

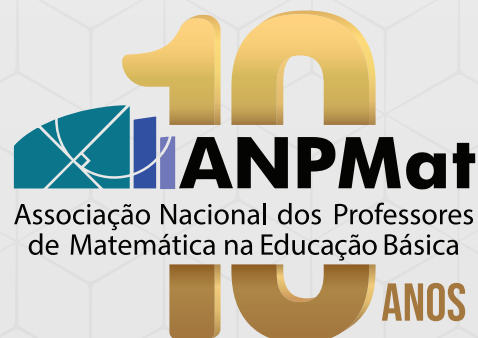


**5º Simpósio Nacional da  
Formação do Professor  
de Matemática**

# **ATIVIDADES MATEMÁTICAS**

**aspectos catalisadores  
para reflexão docente**

Rita Santos Guimarães



# **ATIVIDADES MATEMÁTICAS**

## **aspectos catalisadores**

## **para reflexão docente**

## **Atividades matemáticas: aspectos catalisadores para reflexão docente**

Copyright © 2023 Rita Santos Guimarães

Direitos reservados pela Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica.

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

### **Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica**

**Presidente:** Marcela Luciano Vilela de Souza

**Vice-Presidente:** Sérgio Augusto Amaral Lopes

**Diretores:** Ana Luiza de Freitas Kessler

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Raquel Bodart

Sumaia Almeida Ramos

### **5º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática**

#### **Comissão Organizadora:**

Ana Luiza de Freitas Kessler

Carmen Vieira Mathias

Edson Sidney Figueiredo

Karine Faverzani Magnago

Lidiane Buligon

Marcela Luciano Vilela de Souza

Renata Magarinus

Sumaia Almeida Ramos

Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum

#### **Comitê Científico:**

Ana Luiza de Freitas Kessler

Carmen Vieira Mathias

Claudia Candida Pansonato

Janice Rachelli

Marcela Luciano Vilela de Souza

Renata Magarinus

**Projeto gráfico e capa:** Gabriel Brasil Nepomuceno

#### **Produção editorial:**

Editora Pi

<https://www.editorapi.com.br> | [contato@editorapi.com.br](mailto:contato@editorapi.com.br) | +55 21 97636-9137

#### **Distribuição:**

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

<http://www.anpmat.org.br> | [editoraanpmat@anpmat.org.br](mailto:editoraanpmat@anpmat.org.br)

**ISBN:** 978-65-88013-27-4

#### **Comitê Editorial:**

Ana Luiza de Freitas Kessler

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Fábio Simas

Jaqueline Molon

Leonardo Barichello

Letícia Rangel

Marcela Luciano Vilela de Souza

Mateus Gianni Fonseca

Raquel Bodart

Sérgio Augusto Amaral Lopes

Sumaia Almeida Ramos

Vitor Amorim



**5º Simpósio Nacional da  
Formação do Professor  
de Matemática**

# **ATIVIDADES MATEMÁTICAS**

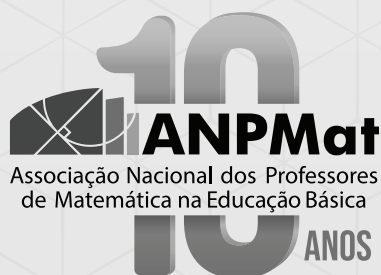
## **aspectos catalisadores para reflexão docente**

Rita Santos Guimarães

1ª edição

2023

Rio de Janeiro





# Sobre a autora





**Rita Santos Guimarães**  
guimaraes.rita@gmail.com

Rita queria ser professora desde os 8 anos de idade, como comprova uma redação que ela escreveu em uma aula de Língua Portuguesa em 1990. Esse desejo permaneceu latente por um longo período, ressurgindo somente em 2005, às vésperas de sua graduação como bacharel em Matemática pela Unicamp. Motivada por esse desejo reacendido e com uma rede de apoio muito sólida, Rita dedicou anos à sua formação, que incluiu graduação, especialização e mestrado. Ela combinou esse período de estudos com uma ampla gama de experiências em sala de aula, abrangendo os Anos Finais do Ensino Fundamental, Ensino Médio, Educação de Jovens e Adultos (EJA) e Ensino Superior, em escolas públicas e particulares. Além disso, ela participou de projetos de desenvolvimento de recursos educacionais e coordenou e elaborou cursos de formação continuada para professores. Em 2019, Rita concluiu o doutorado em Educação pela Universidade de Nottingham no Reino Unido. Em seguida, durante seu pós-doutorado no Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp, ela atuou como docente responsável por duas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática. Foi nessas disciplinas que o material deste e-book foi desenvolvido. Rita continua fascinada pelas possibilidades de troca de conhecimento proporcionadas por pessoas em uma sala de aula, em um laboratório, durante um passeio ou em uma conversa e pelo brilho nos olhos quando se percebe a própria capacidade de aprender.

*Agradeço às alunas e alunos das disciplinas MA740 (Matemática do Ensino Médio para Professores I) e MA840 (Matemática do Ensino Médio para Professores II) de 2022 da Licenciatura em Matemática da Unicamp. Vocês são incríveis!*



# Sumário



<b>Sobre a autora</b>	<b>vi</b>
<b>Prefácio</b>	<b>xiv</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>xvi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Contexto e justificativa . . . . .	2
1.2 Resultados esperados . . . . .	4
<b>2 Desenvolvimento</b>	<b>5</b>
2.1 Os aspectos fundamentais . . . . .	6
2.1.1 Motivação inicial . . . . .	6
2.1.2 Intencionalidade . . . . .	6
2.1.3 Arbitrário e necessário . . . . .	6
2.1.4 Barreira e limite . . . . .	7
2.1.5 Erros, dificuldades e concepções . . . . .	7
2.1.6 Formas de representação . . . . .	8
2.1.7 Localização do conteúdo . . . . .	8
2.1.8 Adaptação . . . . .	8
2.2 Usando os aspectos para refletir sobre atividades . . . . .	9
2.2.1 Atividade: Teia de equações . . . . .	9
2.2.2 Atividade: Infinitos quadradinhos . . . . .	13
<b>3 Planos de aula</b>	<b>18</b>
3.1 Almoço no parque, por Victória Pincinato Angeli . . . . .	19
3.1.1 Informações . . . . .	19
3.1.2 Atividade . . . . .	20
3.1.3 Resolvendo . . . . .	21
3.1.4 Aspectos fundamentais . . . . .	23
3.1.5 Créditos . . . . .	24
3.2 A loja do Sidmar, por Daniela Ferrari de Oliveira . . . . .	24
3.2.1 Informações . . . . .	24
3.2.2 Atividade . . . . .	24
3.2.3 Resolvendo . . . . .	25
3.2.4 Aspectos fundamentais . . . . .	27
3.2.5 Créditos . . . . .	27
3.3 Onde colocar a lixeira, por Lucas Almeida Barjud . . . . .	28
3.3.1 Informações . . . . .	28
3.3.2 Atividade . . . . .	29
3.3.3 Resolvendo . . . . .	30

---

---

3.3.4	Aspectos fundamentais . . . . .	31
3.3.5	Créditos . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>33</b>
<b>A</b>	<b>Lista de <i>sites</i> e repositórios</b>	<b>35</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>38</b>

# Lista de Figuras



---

---

1	Teia de equações - exemplo 1. . . . .	10
2	Teia de equações - exemplo 2. . . . .	10
3	Teia de equações - exemplo 3. . . . .	10
4	Infinitos quadradinhos. . . . .	14
5	Como obter os infinitos quadradinhos. . . . .	14
6	Subdivisão em destaque da figura original. . . . .	15
7	Exemplo de imagem que sugere o limite de uma adição de infinitas parcelas. . . . .	16
8	Mapa de atrações. . . . .	20
9	Combinando as informações das tabelas . . . . .	26
10	Posições para a atividade. . . . .	29
11	Esquema para resolução. . . . .	30
12	Solução para o segundo critério. . . . .	31

# Prefácio



Este *e-book* tem duas partes independentes, apesar de complementares.

A primeira é a apresentação e discussão de oito aspectos, selecionados da literatura sobre formação de professores e elaboração de atividades para sala de aula (*task*), que podem ser usados ao se considerarem atividades ou planos de aula de matemática. Tais aspectos criam a oportunidade de refletir, organizar e adequar planos de aula de forma guiada e focada na sala de aula. Eles também fornecem lentes que auxiliam na discussão de situações de ensino e aprendizagem do conteúdo abordado.

