argumentação para a afirmação de que a configuração original representa o zero.

O ábaco possibilita ao estudante concluir que existem infinitas adições ou configurações possíveis resultando em zero, bastando para isso imaginar uma quantidade maior de argolas. Essa é uma propriedade nova dos números inteiros que não ocorre no universo dos números naturais e que surpreende os alunos. De fato, no universo dos números naturais, o zero só pode ser obtido como o resultado da adição $0 + 0$. Na Figura 6, podemos observar diferentes representações para o número zero no ábaco.

Figura 6: Diferentes representações para o zero no ábaco



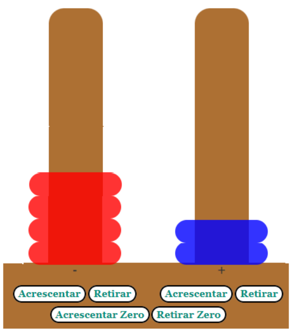
Fonte: Acervo das autoras.

E qual número estaria representado no ábaco na Figura 7? Observe que aí estamos representando a adição

$$[(-1) + (-1) + (-1) + (-1)] + [(+1) + (+1)],$$

ou seja, $(-4) + (+2)$.

Figura 7: Representação de números no ábaco



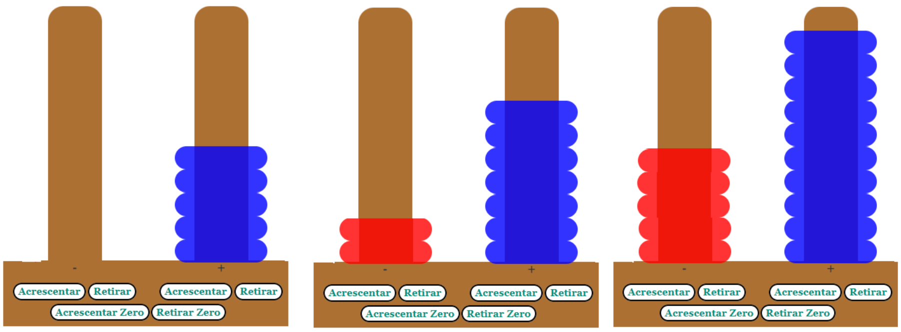
Fonte: Acervo das autoras.

Para reconhecer com maior facilidade o inteiro que tem essa configuração, ou qualquer outra configuração que faz uso das duas hastes, procuramos pela representação da mesma quantidade em uma só haste. Para isso, utilizamos, eventualmente mais de uma vez, o botão Retirar Zero, que evoca a propriedade $(+1)+(-1) = 0$. De fato, ao pressionarmos o botão Retirar Zero, é retirada uma argola de cada haste, ou seja, é subtraído $(+1)+(-1)$, portanto é subtraído zero, de forma coerente com o significado de retirar da operação de subtração e sem alterar a quantidade aí representada.

Por exemplo, na Figura 7, ao pressionarmos duas vezes o botão Retirar Zero, chega-se à configuração de duas argolas na haste negativa, o que representa o inteiro -2. Esse era, de fato, o valor esperado, uma vez que, nessa figura, estamos representando a adição $(-4) + (+2)$.

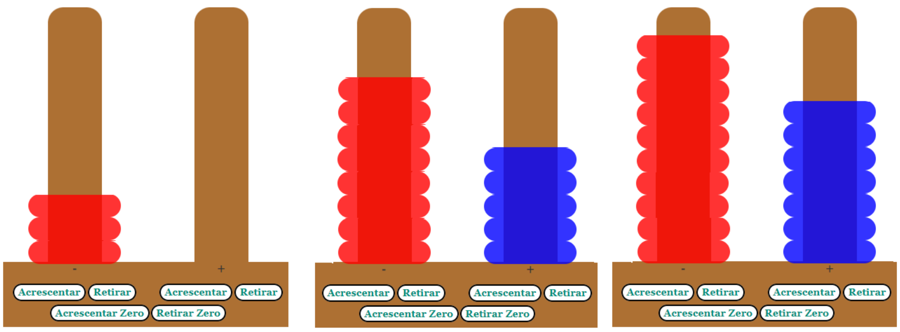
Usando o botão Retirar Zero, é possível observar nas Figuras 8 e 9 algumas formas de representar no Ábaco Virtual os números $+5$ e -3, respectivamente.

Figura 8: Diferentes formas de representar $+5$ no Ábaco Virtual



Fonte: Acervo das autoras.

Figura 9: Diferentes formas de representar -3 no Ábaco Virtual



Fonte: Acervo das autoras.

O ábaco possibilita ao estudante generalizar essa ideia. Imaginando uma quantidade maior de argolas e hastes de comprimento tão grande quanto necessário, é de se esperar que os estudantes não tenham dificuldades em concluir que existem infinitas adições (ou representações ou, ainda, configurações) possíveis que resultam em um mesmo número inteiro. Esse número infinito de possibilidades de representações é uma propriedade nova dos números inteiros que não ocorre no universo dos números naturais e que surpreende os alunos. Para a construção das chamadas "regras de sinais" das operações em $\mathbb{Z}$ utilizando o Ábaco Virtual dos Números Inteiros, a associação entre números inteiros e as diferentes formas de representação de um dado número inteiro são fundamentais, especialmente para as operações de subtração e multiplicação, o que passamos a discutir.

Capítulo 3

Operando com o Ábaco Virtual dos Inteiros

Inicialmente cabe ressaltar que, neste texto, ao operarmos no ábaco, escolhemos sempre expressar o resultado apenas com unidades positivas, ou apenas com unidades negativas, pois isso facilita não apenas a visualização do resultado como auxilia no estudo das chamadas regras de sinais. Reiteramos que, para expressar um número em apenas uma haste, é recomendável utilizar o botão Retirar Zero do Ábaco Virtual.

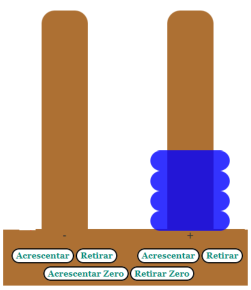
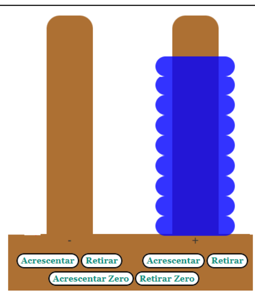
As ideias para operar com números inteiros tanto no Ábaco físico (ver Rodrigues e Oliveira (2010)) como no Ábaco Virtual são as mesmas. No entanto, como já destacado anteriormente, tem-se nos botões Retirar Zero e Acrescentar Zero do Ábaco Virtual recursos que não estão explícitos no ábaco físico e que agilizam a representação e os cálculos no Ábaco Virtual.

Explorando essas ideias, vamos aqui apenas exemplificar como podem ser realizadas as operações de adição, subtração e multiplicação. Com a intenção de facilitar ao estudante a conversão para o registro aritmético (Duval), no lugar de falarmos em argolas positivas e argolas negativas passamos a nos referir apenas a unidades positivas e unidades negativas, respectivamente.

3.1 A Adição no Ábaco Virtual

Para realizar uma adição de inteiros no Ábaco Virtual, apoiamo-nos no significado de acrescentar da adição, que continua válido no universo dos números inteiros. Assim, representamos a primeira parcela no ábaco e, a seguir, adicionamos a segunda parcela, acrescentando unidades positivas ou negativas, na respectiva haste, dependendo do sinal da segunda parcela. Se necessário, utilizamos o botão Retirar Zero para obter a representação do resultado em apenas uma haste, seguindo nossa escolha anunciada no início deste capítulo. Assim, para adicionarmos no ábaco utilizamos apenas os botões Acrescentar e, eventualmente, o botão Retirar Zero. Por exemplo, para adicionarmos dois inteiros positivos, como $(+4) + (+5)$, inicialmente acrescentamos quatro unidades positivas na haste positiva e, após, acrescentamos cinco unidades positivas também na haste positiva, obtendo o resultado $+9$, o que pode ser observado no Quadro 1.

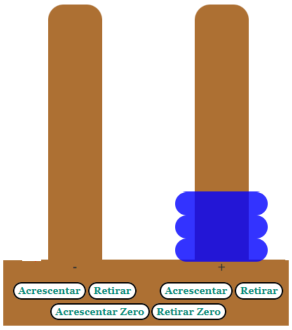
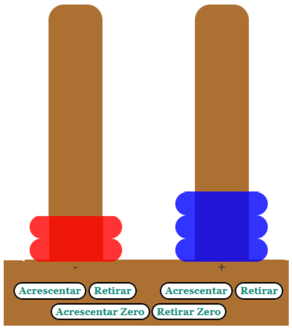
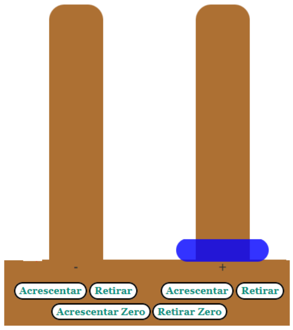
Quadro 1: Adição $(+4) + (+5)$ no Ábaco Virtual.

(a) Representando o +4	(b) Adicionando 5 unidades positivas
	

Fonte: Acervo das autoras.

No Quadro 2 exemplificamos a adição de parcelas com sinais diferentes: $(+3)+(-2)$. Inicialmente, representamos o +3 no ábaco (Quadro 2(a)). Em seguida, usando o botão Acrescentar da haste negativa, incluímos duas unidades negativas (Quadro 2(b)). Até aí representamos a adição $(+3)+(-2)$. O resultado da operação em uma só haste é obtido pressionando duas vezes o botão Retirar Zero (já que o maior número de pares formados por uma unidade positiva e uma unidade negativa é dois), obtém-se +1 como resposta (Quadro 2(c)).

Quadro 2: Adição $(+3)+(-2)$ no Ábaco Virtual

(a) Representando o +3	(b) Adicionando 2 unidades negativas	(c) Retirando as unidades aos pares
		

Fonte: Acervo das autoras.

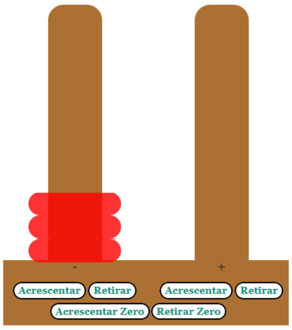
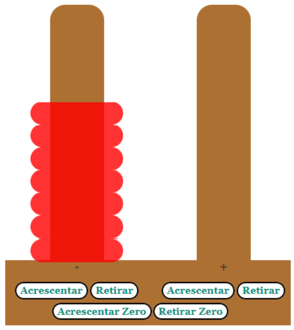
Simbolicamente, o registro do que foi feito na passagem do Quadro 2(b) para o Quadro 2(c) no ábaco é

$$\begin{aligned}(+3)+(-2) &= [(+1)+(+1)+(+1)]+[(-1)+(-1)]\\ &= (+1)+(+1)+[(+1)+(-1)]+(-1)\\ &= (+1)+[(+1)+(-1)]\\ &= (+1),\end{aligned}$$

ficando implícitas a propriedade associativa da adição de inteiros e a propriedade $(+1)+(-1)=0$, bem como o fato de zero continuar sendo o elemento neutro da adição, o que permite que os colchetes na terceira e quarta linhas sejam eliminados. Ficam explícitos, por meio das expressões coloridas, os dois "cliques" do botão Retirar Zero, que, como já ressaltado anteriormente, quando acionado, não altera o número que já estava representado no ábaco.

Com procedimento análogo, percebe-se que o resultado da adição $(+2)+(-3)$ é negativo, pois inicialmente acrescentamos duas unidades positivas no ábaco, após, adicionamos três unidades negativas. Anulando os dois pares de unidades possíveis resta apenas uma unidade negativa no Ábaco Virtual, portanto $(+2)+(-3)=-1$. No Quadro 3, ilustramos a adição de parcelas negativas: $(-3)+(-4)$. Inicialmente, representamos a primeira parcela no ábaco virtual acrescentando três unidades negativas (Quadro 3(a)). Em seguida, adicionamos a segunda parcela no ábaco, acrescentando quatro unidades negativas (Quadro 3(b)). Como não temos unidades nas duas hastes, não podemos clicar no botão Retirar Zero. Assim, o resultado obtido é -7. Este exemplo é suficientemente genérico, no sentido de permitir, com argumento análogo ao aqui utilizado, generalizar para qualquer adição de parcelas de mesmo sinal.

Quadro 3: Adição $(-3) + (-4)$ no Ábaco Virtual.

<table>
<tr><th>(a) Representando o -3</th><th>(b) Adicionando 4 argolas negativas</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Acervo das autoras.

Simbolicamente, o registro do que foi implementado no Quadro 3 é:

$$\begin{aligned}(-3) + (-4) &= [(-1) + (-1) + (-1)] + [(-1) + (-1) + (-1) + (-1)]\\ &= (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1)\\ &= -7,\end{aligned}$$

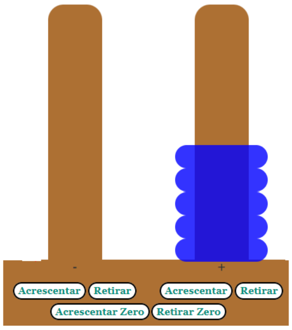
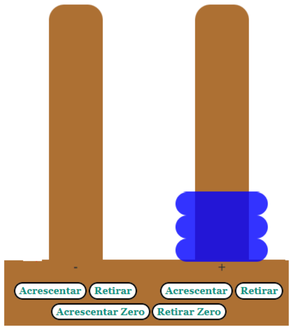
ficando implícita a propriedade associativa da adição de inteiros.

Uma vantagem da ferramenta ábaco é que a sua utilização possibilita aos estudantes conjecturar sobre as regras da adição de números inteiros. Desse modo, após o professor discutir com os estudantes a implementação da adição no Ábaco Virtual, os mesmos podem resolver atividades para iniciar o processo de criação de conjecturas sobre as "regras de sinais" para a adição, utilizando a imaginação e pensando em quantidades que o ábaco não comporta. Abordamos a generalização das "regras de sinais" da adição na Seção 5.1; além disso, ideias de atividades que podem ser realizadas pelos alunos que contribuem para a criação de conjecturas são abordadas na Seção 6.1.

3.2 A Subtração no Ábaco Virtual

Apoiando-nos no significado de retirar que continua válido no universo dos números inteiros e que no ábaco é implementado pelo botão Retirar, é possível também implementar uma subtração no Ábaco Virtual. Por exemplo, para realizar a subtração $(+5) - (+2)$ no ábaco, inicialmente representamos nele o $+5$ e, após, retiramos duas unidades positivas, ficando com o resultado $+3$ (Quadro 4). É importante destacar que a subtração indicada nesse exemplo já era possível no conjunto dos números naturais e continua válida no conjunto dos números inteiros.

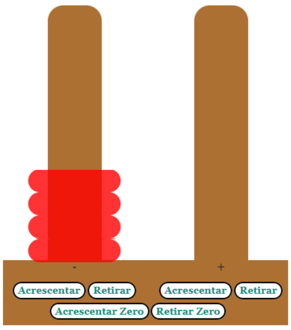
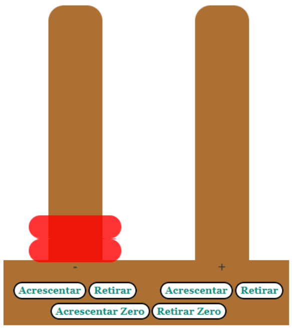
Quadro 4: Subtração $(+5) - (+2)$ no Ábaco Virtual

(a) Representando o $+5$	(b) Subtraindo 2 argolas positivas.
	

Fonte: Acervo das autoras.

Situação análoga acontece com a subtração $(-4) - (-2)$: inicialmente representamos no ábaco o minuendo (-4) utilizando quatro unidades negativas e, após, retiramos duas unidades negativas, fazendo uso do botão Retirar, restando duas unidades negativas no ábaco. Assim, $(-4) - (-2) = -2$ (Quadro 5).

Quadro 5: Subtração $(-4) - (-2)$ no Ábaco Virtual.

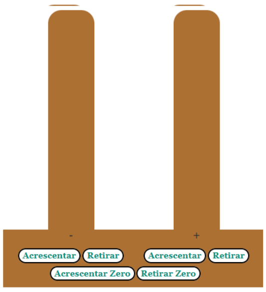
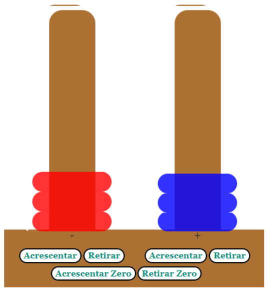
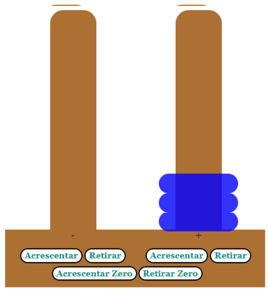
(a) Representando o -4	(b) Subtraindo 2 argolas negativas.
	

Fonte: Acervo das autoras.

O que fazer nos casos em que, em uma dada configuração para o minuendo, não existem as unidades indicadas pelo subtraendo para serem retiradas? Por exemplo, na configuração do zero apresentada no Quadro 6(a), não há três unidades negativas para serem retiradas e ser efetuada a subtração $0-(-3)$. É em situações como essa que as infinitas representações para um número inteiro têm enorme relevância. No exemplo citado, é preciso substituir a configuração utilizada para o zero, escolhendo uma configuração conveniente, precisamente uma que faça uso de, no mínimo, três unidades negativas para que, com isso, seja possível retirar três unidades negativas do minuendo 0. No Quadro

6(b), o zero foi representado com três unidades positivas e três unidades negativas, utilizando o botão Acrescentar Zero três vezes (em rosa). Agora temos três unidades negativas para realizar a operação de retirada de três unidades negativas conforme indicadas pelo subtraendo, obtendo +3 como resposta (Quadro 6 (c)).

Quadro 6: Subtração $0-(-3)$ no Ábaco Virtual

(a) Uma Representação do zero.	(b) Uma representação do zero que envolve 3 unidades negativas	(c) Retirando de zero 3 unidades negativas.
		

Fonte: Acervo das autoras.

Simbolicamente, o registro do que foi feito na passagem do Quadro 6(a) para o Quadro 6(b) no ábaco é

$$\begin{aligned} 0 &= 0+0+0 \\ &= [(+1)+(-1)]+[(+1)+(-1)]+[(+1)+(-1)] \\ &= (-1)+(-1)+(-1)+(+1)+(+1)+(+1), \end{aligned}$$

deixando implícitas as propriedades zero é o elemento neutro da adição de inteiros, $(+1)+(-1)=0$ e a comutatividade da adição de inteiros.