A segunda parte traz exemplos de planos de aula elaborados por futuros professores durante duas disciplinas da licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Campinas, da qual a autora deste texto era responsável, e onde os oito aspectos foram colocados em prática com o intuito de guiar a discussão dos futuros professores. Além de garantir uma organização e foco durante as discussões, tais aspectos mostraram-se ferramentas adequadas para incentivar o “pensar como professor”.

Para apresentar os oito aspectos, além de trazer preceitos de pesquisas em educação matemática nos quais eles estão ancorados, recorre-se a atividades curtas, que foram usadas na oficina durante o 5<sup>o</sup> Simpósio da ANPMat. Ao final do texto, serão apresentados alguns planos de aula, mais extensos do que as atividades de introdução, elaborados pelas futuras professoras e professores, que foram parte dos trabalhos durante a disciplina.

São Paulo, julho de 2023.

Rita Santos Guimarães

# Agradecimientos





Agradeço às instituições que viabilizaram a elaboração deste material: o Instituto de Matemática e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas (Imecc/Unicamp), à Fapesp pelo financiamento parcial (processo 2019/17135-2) e à ANPMat.

# Capítulo 1

## Introdução



## 1.1 Contexto e justificativa

Este material surgiu da experiência da autora, durante o ano de 2022, como docente responsável por duas disciplinas na licenciatura em matemática da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp): Matemática do Ensino Médio para Professores I e Matemática do Ensino Médio para Professores II. Tais disciplinas, sugeridas para o sétimo e oitavo semestres respectivamente (de um total de 9 semestres de integralização de curso), têm como pré-requisito haver cursado ao menos 50% da graduação. Ou seja, são disciplinas da segunda metade do curso, e os estudantes que podem cursá-las, já devem ter tido experiências e adquirido conhecimentos teóricos, em diversas outras disciplinas, das áreas de matemáticas e de educação.

Reconhecendo tais experiências, mas também considerando que muitos estudantes ainda apresentam defasagem de conhecimentos prévios (inclusive da Educação Básica) e se beneficiariam em retomar tais conteúdos, decidiu-se por seguir as sugestões apontadas por Pournara e Adler (2022) e Stanley e Sundström (2007) sobre a necessidade dos futuros professores de revisar e reaprender conteúdos que irão ensinar. Em particular Pournara e Adler (2022), em uma experiência na África do Sul, elencam três aspectos que devem guiar um curso de formação inicial que vise criar oportunidades de aprendizagem ou de reaprendizagem para futuros professores:

- (1) tempo adicional na matemática que os professores em formação irão ensinar nas escolas;
- (2) atenção às práticas matemáticas;
- (3) oportunidade de aprender sobre conceitos seminais e descobertas da literatura de pesquisa em educação matemática. (POURNARA; ADLER, 2022, p. 404)

Além disso, consideraram-se os resultados de pesquisas bem estabelecidos sobre conhecimento matemático para ensinar. Hoover, Mosvold, Ball e Lai (2016), apresentam e discutem resultados de outras pesquisas, e trazem as seguintes lições a respeito de como desenvolver o conhecimento matemático para ensinar:

Ensinar aos professores conteúdos matemáticos além de um limite básico não aumenta seus conhecimentos de forma a impactar o ensino e a aprendizagem. Proporcionar aos professores oportunidades para aprender matemática que está interligada com o ensino aumenta o seu conhecimento matemático para o ensino.

O foco do conteúdo, tarefas e pedagogia para ensinar tal conhecimento requer atenção cuidadosa para que se atinja um balanço entre conteúdo e ensino sem privilegiar exclusivamente um domínio ou o outro. (HOOVER, *et al.*, 2016, p. 10-11)

Antes de apresentar os aspectos usados nas disciplinas, apresenta-se a visão de matemática – do que é aprender e do que é ensinar – à qual esta proposta está alinhada. Para essa proposta, sugere-se a visão de Swan (2005), que diz que:

**A matemática é...** Um corpo interconectado de ideias e processos de raciocínio.

**Aprender é...** Uma atividade colaborativa na qual os alunos são desafiados e chegam à compreensão por meio da discussão.

**Ensinar é...** Explorar significados e conexões por meio de um diálogo não linear entre professora e alunos. Apresentar problemas antes de oferecer explicações. Tornar os mal-entendidos explícitos e aprender com eles. (SWAN, 2005, p. 5 - ênfase da autora)

A fim de materializar tais resultados, a autora realizou um intenso estudo de artigos e materiais consagrados, em especial de trabalhos que sugerem estruturas sobre conhecimento específico para a profissão, em busca de semelhanças nas sugestões sobre quais aspectos seriam fundamentais se debruçar como foco de reflexão, com objetivo de promover oportunidades de desenvolvimento da prática de sala de aula.

Os exemplos iniciais de Shulman (1986), ao sugerir o conhecimento pedagógico de conteúdo e trazer características (ou conhecimentos) de um conteúdo que são específicos da profissão de professor, são fundamentais para todos os trabalhos posteriores. Shulman sugere conhecimentos específicos como: quais são as maiores dificuldades de um tópico, quais são exemplos e ilustrações poderosas para esse tópico, quais são as formas de representação mais úteis nas explicações e assim por diante.

Ma (1999), ao realizar uma pesquisa com professores Norte-Americanos e Chineses, apresentou características de professores que tinham ‘conhecimento profundo de matemática elementar’. Esses professores eram capazes de conectar conceitos matemáticos, conheciam diferentes formas de abordar um tópico e conheciam quais eram as ideias fundamentais nas quais conceitos mais elaborados precisam se apoiar, por exemplo.

O material de formação continuada de Swan (2005) apresenta uma lista de atitudes e ações nas quais professores devem estar sempre focados e sobre as quais devem ter domínio para se manterem reflexivos e atualizados. A busca dessas ações e atitudes, específicas do trabalho do professor e que promovem constante reflexão, já tinham sido sugeridas em cursos de formação continuada, como o Project Update, desenvolvido pela Open University sob a coordenação de John Mason (MASON, 1988). E continuaram, inclusive com o refinamento do trabalho da pesquisadora Deborah Ball que, além de investigar ações específicas da profissão de professores de matemática e sugerir formas de medir os conhecimentos matemáticos necessários para ensinar (SELLING, GARCIA e BALL, 2016), atualmente, tem focado no trabalho dos professores em sala de aula de forma mais holística (BALL, 2017).

Também bastante atual, Foster, Francome, Hewitt e Shore (2021) sugerem tais características para a elaboração de currículos, e Leavy e Hourigan (2022), que oferecem uma estrutura para considerar a escolha e elaboração de problemas para serem usados nas aulas de matemática com alunos da Educação Básica.

Essa breve menção de algumas pesquisas que motivaram este trabalho não tem como objetivo esgotar o tópico e visa somente fornecer as principais referências de onde os aspectos fundamentais vieram. Outros trabalhos serão citados ao longo da descrição mais detalhada de cada um dos aspectos nas seções seguintes deste *e-book*.

A seguir, apresenta-se uma tabela com os oito aspectos para reflexão docente selecionados da literatura que foram usados nas disciplinas e apresentados na oficina.

Tabela 1: Os 8 aspectos.

Motivação inicial	Erros, dificuldades e concepções
Intencionalidade	Formas de representação
Arbitrário e necessário	Localização do conteúdo
Barreira e limite	Adaptação

As disciplinas Matemática do Ensino Médio para Professores I e II receberam ótimas avaliações dos estudantes, tanto em questionários anônimos aplicados pela universidade quanto em conversas informais

entre a docente e diversos estudantes. Na visão da docente, ambas as disciplinas tiveram bastante êxito em proporcionar momentos de reflexão sobre matemática de forma combinada entre conteúdo e sala de aula, possibilitando assim maior aderência à questões referentes ao ensino na Educação Básica. Na Seção 3, apresenta-se cada um desses aspectos com mais detalhes.

## 1.2 Resultados esperados

Espera-se que, ao incorporar os oito aspectos na produção, reflexão e/ou discussão de atividades para sala de aula, todos envolvidos possam desenvolver maior clareza a respeito dos limites e potencialidades de tal atividade. Ao refletir e discutir sobre a prática de sala de aula “com suporte dos aspectos” professoras e professores terão oportunidade de se tornarem mais preparados para ensinar o conteúdo abordado. De forma semelhante, futuras professoras e professores terão oportunidade para aprender matemática de forma conjunta com o ensino, cenário com potencial de alavancar tal desenvolvimento como já estabelecido em diversos estudos (HOOVER, *et al.*, 2016).