Já o registro simbólico do que foi feito na passagem do Quadro 6(b) para o Quadro 6(c) no ábaco é

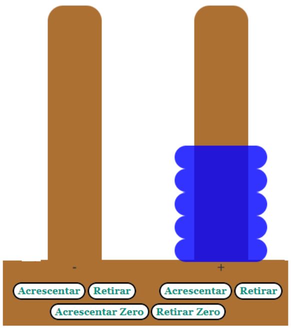
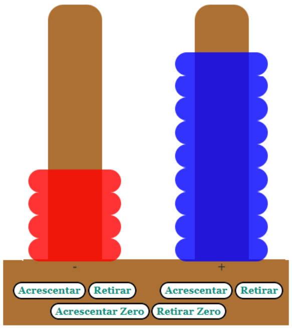
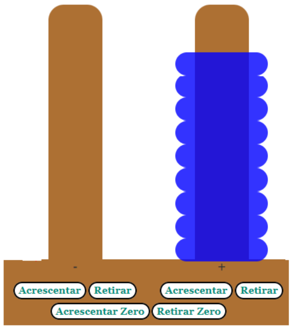
$$\begin{aligned} 0-(-3) &= [(+1)+(+1)+(+1)+(-1)+(-1)+(-1)]-[(-1)+(-1)+(-1)] \\ &= (+1)+(+1)+(+1), \end{aligned}$$

sendo aqui utilizado o significado de retirar da operação de subtração, retirando-se do minuendo três parcelas iguais a (-1) conforme indicado pelo subtraendo.

A mesma ideia pode ser utilizada para realizar a subtração $(+5)-(-4)$: se representássemos $(+5)$ no ábaco somente com cinco unidades positivas, não teríamos quatro unidades negativas para serem retiradas (Quadro 7(a)), então é necessário utilizar uma configuração conveniente para o minuendo $(+5)$. Para isso, uma possibilidade é, além de acrescentar as cinco unidades positivas, utilizar o botão Acrescentar Zero quatro vezes, gerando assim quatro unidades negativas na representação do número $(+5)$ (Quadro 7(b)).

Agora, temos quatro unidades negativas para retirar do minuendo e, após a retirada, o resultado obtido é $(+9)$ (Quadro 7(c)).

Quadro 7: Subtração $(+5) - (-4)$ no Ábaco Virtual

(a) Uma Representação do +5.	(b) Uma representação do +5 que envolve 4 unidades negativas	(c) Retirando 4 unidades negativas.
		

Fonte: Acervo das autoras.

Simbolicamente, o registro do que foi feito na passagem do Quadro 7(a) para o Quadro 7(b) no ábaco é

$$\begin{aligned}(+5) =&(+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (+1)\\ =&(+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (+1)\\ &+[(+1) + (-1)] + [(+1) + (-1)] + [(+1) + (-1)] + [(+1) + (-1)],\end{aligned}$$

deixando explícito (em laranja) o uso quatro vezes do botão Acrescentar Zero e implícita a propriedade comutativa da adição de inteiros.

Já o registro simbólico do que foi feito na passagem do Quadro 7(b) para o Quadro 7(c) no ábaco é

$$\begin{aligned}(+5) - (-4) =&[(-1) + (-1) + (-1) + (-1)\\ &+ (+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (+1)]\\ &- [(-1) + (-1) + (-1) + (-1)]\\ =&(+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (+1) + (+1)\\ =&(+9)\end{aligned}$$

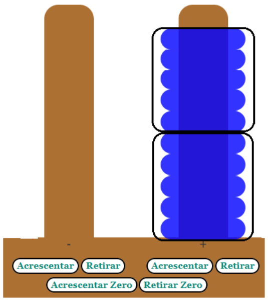
sendo aqui utilizado o significado de retirar da operação de subtração, retirando-se do minuendo quatro parcelas iguais a (-1), conforme indicado pelo subtraendo.

Assim como na operação de adição, ideias de atividades que podem ser realizadas pelos alunos e que contribuem para a criação de conjecturas, tais como "subtrair é o mesmo que somar o oposto" são abordadas na Seção 6.2. Essa conjectura é comprovada na Seção 5.3.

3.3 A Multiplicação no Ábaco Virtual

Para realizar a multiplicação no Ábaco Virtual dos Números Inteiros, relembramos que um dos significados da multiplicação de números naturais é a adição de parcelas iguais. Assim, com esse significado, o primeiro fator indica quantas vezes um grupo formado por tantas unidades quanto às indicadas no segundo fator é repetido. Por exemplo, para realizar a multiplicação 2×5, ou seja, $(+2) \times (+5)$, adicionamos dois grupos de cinco unidades positivas cada, obtendo como resultado $+10$, (Figura 10). Assim, temos que a multiplicação de números inteiros positivos é análoga à multiplicação no conjunto dos números naturais.

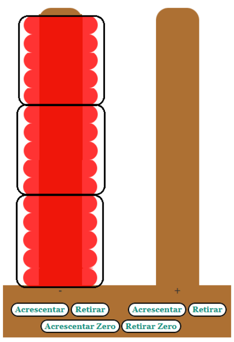
Figura 10: Multiplicação $(+2) \times (+5)$ no Ábaco Virtual.



Fonte: Acervo das autoras.

Esse significado pode ser aproveitado e ampliado para os casos de multiplicação de um número inteiro positivo por qualquer outro número inteiro. Por exemplo, para realizar a multiplicação $(+3) \times (-5)$, devemos acrescentar 3 grupos com 5 unidades negativas em cada grupo (Figura 11).

Figura 11: Multiplicação $(+3) \times (-5)$ no Ábaco Virtual.



Fonte: Acervo das autoras.

Essa ampliação de significado é também utilizada por Dirks (1984, p.53), que também concorda que $2 \times (-3)$, ou seja, $(+2) \times (-3)$, é natural para os estudantes.

A maior novidade na multiplicação de números inteiros, e que não é natural para os estudantes, é o caso em que o primeiro fator é um número negativo: como definir o produto nesse caso, como em $(-3) \times (+5)$? Por exemplo, é impossível somar grupos de cinco unidades negativas "-3 vezes". Esse obstáculo é ressaltado por Schubring:

> Os números negativos apresentam um caso particularmente revelador para a importância de reflexões históricas e epistemológicas. De fato, a tendência dominante é negar toda a especialidade desse conceito, de apresentar esses números como objetos matemáticos bem evidentes, como mesmo já sendo identificáveis na natureza ou como facilmente dedutíveis a partir de fatos empíricos – uma abordagem que parece funcionar bem, quando se consideram as operações de adição e de subtração, mas que fracassa quando se trata da multiplicação ou da divisão. (SCHUBRING, 2012, p. 8)

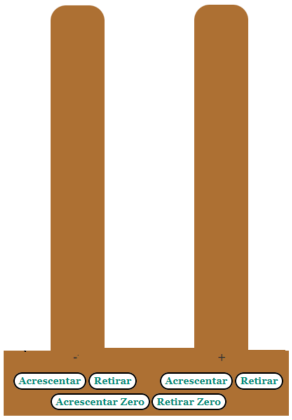
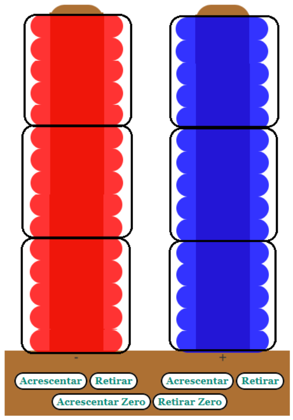
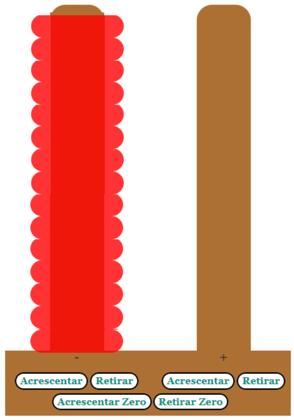
A ampliação da multiplicação de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$ requer maior atenção. De fato, aqui temos uma complexidade maior do que na adição e na subtração, quando foi suficiente apenas repetir a interpretação considerada no universo dos números naturais.

Desse modo, devemos definir a multiplicação de inteiros quando o primeiro fator é um número negativo. A inspiração para tal definição pode ser explorada no próprio ábaco: levando em conta que, se o primeiro fator é positivo **acrescentamos ao zero** grupos de unidades indicadas pelo segundo fator (Figura 11), então é natural esperar que, quando o primeiro fator é negativo, a ação oposta de acrescentar seja implementada, ou seja, que **retiremos, de zero,** grupos de unidades indicadas pelo segundo fator. Também Dirks faz uso de repetição de subtrações (DIRKS, 1984, p.53). Pela experiência da primeira autora, essa definição tem sido natural para os estudantes, chegando inclusive a ser sugerida por eles.

Por exemplo, para realizar a multiplicação $(-3) \times (+5)$, devemos retirar, a partir do zero, três grupos de cinco unidades positivas. Para efetuar essa retirada, devemos partir do referencial zero convenientemente representado, e utilizar, por exemplo, o botão Acrescentar Zero até obtermos os três grupos com cinco unidades positivas que devem então ser retirados (Quadro 8).

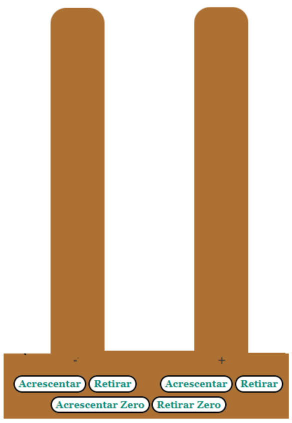
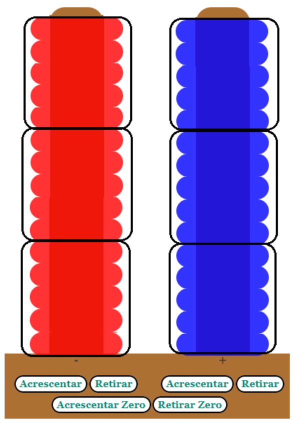
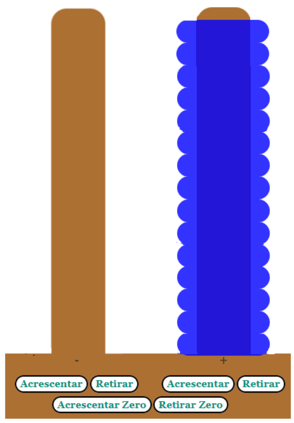
Esse mesmo significado de subtrações repetidas pode ser empregado para a multiplicação entre dois números negativos. Por exemplo, para realizar a multiplicação $(-3)\times(-5)$, devemos retirar, a partir do zero, 3 grupos de 5 unidades negativas em cada grupo. Mas para retirar esses 3 grupos, é necessário representar o zero convenientemente. O botão Acrescentar Zero do Ábaco Virtual permite gerar uma tal representação para o zero (Quadro 9). Após retirarmos os 3 grupos de 5 unidades negativas, ficamos com 15 unidades positivas como resposta.

Quadro 8: Multiplicação $(-3) \times (+5)$ no Ábaco Virtual

(a) Uma Representação do zero.	(b) Uma representação de zero que envolve 3 grupos de 5 unidades positivas cada	(c) Retirando 3 grupos de 5 unidades positivas cada
		

Fonte: Acervo das autoras.

Quadro 9: Multiplicação $(-3) \times (-5)$ no Ábaco Virtual

(a) Uma Representação do zero.	(b) Uma representação de zero que envolve 3 grupos de 5 unidades negativas cada	(c) Retirando 3 grupos de 5 unidades negativas cada
		

Fonte: Acervo das autoras.

Desse modo, para multiplicar números inteiros utilizando o Ábaco Virtual, interpretamos

- o primeiro fator como o número de grupos iguais que devemos acrescentar ou retirar do ábaco, a partir do zero:

  a) Se esse fator for positivo, esses grupos devem ser acrescentados;

  b) Se esse fator for negativo, esses grupos devem ser retirados;
  c) Se esse fator for zero não devem ser colocados grupos de unidades no ábaco.

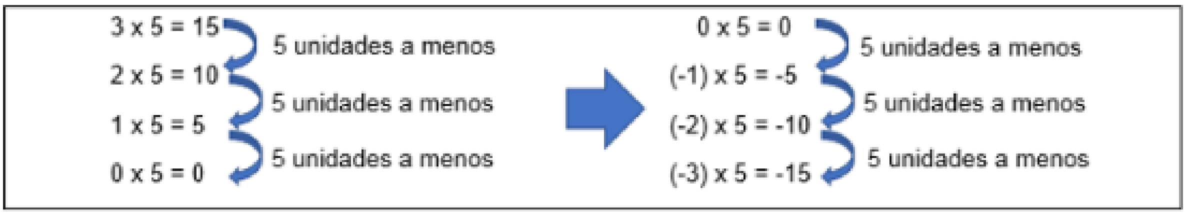
- o segundo fator como o número de unidades de cada grupo:

  a) Se esse fator for positivo, cada grupo é formado por unidades positivas;
  b) Se esse fator for negativo, cada grupo é formado por unidades negativas;
  c) Se esse fator for zero, cada grupo é formado por zero unidades.

Dessa interpretação, podemos concluir que quando um dos fatores é zero, o produto é sempre zero. De fato, se o primeiro fator é zero não devem ser colocados grupos de unidades no ábaco e o ábaco continua "zerado"; se o segundo fator é zero, não teriam unidades nos grupos a serem acrescentados ou retirados do ábaco e, portanto, o ábaco também continuaria "zerado".

Finalmente, cabe ressaltar que a inspiração que buscamos no ábaco para a multiplicação de inteiros também poderia ser motivada pela busca por padrões, encontrada em outros materiais e resultando também na repetição de subtrações ou de adições, como em Ripoll, Fisher e Meinerz (2021) (Figura 12) e também mencionada por Dirks (1984). A Figura 12 trata da multiplicação de número negativo por número positivo.

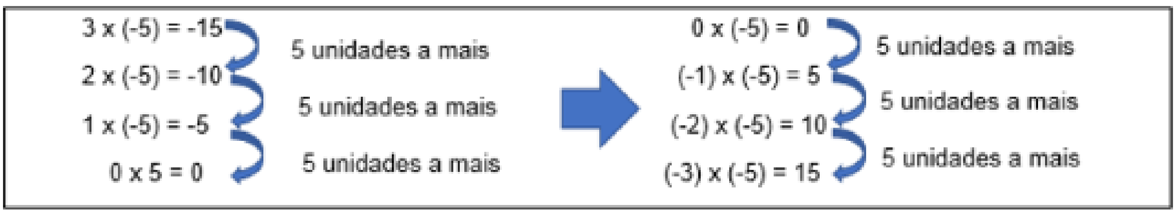
Figura 12: Padrão motivador da definição de $(-3) \times 5$



Fonte: Ripoll, Fisher e Meinerz (2021, p. 12)

A Figura 13 trata da multiplicação de número negativo por número negativo.

Figura 13: Padrão motivador da definição de $(-3) \times (-5)$



Fonte: Ripoll, Fisher e Meinerz (2021, p. 13)

Capítulo 4

Potencialidades do Ábaco Virtual dos inteiros

O ábaco virtual dos números inteiros traz potencialidades, muitas delas ímpares.

As imagens geradas no Ábaco Virtual dos inteiros proporcionam um registro visual dos raciocínios utilizados para construir números inteiros e para operar com eles, bem como apoiam as imagens mentais que auxiliam a generalização e os argumentos sobre ela, aspectos que são confirmados no próximo capítulo.

A possibilidade de visualizar uma quantidade genérica constituída por cilindros azuis e vermelhos torna mais palpável para o estudante argumentações envolvendo o pensamento genérico, constituindo-se uma potencialidade ímpar dessa ferramenta e que estão exemplificadas no próximo capítulo. É um bom recurso, portanto, que serve de ponte para a abstração (imaginação de um ábaco de hastes de comprimentos infinitos) para a dedução das propriedades das operações com números inteiros, por exemplo, "subtrair é o mesmo que somar o oposto" e sua demonstração (ver Capítulo 5). Além disso, com relação aos estudos futuros do estudante, os cilindros também servirão de apoio para imaginar-se quantidades racionais e concluir que muitas das propriedades das operações com números racionais ou reais são fundamentadas nos mesmos argumentos.

Outra potencialidade é que a dinâmica proporcionada pela ferramenta possibilita que o professor dê maior ênfase na discussão sobre os processos de comparar e operar, sendo as conclusões ou respostas apenas uma consequência dos mesmos. Por exemplo, a visualização das infinitas representações para um número inteiro, propriedade diferenciadora do universo dos naturais para o dos inteiros, contribui para preparar o estudante para as operações de adição e subtração, primeiros momentos em que essas representações, no caso do zero, se fazem necessárias, acrescentando-se zero sob uma representação conveniente. Além disso, com relação aos estudos futuros do estudante, a utilização da estratégia "somar e subtrair uma mesma quantidade", como na resolução de uma equação do segundo grau, já não surpreenderá/será uma novidade para os estudantes.

Essa dinâmica oportuniza também que os próprios estudantes formulem conjecturas, de uma forma até mais acelerada, uma vez que muitos casos podem ser mais rapidamente testados. Além disso, o recurso dos botões Retirar Zero e Acrescentar Zero, uma das vantagens do Ábaco Virtual em relação ao ábaco concreto dos inteiros, evita que o estudante distraidamente acrescente ou retire quantidades diferentes das duas hastes em momentos em que deveria retirar ou acrescentar zero, ou seja, fazer uso de quantidades iguais de unidades nas duas hastes.

Uma complexidade inevitável que surge com a ampliação para o universo numérico dos números inteiros é o fato de que enquanto entre números naturais o sinal "$-$" denota apenas a operação de subtração, em $\mathbb{Z}$ o sinal "-" tem 3 significados: ele pode indicar uma quantidade negativa, como em -8, pode indicar a operação de subtração, como em $3-5$ ou indicar "o oposto de", como o primeiro "$-$" em $-(-3)$. Com o ábaco virtual dos inteiros, esses diferentes significados são naturalmente ressaltados, auxiliando o estudante a sedimentá-los, porque cada um deles requer do estudante uma ação diferente no ábaco:

para registrar no ábaco -8, o estudante vai acrescentar no ábaco 8 unidades negativas; para registrar $3 - 5$ o estudante vai fazer uso do botão Retirar, e para registrar, por exemplo, o oposto de (-3), o estudante vai trocar a cor de todas as argolas envolvidas para representar (-3).

A representação proporcionada pelo Ábaco Virtual dos Números Inteiros atende aos três quesitos mencionados por Duval como atividades cognitivas fundamentais: é uma representação para os números inteiros com regras bem estabelecidas, derivadas e em conexão com o conhecimento prévio do estudante sobre números inteiros; permite o tratamento das operações de adição, subtração e multiplicação nesta representação; admite conversões, tanto para a representação dos números inteiros na reta numérica como para as expressões aritméticas.

De fato, o ábaco virtual dos inteiros facilita a conversão da representação dos números inteiros para a reta numérica: basta "baixar as hastes" e juntar suas bases, como na animação construída por Érica Vitória Machado da Silva no repositório do GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/rpwc3kpm>. Relembramos que a escolha pela haste negativa ser a haste da esquerda foi proposital para facilitar justamente essa conversão.

Na opinião das autoras, o Ábaco Virtual dos Números Inteiros revela-se mais adequado do que a reta numérica para a dedução das regras de sinais para as operações de adição, subtração e multiplicação. Por exemplo, na adição de um número positivo com um número negativo, a comparação das alturas nas hastes da configuração final permite uma visualização imediata do sinal do resultado.

Encerramos este capítulo mencionando a potencialidade do Ábaco Virtual dos Números Inteiros para o ensino remoto, característica que motivou o minicurso apresentado no 2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Centro-Oeste e também o presente *e-book*. Atividades que podem ser utilizadas no ensino remoto são mencionadas no Capítulo 6.

Capítulo 5

Demonstrações apoiadas no Ábaco Virtual

Em muitos momentos nos capítulos anteriores, ao lidar com as operações de adição, subtração e multiplicação de inteiros no Ábaco Virtual, já foram apontadas oportunidades de generalizações, apelando para a imaginação de hastes de comprimento infinito, ou de um número qualquer de argolas, como, por exemplo, a multiplicação por zero. Nesta seção, utilizaremos cilindros azuis e vermelhos para representar quantidades genéricas, positivas e negativas, respectivamente, que podem apoiar a generalização e abstração dos estudantes e mostrar a potencialidade que o Ábaco Virtual oportuniza, podendo levar os estudante, em alguns casos a verdadeiras demonstrações por meio de imagens. A Figura 14(a) representa um número negativo qualquer e a Figura 14(b), representa um número positivo qualquer.

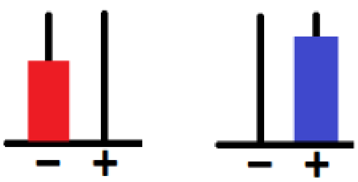
Figura 14: Ábaco com cilindros

(a) (b)

Fonte: Acervo das autoras.

Em sala de aula, no quadro, os cilindros podem ser representados por retângulos coloridos sobre as hastes como na Figura 15.

Figura 15: Representando quantidades genéricas sobre as hastes



Fonte: Acervo das autoras.

Antes de generalizar, é importante que os estudantes tenham tido a oportunidade, por meio de atividades propostas, de formular suas próprias conjecturas, por exemplo as atividades do Capítulo 6.

5.1 O oposto de um número inteiro no Ábaco Virtual

Na Escola, na introdução do universo dos números inteiros, o conceito de oposto bem como a propriedade de que cada número diferente de zero tem o seu oposto aparecem concomitantemente com os conceitos de referencial e de número negativo, e todos são pré-requisitos para a utilização do Ábaco Virtual.

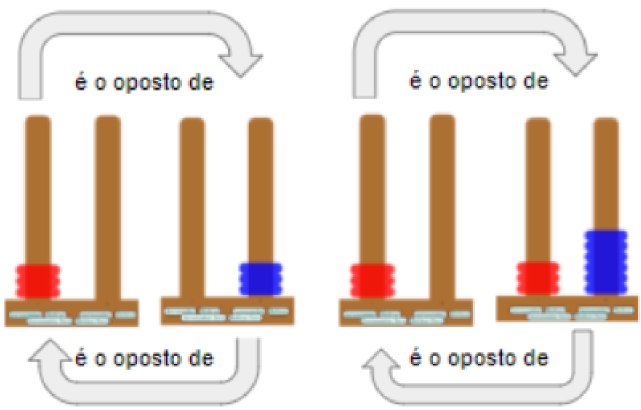
No Ábaco Virtual, a ação "tomar o oposto de" resume-se a considerar a mesma quantidade de argolas, porém em hastes trocadas, portanto também com cor trocada (Figura 16).

Figura 16: Representação de opostos utilizando quantidades genéricas

Fonte: Acervo das autoras.

"Tomar o oposto de" pode ser implementado de várias formas. Por exemplo, na Figura 17, tem-se representado de duas formas o oposto de (-3): na esquerda, são simplesmente "canceladas" as três unidades negativas acrescentando-se inicialmente 3 unidades positivas e, a seguir, acrescentadas mais 3 unidades positivas; na direita, são retiradas as 3 unidades negativas com o botão Retirar, e acrescentadas 3 unidades positivas com o botão Acrescentar;

Figura 17: Duas formas de tomar o oposto de (-3)



Fonte: Acervo das autoras.

5.2 Demonstrando a conjectura sobre as regras de sinais da adição

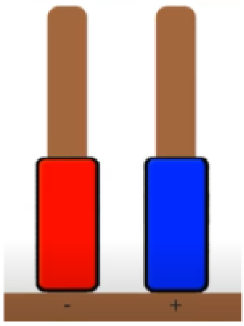
A configuração do ábaco e o botão Retirar Zero permitem que os estudantes visualizem e, usando a imaginação, também criem conjecturas sobre as "regras de sinais" da adição em $\mathbb{Z}$. Para isso, dividimos em três casos: i) adições de parcelas que são números opostos, ii) adição de parcelas com sinais diferentes e iii) adição de parcelas com sinais iguais.

i) Para adicionar dois números que são opostos, podem ser feitas perguntas aos estudantes, tais como:

Imagine que acrescentamos ***uma certa quantidade de unidades positivas no ábaco e a mesma quantidade de unidades negativas****. Qual será o resultado obtido no ábaco?*

Espera-se que os alunos percebam que o resultado será zero, uma vez que as duas hastes ficarão com a mesma altura de argolas e portanto, todas as unidades poderão ser anuladas, restando zero no ábaco. Essa generalização também pode ser visualizada utilizando os cilindros (Figura 18).

Figura 18: Adição de dois números opostos no Ábaco Virtual



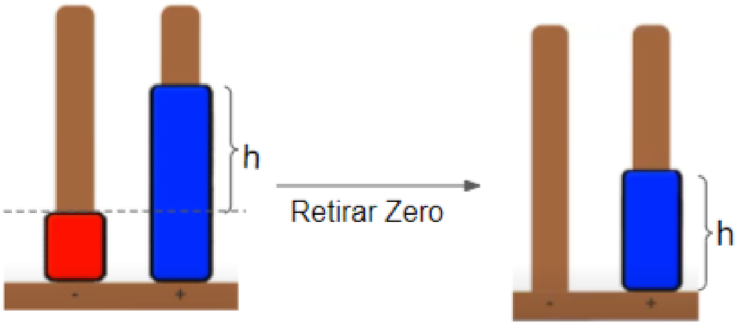
Fonte: Acervo das autoras.

ii) Na adição de duas parcelas de sinais diferentes, podemos fazer perguntas como:

Imagine que acrescentamos no Ábaco Virtual uma certa quantidade de unidades positivas e uma certa quantidade de unidades negativas. Sabendo que o número de unidades positivas é maior do que o número de unidades negativas, o resultado desta adição será um número positivo ou negativo?

Na Figura 18, temos uma representação suficientemente genérica desta situação, utilizando cilindros, e na qual a altura do cilindro azul é maior que a altura do cilindro vermelho. O resultado obtido é positivo. De fato, utilizando o botão Retirar Zero para representar o resultado em uma só haste, restam unidades positivas representadas pela diferença de altura entre os dois cilindros.

Figura 19: Adição de números de sinais diferentes no Ábaco Virtual - caso 1

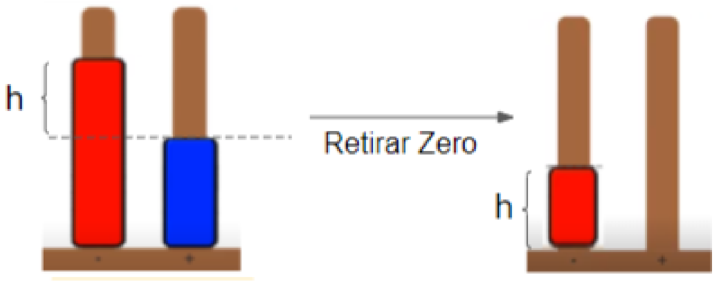


Fonte: Acervo das autoras.

Assim, espera-se que os alunos percebam que a parcela de maior valor absoluto (visualizada pela "haste mais alta") é a que determina o sinal do resultado, e o valor absoluto desse resultado é justamente a diferença obtida após a utilização do botão Retirar Zero e que é exatamente a diferença entre os valores absolutos das parcelas. Assim, no caso em que o valor absoluto da parcela positiva é maior que o valor absoluto da parcela negativa, o resultado da adição é positivo e o seu valor absoluto é a diferença entre os valores absolutos das parcelas.

Os estudantes também podem ser questionados sobre o que acontece quando **a quantidade de unidades negativas é maior que a quantidade de unidades positivas**. Com a Figura 20, percebe-se que um encaminhamento análogo pode ser feito.

Figura 20: Adição de números de sinais diferentes no Ábaco Virtual - caso 2



Fonte: Acervo das autoras.

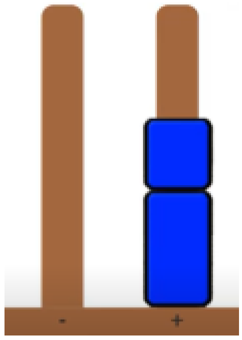
É esperado que os alunos argumentem, com suas próprias palavras e concluam que, ao adicionarmos parcelas de sinais diferentes, o resultado tem o sinal da parcela de maior valor absoluto e o seu valor absoluto é a diferença dos valores absolutos das parcelas.

iii) Na adição de parcelas de sinais iguais, os estudantes podem ser questionados da seguinte maneira:

Imagine que acrescentamos no ábaco uma certa quantidade de unidades positivas e, após, acrescentamos outra quantidade de unidades positivas. O resultado desta adição será um número positivo ou negativo?

Essa adição já era possível no conjunto dos números naturais que agora são representados pelos números positivos e pelo zero. Logo, espera-se que os estudantes concluam, de forma natural, que o resultado de uma adição de dois números positivos, é positivo e o seu valor absoluto é a soma dos valores absolutos das parcelas (ver Figura 21, que faz uso de dois cilindros de tamanhos diferentes para representar essas parcelas positivas).

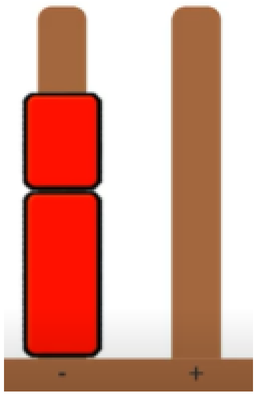
Figura 21: Adição de dois números positivos no Ábaco Virtual - caso 1



Fonte: Acervo das autoras.

Os estudantes também podem ser questionados sobre o que acontece quando acrescentamos no Ábaco Virtual duas quantidades negativas. Com a Figura 22, percebe-se que um encaminhamento análogo pode ser feito, obtendo-se um resultado negativo e de valor absoluto igual à soma dos valores absolutos das parcelas.

Figura 22: Adição de dois números negativos no Ábaco Virtual - caso 2



Fonte: Acervo das autoras.

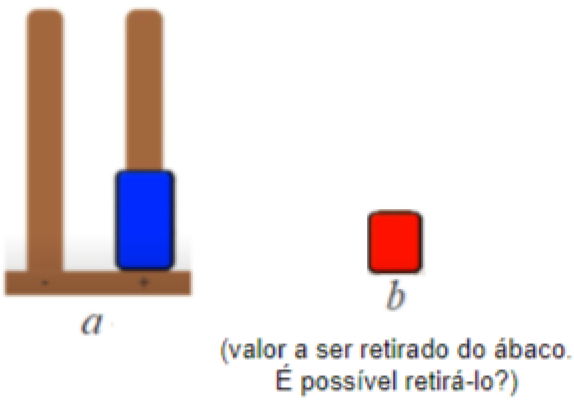
Assim, espera-se que os alunos concluam e argumentem com suas palavras que, ao adicionar parcelas de sinais iguais, mantém-se para o resultado o sinal das parcelas, e, para obter o valor absoluto do mesmo, adicionam-se os valores absolutos das parcelas.

Com a generalização oportunizada pelos cilindros e apelando para a imaginação para lidar com quantidades que o Ábaco Virtual não suporta (isto é, maiores do que 16 unidades de cada cor), as chamadas "regras de sinais" da adição em $\mathbb{Z}$ acabam sendo construídas pelos alunos. E, na verdade, muitas vezes os alunos acabam apelando para a memória visual, no lugar de decorar essas regras.

5.3 Demonstrando a conjectura "subtrair é o mesmo que adicionar o oposto"

Motivados pelas atividades da Seção 6.2, que objetivam levar o estudante a construir a conjectura "subtrair é o mesmo que adicionar o oposto de", passamos à demonstração da mesma por meio do ábaco e dos cilindros. Como zero é o oposto de si mesmo e é o elemento neutro da adição, é claro que esta conjectura se confirma quando o subtraendo é zero. Por isso, resta-nos considerar três casos, começando por aqueles em que a representação do minuendo em uma só haste não é suficiente para efetuar a subtração: i) minuendo e subtraendo com sinais diferentes; e ii) minuendo e subtraendo com sinais iguais, cujo módulo do subtraendo é maior que o módulo do minuendo. Para finalizar, abordamos o caso iii) minuendo e subtraendo com sinais iguais, cujo módulo do subtraendo é menor que o módulo do minuendo. Para facilitar a comunicação, às vezes faremos uso de letras para representar minuendo e subtraendo. i) Em uma subtração em que o minuendo é positivo e o subtraendo é negativo, é natural no Ábaco Virtual fazermos uso de uma só haste para representar o minuendo. Neste caso (genérico), neste texto, fazemos uso de um cilindro azul; no entanto, desse modo, não temos como retirar as unidades negativas que constituem o subtraendo, pois não há unidades na haste negativa (Figura 23).

Figura 23: Problematizando a subtração $a - b$, sendo a positivo e b negativo

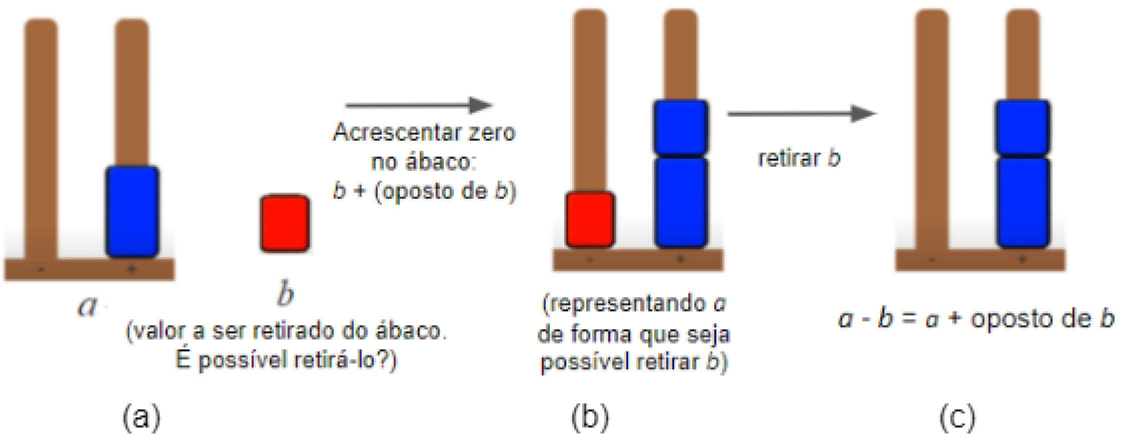


Fonte: Acervo das autoras.

Nesse caso, é necessário representar o minuendo de forma conveniente, especificamente, de uma forma que envolva o número de unidades negativas que constituem o subtraendo, pois só assim podemos retirar as unidades negativas que constituem o subtraendo. Essa ideia é a mesma utilizada nos casos particulares da atividade proposta na Figura 42.

Com a representação alternativa (Figura 24(b)) podemos retirar do minuendo a, o valor do subtraendo b, obtendo como resultado o número positivo indicado na Figura 24(c), que ressalta também que este resultado é o mesmo que a adicionado ao oposto de b. Assim, calcular $a - b$ é o mesmo que calcular a + oposto de b. Em outras palavras, subtrair, neste caso, é somar com o oposto.

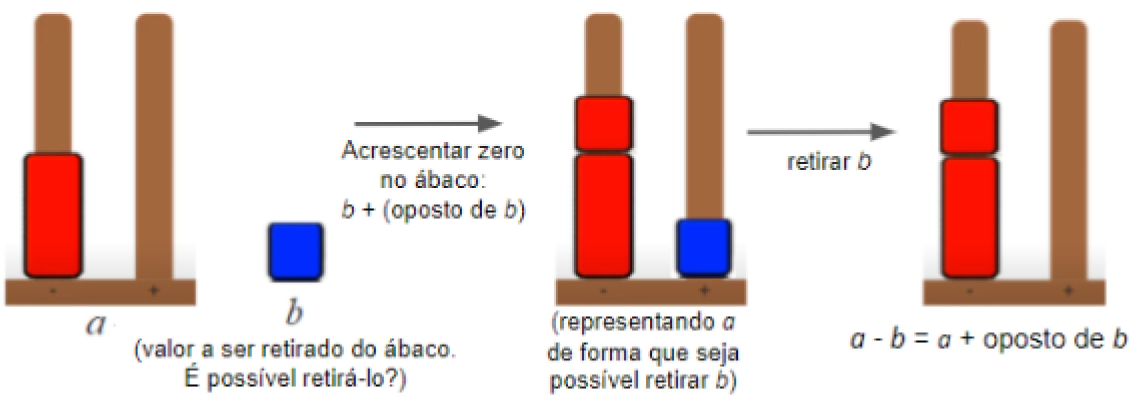
Figura 24: Subtração $a - b$, sendo a positivo e b negativo



Fonte: Acervo das autoras.

Analogamente, a subtração entre um número negativo e um número positivo tem como resultado um número que pode ser representado somente na haste negativa. Neste caso, também vale a afirmação "subtrair é adicionar o oposto" (Figura 25). Ou seja: para minuendo e subtraendo de sinais diferentes, subtrair é o mesmo que adicionar o oposto.

Figura 25: Subtração $a - b$, sendo a negativo e b positivo

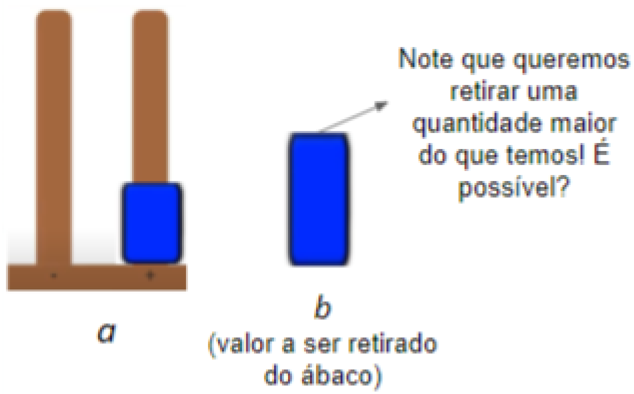


Fonte: Acervo das autoras.

ii) Consideremos agora o caso em que minuendo e subtraendo têm o mesmo sinal e o valor absoluto do subtraendo é maior que o valor absoluto do minuendo.