# Capítulo 2

## Desenvolvimento



## 2.1 Os aspectos fundamentais

Nesta seção, apresenta-se uma descrição detalhada de cada aspecto.

### 2.1.1 Motivação inicial

A motivação inicial de uma atividade está relacionada à forma como tal atividade é apresentada, num primeiro momento, para a turma. Por exemplo: uma conversa sobre o assunto; perguntas sobre o significado de um novo termo ou de um termo que será fundamental; leitura de um texto sobre algo contextualizado que faz aplicação do que será visto na atividade; um jogo ou um desafio etc. É comum também que a motivação inicial se dê através do uso de curiosidades ou de fatos da história da matemática.

Ao considerar este aspecto, deve-se refletir sobre a adequação da apresentação e a atividade em si: a motivação e a atividade estão de fato relacionadas? Além disso, considerar interesses específicos do contexto de seus alunos é fundamental para atingir o efeito de motivar. Esse aspecto deve ser priorizado na introdução de novos conteúdos, ou seja, não se espera que todas as atividades sejam sempre introduzidas com aplicações ou contextos, mas é preciso refletir sobre quando isso é possível e desejável.

### 2.1.2 Intencionalidade

A intencionalidade é o aspecto relativo aos objetivos (gerais e pontuais) e justificativas de uma atividade. Localmente, é preciso considerar o objetivo de cada parte de uma atividade (introdução, exemplos, exercícios, conceitos).

Em termos gerais, é preciso ter clareza sobre o objetivo amplo em relação ao conteúdo abordado e o grau de familiaridade com o tópico que se deseja que os estudantes adquiram. Por exemplo, pode ser válido abordar o conteúdo de multiplicação de matrizes de forma mecanizada sem muita preocupação com o conceito por trás, caso a turma esteja se preparando para exames de ingresso em instituições de Ensino Superior. Por outro lado, não deve ser aceitável que os estudantes decorem a regra de “passar para o outro lado” como método de resolver equações. A solução de equações algébricas e a ideia de manter a igualdade é fundamental em diversos conteúdos escolares e não deve ser tratada apenas como um método a ser decorado.

Considerar a intencionalidade do que é sugerido em sala de aula pode facilitar o acompanhamento da turma e dos estudantes de forma focada já que torna viável o uso de avaliação formativa (constante) e o foco no processo e não na resposta final (SWAN, 2005).

### 2.1.3 Arbitrário e necessário

Arbitrário e necessário foram termos usados por Dave Hewitt em um texto reflexivo sobre uma forma de distinguir o que “precisa ser ensinado” em matemática. Para Hewitt (1999), um conhecimento é arbitrário quando surgiu da vontade de alguém, não é passível de justificativa e nem de descoberta independente. Irá desaparecer se não estiver registrado ou gravado em algum lugar (livro, memória, etc.). Por exemplo: símbolos específicos, nomes e convenções.

Por outro lado, um conhecimento é chamado de necessário quando pode ser obtido, ou observado, ou calculado, sem que alguém tenha te informado. Isso não significa que todos os estudantes estejam em condições de fazê-lo, mas apenas de que seria possível a partir de algum ponto de partida.

Como exemplo, considere o seguinte conhecimento de natureza matemática: o ângulo formado pela volta completa em um círculo é 360 graus. Nenhum estudante chegaria a esse conhecimento por observação ou após resolver atividades com ângulos e círculos. Alguém precisa informar que se estabeleceu a volta completa como 360°. Nesse caso, dizemos que se trata de um conhecimento arbitrário.

Porém, oferecer indicações do giro que representa meia volta pode ser obtido por um estudante, mesmo que ele não tenha conhecimento de graus e de que a volta completa tem 360°. Nesse caso, dizemos que se trata de um conhecimento necessário.

Hewitt (1999) argumenta que essa distinção influencia a forma como se tratam diferentes conhecimentos em sala de aula, como se ensina e como se espera que os estudantes interajam com cada um deles.

### 2.1.4 Barreira e limite

Barreira e limite referem-se ao começo e ao final de uma atividade. Ao considerar tais extremos é possível adequar o planejamento em relação aos pré-requisitos, ao tempo de duração e ao potencial de uma atividade.

Tal aspecto foi inspirado na ideia de atividades onde ‘todos podem começar e todos podem travar’? tradução livre da expressão em inglês ‘*low threshold and high ceiling*’ usada em <<https://nrch.maths.org/10345>>. As atividades com essa característica (com começo simples e final elaborado) são raras e/ou difíceis de elaborar. Este aspecto preocupa-se em identificar esses extremos para que se planeje adequadamente – não necessariamente que se seja capaz de tornar o começo mais simples e o final mais desafiador.

Em correspondência com as perspectivas adotadas sobre o que é matemática, o que é ensinar e o que é aprender, o começo de uma atividade precisa estar adequado de forma a permitir que os estudantes de fato engajem-se em resolvê-la. Tal engajamento é que permitirá discussões e explorações que levam de fato ao aprendizado. Além disso, o limite de uma atividade deve ser considerado de forma a instigar a turma a não apenas obter um número final. Em outras palavras, pode-se afirmar que, o limite de uma atividade deve ser pensado muito além de uma resposta final; é no processo de resolução que de fato surgem oportunidades de aprender.

### 2.1.5 Erros, dificuldades e concepções

Este aspecto foca nos pontos ‘complicados’ de cada conteúdo. A ideia é que tais momentos sejam planejados em vez de evitados. Em relação aos erros é preciso detectar o erro, saber explicar o por quê está errado e que esclarecimentos devem ser fornecidos ao estudante para que esse erro não seja mais cometido.

Já em dificuldades, inclui-se conhecer as situações que costumam gerar mais dúvidas em determinados conteúdos. Por exemplo, é bastante comum estudantes que estão aprendendo operações com frações tenham dificuldade, pois tentam aplicar as regras de números inteiros.



Por fim, concepções tratam de possíveis confusões advindas de situações, em geral, reais que não foram devidamente analisadas. Por exemplo, considerar que em todo evento que tem apenas duas opções, cada uma dessas opções tem 50% de chance de acontecer: chover e não chover; ganhar ou perder na mega sena.

### 2.1.6 Formas de representação

Em uma aula de matemática faz-se uso de diversos tipos de representações: texto escrito, representação simbólica de objetos matemáticos, representações icônicas, desenhos tipo rascunho, desenhos com *softwares* computacionais de alta precisão, representação oral, etc.

Ao preparar uma aula, é fundamental considerar quais representações serão utilizadas e o nível de familiaridade que os estudantes já possuem com cada uma delas. Por exemplo, ao representar a fração  $\frac{1}{2}$ , além desse símbolo, usamos ‘meio’, ‘metade’, o modelo circular (um semicírculo) e/ou o retangular, a representação na reta numérica etc. Como professores, é necessário fazer uso consciente e deliberado de representações e possíveis variações, considerando a pertinência de apresentar novas e conectá-las com outras com as quais a turma já tenha alguma familiaridade.

### 2.1.7 Localização do conteúdo

Os conteúdos matemáticos que são abordados na Educação Básica são bastante conectados entre si mas essa conexão não costuma ser óbvia e precisa ser explorada explicitamente. Por exemplo: Qual é a relação entre multiplicação e área?; Qual é a relação entre sequências e funções?.

Além disso, professores estão, em geral, inseridos em um contexto escolar que irá sugerir (ou determinar) o que deve ser priorizado e caberá a cada docente analisar a adequação da ordem e da profundidade dos conteúdos a serem abordados. As habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por exemplo, sugerem de forma abrangente o que será necessário abordar e o que não é mais obrigatório no núcleo comum, ainda ficando a cargo de professores traduzir as habilidades e os objetos do conhecimento em forma de atividades para sala de aula.

Ao preparar uma aula considerando a localização do conteúdo, seja selecionando atividades, escolhendo exemplos ou formas de explicar, será adequado ter em mente perguntas como:

- O quê veio antes deste conteúdo? (consigo ou preciso revisar algum outro tópico);
- O quê virá depois? (a turma já possui pré-requisitos suficientes para que o próximo tópico seja acessível);
- Quais são as ideias centrais, que todos devem adquirir, para compreender este conteúdo?

### 2.1.8 Adaptação

Adaptação refere-se à a possibilidade de alterar uma atividade, seja ainda na preparação, seja durante a aula. Ter a opção de simplificar (ou elaborar) algo que ficou muito complexo (ou muito simples), criar exemplos e situações que ajudem na superação de dúvidas não previstas ou procurando formas diferentes de explicar.