Na Figura 26 está ilustrado o caso de sinal positivo.

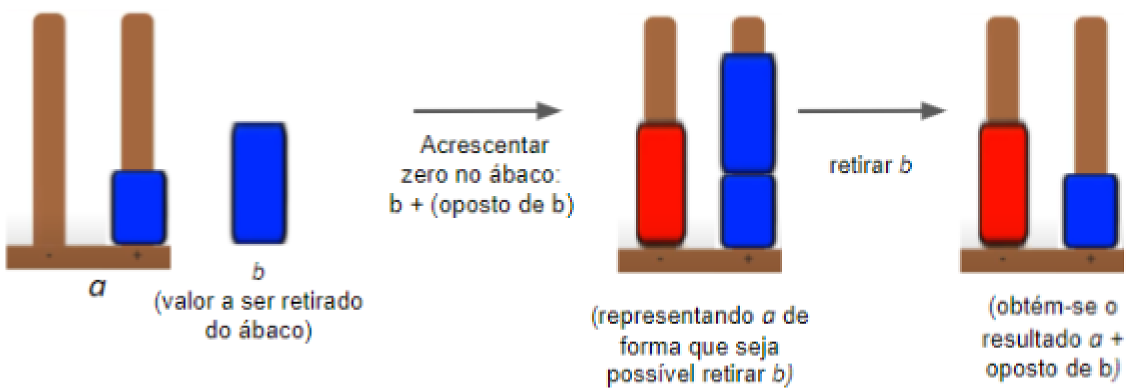
Figura 26: Problematizando a subtração $a - b$, sendo a e b positivos, e valor absoluto de a menor que valor absoluto de b



Fonte: Acervo das autoras.

Novamente, não é possível efetuar a subtração, assim, nesse caso, também é necessário representar o minuendo de forma conveniente. Para isso, podemos acrescentar b e seu oposto no ábaco, ou seja, zero (Figura 27(b)), e então torna-se possível efetuar a retirada de b (Figura 27(c)), obtendo como resultado a somado com o oposto de b.

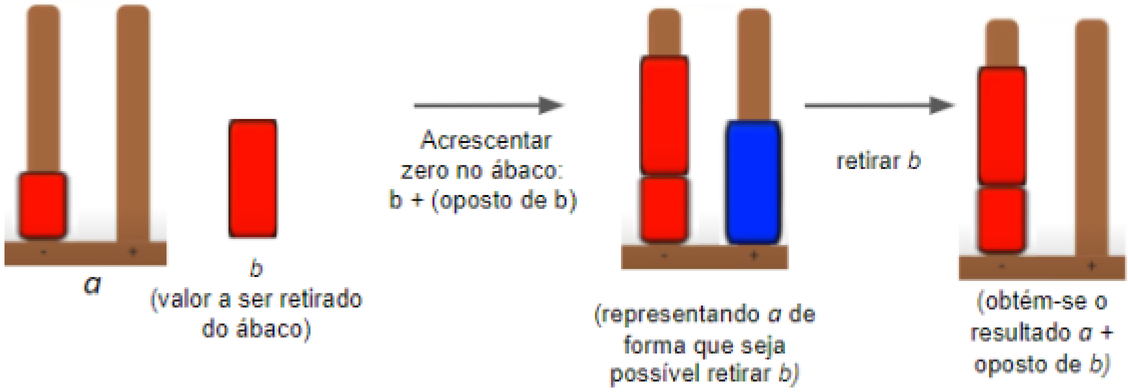
Figura 27: Subtração $a - b$, sendo ambos positivos e valor absoluto de a menor que valor absoluto de b



Fonte: Acervo das autoras.

O caso em que minuendo a e subtraendo b são negativos sendo valor absoluto de b maior que o valor absoluto de a, pode ser tratado de forma análoga (Figura 28).

Figura 28: Subtração $a - b$, sendo ambos negativos e valor absoluto de a menor que valor absoluto de b

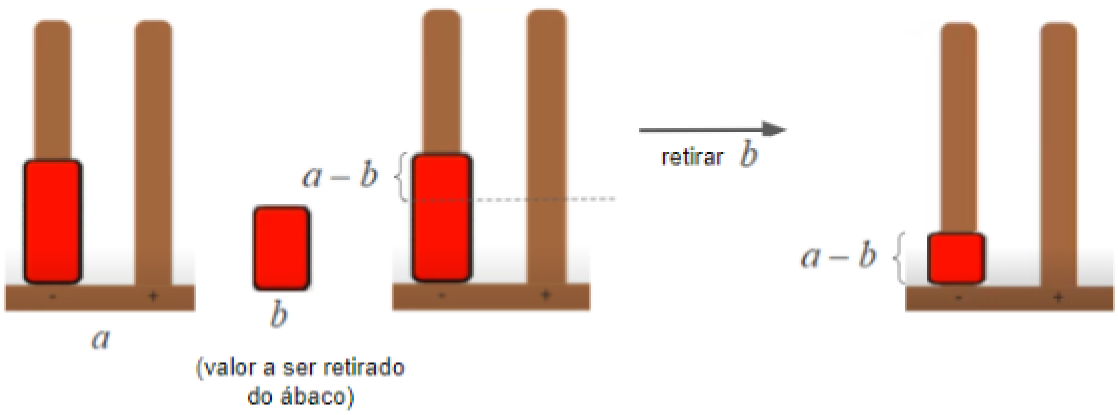


Fonte: Acervo das autoras.

Até aqui, vimos que, para todos os casos abordados é válida a conjectura “subtrair é adicionar o oposto”... Mas será que isso vale sempre? Será que a afirmação “**subtrair é o mesmo que** adicionar **o oposto**” vale também nos casos em que não precisávamos alterar a configuração inicial escolhida para o minuendo?

iii) Consideramos agora o caso em que minuendo a e subtraendo b são negativos sendo módulo de b menor que o módulo de a. Nesse caso, é possível resolver a subtração representando o minuendo em somente uma haste (Figura 29).

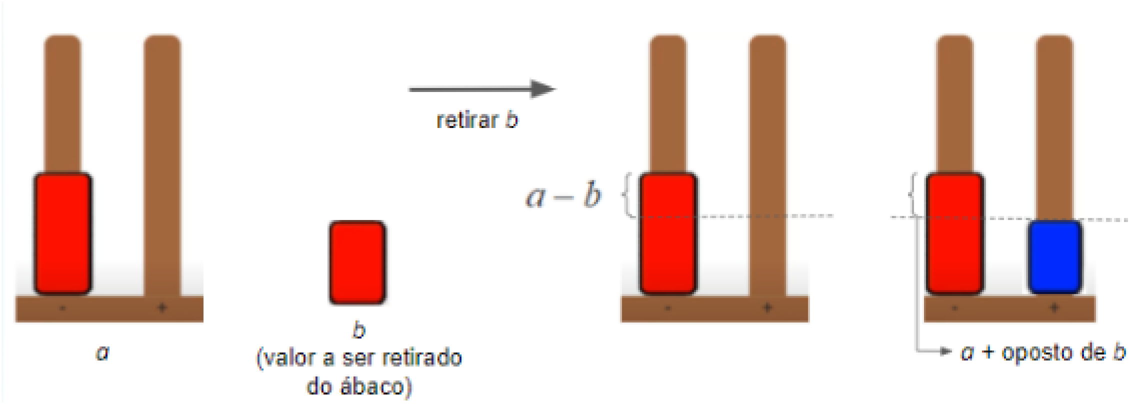
Figura 29: Subtração $a - b$, sendo ambos negativos e valor absoluto de b menor que valor absoluto de a



Fonte: Acervo das autoras.

Queremos mostrar que o resultado obtido na subtração $a - b$ é o mesmo resultado obtido na adição com o oposto (a + oposto de b). De fato, na Figura 30, podemos observar que o resultado obtido é o mesmo: resta um cilindro de mesma altura nos dois modos de resolução.

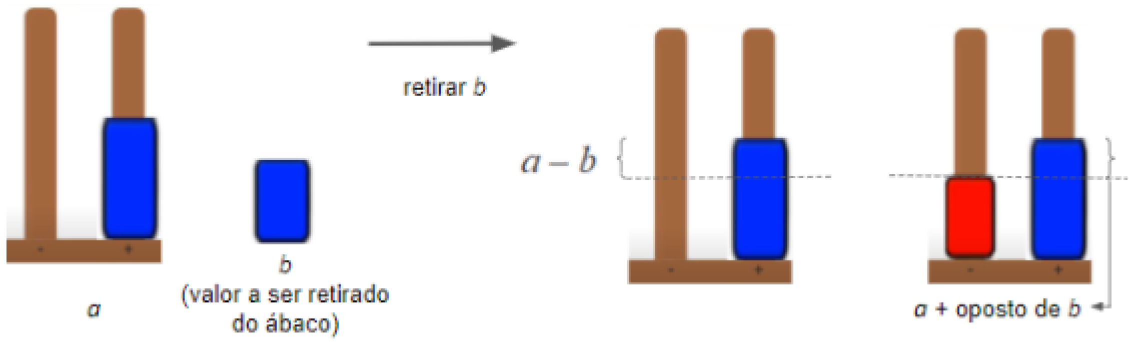
Figura 30: Subtração $a - b$, sendo a e b negativos



Fonte: Acervo das autoras.

O caso em que minuendo a e subtraendo b são positivos, sendo módulo de b menor que módulo de a é análogo (Figura 31). Assim, confirma-se para todos os casos a propriedade: **subtrair é o mesmo que** adicionar **o oposto**.

Figura 31: Subtração $a - b$, sendo a e b positivos e $|a| > |b|$



Fonte: Acervo das autoras.

5.4 Demonstrando as regras de sinais da multiplicação

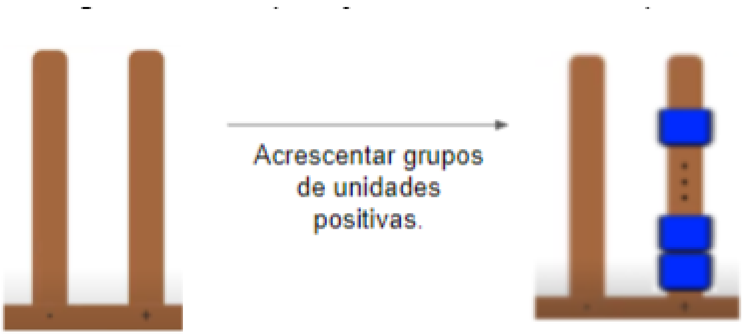
Como já ressaltado na Seção 3.3, quando um dos fatores em uma multiplicação de inteiros é igual a zero, o produto é igual a zero. Assim, o que chamamos de "regras de sinais da multiplicação", diz respeito a fatores que não são iguais a zero.

Para confirmar a conjectura sobre a "regra de sinais" para a multiplicação, vamos aqui também utilizar os cilindros e dividir em casos: fatores possuem sinais iguais; e fatores possuem sinais diferentes.

Se os **dois fatores são positivos**, pela definição de multiplicação de inteiros, adicionamos **a zero** grupos com unidades positivas no ábaco (tantas unidades positivas quantas o segundo fator explicitar (Figura 32)); desse modo, teremos no ábaco apenas unidades positivas, portanto **o resultado é positivo, com valor absoluto igual ao produto**

dos valores absolutos dos dois fatores. Cabe ressaltar que até aqui não temos qualquer novidade, uma vez que este caso trata apenas do produto de números naturais e do significado de adição de parcelas iguais.

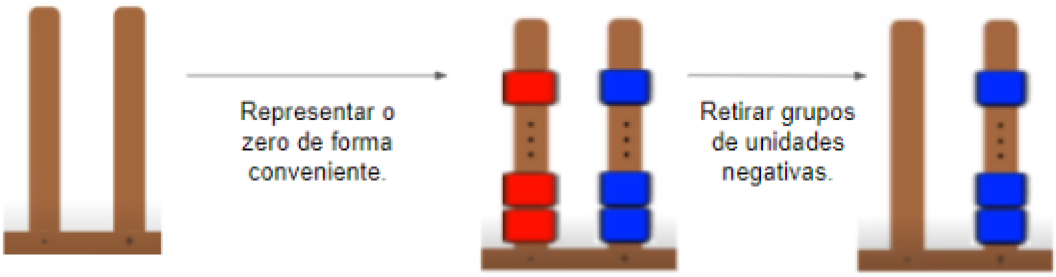
Figura 32: Multiplicação de dois números positivos



Fonte: Acervo das autoras.

Se os dois fatores são negativos, pela definição de multiplicação de inteiros, temos que retirar, de zero, grupos com unidades negativas (tantas unidades negativas quantas o segundo fator explicitar); desse modo, precisamos representar o zero de forma conveniente para poder, dessa representação, retirar unidades negativas. Nesse caso, eventualmente fazendo uso do botão Retirar Zero para representar o resultado em uma só haste, restarão no ábaco apenas unidades positivas e então **o resultado da multiplicação é sempre um número positivo com valor absoluto igual ao produto dos valores absolutos dos dois fatores** (Figura 33).

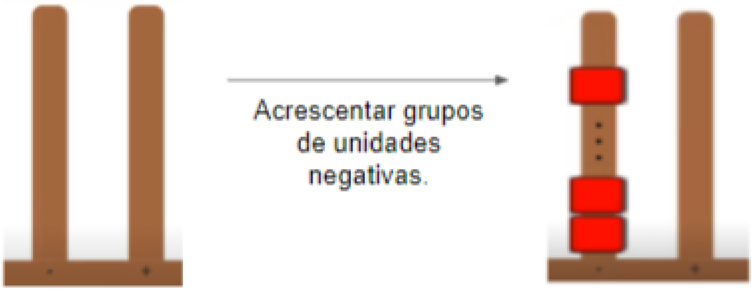
Figura 33: Multiplicação de dois números negativos



Fonte: Acervo das autoras.

Se o primeiro fator é positivo e o segundo fator é negativo, pela definição de multiplicação de inteiros, temos que acrescentar a zero grupos com unidades negativas (tantas unidades negativas quantas o segundo fator explicitar) obtendo apenas unidades negativas representadas no ábaco (Figura 34) e então, **o resultado é negativo com valor absoluto igual ao produto dos valores absolutos dos dois fatores**.

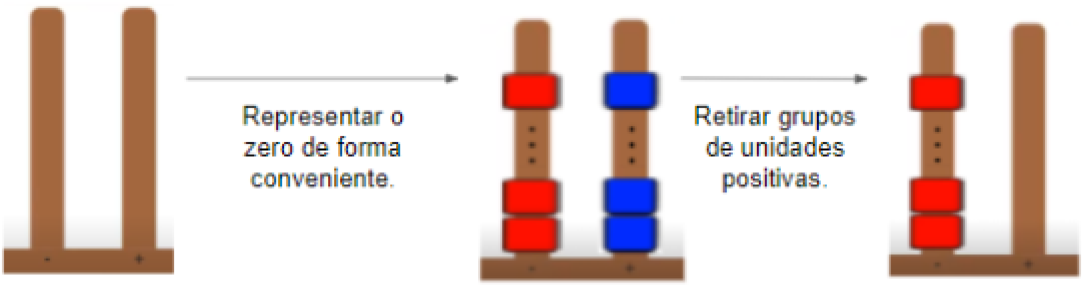
Figura 34: Multiplicação de número positivo por número negativo



Fonte: Acervo das autoras.

Se o primeiro fator é negativo e o segundo fator é positivo, pela definição de multiplicação de inteiros, temos que retirar de zero, no ábaco, grupos com unidades positivas, ficando no ábaco, eventualmente fazendo uso do botão Retirar Zero, apenas unidades negativas e então, **o resultado é negativo com valor absoluto igual ao produto dos valores absolutos dos dois fatores** (Figura 35).

Figura 35: Multiplicação de número negativo por número positivo



Fonte: Acervo das autoras.

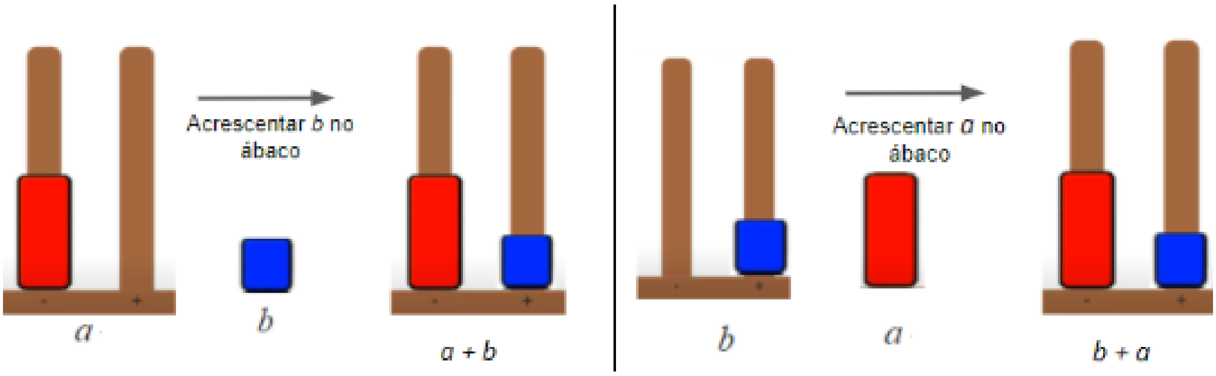
5.5 Exemplos de Propriedades das operações exploráveis no ábaco

Muitas propriedades das operações em $\mathbb{Z}$ podem ser exploradas utilizando o ábaco. Começando com alguns exemplos pode-se, a seguir, fazer uso dos cilindros para amparar a generalização, produzindo muitas vezes uma demonstração apenas com imagens. Apresentamos aqui alguns exemplos dessas propriedades.

5.5.1 Comutatividade da adição

Para comprovar a propriedade comutativa da adição, consideramos a um número inteiro negativo e b um número inteiro positivo. Observe na Figura 36 que, ao acrescentarmos a e após, acrescentarmos b obtemos o mesmo resultado que ao acrescentarmos primeiramente b e depois, acrescentarmos b.

Figura 36: Comutatividade da adição de um inteiro negativo a e um inteiro positivo b



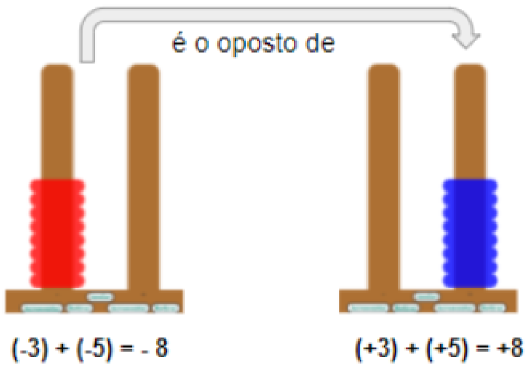
Fonte: Acervo das autoras.