Neste aspecto, também sugere-se que os professores busquem formas variadas de interpretar e comparar (novos) métodos, técnicas e algoritmos, para as atividades sendo planejadas. Rowland *et al.* (2005), destaca que, durante uma aula, é preciso ter respostas rápidas a situações inusitadas ou inesperadas e ser capaz de discernir boas ideias que surgem e podem ser aproveitadas. Ao refletir previamente sobre possíveis situações inesperadas, o professor torna-se mais preparado para aplicar a atividade de forma que seja mais proveitosa para seus estudantes.

Por fim, ‘conhecer diversas formas de se resolver o mesmo problema’ e apresentá-las em sala de aula é uma mensagem adequada e forte em termos de o que é matemática já que, como afirma Ma (1999), não se trata de um conjunto de conhecimentos fixo e fechado.

## 2.2 Usando os aspectos para refletir sobre atividades

Nesta seção, apresentam-se duas atividades selecionadas e adaptadas pela autora para que se possa explicitar o uso dos aspectos como catalisador para refletir sobre a atividade docente. Tais atividades foram usadas no decorrer da oficina realizada durante o 5º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática da ANPMat: a dinâmica foi solicitar de uma discussão guiada, em que os participantes deveriam atuar, ora como estudantes da Educação Básica, ora como professores que ensinam matemática.

Por se tratar de um texto, solicita-se que os leitores, de fato, dediquem-se a resolver a atividade sugerida antes de prosseguir a leitura. Acredita-se que, dessa forma, terão oportunidade de experienciar as descobertas, dificuldades e peculiaridades dos itens propostos e assim, estarem mais bem posicionados para analisar possíveis limites e potencialidades do uso em sala de aula.

A sugestão acima não é inédita. O uso de atividade (*tasks*) na formação inicial e continuada de professores é bem estabelecida como forma adequada de fomentar o desenvolvimento de hábitos e conhecimentos essenciais à profissão. Por exemplo, Zaslavsky e Sullivan (2011) afirmam que:

assumimos a posição de que, da mesma forma que estudantes, a formação de professores pode ocorrer quando há o engajamento em atividades (*tasks*) bem elaboradas atrelado à reflexão sobre tais atividades. (p. 1)

A seguir, inicia-se a apresentação de duas atividades e possíveis discussões em relação aos aspectos fundamentais apresentados anteriormente. Lembre-se de voltar na descrição sempre que necessário. Sugere-se fortemente que você, leitora/leitor, resolva o que se pede antes de seguir a leitura do texto. Ao se engajar na resolução da atividade, você estará mais preparada para acompanhar e refletir da forma esperada.

### 2.2.1 Atividade: Teia de equações

Esta atividade foi retirada do *site* <<http://www.mathematicaletudes.com/>> desenvolvido e mantido por Dr. Colin Foster. Uma ‘teia de equações’ é formada por diversas expressões algébricas e ligações entre elas, como a mostrada a seguir.

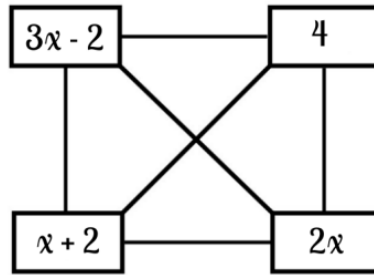


Figura 1: Teia de equações - exemplo 1.

No exemplo da figura acima, a diagonal secundária gera a equação  $x + 2 = 4$ , cuja solução é  $x = 2$ . A ligação da diagonal principal gera a equação  $3x - 2 = 2x$ , cuja solução é  $x = 2$ . Agora pare a leitura e resolva as outras quatro equações indicadas nessa teia. Note que são seis ligações, cada uma indicando uma equação.

Resolveu as seis equações? Algo curioso aconteceu? Todas as soluções foram iguais, correto?

Faça o mesmo para o exemplo 2 na figura a seguir, resolva as seis equações indicadas nesta nova teia quadrada. Quais foram as soluções desta vez?

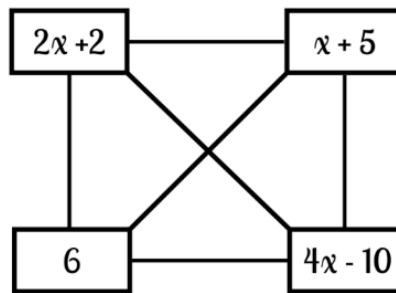


Figura 2: Teia de equações - exemplo 2.

Como último item, você deve montar uma teia quadrada, ou seja, você deve definir as expressões em cada vértice. Mas calma, vamos propor um conjunto de soluções. Crie expressões para cada um dos quatro vértices de forma que as soluções da teia sejam 2, 4, 6, 8, 10, 12.

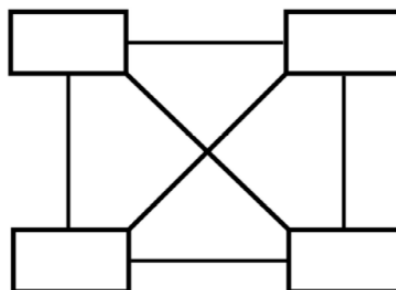


Figura 3: Teia de equações - exemplo 3.

Tentou resolver? Conseguiu montar a teia completa? Continue a leitura do texto apenas se você de fato pensou no desafio proposto.

Ao seguir as sugestões feitas, você deve ter obtido, como conjunto solução para o exemplo 2, os valores 1, 2, 3, 4, 5, 6. Como o exemplo 3 solicitou um conjunto solução que é exatamente o dobro, é provável que você tenha tentado usar as expressões do exemplo 2 para encontrar expressões que satisfizessem o exemplo 3, correto?

Ao usar essa atividade, o professor pode colocar os estudantes em duplas e, ao final da aula, discutir, em forma de plenária, algumas soluções ou tentativas de soluções (afinal, não é uma pergunta tão fácil assim).

A seguir, algumas sugestões (sempre usando o exemplo 2 como ponto de partida) feitas durante a oficina e durante a aplicação dessa atividade em uma turma da Licenciatura em Matemática da Unicamp. Atenção: nem todas as sugestões levam a soluções solicitadas e talvez algumas sugestões sejam bastante maduras matematicamente e não sejam acessíveis a todos os alunos de uma turma da Educação Básica.

- Posso multiplicar todas as expressões por 2, assim as soluções também serão multiplicadas por 2;
- Posso manter as expressões que geraram as soluções que ainda me interessam, 2, 4, 6 no caso, eliminando a expressão  $x + 5$ . Daí, tentar descobrir uma expressão que gere as outras soluções;
- Posso trocar a variável  $x$  por  $y/2$  em todas as expressões, assim todos as soluções passariam a ser o dobro do que eram.

Discutir essas (e outras) possíveis soluções foram o final da parte da oficina na qual os participantes agem como estudantes. A seguir, serão apresentadas reflexões sobre essa atividade acerca de quatro dos oito aspectos. Ler as reflexões sem ter de fato se engajado na resolução dos itens da atividade pode não ser produtivo e muitas partes do texto podem não fazer sentido, ou seja, sugere-se fortemente que você volte e resolva os itens sugeridos anteriormente.

A atividade ‘Teia de equações’ como apresentada aqui, foi realizada de forma a ajudar a ilustrar quatro dos oito aspectos. Na próxima atividade, ‘Infinitos quadradinhos’, serão ilustrados os outros quatro aspectos. Reforça-se a ideia de que os aspectos servem para refletir sobre a atividade, de preferência com pares (professores e futuros professores), de modo a ter maior conhecimento das limitações e potencialidades da atividade e melhor se preparar para aplicá-la em sala de aula.

### Intencionalidade

Se você de fato resolveu todos os itens que foram solicitados acima, com certeza resolveu diversas equações. Algumas talvez tenham sido resolvidas de cabeça, outras você pode ter usado propriedades da igualdade e outras teve que de fato escrever e resolver. Nesta atividade pode-se dizer que o objetivo principal é adquirir fluência na resolução de equações de primeiro grau.

Num segundo plano, pode-se considerar as diversas propriedades de igualdade (e conseqüentemente de equações) que foram exploradas para se obterem as soluções solicitadas. Porém, a atividade não garante que os estudantes irão de fato fazer uso de propriedades. Caso seja de interesse do professor, esse conteúdo precisa ser explicitado.

Por fim, a justificativa de aplicar uma atividade que desenvolve ‘apenas’ fluência na resolução de equações precisa ser considerada. O tópico ‘equações polinomiais de primeiro grau’ é bastante central no percurso dos estudantes da Escola Básica já que é uma generalização das ideias de igualdade e de

soluções de expressões numéricas. Além disso, equações do primeiro grau servirão de base para outros tópicos como sistemas e funções. Portanto, criar oportunidades para que os estudantes desenvolvam fluência em resolvê-las pode refletir positivamente por permitir que, ao se deparar com os conteúdos mais avançados como sistemas e funções, a etapa de ‘resolver a equação’ não seja um empecilho.

### Localização do conteúdo

Para que tal atividade seja utilizada da melhor forma possível em sala de aula, é preciso observar que ela não se trata de uma introdução à ideia de equação. Para serem capazes de praticar e refletir sobre possíveis propriedades das equações, os estudantes já devem saber resolver equações. Caso um dos objetivos do professor seja rever e reforçar as propriedades de igualdade, isso precisa entrar explicitamente, por exemplo, quando se discute a seguinte pergunta: ‘Ao multiplicar os dois lados da equação por 2, por que a solução também não fica multiplicada por 2?’.

Uma sugestão de momento de aplicação dessa atividade é logo antes de iniciar os estudos de sistema de equações. A fluência desenvolvida na resolução de equações pode ajudar os estudantes a focarem esforço de aprender outras peculiaridades do sistema e não serem limitados por não conseguirem resolver uma equação. Além disso, as propriedades usadas para criar, alterar e verificar as equações do quadrado de expressões serão importantes para compreender formas de resolução como substituições e por soma de sistemas  $2 \times 2$ .

Outra possibilidade seria usar a atividade após a apresentação de sistemas lineares, já que uma das formas de procurar soluções e generalizar o formato das expressões dos vértices ( $ax + b$ ,  $cx + d$  etc, com  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  números reais, por exemplo).

### Barreira e limite

De acordo com a turma, ou até mesmo com alunos específicos, o professor pode escolher expressões mais simples ou mais complicadas para iniciar a atividade. Outra opção que torna a barreira de entrada na atividade mais baixa é usar “triângulos de equações” antes de propor quadrados.

A atividade permite que a progressão dos alunos seja individualizada, o professor pode criar vários quadrados com as expressões já preenchidas para estudantes que necessitem que demonstrem dificuldades na resolução direta das equações. Por outro lado, o professor pode solicitar que os estudantes que já demonstraram um bom domínio ao resolver equações foquem nas perguntas mais abertas? encontre um quadrado cujas soluções são 2, 4, 6, 8, 10, 12 (apresentada anteriormente); crie um quadrado de equações cuja solução forme uma outra PA; ou uma PG; é sempre possível encontrar um quadrado de equações para qualquer conjunto de números? O limite da atividade é bastante alto e pode entreter até os estudantes mais fluentes em matemática.

Como último comentário, note que o processo de buscar soluções configura-se de fato nos momentos nos quais os estudantes terão oportunidade de aprender. Obter a solução final é muito menos importante do que ter ideias, tentar e verificar opções para tal.

## Adaptação

Para o caso desta atividade (e em geral para atividades curtas e com perguntas em torno de um mesmo cenário, como é o caso da Teia de equações) alguns aspectos serão difíceis de distinguir por apresentarem grande sobreposição. Em casos de atividades com várias etapas e com momentos diferentes de descoberta, investigação e formalização, a sobreposição é menor, pois existem mais considerações a serem feitas. De qualquer forma, os aspectos são ferramentas artificiais para proporcionar foco na reflexão, e, assim como toda a prática de sala de aula, não podem ser vistos como partes disjuntas.

Para a atividade Teia de equações, o aspecto ‘adaptação’ e o aspecto ‘barreira e limite’ apresentam grande sobreposição. Ao refletir sobre adaptação busca-se formas de alterar a atividade de maneira a simplificar (ou tornar mais complexa) o que se solicita dos estudantes. Tais sugestões já foram feitas nos comentários sobre o aspecto ‘barreira e limite’, logo acima.

Outro ponto incluso em ‘adaptação’ é o desenvolvimento, pelo professor durante o processo de reflexão da atividade, sobre possíveis formas e caminhos que os estudantes podem tomar ao se engajarem com a atividade. Já comentamos algumas estratégias no final da seção onde se apresentou a atividade. Ainda falta refletir sobre modos de responder àqueles comentários.

Note que a primeira sugestão – ‘Posso multiplicar todas as expressões por 2, assim as soluções também serão multiplicadas por 2.’ – não leva a uma solução correta. Neste momento, é possível discutir com a turma o significado de uma igualdade e as ações que podem ser realizadas sem que se altere a solução da equação. Tal percepção por parte dos alunos é fundamental para que tenham segurança ao resolver equações e, muitas vezes, não é construída em anos anteriores pois foca-se demasiado em regras como o ‘passa pra lá’.

A segunda sugestão – ‘Posso manter as expressões que geraram as soluções que ainda me interessam (2, 4, 6) eliminando a expressão  $x + 5$  e tentar descobrir uma expressão que gere as outras soluções?’ – é adequada e chega bem perto do resultado. Ainda resta uma expressão a ser obtida: quais seriam possíveis formas de obtê-la?

Por fim, a última sugestão – ‘Posso trocar a variável  $x$  por  $y/2$  em todas as expressões, assim todos as soluções passariam a ser o dobro do que eram?’ – é bastante madura matematicamente, e é pouco provável, que muitos estudantes já tenham familiaridade com a ideia de trocar de variável. De qualquer forma, talvez experimentar esse processo em uma situação relativamente simples possa contribuir para compreensão posterior de conceitos no tópico de funções, por exemplo.

Ao refletir *a priori* sobre tais possibilidades e formas de ação, o professor torna-se mais equipado para agir durante a aplicação, com mais estratégias e alternativas para considerar explicações extras e alterações necessárias mesmo durante a aplicação em sala de aula.

### 2.2.2 Atividade: Infinitos quadradinhos

Esta atividade, sugere a investigação da área de uma figura formada por infinitos quadradinhos, como mostrado na imagem a seguir.



Figura 4: Infinitos quadradinhos.

Antes mesmo de sugerir que se inicie a investigação, veja como essa forma foi obtida.

- Passo 1: Comece com um quadrado de área 1;
- Passo 2: Divida-o em 4 quadrados iguais e pinte o indicado;
- Passo 3: Repita o mesmo os passos anteriores no quadrado diagonalmente oposto ao quadrado pintado;
- Passo 4: ...continue repetindo esses passos;

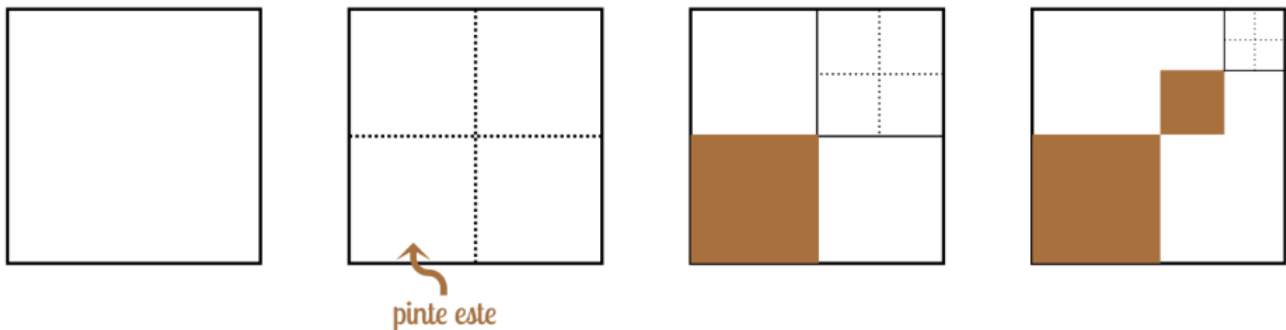


Figura 5: Como obter os infinitos quadradinhos.

Com essas informações, tente responder as seguintes questões:

- Qual é a área de cada um dos 4 primeiros quadradinhos pintados?
- Qual seria a área do quinto?
- E qual seria a área do décimo?

Obteve respostas para todos os itens acima? Você obteve uma sequência, correto? Quais características você observa nessa sequência? Voltando ao questionamento inicial, a área da Figura 4 é dada pela soma das áreas de cada quadrado que se acrescenta na imagem. Você consegue obter o valor dessa soma?

Uma última questão: Qual é a fração do quadrado inicial que estará pintada se repetirmos o processo de colorir quadradinhos infinitas vezes?

Depois de considerar as perguntas dessa atividade, veja a figura a seguir e imagine como ela poderia ajudar a entender as características da sequência obtida e a resposta para a pergunta final.