Para os demais casos da adição, a comutatividade também é válida e, para abordá-los em sala de aula, a turma pode ser dividida em grupos e cada grupo refletir sobre um caso diferente. É importante deixar claro aos estudantes que ao ampliar-se um universo numérico, as "antigas" propriedades precisam ser checadas, pois algumas se mantêm (como a comutatividade da adição) mas outras deixam de valer (como o conjunto $\mathbb{N}$ possui um menor elemento, mas o mesmo não acontece mais em $\mathbb{Z}$).

5.5.2 Uma propriedade da adição de inteiros negativos

Para comprovar que a soma de dois inteiros negativos é o oposto da soma de seus opostos (que são então números positivos), começamos com um exemplo. Observe na Figura 37 que, ao adicionarmos (-3) e (-5), obtemos como resultado (-8), que é exatamente o oposto de $(+8)$, resultado de acrescentar $(+3)$ e $(+5)$ (os opostos de (-3) e de (-5), respectivamente).

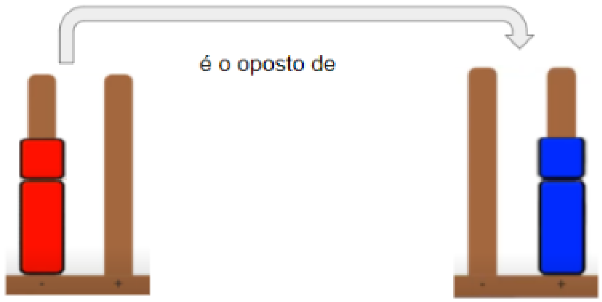
Figura 37: $(-3) + (-5) =$ oposto de $((+3) + (+5))$



Fonte: Acervo das autoras.

O caso genérico pode ser estudado utilizando cilindros coloridos. (Figura 38).

Figura 38: A soma de dois inteiros negativos é o oposto da soma de seus opostos

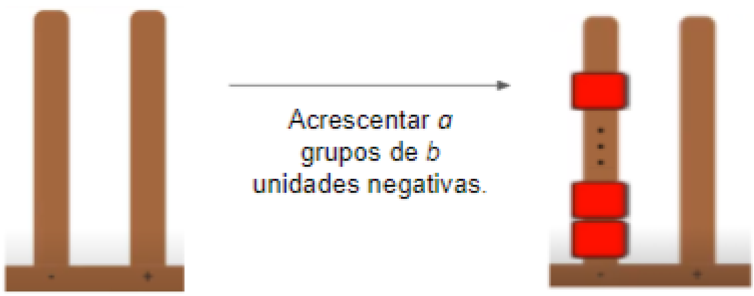


Fonte: Acervo das autoras.

5.5.3 Comutatividade da multiplicação de inteiros

Diferentemente da adição de inteiros, que continua com o significado de juntar, ação que é naturalmente comutativa, a comutatividade da operação de multiplicação não é evidente, pois ela nem sempre é apenas uma adição de parcelas iguais, por exemplo, a multiplicação de inteiros com primeiro fator negativo. Apresentamos aqui o caso em que a é um número inteiro positivo e b é um número inteiro negativo. Observe na Figura 39 que, ao efetuarmos a multiplicação $a \times b$, devemos acrescentar a grupos com b unidades negativas em cada grupo. Obtemos como resultado um número negativo, cujo valor absoluto é o produto dos valores absolutos de a e b.

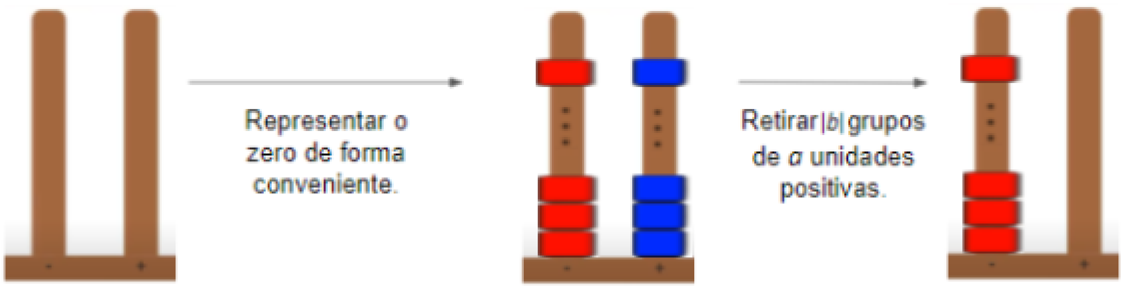
Figura 39: Multiplicação $a \times b$ sendo a um número inteiro positivo e b um número inteiro negativo



Fonte: Acervo das autoras.

Na Figura 40, ilustramos a multiplicação $b \times a$. Para efetuá-la, sendo o primeiro fator negativo, é necessário retirar, de zero, o valor absoluto de b (ou seja, $|b|$) grupos com a unidades positivas em cada grupo. Para isso, inicialmente é representado o zero convenientemente, utilizando neste caso $|b|$ grupos com a unidades positivas e $|b|$ grupos com a unidades negativas. Assim, agora é possível retirar $|b|$ grupos com a unidades positivas. O resultado obtido é um número negativo, cujo valor absoluto é o produto entre os valores absolutos de b e a. Como os valores absolutos de b e a pertencem ao conjunto dos números naturais, sabemos que $|a| \times |b| = |b| \times |a|$. Assim, temos que $a \times b = b \times a$.

Figura 40: Multiplicação $b \times a$ sendo a um número inteiro positivo e b um número inteiro negativo.



Fonte: Acervo das autoras.

Os demais casos da comutatividade da multiplicação têm argumentos similares e são deixados para o leitor.

Capítulo 6

Sugestões para a sala de aula e para o ensino remoto

Neste capítulo, trazemos, baseados em experiências da primeira autora no ensino presencial e remoto, atividades e sugestões para a sala de aula utilizando o Ábaco Virtual dos Números Inteiros. Muitas dessas atividades buscam instigar os estudantes a formularem conjecturas na construção das chamadas "regras de sinais" das operações no conjunto dos números inteiros por meio do uso do Ábaco Virtual para resolver operações em $\mathbb{Z}$. É importante salientar que, antes de apresentarmos o Ábaco Virtual aos estudantes e iniciarmos o estudo das operações no conjunto dos números inteiros com os alunos, é preciso garantir que os pré-requisitos mencionados na Seção 2.1 tenham sido abordados.

É importante salientar também que a primeira versão do Ábaco Virtual dos Números Inteiros continha apenas os botões "Acrescentar", "Retirar" e "Anular" (esse último renomeado na versão atual como "Retirar Zero"). A ideia do botão "Acrescentar zero" surgiu ao longo da produção do minicurso proposto no 2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Centro-Oeste e deste *e-book*, ao percebermos que o novo botão "Acrescentar Zero" pode auxiliar bastante os estudantes na realização das operações no Ábaco Virtual.

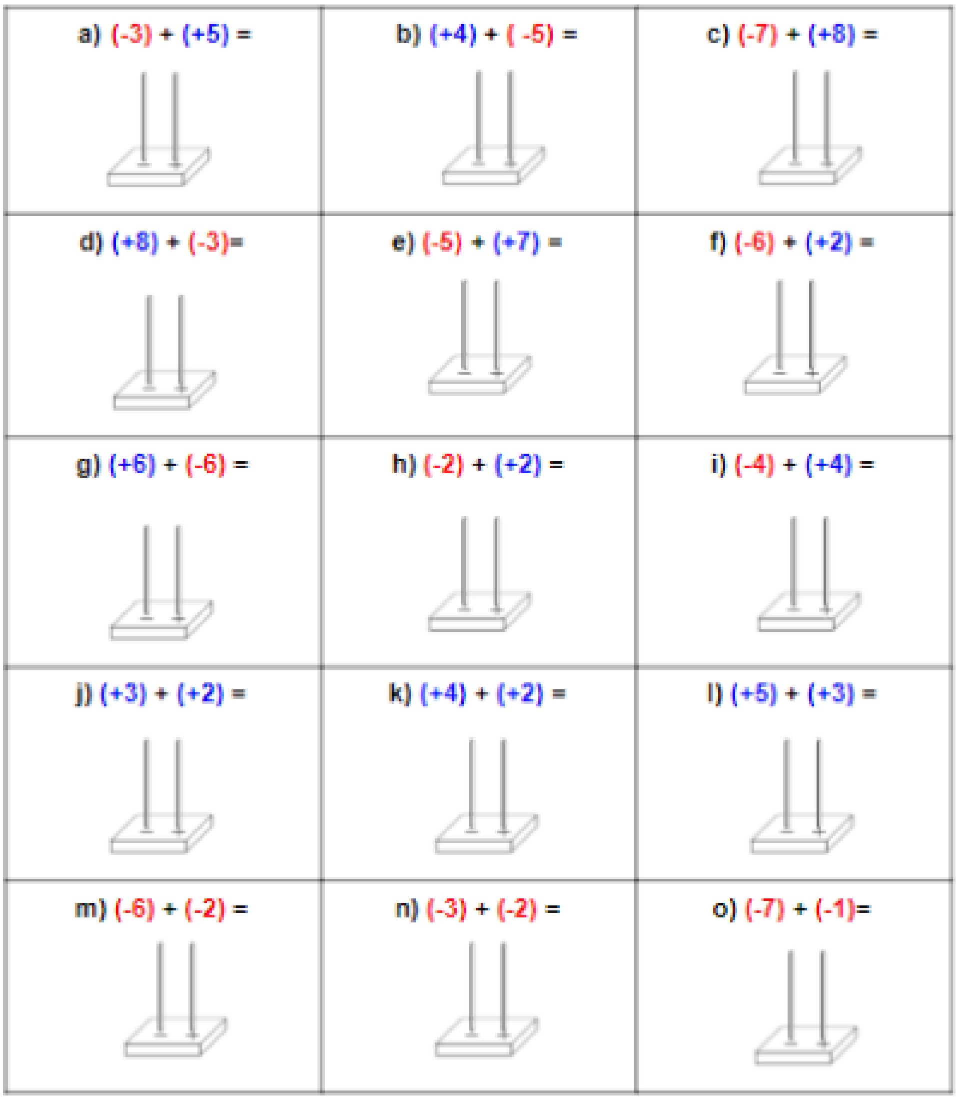
Após contemplar os pré-requisitos mencionados na Seção 2.1, pode ser apresentado o Ábaco Virtual aos alunos, incluindo convenções para as peças coloridas e para as hastes e o funcionamento dos botões. Durante a pandemia, como estávamos tendo aula de forma remota, a apresentação foi feita por meio de um vídeo (<https://youtu.be/5Re0vhfZjpE>).

Após o professor apresentar o Ábaco Virtual, os alunos podem ser convidados a representar nessa ferramenta números de diferentes formas (ver Seção 2.2), uma vez que esse é um processo fundamental para a realização de algumas subtrações e multiplicações. Quando os alunos já compreenderam o uso do Ábaco Virtual e a possibilidade de representar um mesmo número de diferentes formas, pode ser iniciado o estudo das operações, começando pela adição.

6.1 A adição de números inteiros no Ábaco Virtual

A abordagem da adição de inteiros deve ser iniciada retomando o significado de juntar da adição de números naturais e reiterando que o mesmo não é alterado nesse novo universo numérico. A seguir, deve ser ressaltado que a representação no Ábaco de um número inteiro em duas hastes pode ser interpretada como a adição de um número positivo com um número negativo (ver Seção 2.2). É essencial que os alunos então resolvam adições no Ábaco para, além de praticar, conjecturar sobre as "regras de sinais" da adição em $\mathbb{Z}$. Durante o ensino remoto, a atividade proposta aos estudantes com tal objetivo é apresentada na Figura 41.

Figura 41: Atividade 1 - Atividade sobre Adição no Ábaco Virtual com o objetivo de oportunizar conjecturas sobre as regras de sinal para a adição



Fonte: Acervo das autoras.

Nessa atividade os itens de a) até f) ilustram adições com parcelas de sinais diferentes. Resolvendo esses exercícios, os alunos podem, estimulados pelo professor, conjecturar sobre a adição e compreender que, ao adicionarmos dois números com sinais diferentes, o resultado sempre terá o sinal da parcela de maior valor absoluto, e o valor absoluto da soma é a diferença entre os valores absolutos das parcelas. Devem também ser estimulados a argumentar oralmente e a registrar em palavras suas conclusões. Acreditamos que, a partir da visualização no ábaco, a regra de sinais para adição de números com sinais diferentes pode ser mais facilmente compreendida pelos estudantes. De fato, eles podem observar que essa soma tem como valor absoluto a diferença entre as alturas das unidades nas duas hastes, e o sinal da soma será aquele cuja haste possui o maior número de unidades, ou seja, a maior altura. Após a realização dos exercícios de a) até f), buscamos a generalização com os alunos, conforme explanamos na Seção 5.2.

Ao resolver os itens de g) a i) e estimulados a generalizar e a argumentar sobre seus raciocínios, os alunos podem compreender que, ao adicionarmos dois números opostos quaisquer, o resultado sempre será zero, pois as alturas nas duas hastes, ainda que imaginando um ábaco com hastes de comprimento tão grande quanto necessário, sempre será a mesma, e cada par de unidades de cores diferentes deve ser anulado utilizando o botão "Retirar Zero".

Já ao resolverem os itens de j) a o) utilizando o Ábaco, os alunos podem conjecturar que, ao adicionarmos duas parcelas com sinais iguais, obtemos como soma um número de mesmo sinal, e seu valor absoluto é obtido a partir da adição dos valores absolutos das parcelas. Acreditamos que a compreensão desse resultado pelo aluno é facilitada e reafirmada pela visualização no Ábaco, uma vez que, ao adicionarmos parcelas de mesmo sinal, a altura das argolas empilhadas na haste (positiva, ou negativa) aumenta, já que colocamos argolas em somente uma das hastes ao adicionarmos duas parcelas de sinais iguais. Após a realização desses exercícios com números, podemos buscar a formulação de conjecturas e sua validação, por meio dos cilindros (conforme Seção 5.2) para representar quantidades genéricas.

Em todas as turmas ministradas pela primeira autora, tanto no ensino presencial como no remoto, nas quais foi utilizado o Ábaco Virtual dos Números Inteiros, foi possível notar uma facilidade, por parte dos alunos, com a abstração (imaginação) e com a generalização desses resultados, baseada em argumentações próprias. É importante salientar que, mesmo no ensino remoto, após a resolução dos exercícios propostos nessa atividade, os estudantes já resolveram corretamente, sem a intervenção da professora, adições com valores que não poderiam ser representados no ábaco, como: $(+100) + (-30)$; $(-135) + (-125)$; $(+50)+(-50)$, sugerindo a compreensão dos conceitos trabalhados e a capacidade de imaginar um ábaco que desse conta do registro dessas quantidades e dessa operação. Uma vez construída a adição, é importante propor problemas, exercícios contextualizados e de fixação, para, somente então, iniciar a subtração de números inteiros.

6.2 A subtração de números inteiros no Ábaco Virtual

Para realizar o estudo da subtração, inicialmente o professor pode discutir com os alunos como poderia ser realizada essa operação no Ábaco, reiterando o significado de "retirar", que continua válido no universo numérico dos inteiros. É importante utilizar exemplos que contemplem os vários casos, tais como os que podem ser resolvidos usando a representação do minuendo em uma só haste e também os que o minuendo precisa ser representado de forma conveniente para que seja possível retirar a quantidade definida pelo subtraendo (ver Seção 3.2).

Segundo Ripoll, Rangel e Giraldo (2016, p. 89), "na extensão dos naturais para os inteiros, a inclusão de inversos aditivos (ou simétricos) possibilita que toda subtração seja expressa como uma adição (com o simétrico)". Utilizando o Ábaco Virtual dos Números Inteiros, é possível construir essa relação entre a adição e a subtração em $\mathbb{Z}$.

Para isso, os estudantes podem ser convidados a resolver atividades como a apresentada na Figura 42, na qual devem resolver as subtrações no Ábaco, e as adições mentalmente (levando em conta que a operação de adição já deve estar construída pelos alunos). Após a resolução dos exemplos, os estudantes podem ser estimulados a conjecturar sobre o que acontece ao comparar os itens (1) e (a), (2) e (b), (3) e (c), etc. A partir dessa comparação, os alunos podem observar que as subtrações foram transformadas em adições: o primeiro termo adicionado com o oposto do segundo. Isso, de fato, ocorreu, nas turmas da primeira autora tanto no ensino presencial, como no ensino remoto.

Figura 42: Atividade de comparação, subtração e adição em $\mathbb{Z}$

1. (-8)-(-3)= -5	a)(-8)+(+3)= -5
2. (+5)-(+2)= +3	b)(+5)+(-2)= +3
3. (-4)-(+1)= -5	c)(-4)+(-1)= -5
4. 0 -(-2)= +2	d) 0 + (+2) =+2
5. (-3)-(+2)= -5	e)(-3)+(-2)= -5
6. (+3)-(-3)= +6	f)(+3)+(+3)= +6

Fonte: Acervo das autoras.

Para mostrar que essa conjectura vale para todos os casos, o professor pode apoiar-se nos cilindros e na imaginação dos estudantes. Essa generalização é detalhada na Seção 5.3. Do mesmo modo que na adição de inteiros, antes de realizar o estudo da multiplicação, é importante que os alunos trabalhem em sala de aula com a resolução de problemas e com exercícios que envolvam a subtração em $\mathbb{Z}$.

6.3 A multiplicação de números inteiros no Ábaco Virtual

Assim como nas operações de adição e subtração de inteiros, inicialmente é necessário ampliar a multiplicação para $\mathbb{Z}$ e implementá-la no Ábaco (ver Seção 3.3). Ripoll, Rangel e Giraldo (2016, p. 92) ressaltam que "a regra dos sinais da multiplicação não é uma "convenção" nem uma "regra arbitrária", e sim a única maneira de se estender a operação de multiplicação dos naturais para os inteiros, de tal forma que as propriedades fundamentais sejam preservadas, isto é, aquelas que garantem a estrutura de anel". Claro que, mais interessante que simplesmente apresentar a regra aos alunos, é permitir que os mesmos a descubram após ficar clara a definição de multiplicação de inteiros, sendo o Ábaco um recurso que possibilita essa descoberta.

Assim, após ser ampliada a definição de multiplicação para $\mathbb{Z}$, os estudantes devem ser convidados a resolver exercícios de multiplicação utilizando o Ábaco para então conjecturar sobre as regras de sinais da multiplicação. Na Figura 43, apresentamos uma atividade na qual os alunos devem resolver as multiplicações no Ábaco Virtual para criar conjecturas sobre as regras de sinais da multiplicação.