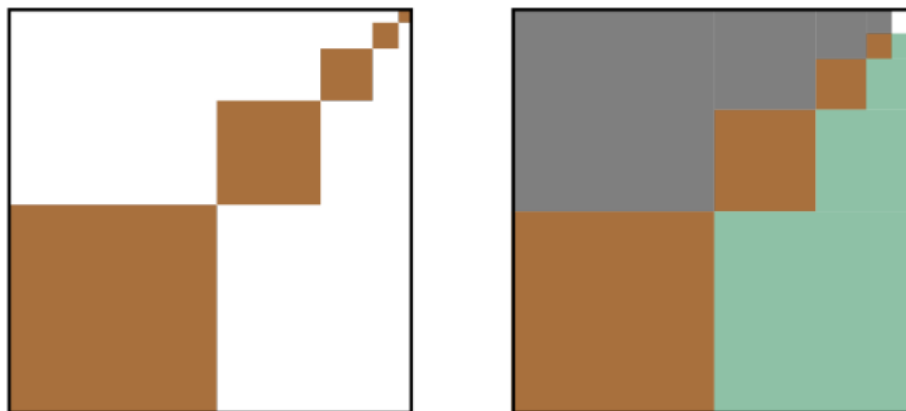


Figura 6: Subdivisão em destaque da figura original.

Discutiremos agora outros quatro aspectos, diferentes dos que foram discutidos na atividade anterior.

### Motivação inicial

Esta atividade inicia-se com uma única pergunta curta e direta a respeito de uma imagem de quadrados. Como motivação inicial, espera-se que tais características sejam atrativas para boa parte da turma. E que a atividade seja vista como uma investigação de uma situação relativamente simples: a princípio, não há termos ou fórmulas matemáticas que precisem ser compreendidas e não há textos ou descrições longos que tragam informações em demasiado.

Ao refletir sobre a motivação inicial, considera-se o primeiro contato da turma com a atividade. Neste exemplo, pergunta curta, tipo desafio, e desenho. Diversas outras opções podem ser consideradas, a ideia é que tal momento seja escolhido deliberadamente para chamar a atenção dos alunos.

### Arbitrário e necessário

Para o bom andamento dessa investigação, os professores devem ficar atentos aos conhecimentos ‘arbitrários’ que permitirão à turma avançar nas descobertas matemáticas da situação apresentada. Alguns desses conhecimentos podem ter sido descobertos e investigados anteriormente - não apenas informado aos estudantes - mas, neste item entram como um pré-requisito que já precisa estar assimilado para que se possa avançar em novas investigações. Neste caso, reconhecer a sequência como uma progressão geométrica (PG), ter familiaridade com nomes e termos como ‘razão’ e ‘termos’, além de algum domínio da notação e das ideias de lei de formação e área de quadrado. Saber reconhecer tais conhecimentos arbitrários, permite que o professor possa passá-los dessa forma - como informação - para os estudantes que precisarem e, assim, focar na elaboração de perguntas norteadoras e explicações elaboradas para os conhecimentos necessários que a atividade pretende abordar.



Para a atividade dos ‘Infinitos quadradinhos’, a investigação - sugerida pela sequência de perguntas - busca levar os estudantes a analisarem a possibilidade de uma soma infinita ser finita - a sequência de quadradinhos ‘cabe’ em um quadrado de lado unitário, por mais que se continue acrescentando quadrados. O casamento da imagem com as perguntas, possivelmente acrescidos de anotações e rascunhos dos estudantes, são fundamentais para que tais observações possam surgir durante a discussão.

É possível que, ao incentivar os estudantes a trabalharem em grupo e cheguem na observação de que a área será um terço da área do quadrado inicial, mesmo que não conheçam ainda formas de soma de PG infinita com razão menor do que 1. Mais uma vez, ter a clareza do que pode ser descoberto pelos alunos em uma atividade é fundamental para que os próprios estudantes tenham maiores oportunidades de aprender durante a aplicação da atividade.

### Erros, dificuldades e preconceções

Nesta atividade, pode-se refletir sobre erros causados por exigir que os estudantes usem frações (frações com potências no denominador) para representar as áreas a serem apresentadas. Os professores, quando refletirem sobre a aplicação dessa atividade, devem considerar o quanto tais conteúdos representariam uma barreira para sua turma, como isso poderia ser contornado ou, até mesmo, considerar que tal possibilidade torna a atividade inviável.

Como dificuldade, é preciso considerar que a atividade sugere a formação de uma sequência (com perguntas sobre os termos), mas a pergunta final é sobre a desses termos. Pode ser uma dificuldade comum notar que, para o final da atividade, será necessário considerar além dos termos isoladamente e passar a investigar a adição de infinitos valores. Note que a atividade não fornece subsídios para a dedução da fórmula geral dessa situação (PG infinita com razão menor do que 1), ela apenas sugere um contexto onde o limite dessa soma se mostra visualmente contido na imagem do quadrado inicial.

Por fim, uma preconceção que pode aparecer na turma é a ideia errada de que quando uma adição for formada por infinitas parcelas positivas, o resultado será infinito ou, pelo menos, muito grande. Não se deve menosprezar o tempo de cada aluno para que tal ideia seja internalizada e aceita. O professor deve, sim, estar munido de outros exemplos e situações que possam ajudar neste momento, por exemplo sugerir a soma:  $0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + 0,00001 + 0,000001 + \dots$  ou ter outras sequências visuais delimitadas por uma figura, como:

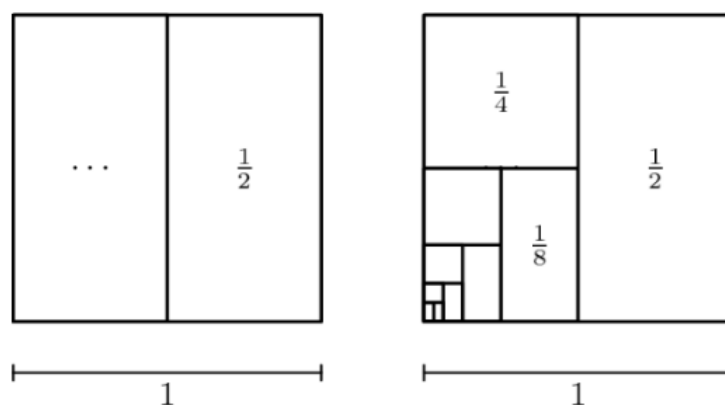


Figura 7: Exemplo de imagem que sugere o limite de uma adição de infinitas parcelas.

### Formas de representação

A atividade dos infinitos quadradinhos faz uso de uma representação pictórica como suporte para o desenvolvimento da sequência. Para cada novo termo da sequência (dado em valores numéricos), é possível associar uma imagem - um quadradinho extra. Nota-se que a atividade sugere a associação de três conceitos para um mesmo elemento, isto é, cada termo da sequência é representado por: (1) um quadradinho na figura; (2) a área desse quadradinho; (3) o valor numérico (fração) dessa área. Essa variação de 'significado' pode contribuir para que os estudantes compreendam da forma que lhes for mais conveniente.

Neste exemplo de atividade, considerou-se benéfica a variação de representação, tal decisão precisa ser deliberada e estar alinhada com os objetivos da atividade.

# Capítulo 3

## Planos de aula



Neste capítulo, serão apresentadas 3 planos de aula desenvolvidos durante as disciplinas ministradas para estudantes de Licenciatura em Matemática da Unicamp após a discussão de uma série de atividades proposta pela docente em termos dos oito aspectos discutidos anteriormente.

Os planos de aula foram escritos seguindo um modelo com cinco seções:

- **Informações:** contendo detalhes sucintos sobre os objetos do conhecimento a serem tratados, sugestões de aplicação e dinâmica e objetivos gerais da atividade. Nesta seção estão inclusos os aspectos ‘localização do conteúdo’ e ‘intencionalidade’;
- **Atividade:** o texto/imagem/*site* em si, no formato que deve ser passado para os estudantes;
- **Resolvendo:** a resolução da atividade, incluindo sugestões para discussões em sala de aula e detalhamento sobre a dinâmica de aplicação;
- **Aspectos fundamentais:** comentários sobre os aspectos que se destacam na atividade sugerida; em geral, comentários sobre dois ou três aspectos;
- **Referências** (caso existam) e créditos.

Antes de apresentar os planos de aula, gostaria de agradecer às alunas Victória, Daniela e ao Lucas, não apenas por autorizarem que suas entregas fossem disponibilizadas neste *e-book*, mas também por toda a dedicação às disciplinas das quais eu fui docente responsável. Foi um prazer tê-los na turma!

## 3.1 Almoço no parque, por Victória Pincinato Angeli

### 3.1.1 Informações

#### Localizando a atividade

Esta atividade usa uma situação cotidiana como contexto para trabalhar conceitos introdutórios de Geometria Analítica (GA), especificamente o sistema cartesiano ortogonal, distância entre pontos e ponto médio. Para uma realização proveitosa, recomenda-se que os alunos previamente dominem e saibam utilizar o Teorema de Pitágoras. Após a aplicação da atividade, recomenda-se uma formalização dos conteúdos aqui trabalhados e depois seguir para o tópico de inclinação da reta.

#### Sugestões

- **Ano de aplicação:** 3º ano do Ensino Médio - revisão de GA
- **Duração:** 2 aulas de 50 minutos
- **Material:** folhas de atividade impressa, rascunho, lápis, borracha, régua.

#### Intencionalidade

O objetivo principal é retomar conceitos introdutórios de GA de forma interativa e participativa, usando um contexto do ‘mundo real’. Inicia-se com uma questão de familiarização das notações de coordenadas no plano, seguida de uma questão cujo objetivo é que os estudantes explorem o conceito

de distância entre dois pontos e trabalhem para conseguir calculá-la, sem o uso de fórmula decorada. Por fim, a última questão busca levar os alunos a elaborar o conceito de ponto médio.

### Dinâmica

Esta atividade, ainda que a colaboração e troca entre alunos possa ser encorajada, foi pensada para ser realizada de forma individual. A proposta é que o(a) professor(a) distribua a folha de atividade para a turma, leia o enunciado junto e deixe um tempo para resolver, ficando disponível para tirar dúvidas neste tempo. Depois disso, sugere-se mediar uma discussão das respostas, incentivando a participação dos alunos. Por fim, os alunos podem trocar questões inéditas que eles mesmos tenham elaborado.

### 3.1.2 Atividade

Quatro amigas (Ana, Bia, Carol e Dani) foram passar o dia no seu parque favorito. Elas chegaram de manhã e vão embora à noite, portanto precisarão almoçar no parque. Para o almoço, elas decidiram comer cachorro quente, dividir uma porção de batata frita, beber suco natural, e, para a sobremesa, um sorvete. Cada um dos itens é vendido em um quiosque diferente. No lugar em que estão reunidas, há um mapa de atrações do parque que mostra a localização de diversos pontos de interesse:



Figura 8: Mapa de atrações.

As meninas combinaram de uma delas ficar onde elas estão (sinal vermelho, 'Você está aqui' na figura acima), cuidando das bolsas e as outras três se dividirem para comprar os itens do almoço e voltar. Cada uma deve comprar um item e depois, das três que saíram, quem estiver mais perto da barraca de sorvete, compra o sorvete também. Após sortearem entre si, ficou decidido assim:

- Cuidar das bolsas e guardar lugar: Carol
- Comprar cachorro quente: Bia
- Comprar batata frita: Dani
- Comprar suco: Ana

A partir disso, investigue o que se pede a seguir:

1. Sabendo que cada quadradinho no mapa equivale a um quadrado com 10 metros de lado no mundo real, determine um eixo de coordenadas na figura que auxilia na leitura e determinação de distâncias. Determine as coordenadas de cada um dos pontos do mapa de atrações de acordo com o eixo escolhido.
2. Considere que o parque é plano e que é possível andar em linha reta entre um ponto e outro. Seguindo o combinado, quem vai pegar o sorvete? Quantos metros essa pessoa irá andar no total?
3. Quando estava voltando com os sucos, Ana encontrou com seu irmão na metade do caminho e parou para conversar. Determine as coordenadas do ponto em que isso aconteceu.
4. Elabore uma pergunta que envolva deslocamento e/ou distâncias dentro do parque e troque com outra pessoa da sala. Lembre-se de resolver sua questão antes de entregá-la ao colega. Vocês irão se juntar para comentar sobre cada resolução elaborada.

### 3.1.3 Resolvendo

A atividade deve ser impressa e cada aluno deve receber uma cópia. É sugerido que o(a) professor(a) leia toda o texto junto com a classe, para garantir que todos entenderam a situação e o que está sendo pedido.

Feito isso, o(a) professor(a) deve deixar um tempo (sugestão: 50 minutos) para a turma responder às três questões, deixando claro que estará disponível em caso de dúvidas, mas evitando entregar as respostas ou a forma de chegar à resposta. É sempre preferível que as intervenções do(a) professor(a) sejam em forma de dicas ou questionamentos que possam direcionar o estudante.

- 1) Considerando o eixo com origem no ponto ‘você está aqui’, temos:

- Você está aqui = (0,0)
- Cachorro quente = (0,-40)
- Batata frita = (-30,60)
- Sanitários = (40, -10)
- Informações = (50,80)
- Suco = (80,20)
- Sorvete = (-100,0)
- Entrada/saída = (70,100)

- Brinquedos infantis =  $(-80, -80)$
- Floresta =  $(-70, -30)$

Note que as coordenadas sugeridas acima são dependentes da escolha da origem do eixo cartesiano. É interessante mostrar opções diferentes que os alunos podem ter feito.

- 2) Conforme foi combinado, quem compra o sorvete não pode ser quem ficou cuidando das bolsas. Também não poderia ser a pessoa que fosse comprar os sucos, pois o quiosque do suco é visivelmente mais longe que os outros dois. Logo, a resposta não pode ser Carol, nem Ana. Temos então duas opções: Bia (cachorro quente) e Dani (batata frita). Para saber qual está mais perto da barraca do sorvete, os alunos podem calcular as duas distâncias ou usar uma régua e ver que o segmento entre o ponto da batata e o ponto do sorvete é mais curto que o segmento entre o ponto do cachorro quente e o ponto do sorvete. Logo, quem busca o sorvete é a Dani.

Para saber quantos metros Dani andará, temos que calcular três distâncias:

- $d_1$ : do ponto de partida à barraca da batata frita;
- $d_2$ : da barraca da batata frita à barraca do sorvete;
- $d_3$ : da barraca do sorvete ao ponto inicial.

Espera-se que os alunos tenham conseguido chegar à conclusão de que para calcular essas distâncias deveriam usar Pitágoras. Usando a fórmula da distância chega-se nos mesmos resultados:

$$d_1 = \sqrt{(-30)^2 + (60)^2} = 30\sqrt{5} \approx 67,08$$

$$d_2 = \sqrt{(-70)^2 + (60)^2} = 10\sqrt{85} \approx 92,19$$

$$d_3 = \sqrt{(100)^2 + (0)^2} = 100$$

Portanto, Dani vai andar aproximadamente 259,27 metros ( $d_1 + d_2 + d_3$ ).

Na questão 2, caso algum aluno esteja com dificuldade de começar, podem-se fazer perguntas como ‘pode ser a Carol? E a Ana? Por quê?’ para que ele perceba quais opções eliminar.

Caso algum estudante esteja travado na hora de calcular as distâncias, podem-se destacar no mapa os segmentos que equivalem aos catetos dos triângulos cuja hipotenusa é a distância que se quer e perguntar se ele/ela sabe calcular aquelas medidas, como uma dica para que o aluno enxergue o triângulo retângulo.

- 3) Se M é o local do encontro de Ana com o seu irmão, temos:

$$M = \left( \frac{0 + 80}{2}, \frac{0 + 20}{2} \right) = (40, 10)$$

Caso alguém trave na questão 3, uma sugestão é pedir que o aluno aponte no mapa o ponto que ele visualmente pensa que é o ponto médio e perguntar as coordenadas desse ponto.

Ao fim do tempo estipulado, sugere-se que o(a) docente corrija as questões junto com a turma, discutindo as respostas obtidas (principalmente para as questões 2) e 3)). Pode ser pedido que os

alunos expliquem seus raciocínios na lousa. O(a) docente deve conduzir a discussão, de modo que a turma toda compreenda e chegue à resposta correta.

- 4) Caso haja tempo, a sala pode ser dividida em duplas para que os estudantes resolvam as questões inéditas elaboradas. Sugere-se que isso seja feito ao final da discussão dos itens 1, 2 e 3 para que os alunos já tenham lembrado ou desenvolvido alguma familiaridade com os termos desse conteúdo e estejam mais preparados para lidar com as diversas situações imprevistas que podem surgir desse momento mais aberto da aula.