Figura 43: Atividade "Resolva as multiplicações no Ábaco Virtual"

1. (+1)x(+5)=	7. (-3)x(+2)=
2. (+5)x(+2)=	8. (-2)x(+1)=
3. (+4)x(+3)=	9. (+4)x(-1)=
4. (-1)x(-2)=	10.(-2)x(+6)=
5. (-3)x(-2)=	11.(+3)x(-2)=
6. (-2)x(-5)=	12.(+5)x(-1)=

Fonte: Acervo das autoras.

Ao resolverem essas operações, os estudantes podem observar que quando multiplicamos números com sinais iguais, o resultado é positivo e, quando multiplicamos números com sinais diferentes, o resultado é negativo e, ainda, o valor absoluto do resultado é o produto dos valores absolutos dos fatores. Para mostrar que essa conjectura vale para todos os casos, o professor pode apoiar-se nos cilindros e na imaginação dos alunos (ver Seção 5.4).

As propriedades das operações também podem ser estudadas utilizando as ideias desenvolvidas com o Ábaco. Em Ripoll, Fisher e Meinerz (2021), é discutida a propriedade comutativa da multiplicação nos diferentes universos numéricos encontrados pelo estudante ao longo da escola básica. Na seção relativa aos números inteiros, é reiterado que esse assunto pode ser abordado também usando o ábaco.

Finalmente, cabe ressaltar que, ao construirmos as operações no ábaco, criamos uma nova representação para os números inteiros, permitindo o tratamento nesse novo registro e a conversão entre os registros pictórico e numérico, defendidos por Duval, para que o indivíduo tenha a compreensão dos conceitos abordados.

Capítulo 7

Minimizando a dupla descontinuidade: o Ábaco Virtual e sua proximidade com a construção formal dos números inteiros

Inicialmente cabe esclarecer que estamos aqui denominando "construção formal dos inteiros" a construção matemática do universo numérico $\mathbb{Z}$ estudada em disciplinas de alguns cursos de graduação em Matemática (Licenciaturas e/ou Bacharelados) que abordam conteúdos de aritmética. Essa construção pode ser encontrada, por exemplo, no livro "A construção dos Números" de Jamil Ferreira (FERREIRA, 2013). Cabe ressaltar que a ênfase do significado de uma construção dita formal não é na simbologia matemática, mas sim na consistência da construção matemática (evidenciando, por exemplo, que não são geradas contradições).

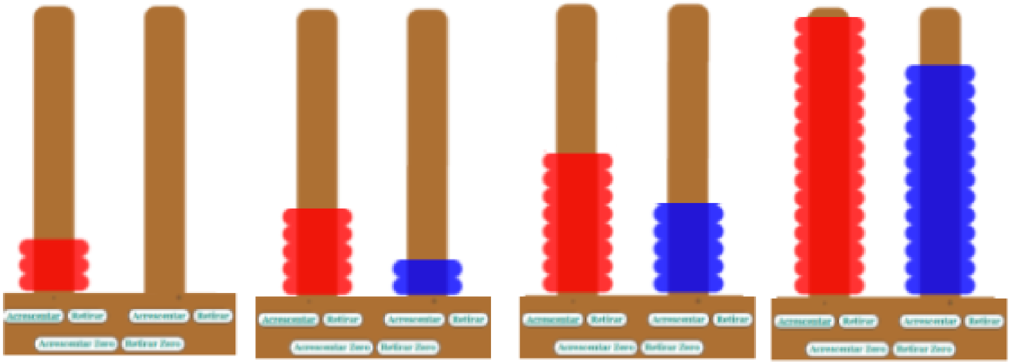
Com esse significado em mente, apresentamos, a seguir, a estreita relação entre a construção formal dos números inteiros e o ábaco, focando, em particular, no Ábaco Virtual dos Números Inteiros. Tem-se aqui o objetivo de enaltecer o ábaco como uma ferramenta com a potencialidade de ressaltar aspectos elementares, segundo Felix Klein, não só da construção dos números inteiros bem como de suas propriedades (ainda que aqui neste texto não as abordemos em sua totalidade), e como um elo entre a matemática abordada na formação inicial do professor (curso de Licenciatura) e a matemática ensinada na escola. Godoi (2015) também expressa uma preocupação em aproximar a matemática formal com o Ábaco físico dos Números Inteiros; ele apresenta essa aproximação "através de associações entre os procedimentos do Ábaco e as propriedades dos Números Inteiros" (GODOI, 2015, p. 36).

7.1 O Ábaco Virtual e sua proximidade com a construção formal dos números inteiros

Iniciamos retomando as múltiplas representações de um número inteiro no ábaco, o que nos remete, como mostramos a seguir, às classes de equivalência utilizadas na construção formal dos números inteiros. Na Figura 44 temos quatro diferentes representações para o número (-3). Observamos que a cor facilita a identificação do sinal, mas ela (a cor) não é fundamental nessa representação, ou seja, há uma redundância de convenções, já que, uma vez que existem duas hastes, bastaria a convenção de que na haste da esquerda inserimos as unidades negativas e na da direita as unidades positivas e a informação de quantas unidades foram acrescentadas em cada haste.

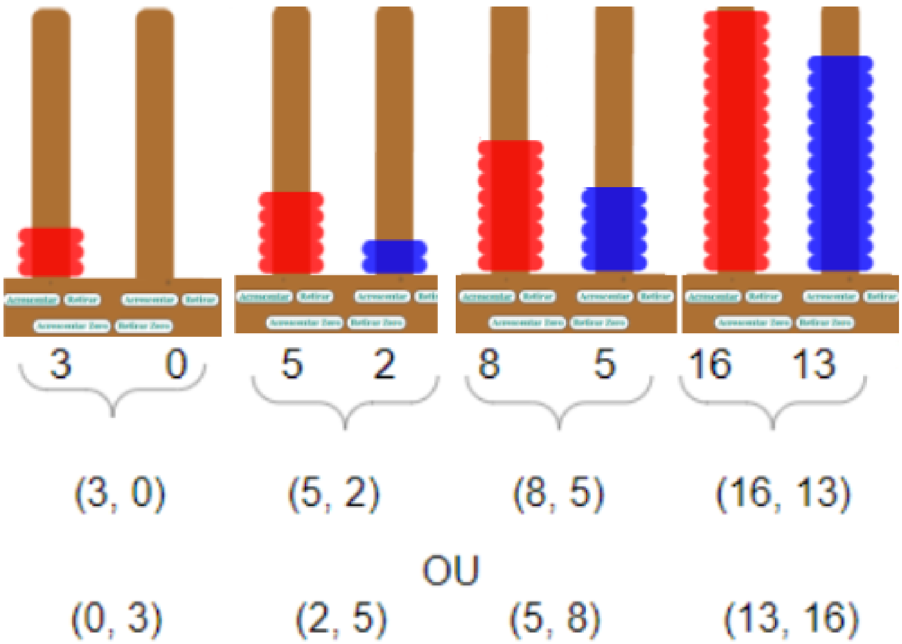
Ou ainda, uma convenção para a ordem com que listamos as unidades positivas e negativas não apenas é suficiente como também nos remete à ideia de pares ordenados, seja $(0, 3)$ ou $(3, 0)$. A Figura 45 ilustra essa associação das representações utilizadas na Figura 44 com os pares ordenados.

Figura 44: Diferentes representações para o número inteiro (-3)



Fonte: Acervo das autoras.

Figura 45: Associação das diferentes representações para o número (-3) com pares ordenados



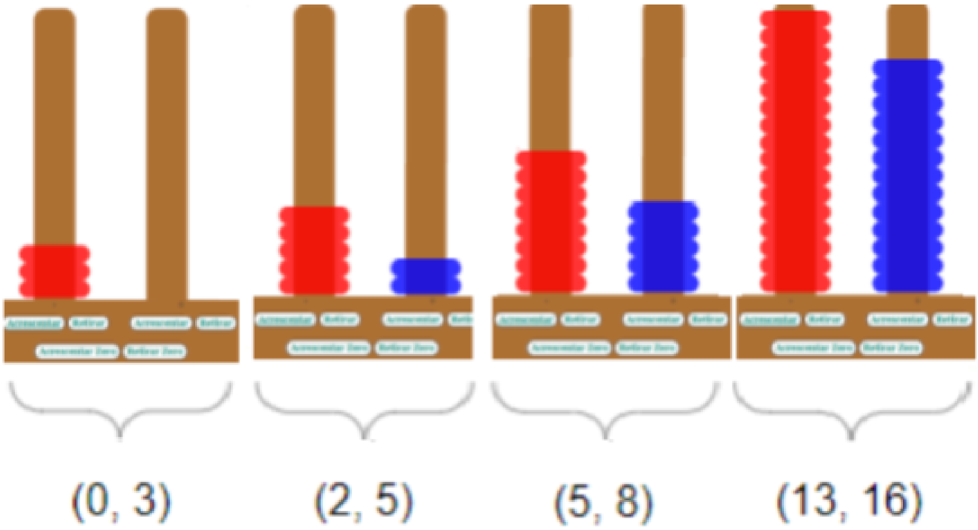
Fonte: Acervo das autoras.

Na construção formal, em geral a escolha é pela segunda forma de pares ordenados (positiva, negativa), que também é a ordem que utilizamos nesta seção.

A justificativa para a escolha (positiva, negativa) deve-se ao fato de que as diferenças "primeira componente menos a segunda componente" ou ainda "número de unidades na haste positiva - número de unidades na haste negativa" são iguais ao novo objeto matemático a ser construído e que queremos chamar de (-3). De fato, no conjunto dos números inteiros, as diferenças associadas aos pares da Figura 46 são

$$\begin{array}{ccccccc} (0,3) & & (2,5) & & (5,8) & & (13,16) \\ 0-3 & = & 2-5 & = & 5-8 & = & 13-16 \end{array} \qquad (*)$$

Figura 46: Diferentes representações para o número (-3) com pares ordenados na forma (positiva, negativa)



Fonte: Acervo das autoras.

Note que os números que formam os pares ordenados são todos naturais, desse modo podemos considerar como ponto de partida para a construção formal dos inteiros o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. No entanto, as igualdades em $(*)$ não são legítimas em $\mathbb{N}$ por isso, as reescrevemos, sem alterar a ideia de que são mantidas as diferenças, porém agora de uma forma legítima no conjunto dos números naturais. Por exemplo, tomando a igualdade $5 - 8 = 13 - 16$, obtemos

$$5 - 8 = 13 - 16 \Leftrightarrow 5 + 16 = 13 + 8.$$

Note que o lado direito da equivalência é uma igualdade que faz sentido em $\mathbb{N}$. Essa reescrita também pode ser implementada entre quaisquer outros pares mencionados, por exemplo

$$0 - 3 = 2 - 5 \Leftrightarrow 0 + 5 = 2 + 3 \ \text{ e } \ 2 - 5 = 5 - 8 \Leftrightarrow 2 + 8 = 5 + 5.$$

Assim, na construção formal, a ideia da manutenção das diferenças é redigida da seguinte forma: Dizemos que "dois pares de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ estão relacionados" se e só se "a soma dos dois extremos é igual à soma dos dois meios" (as cores estão indicando esses termos). Denotamos por **R** (ou por $\sim$) essa relação entre pares de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e escrevemos

$$(5,\ 8)\ \mathrm{R}\ (13,\ 16) \text{ ou } (5,\ 8) \sim (13{,}16) \Leftrightarrow 5{+}16{=}13{+}8$$

Note que, assim,

$$(0, 3) \sim (2, 5), (0, 3) \sim (5, 8), (0, 3) \sim (13, 16), \ldots$$

Vamos caracterizar os pares ordenados (a, b) que se relacionam com o par ordenado $(0, 3)$. Temos

$$(0,3) \sim (a, b) \Longleftrightarrow 0 + b = a + 3$$

ou seja,

$$(0,3) \sim (a, b) \Longleftrightarrow b = a + 3.$$

Ou seja, todos os pares que se relacionam com $(0,3)$ são da forma $(a, a+3)$ para qualquer número natural a.

Esses infinitos pares ordenados que estão relacionados com $(0,3)$, são as infinitas formas de representar o número (-3) no ábaco e formam o que denominamos de classe de equivalência de $(0,3)$ (com respeito à relação $\sim$), e que denotamos por $\overline{(0,3)}$. Ou seja,

$$\overline{(0,3)} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (0,3) \sim (a,b)\}$$

ou ainda, pela definição de $\sim$,

$$\overline{(0,3)} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid b = a + 3\} = \{(a, a+3) \mid a \in \mathbb{N}\},$$

ou, ainda, $\overline{(0,3)} = \overline{(a, a+3)}$, qualquer que seja o número natural a, que pode ser confirmado com o que já observamos na Figura 46:

$$\overline{(0,3)} = \overline{(2,5)} = \overline{(2,5)} = \overline{(13,16)}.$$

Na construção formal, esta classe (representada por qualquer par da forma $(a, a+3)$) é chamada de número inteiro. A notação usual (a utilizada em contextos diferentes da construção formal) para tal classe recebe o nome/notação (-3);

$$-3 = \overline{(0,3)}.$$

Vejamos outro exemplo: segundo a relação $\sim$, $(3,0) \sim (a,b) \Longleftrightarrow 0 + a = b + 3$, ou seja, $(3,0) \sim (b+3, b)$ para cada natural b. E portanto,

$$\begin{aligned}\overline{(3,0)} &= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (3,0) \sim (a,b)\}\\ &= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b + 3\}\\ &= \{b+3, b) \mid b \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

A notação usual para a classe $\overline{(3,0)}$ é o número positivo $(+3)$.

Vejamos o que acontece com as infinitas representações do zero.

$$0 = \overline{(0,0)} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (0,0) \sim (a,b)\} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b\}.$$

Agora, trocando o número natural 3 por qualquer outro número natural, é possível generalizar os raciocínios anteriores e perceber que já podemos apresentar as classes de equivalência para os 3 tipos de um número inteiro z.

$$\begin{array}{lll} \text{- se } z = 0 & \text{então } z = \overline{(0,0)} & \\ \text{- se } z \text{ é positivo,} & \text{então } z = \overline{(z,0)} & \\ \text{- se } z \text{ é negativo,} & \text{então } z = \overline{(0,|z|)}, & \end{array} \qquad (**)$$

de onde concluímos que o conjunto dos números inteiros pode ser formado pela classe do zero unida com todas as classes que representam os números naturais, e unida, ainda, com todas as classes que representam os números negativos, ou seja:

$$\mathbb{Z} = \{\overline{(0,0)}\} \cup \{\overline{(a,0)} \mid a \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\overline{(0,d)} \mid d \in \mathbb{N}^*\} \qquad (***)$$

Essa união $(***)$ reflete o que já discutimos para o ábaco: qualquer número inteiro não nulo pode, afinal, ser representado em uma só haste do ábaco: $\overline{(a,0)}$ pode ser representado apenas na haste dos positivos e $\overline{(0,d)}$, pode ser representado apenas na haste dos negativos, lembrando que um par (a,d) expressa a configuração de a unidades positivas e d unidades negativas.

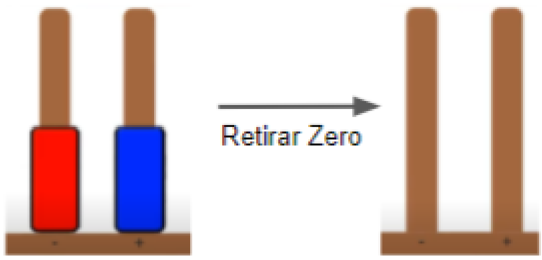
Sabemos então que qualquer número inteiro pode ser representado por uma classe de equivalência em um dos 3 conjuntos de $(***)$. E, reciprocamente, será que qualquer par ordenado de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ representa alguma das classes mencionadas em $(***)$, ou seja, representa algum número inteiro? Para responder a essas perguntas, fazemos uso da Lei da Tricotomia entre números naturais, que diz que, dados $a, d \in \mathbb{N}$, vale uma e somente uma das três possibilidades:

$$a > d, \;\; a = d \;\; \text{ou} \;\; a < d.$$

Nos Quadros 10, 11 e 12 apresentamos um paralelo entre as argumentações utilizadas na construção formal e no ábaco, procurando evidenciar a proximidade entre elas.

Quadro 10: O caso $a = d$

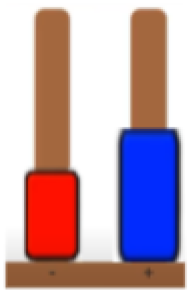
Se $a = d$, então	
Na Construção formal	No Ábaco Virtual
$\overline{(a,d)} = \overline{(d,d)}$	tem-se $a = d$ unidades positivas e d unidades negativas

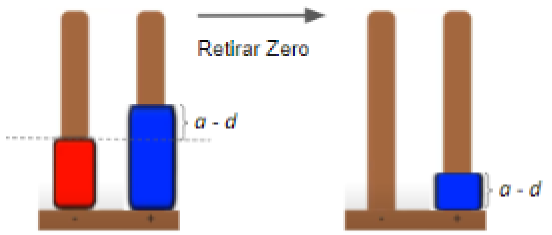
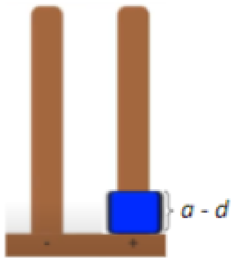
Mas $(d,d) \sim (0,0)$, pois pela definição de $\sim$, $d+0 = d+0$. Portanto $\overline{(d,d)} = \overline{(0,0)}$	Então as hastes positiva e negativa estão com a mesma altura, portanto a diferença entre o número de unidades positivas e o número de unidades negativas é zero. Equivalentemente, utilizando o botão Retirar Zero d vezes chegamos à configuração de nenhuma unidade no ábaco, 
Por (**), o par (a,d) pertence à classe $\overline{(0,0)}$ que é identificada com o número inteiro zero.	Portanto o par (a,d) está associado a uma configuração do número inteiro zero.

Fonte: Acervo das autoras.

No Quadro 11 aparece a origem da relação $\sim$ no ábaco, a saber, a diferença entre o número de unidades positivas e o número de unidades negativas.

Quadro 11: O caso $a > d$

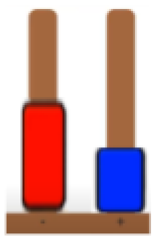
Se $a > d$, então	
Na Construção formal	No Ábaco Virtual
$a - d$ é um número natural	tem-se a unidades positivas e d unidades negativas, portanto a haste positiva tem altura maior do que a haste negativa 

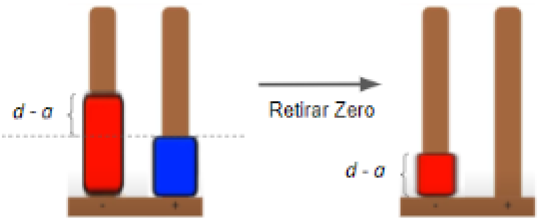
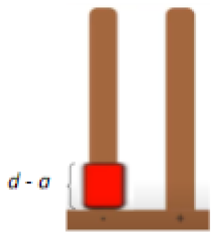
Pela definição de $\sim$, $(a,d) \sim (a-d,0)$, pois $a+0=d+(a-d)$	Portanto, a diferença (obtida pelo botão Retirar Zero) entre o número de unidades positivas e o número de unidades negativas é positiva. 
Logo, $\overline{(a,d)} = \overline{(a-d,0)}$ que, por $(**)$ é um número positivo e que é identificada com o número inteiro positivo $a-d$	 Portanto o par (a,d) está associado a uma configuração do número inteiro positivo $a-d$

Fonte: Acervo das autoras.

No Quadro 11, para encontrar no Ábaco Virtual uma representação do número em uma só haste, é necessário fazer uso do botão Retirar Zero um número de vezes igual à diferença $a-d$ entre o número de unidades positivas e o número de unidades negativas.

Quadro 12: O caso $a < d$

Se $a < d$, então	
Na Construção formal	No Ábaco Virtual
$d-a$ é um número natural	tem-se a unidades positivas e d unidades negativas, portanto a haste negativa tem altura maior do que a haste positiva 

Pela definição de $\sim$, $(a, d) \sim (0, d - a)$, pois $a + (d - a) = d + 0$	Portanto, a diferença (obtida pelo botão Retirar Zero) entre o número de unidades positivas e o número de unidades negativas é negativa. 
Logo, $\overline{(a, d)} = \overline{(0, d - a)}$ que, por $(**)$ é um número negativo e que é identificada com o número inteiro negativo $a - d$	 Portanto o par (a, d) está associado a uma configuração do número inteiro negativo $a - d$

Fonte: Acervo das autoras.

No Quadro 12, para encontrar no Ábaco Virtual uma representação do número em uma só haste, é necessário fazer uso do botão Retirar Zero um número de vezes igual à diferença $d - a$ entre o número de unidades negativas e o número de unidades positivas.

Concluímos assim que qualquer par ordenado de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ representa alguma das classes mencionadas.na união em $(* * *)$, ou seja, representa algum número inteiro.

A conexão entre o Ábaco Virtual e a construção formal do conjunto dos números inteiros até aqui apresentada teve por objetivo evidenciar no ábaco a origem da definição que é ponto de partida para a construção de um número inteiro e que pode constituir um obstáculo para quem está sendo apresentado à construção formal pela primeira vez:

Definição

Em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definimos a relação R por:

$$(a, b)\mathrm{R}(c, d) \text{ se e só se } a + d = b + c.$$

Na construção formal, essa definição é seguida da demonstração de que R é uma relação de equivalência e da definição do conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros como o conjunto das classes de equivalência por ela originadas. Para os detalhes dessa construção formal indicamos, por exemplo, Ferreira (2013).

7.2 O Ábaco Virtual e sua proximidade com a adição de inteiros na construção formal

Vejamos agora o elo que existe entre o ábaco e a adição de inteiros na construção formal. Para a definição da adição formal de inteiros (isto é, das classes de equivalência) vamos buscar inspiração na Seção 3.1. Para isso, levando em conta a lei da tricotomia (comparando cada parcela com o zero), precisamos analisar os seguintes casos:

i) adicionando dois números inteiros de sinais opostos

ii) adicionando zero

iii) adicionando dois números inteiros de mesmo sinal, pois, como veremos, os encaminhamentos dados a esses casos são diferentes.

i) adicionando dois números inteiros de sinais opostos

A título de ilustração, começamos adicionando números opostos, não sem antes relembrar que a definição de oposto faz parte dos pré-requisitos à apresentação do ábaco, e que no Ábaco Virtual, uma configuração que faz uso das duas hastes pode ser encarada como uma adição de um número positivo com um número negativo. Assim, qualquer configuração no Ábaco Virtual que faz uso do mesmo número de unidades positivas e negativas representa o número 0 , por exemplo,

$$0 = (+3) + (-3).$$

Relacionando esses números com as classes de equivalência da construção formal, temos

$$\overline{(0,0)} = 0 = (+3) + (-3) = \overline{(3,0)} + \overline{(0,3)}.$$

Por outro lado, sabemos que $\overline{(3,3)} = \overline{(0,0)}$ (ver Quadro 10), logo

$$\overline{(3,3)} = \overline{(0,0)} = \overline{(3,0)} + \overline{(0,3)}.$$

O mesmo raciocínio vale para qualquer número natural a no lugar de +3, ou seja,

$$\overline{(a,0)} + \overline{(0,a)} = \overline{(a,a)}.$$

Note que a igualdade acima sugere uma adição de classes “componente a componente”:

$$\overline{(a,0)} + \overline{(0,a)} = \overline{(a+0,0+a)} = \overline{(a,a)}.$$

Tratemos agora da adição de um inteiro negativo com um inteiro positivo (o caso da adição de um inteiro positivo com um inteiro negativo é análogo e será deixado ao leitor). Consideramos, por exemplo, a adição de números de sinais opostos mas que não são opostos, digamos, (-4) e $(+\ 2)$.

Pensando no ábaco em uma configuração formada por 4 unidades negativas e 2 unidades positivas e utilizando o botão Retirar Zero, chega-se à conclusão de que

$$(-4) + (+2) = (-2),$$

igualdade que, quando reescrita na forma de classes de equivalência, leva-nos a

$$\overline{(0,4)} + \overline{(2,0)} = (-4) + (+2) = (-2) = \overline{(0,2)}.$$

Por outro lado, sabemos que $\overline{(0,2)} = \overline{(2,4)}$ (ver Quadro 12), portanto

$$\overline{(0,4)} + \overline{(2,0)} = \overline{(2,4)}.$$

A igualdade acima também sugere uma adição de classes "componente a componente":

$$\overline{(0,4)} + \overline{(2,0)} = \overline{(0+2, 4+0)} = \overline{(2,4)}.$$

Será que isso valeria para qualquer adição de um número positivo com um número negativo que não é o seu oposto?

No Ábaco Virtual, sabemos que qualquer número positivo e qualquer número negativo admitem uma representação em uma só haste. Assim, a soma de um número positivo a com um número negativo $-d$, sendo $d \in \mathbb{N}$, admite a configuração formada por a unidades positivas e d unidades negativas. Por sua vez, essa configuração está associada ao par (a,d) (ver Figura 46) que, na construção formal, é um representante do número inteiro $\overline{(a,d)}$ (ver Quadros 11 e 12). Assim, na construção formal,

$$\overline{(a,0)} + \overline{(0,d)} = \overline{(a,d)},$$

e também nesse caso percebemos que a adição de classes poderia ser realizada "componente a componente":

$$\overline{(a,0)} + \overline{(0,d)} = \overline{(a+0, 0+d)} = \overline{(a,d)}$$

ii) adicionando zero

Começamos com os exemplos $(-4) + 0$ e $(\ +5) + 0$:

Reescrevendo a igualdade $(-4) = (-4) + 0$ em temos das classes de equivalência $-4 =$

$\overline{(0,4)}$,

$$\overline{(0,4)} + \overline{(0,0)} = \overline{(0,4)},$$

o que sugere, novamente, uma soma de classes componente a componente:

$$\overline{(0,4)} + \overline{(0,0)} = \overline{(0,4)} = \overline{(0+0,4+0)}.$$

O mesmo ocorre para a adição de zero com o número positivo $(+5) : (+5) = (+5) + 0$ que, reescrita em termos das classes de equivalência, fica $\overline{(5,0)} + \overline{(0,0)} = \overline{(5,0)}$, e

$$\overline{(5,0)} = \overline{(5+0,0+0)}.$$

Os exemplos acima podem ser generalizados para quaisquer números positivos e negativos, o que nos leva às seguintes igualdades:

$$\overline{(a,0)} + \overline{(0,0)} = \overline{(a,0)} = \overline{(a+0,0+0)},$$

e

$$\overline{(0,d)} + \overline{(0,0)} = \overline{(0,d)} = \overline{(0+0,0+d)},$$

para $a, d \in \mathbb{N}$ quaisquer, o que sugere, novamente, uma soma de classes componente a componente.

iii) adicionando dois números de mesmo sinal

Aqui novamente veremos que fica sugerido para a soma adicionar componente a componente. Começamos com dois exemplos.

Reescrevendo a igualdade $(+2) + (+3) = (+5)$ em temos das classes de equivalência, temos

$$\overline{(2,0)} + \overline{(3,0)} = \overline{(5,0)} = \overline{(2+3,0+0)}.$$

e reescrevendo a igualdade

$$(-3) + (-4) = (-7)$$

temos

$$\overline{(0,3)} + \overline{(0,4)} = \overline{(0,7)} = \overline{(0+0,3+4)}.$$

Os exemplos acima podem ser generalizados para quaisquer números positivos e negativos,

$$\overline{(a,0)} + \overline{(c,0)} = \overline{(a+c,0)} = \overline{(a+c,0+0)}$$

e

$$\overline{(0,b)} + \overline{(0,d)} = \overline{(0,b+d)} = \overline{(0+0,b+d)}$$

para $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ quaisquer.

Até aqui procurou-se mostrar a conexão entre a construção formal do conjunto dos números inteiros e o Ábaco Virtual no que diz respeito à adição de números inteiros, tentando mostrar no ábaco a origem da definição dessa operação na construção formal:

Definição
Dados $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ em $\mathbb{Z}$, definimos a soma $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}$ como sendo o inteiro $\overline{(a+c, b+d)}$.

Resta mostrar, na construção formal, que esse resultado independe dos representantes escolhidos para as parcelas, o que é demonstrado, por exemplo, em Ferreira (2013, p. 38).

7.3 O Ábaco Virtual e sua proximidade com a subtração de inteiros na construção formal

Iniciamos identificando o oposto de uma classe. No Ábaco Virtual, a ação "tomar o oposto de" resume-se a considerar a mesma quantidade de argolas, porém em hastes trocadas, portanto também com cor trocada. Relacionando com as classes de equivalência, essa ação corresponde a trocar a ordem dos elementos do par ordenado que representa a classe, o que pode ser ilustrado no exemplo a seguir.

Como $(-3) = \overline{(0,3)}$, tem-se

$$\text{oposto de } \overline{(0,3)} = \text{oposto de } (-3) = (+3) = \overline{(3,0)}.$$

Analogamente, como $(+3) = \overline{(3,0)}$, tem-se que

$$\text{oposto de } \overline{(3,0)} = \text{oposto de } (+3) = (-3) = \overline{(0,3)}.$$

Assim, trocando 3 por a, b naturais temos,

$$\text{oposto de } \overline{(a,0)} = \text{oposto de } (+a) = -a = \overline{(0,a)};$$

e

$$\text{oposto de } \overline{(0,b)} = \text{oposto de } (-b) = (+b) = \overline{(b,0)}.$$

Note que $\overline{(a,0)} + \overline{(0,a)} = \overline{(a,a)} = \overline{(0,0)}$, portanto, por definição de oposto (ou inverso aditivo) na construção formal, as classes $\overline{(a,0)}$ e $\overline{(0,a)}$ são opostas uma da outra.

Na construção formal dos conjuntos numéricos, toda vez que a operação de adição admite elemento neutro e admite a existência de opostos, fica automaticamente definida uma operação de subtração, da seguinte forma:

$$\text{minuendo} - \text{subtraendo} = \text{minuendo} + \text{oposto do subtraendo}.$$

A definição formal da subtração em $\mathbb{Z}$ não é diferente. O que queremos aqui ressaltar é que ela pode também ser motivada por uma discussão amparada no Ábaco Virtual. Consideramos o caso particular

$$(+2) - (+3) = (-1)$$

que, traduzida para classes de equivalência, leva-nos a

$$\overline{(2,0)} - \overline{(3,0)} = \overline{(0,1)}.$$

Por sua vez, fazendo uso da definição de adição de classes,

$$\overline{(0,1)} = \overline{(0,3-2)} = \overline{(2,3)} = \overline{(2,0)} + \overline{(0,3)}.$$

Portanto, fazendo uso do oposto de uma classe,

$$\overline{(2,0)} - \overline{(3,0)} = \overline{(2,0)} + \overline{(0,3)} = \overline{(2,0)} + \text{ oposto de } \overline{(3,0)}.$$

Cabe ressaltar que, na Escola, a definição de subtração é feita a partir do significado de retirar, de modo que "subtrair é o mesmo que adicionar o oposto" toma-se uma propriedade dessa operação. Na Seção 5.3 esta propriedade foi demonstrada com imagens do Ábaco Virtual que falam por si só, isto é, que constituem verdadeiras demonstrações, abordando diferentes casos. Esses casos estão apresentados nas Figuras 24, 25, 27, 28, 29, 30 e 31. A generalização do exemplo mencionado foi demonstrada na Figura 27.

7.4 O Ábaco Virtual e sua proximidade com a multiplicação de inteiros na construção formal

Vejamos agora o elo que existe entre o ábaco e a multiplicação de inteiros na construção formal. Para isso, precisamos analisar diferentes casos, que estão listados na mesma ordem utilizada e com os mesmos exemplos da Seção 3.3.

i) multiplicando dois inteiros positivos

ii) multiplicando um inteiro positivo por um inteiro negativo

iii) multiplicando um inteiro negativo por um inteiro positivo

iv) multiplicando dois inteiros negativos

v) multiplicando por zero

Na multiplicação, consideramos interessante, inicialmente, tentar ser mais diretos, encaminhando a discussão apenas por meio das classes de equivalência da construção formal para evidenciar a complexidade desta operação.

Iniciamos abordando o caso do produto de dois inteiros positivos, considerando o caso particular $(+2) \times (+5)$. Da relação com as classes de equivalência da construção formal, podemos escrever

$$\overline{(10,0)} = (+10) = (+2) \times (+5) = \overline{(2,0)} \times \overline{(5,0)};$$

logo, na construção formal devemos ter

$$\overline{(2,0)} \times \overline{(5,0)} = \overline{(10,0)}.$$

O mesmo argumento pode ser utilizado para inteiros positivos quaisquer, digamos, a e c:

$$\overline{(a \times c, 0)} = a \times c = \overline{(a,0)} \times \overline{(c,0)},$$

Note que a igualdade acima sugere uma multiplicação de classes "componente a componente":

$$\overline{(a \times c, 0)} = \overline{(a,0)} \times \overline{(c,0)}.$$

Ao considerarmos o próximo caso (produto de um inteiro positivo por um inteiro negativo), o caso particular $(+2) \times (-3)$ leva-nos às igualdades

$$\overline{(0,6)} = -6 = (+2) \times (-3) = \overline{(2,0)} \times \overline{(0,3)}$$

Note que a igualdade acima já evidencia que a multiplicação de classes, diferentemente da adição de classes, não pode ser definida "componente a componente", uma vez que $(2 \times 0, 0 \times 3)$ é igual a $(0,0)$ que não é um representante da classe $\overline{(0,6)}$.

Por isso, na falta de uma regra sugerida pelos casos acima para a definição da multiplicação de classes na construção formal, recorremos ao ábaco para buscar uma motivação para essa definição.

Relembrando que no Ábaco Virtual o primeiro fator de uma multiplicação indica se acrescentamos, retiramos grupos de unidades ou se nada fazemos, e o segundo fator indica como se constitui cada grupo de unidades (ver Seção 3.3), passamos a abordar o produto, caso a caso.

i) Multiplicando dois inteiros positivos

Iniciamos pelo caso particular $(+2) \times (+5)$. Nesse caso, acrescentamos no ábaco, a partir do zero, dois grupos de 5 unidades positivas. Ou seja,

$$(+2) \times (+5) = 0 + 5 + 5 = 10$$

Da relação com as classes de equivalência da construção formal, podemos escrever

$$\begin{aligned}\overline{(2,0)} \times \overline{(5,0)} &= \overline{(0,0)} + \overline{(5,0)} + \overline{(5,0)}\\ &= \overline{(0+5+5, 0+0+0)}\\ &= \overline{(10,0)}\end{aligned}$$

tendo sido utilizada na segunda igualdade a definição da adição de classes (componente a componente).

O mesmo argumento pode ser utilizado para inteiros positivos quaisquer, digamos, $a, c \in \mathbb{N}$, o que nos leva a

$$\begin{aligned}\overline{(a,0)} \times \overline{(c,0)} &= \overline{(0,0)} + \overline{(c,0)} + \cdots + \overline{(c,0)}\\ &= \overline{(c + \cdots + c, 0 + \cdots + 0)}\\ &= \overline{(a \times c, 0)}.\end{aligned}$$

Assim, a igualdade acima sugere que a multiplicação de classes deve contemplar:

$$\overline{(a,0)} \times \overline{(c,0)} = \overline{(a \times c, 0)},$$

para quaisquer $a, c \in \mathbb{N}$.

ii) Multiplicando um positivo com um negativo

Iniciamos com o caso particular $(+2) \times (-3)$, para o qual acrescentamos, no Ábaco, dois grupos de 3 unidades negativas. Ou seja,

$$(+2) \times (-3) = (-3) + (-3) = (-6)$$

que, da relação com as classes de equivalência da construção formal, leva-nos a

$$\overline{(2,0)} \times \overline{(0,3)} = \overline{(0,3)} + \overline{(0,3)} = \overline{(0,6)}.$$

O mesmo argumento pode ser empregado trocando 2 e 3 por quaisquer números naturais a, d,

$$\overline{(a,0)} \times \overline{(0,d)} = \overline{(0,d)} + \overline{(0,d)} + \ldots + \overline{(0,d)} = \overline{(0, a \times d)}.$$

Assim, a definição de multiplicação de classes deve ser tal que, para quaisquer números naturais a, d,

$$\overline{(a,0)} \times \overline{(0,d)} = \overline{(0, a \times d)}.$$

Para os dois casos seguintes o primeiro fator é negativo, que remete então à ação de retirar (ou subtrair), a partir do zero, grupos de unidades que são indicados pelo segundo fator.

iii) Multiplicando um inteiro negativo por um inteiro positivo

Iniciamos com o caso particular $(-3)\times(+5)$, para o qual retiramos no Ábaco, a partir do zero, três grupos de 5 unidades positivas. Ou seja,

$$(-3)\times(+5) = 0 - (+5) - (+5) - (+5)$$

ou ainda, lembrando que subtrair é o mesmo que adicionar o oposto,

$$(-3)\times(+5) = 0 + (-5) + (-5) + (-5) = (-15),$$

o que, da relação com as classes de equivalência da construção formal, leva-nos a

$$\overline{(0,3)}\times\overline{(5,0)} = \overline{(0,0)} + \overline{(0,5)} + \overline{(0,5)} + \overline{(0,5)} = \overline{(0,15)}.$$

O mesmo argumento pode ser empregado trocando 3 e 5 por quaisquer números naturais b, c,

$$\overline{(0,b)}\times\overline{(c,0)} = \overline{(0,0)} + \overline{(0,c)} + \overline{(0,c)} + \ldots + \overline{(0,c)} = \overline{(0,b\times c)}$$

Assim, a definição de multiplicação de classes deve ser tal que, para quaisquer números naturais b, c,

$$\overline{(0,b)}\times\overline{(c,0)} = \overline{(0,b\times c)}.$$

iv) Multiplicando dois inteiros negativos

Iniciamos com o caso particular $(-3)\times(-5)$, para o qual retiramos no ábaco, a partir do zero, três grupos de 5 unidades negativas. Ou seja,

$$(-3)\times(-5) = 0 - (-5) - (-5) - (-5)$$

ou ainda, lembrando que subtrair é o mesmo que adicionar o oposto,

$$(-3)\times(-5) = 0 + (+5) + (+5) + (+5) = (+15)$$

o que, da relação com as classes de equivalência da construção formal, nos leva a

$$\overline{(0,3)}\times\overline{(0,5)} = \overline{(0,0)} + \overline{(5,0)} + \overline{(5,0)} + \overline{(5,0)} = \overline{(15,0)}.$$

O mesmo argumento pode ser empregado trocando os valores absolutos 3 e 5 por quaisquer números naturais b, d, obtendo então

$$\overline{(0,b)}\times\overline{(0,d)} = \overline{(0,0)} + \overline{(d,0)} + \overline{(d,0)} + \ldots + \overline{(d,0)} = \overline{(b\times d,0)}$$

Assim, a definição de multiplicação de classes deve ser tal que, para quaisquer números naturais b, d,

$$\overline{(0,b)} \times \overline{(0,d)} = \overline{(b \times d, 0)}.$$

v) Multiplicando por zero

Da interpretação da multiplicação no Ábaco obtemos a interpretação da multiplicação por zero na seguinte forma,

- se o primeiro fator é zero não devem ser colocados grupos de unidades no ábaco e o ábaco continua "zerado"; o que, da relação com as classes de equivalência da construção formal, nos leva a

$$\overline{(0,0)} \times \overline{(c,0)} = \overline{(0,0)}$$

e

$$\overline{(0,0)} \times \overline{(0,d)} = \overline{(0,0)}$$

para quaisquer números naturais c, d.

- se o segundo fator é zero, não teriam unidades nos grupos a serem acrescentadas ou retiradas do ábaco e, portanto, o ábaco também continuaria "zerado". De fato, no caso particular $(-3) \times 0$, para o qual retiramos no Ábaco, a partir do zero, três grupos de 0 unidades, obtemos

$$(-3) \times 0 = 0 - 0 - 0 - 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0,$$

onde a segunda igualdade é válida, uma vez que que o oposto de zero é o próprio zero. Assim, da relação com as classes de equivalência da construção formal, temos

$$\overline{(0,3)} \times \overline{(0,0)} = \overline{(0,0)} + \overline{(0,0)} + \overline{(0,0)} + \overline{(0,0)} = \overline{(0,0)}.$$

O mesmo argumento pode ser empregado trocando o 3 por qualquer número natural b,

$$\overline{(0,b)} \times \overline{(0,0)} = \overline{(0,0)} + \overline{(0,0)} + \overline{(0,0)} + \ldots + \overline{(0,0)} = \overline{(0,0)}.$$

Também no caso particular $(+4) \times 0$ podemos utilizar o mesmo tipo de encaminhamento: acrescentamos no Ábaco, a partir do zero, quatro grupos de 0 unidades. Ou seja,

$$(+4) \times 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0,$$

Assim, da relação com as classes de equivalência da construção formal, temos

$$\overline{(4,0)} \times \overline{(0,0)} = \overline{(0,0)} + \overline{(0,0)} + \overline{(0,0)} + \overline{(0,0)} + \overline{(0,0)} = \overline{(0,0)}.$$

O mesmo argumento pode ser empregado trocando o 4 por qualquer número natural a,

$$\overline{(a,0)} \times \overline{(0,0)} = \overline{(0,0)} + \overline{(0,0)} + \overline{(0,0)} + \ldots + \overline{(0,0)} = \overline{(0,0)}.$$

Resumindo, os diferentes casos abordados acima indicam que a definição de multiplicação de classes deve ser tal que, para quaisquer números naturais a, b, c, d,

(i) $\overline{(a,0)} \times \overline{(c,0)} = \overline{(a \times c, 0)}$,

(ii) $\overline{(a,0)} \times \overline{(0,d)} = \overline{(0, a \times d)}$,

(iii) $\overline{(0,b)} \times \overline{(c,0)} = \overline{(0, b \times c)}$,

(iv) $\overline{(0,b)} \times \overline{(0,d)} = \overline{(b \times d, 0)}$,

(v) $\overline{(0,0)} \times \overline{(c,0)} = \overline{(0,0)}$,

(vi) $\overline{(0,0)} \times \overline{(0,d)} = \overline{(0,0)}$,

(vii) $\overline{(0,b)} \times \overline{(0,0)} = \overline{(0,0)}$,

(viii) $\overline{(a,0)} \times \overline{(0,0)} = \overline{(0,0)}$.

Afirmamos que as igualdades acima determinam a multiplicação de duas classes quaisquer. Por exemplo, a) se $a > b$, e $c > d$ então, do Quadro 11 ,

$$\overline{(a,b)} \times \overline{(c,d)} = \overline{(a-b,0)} \times \overline{(c-d,0)}$$

e, por (i),

$$\begin{aligned} \overline{(a-b,0)} \times \overline{(c-d,0)} &= \overline{((a-b)\times(c-d),0)} \\ &= \overline{(a \times c - b \times c - a \times d + bd, 0)} \\ &= \overline{(a \times c + b \times d, a \times d + b \times c)} \end{aligned}$$

b) se $a > b$, e $c < d$ então então, dos Quadros 11 e 12

$$\overline{(a,b)} \times \overline{(c,d)} = \overline{(a-b,0)} \times \overline{(0,d-c)}$$

e, por (ii),

$$\begin{aligned} \overline{(a-b,0)} \times \overline{(0,d-c)} &= \overline{(0,(a-b)\times(d-c))} \\ &= \overline{(0, a \times d - a \times c - b \times d + b \times c)} \\ &= \overline{(a \times c + b \times d, a \times d + b \times c)}. \end{aligned}$$

Deixamos ao leitor os casos $a < b$ e $c > d$, bem como $a < b$ e $c < d$, que, junto com os já aqui considerados, justificam a definição dessa operação na construção formal:

Definição

Dados $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ em Z, definimos o produto $\overline{(a,b)} \times \overline{(c,d)}$ como sendo o inteiro $\overline{(a \times c + b \times d, a \times d + b \times c)}$.

Resta mostrar, ainda, que esse resultado independente dos representantes escolhidos para as parcelas, o que é demonstrado, por exemplo, em Ferreira (2013, p. 41).

O ábaco, no nosso ponto de vista, minimiza a descontinuidade mencionada por Klein, aproximando a Matemática da Escola com a Matemática estudada nos cursos de formação inicial.

Considerações Finais

A BNCC recomenda o ábaco entre os recursos didáticos que têm papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas com potencialidade para oportunizar a reflexão e a sistematização:

> "... a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização." (BRASIL, 2018, p. 276)

Apresentamos neste *e-book* a ferramenta Ábaco Virtual dos Números Inteiros e o seu funcionamento, ressaltando suas potencialidades e integrando-o à construção das operações, à formulação de conjecturas nesse universo numérico e a demonstrações para as mesmas.

O Ábaco Virtual dos Números Inteiros é mais uma forma de representar os números inteiros – o que é fundamental para a aprendizagem de um conceito em matemática Duval (2012) – com regras bem estabelecidas, derivadas e em conexão com o conhecimento prévio do estudante sobre números inteiros. Ele contempla também as duas outras atividades cognitivas consideradas fundamentais por Duval: a de permitir o tratamento das operações de adição, subtração e multiplicação nesta representação e a de admitir a conversão para outras representações, como a representação aritmética e a representação na reta numérica.

Além de ser mais uma representação para os números inteiros, o apelo visual oportunizado por essa ferramenta auxilia a construção do conhecimento sobre esses números. Por exemplo, permite ao estudante visualizar diferentes representações para um mesmo número inteiro. A partir daí, estimulando-o a fazer uso de imagens mentais, envolvendo hastes tão compridas quanto necessário ou um número qualquer de argolas, oportuniza-se a ele concluir que são infinitas as representações para um mesmo número inteiro, propriedade que não é válida no universo dos números naturais. Em sala de aula, o apelo visual pode ser reiterado no quadro pelo professor por meio de cilindros ou retângulos coloridos que representam quantidades genéricas, possibilitando a sistematização e o enunciado dessa propriedade.

A ponte entre as visualizações "concretas" (visualizadas no Ábaco Virtual) e as imagens mentais (abstrações dos estudantes) oportuniza ao próprio estudante formular conjecturas envolvendo generalizações e argumentar sobre elas, ainda que em palavras, constituindo-se essa uma potencialidade ímpar do ábaco. Aqui no texto, foram em muitos momentos utilizados os cilindros coloridos para substituírem palavras e para apoiarem argumentações que constituem verdadeiras demonstrações.

Após listar o conhecimento necessário sobre números inteiros, foi apresentada a ferramenta, com suas convenções e com destaque para a existência de botões que o distinguem do ábaco físico dos inteiros (dois botões "Acrescentar", dois botões "Retirar", um botão "Acrescentar Zero" e um botão "Retirar Zero"). Esses botões agilizam a produção de diferentes representações para um dado número inteiro, bem como as ações e os cálculos no Ábaco Virtual.

Ressaltamos que a ação de acrescentar ou retirar zero, ao ser utilizada de forma genérica nas argumentações e demonstrações produzidas no universo dos números inteiros, contribui para a familiarização do estudante com tal estratégia em outros contextos, como na resolução da equação de segundo grau. Também com relação aos estudos futuros do estudante, os cilindros podem servir de apoio para imaginar-se quantidades racionais e concluir que muitas das propriedades das operações com números racionais ou reais são fundamentadas nos mesmos argumentos.

No universo dos números inteiros, é suficiente repetir para as operações de adição e de subtração as interpretações consideradas nos números naturais, a saber, de juntar ou acrescentar e de retirar, respectivamente, o que evidencia a utilidade dos botões Acrescentar e Retirar do Ábaco Virtual. No entanto, cuidado especial requer a operação de subtração no ábaco, pois às vezes o minuendo precisa ser representado de forma conveniente para que seja possível retirar a quantidade indicada pelo subtraendo, por isso a utilidade do botão Acrescentar Zero.

Para realizar a operação de multiplicação no Ábaco Virtual dos Números Inteiros, aproveita-se também um dos significados da multiplicação de números naturais, que é a adição de parcelas iguais, ampliando-se para o caso de o segundo fator ser negativo, ampliação também utilizada por Dirks (1984, p. 53). No entanto, esse significado não dá conta das multiplicações em que o primeiro fator é negativo, o que revela uma complexidade maior dessa operação quando comparada à adição e à subtração. A inspiração para a definição de multiplicação de inteiros quando o primeiro fator é um número negativo pode ser explorada no próprio ábaco, e revelou-se natural nas turmas da primeira autora: se, quando o primeiro fator é positivo, no ábaco **acrescentamos ao zero** grupos de unidades indicadas pelo segundo fator, então é de se esperar que, quando o primeiro fator é negativo, implementemos a ação oposta de acrescentar, ou seja, **que retiremos, de zero**, grupos de unidades indicadas pelo segundo fator.

Muitas das atividades e sugestões para a sala de aula mencionadas neste livro buscam desafiar os estudantes a generalizar e a formular conjecturas relativas às chamadas "regras de sinais" das operações em $\mathbb{Z}$ a partir do uso do Ábaco Virtual dos Números Inteiros, bem como relativas às suas propriedades, em especial a comutatividade da multiplicação e a propriedade "subtrair é o mesmo que adicionar o oposto".

A experiência da primeira autora no ensino presencial e remoto confirmou no objeto virtual o que Dirks relatou sobre o ábaco físico: após implementarem no ábaco algumas operações e, a seguir, as registrarem como expressões aritméticas, os estudantes passam a antecipar mentalmente resultados, dispensando o ábaco (DIRKS, 1984, p. 54). Confirmou-se também, tanto no ensino presencial como no remoto, a orientação apontada nos PCN: "ao manipular as argolas nas varetas os alunos poderão construir regras para o cálculo com números inteiros" (BRASIL, 1998, p. 99)

A dinâmica proporcionada por essa ferramenta possibilita que o professor dê maior ênfase na discussão sobre os processos de operar, sendo as conclusões ou respostas apenas uma consequência dos mesmos. Por exemplo, os três diferentes significados do sinal "$-$" no universo dos inteiros são naturalmente ressaltados no Ábaco Virtual, tendo em vista que cada um deles requer uma ação diferente no ábaco, o que auxilia o estudante a sedimentar esses três diferentes significados.

Além disso, neste texto, no que diz respeito tanto à formação inicial como à formação continuada do professor de Matemática, ao refletir sobre os aspectos fundamentais (também chamados elementares por Felix Klein) não só da construção dos números inteiros bem como de suas propriedades, o professor pode constatar que o ábaco virtual tem a potencialidade de explorá-los, constituindo-se assim em um elo entre a matemática abordada em sua formação inicial (a construção dita "formal" do universo $\mathbb{Z}$) e a matemática ensinada na escola. A experiência da segunda e da terceira autoras com professores que já atuam na Escola Básica mostrou que os mesmos manifestam, em geral, dificuldades em conectar a construção formal com a abordagem escolar dos números inteiros. Por isso, a conexão que o ábaco viabiliza com a construção formal foi considerada relevante, decidindo-se por incluí-la neste texto.

Sem dúvida qualquer ferramenta que auxilie o professor a estimular os estudantes a refletirem, criarem conjecturas e fazerem descobertas e deduções tem um valor ímpar para o ensino e aprendizagem da matemática. Dirks (1984, p. 50) declara que o ábaco físico dos inteiros foi eficaz com seus estudantes de oitavo ano para a aritmética com números inteiros, pois esses puderam realizar operações concretas no ábaco, dando significado a afirmações aritméticas. Corroboramos com o Ábaco Virtual dos Números Inteiros a mesma constatação de Dirks com estudantes de 6º e 7º anos. Em todas as turmas ministradas pela primeira autora nas quais foi utilizado o Ábaco Virtual dos Números Inteiros, foi também possível notar uma facilidade na capacidade de abstração e de generalização de resultados, baseada em argumentações próprias.

Por ser um Objeto Digital de Aprendizagem, o Ábaco Virtual dos Números Inteiros revelou-se viável e útil também no contexto das aulas remotas impostas pela pandemia em 2020 e em 2021. Foi possível perceber nas aulas remotas da primeira autora um aprendizado dos alunos similar ao das turmas dos períodos anteriores à pandemia nas quais também o ábaco (na maioria das vezes físico) foi utilizado. Foi esse sucesso que motivou as autoras a proporem o minicurso intitulado "O Ábaco Virtual dos Números Inteiros: uma proposta para o ensino remoto", no 2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Centro-Oeste, e, posteriormente, a escreverem este *e-book*. Esperamos que ele possa auxiliar outros professores na construção com seus alunos das operações com números inteiros, tanto nas aulas remotas, como presenciais (nesse caso recorrendo aos computadores disponíveis nas escolas).

Referências Bibliográficas

BARTOLINI, P. Addition and Subtraction of Directed Numbers. **Mathematics Teaching**, v. 74, p. 34–35, 1976. 9

BRASIL (Ministério da Educação). **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. 2, 73

BRASIL (Ministério da Educação e do Desporto). **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília, 1998. 2, 75

CARRER, J. J.; DOERING, L. R.; RIPOLL, C. C. **A Divisão Euclidiana e seu Resto desde os Anos Iniciais**. 1ra. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2019. 50 f. Disponível em: <https://sbm.org.br/download/413/>. Acesso em: 24 jan. 2020. 7

COELHO, M. P. F. **A multiplicação de números inteiros relativos no "ábaco dos inteiros"**: uma investigação com alunos do 7º ano de escolaridade. Dissertação (Mestrado em educação) — Universidade do Minho, Braga, 2005. 9

DIRKS, M. K. The integer abacus. **The Arithmetic Teacher**, National Council of Teachers of Mathematics, v. 31, n. 7, p. 50–54, 1984. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/41192330>. 2, 3, 24, 26, 74, 75

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**, v. 7, p. 266–297, 2012. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. 5, 73

FERREIRA, J. **A Construção dos Números**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Textos Universitários). 2, 53, 60, 64, 71

GODOI, L. M. **História na Educação Matemática**: Uma proposta didática com o Ábaco dos Números Inteiros. Monografia (Licenciatura em Matemática) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Porto Alegre, 2015. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/134206>. Acesso em: 03 fev. 2022. 53

KLEIN, F. **Elementary mathematics from an advanced standpoint**: Arithmetic, Algebra, Analysis (Volume I). Translated from the 3rd german edition by Hedrick, E. R. and Noble, C. A. New York: Macmillan, 1932. 6

MALAGUTTI, P. L.; BALDIN, Y. Y. Os números inteiros no ensino fundamental. In: BIENAL DE MATEMÁTICA, 5., 2010, João Pessoa. **Anais [...]**. Rio de Janeiro: SBM, 2010. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/profs/dplm/osnumerosinteiros.pdf>. 11

MATHIAS, C. V.; DOERING, L. R.; RIPOLL, C. C. Uma Reflexão de Professores sobre Demonstrações Relativas à Irracionalidade de $\sqrt{2}$. **Bolema**, v. 34, n. 67, p. 719–739, 2020. 7

RIPOLL, C.; DOERING, L. The double discontinuity in teacher education: How to face it? In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICS EDUCATION, 14., 2021, Shangai. **Proceedings [...]**. [S.l.], 2022. A aparecer. 6

RIPOLL, C. C.; FISHER, D. S. O.; MEINERZ, F. M. A abordagem da comutatividade da multiplicação na educação básica. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**, v. 12, p. 1–25, 2021. 26, 51

RIPOLL, C. C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V. **Números Inteiros**. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Livro do professor de Matemática na Educação Básica, 2). 2, 9, 50

RODRIGUES, L. R.; DE OLIVEIRA, T. O. Operando números inteiros com o ábaco. In: EREMATSUL, 16., 2010, Porto Alegre. **Anais [...]**. Porto Alegre: Pontifícia Universidade Católica do RS, 2010. p. 572–581. 17

SCHUBRING, G. **Os Números Negativos**: Exemplos de obstáculos epistemológicos? Rio de Janeiro: LIMC/UFRJ, 2012. 24

SILVA, C. O ábaco dos inteiros: auxílio aos estudantes na compreensão dos números negativos e suas operações. **Revemat**, v. 11, n. 1, p. 74–83, 2016. 2

WEIGAND, H. G.; MCCALLUM, M. M.; NEUBRAND, M.; SCHUBRING, G. (Eds.). **The Legacy of Felix Klein**. [S.l.]: Springer, 2019. (ICME-13 Monographs). 6

2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Centro-Oeste

Realização e Organização

ANPMat

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

ISBN: 978-65-88013-21-2