Recomenda-se que na aula seguinte o(a) professora(a) retome o que foi visto na atividade e ‘formalize’ (por exemplo: deduzir a fórmula da distância entre dois pontos).

### 3.1.4 Aspectos fundamentais

#### Motivação Inicial

Como o objetivo geral da atividade é apresentar conceitos, a aplicação da atividade em si é considerada como uma motivação. Ao aplicar esta atividade, o(a) docente estará optando por introduzir o tópico de Geometria Analítica desta forma, em vez de uma aula expositiva.

O uso de uma situação cotidiana, usando um mapa de atrações de um parque para introduzir a atividade aproxima os alunos do conteúdo, de forma que a matemática fica ‘disfarçada’ no contexto e é criado um ambiente de interesse, aumentando a motivação.

#### Arbitrário e necessário

Nesta atividade, podem ser considerados como conhecimento arbitrário os termos específicos de geometria analítica como ‘plano cartesiano’, ‘eixo x ou eixo das abscissas’, ‘eixo y ou eixo das ordenadas’, já que é questão apenas de terminologia e não é passível de justificativa nem descoberta independente.

Por outro lado, no contexto desta atividade são necessários a notação de par ordenado (a partir do exemplo dado na questão 1), o cálculo da distância entre dois pontos (é possível um aluno chegar à fórmula da distância sozinho, usando Pitágoras), o cálculo das medidas dos catetos do triângulo cuja hipotenusa é a distância, as coordenadas do ponto médio como sendo a média das coordenadas do segmento original.

#### Barreiras e limite

A questão 1) foi pensada para que todos possam iniciar a atividade e consiste apenas em escrever coordenadas dos pontos. Além disso, o começo simples promove inclusão e engajamento, a ideia de que todos os alunos são capazes de começar a resolver.

Nas questões 2 e 3 temos problemas reais, no sentido de que não demos formas prontas para resolvê-las. Na questão 2, não se sabe inicialmente nem quais distâncias será preciso calcular. O fato de os alunos deverem pensar e cogitar diferentes caminhos para obter a resposta evidencia que, nesta atividade, o processo é mais importante que a resposta final. A questão final é aberta e pode gerar diversas situações inusitadas e interessantes de serem discutidas.



## Formas de representação

Parte do objetivo da atividade é que o aluno seja capaz de associar um ponto representado por coordenadas de um par ordenado a um ponto no plano ortogonal cartesiano, e que consiga interpretar esse plano, enxergando o mapa como uma representação em escala do espaço real. Para tanto, a atividade faz uso de texto escrito, representação simbólica de objetos matemáticos (o ponto como sendo um par ordenado) e representações icônicas (a forma como os pontos estão representados no mapa).

### 3.1.5 Créditos

Este material foi desenvolvido por Victória Pincinato Angeli durante a disciplina MA840 - Matemática do Ensino Médio para professores II, segundo semestre de 2022, do curso de Licenciatura em Matemática da Unicamp.

## 3.2 A loja do Sidmar, por Daniela Ferrari de Oliveira

### 3.2.1 Informações

#### Localizando a atividade

Para trabalharmos com matrizes e com algumas operações envolvendo matrizes, tais como a multiplicação, vamos usar também alguns conhecimentos prévios, como a leitura de tabelas e equações de primeiro grau. É esperado que os estudantes estejam familiarizados com os conceitos de linha, coluna e o que significa cada uma das letras de um elemento de uma matriz  $(a_{i,j})$ .

#### Sugestões

- Ano de aplicação: 2<sup>o</sup> série do Ensino Médio;
- Duração: 2 aulas de 45 minutos;
- régua, folhas impressas, computador, projetor.

#### Intencionalidade

Esta atividade tem como objetivos principais familiarizar os alunos com a relação entre matrizes e tabelas e mostrar como relacionar informações de tabelas para efetuar operações com matrizes.

#### Dinâmica

A atividade pode ser individual ou em duplas. O(a) professor(a) deverá controlar o tempo de cada etapa a fim de permitir que os estudantes possam refletir sobre a atividade e, depois, discutirem e escutarem as soluções de seus colegas.

### 3.2.2 Atividade

Sidmar resolveu produzir velas aromáticas. Ele encontrou as seguintes informações sobre como produzir três modelos diferentes de velas:

- Modelo 1: 20 g de parafina, 1 ml de óleos essenciais, 0,3 ml de corante e um barbante.
- Modelo 2: 50 g de parafina, 2 ml de óleos essenciais, 0,2 ml de corante e um barbante.
- Modelo 3: 25 g de parafina, 0,5 ml de óleos essenciais, 0,1 ml de corante e um barbante.

Antes de começar a fabricar as velas, Sidmar quer estimar seus gastos. Sabendo que o preço da parafina é R\$2,00 por 100g, o óleo custa R\$100,00 por 100ml, o corante R\$200,00 por 100ml e R\$0,05 cada barbante, ajude Sidmar a calcular o custo dos materiais em cada modelo.

### 3.2.3 Resolvendo

Distribua a atividade para a turma e dê entre 10 à 15 minutos para resolverem. Assim que passar o tempo estipulado, peça para que a turma apresente suas resoluções na lousa. É muito provável que encontre diferentes formas de chegar na resolução. A seguir, estão os valores finais que devem ser obtidos

- Modelo 1: R\$2,05
- Modelo 2: R\$3,45
- Modelo 3: R\$1,25

Caso a turma chame a atenção para outros custos que envolvam a produção e venda de velas, você pode discutir na lousa quais seriam, mas salientando que nessa atividade estamos nos concentrando em apenas alguns deles por conta do conteúdo que está sendo estudado.

Sobre as possíveis resoluções, observando, por exemplo, que a parafina nos três modelos têm quantidades múltiplas de 5, o estudante pode calcular o preço de 5 g e, em seguida, multiplicar pelos valores de cada modelo. Pode ser comum também fazer uso de regra de três para cada ingrediente e para cada modelo. Para direcionar a aula ao objetivo de apresentar tabelas como matrizes, organize as informações do problema em uma tabela - use exemplos dos próprios alunos caso tenha algum.

	Parafina	Óleo	Corante	Barbante	Preço
Modelo 1	20 g, R\$ 0,40	1 g, R\$ 1,00	0,3 g, R\$ 0,60	1 g, R\$ 0,05	R\$ 2,05
Modelo 2	50 g, R\$ 1,00	2 g, R\$ 2,00	0,2 g, R\$ 0,40	1 g, R\$ 0,05	R\$ 3,45
Modelo 3	25 g, R\$ 0,50	0,5 g, R\$ 0,50	0,1 g, R\$ 0,20	1 g, R\$ 0,05	R\$ 1,25

Note, e aponte para a turma, que nesta tabela foram incluídas informações dos valores de parafina, óleo, corante e barbante considerando cada modelo - foram valores que tiveram que ser calculados anteriormente.

Uma outra maneira de organizar as informações é montar duas tabelas. Uma com as informações sobre as quantidades necessárias:

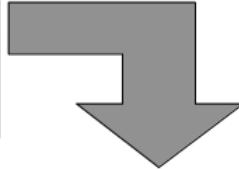
	Parafina	Óleo	Corante	Barbante
Modelo 1	20 g	1 g	0,3 g	1 g
Modelo 2	50 g	2 g	0,2 g	1 g
Modelo 3	25 g	0,5 g	0,1 g	1 g

Outra com as informações sobre preço:

	R\$/unidade
Parafina (g)	R\$ 0,02
Óleo (ml)	R\$ 1,00
Corante (ml)	R\$ 2,00
Barbante	R\$ 0,05

Nesta segunda maneira também temos o uso de tabelas, mas foi feita uma separação entre quantidades de ingredientes em cada um dos modelos de velas e nos preços de cada ingredientes. Essa organização é interessante, pois podemos obter facilmente o custo de cada vela de um modelo realizando a multiplicação de matrizes.

	Parafina (g)	Óleo (ml)	Corante (ml)	Barbante
Modelo 1	20 g	1 ml	0,3 ml	1
Modelo 2	50 g	2 ml	0,2 ml	1
Modelo 3	25 g	0,5 ml	0,1 ml	1



	R\$/unidade
Parafina (g)	0,02
Óleo (ml)	1
Corante (ml)	2
Barbante	0,05

Figura 9: Combinando as informações das tabelas

É importante que a turma entenda o que está sendo representado em cada tabela e note que a multiplicação do primeiro elemento da primeira tabela pelo primeiro elemento da segunda tabela fornece o valor a ser pago pela parafina para confeccionar o Modelo 1 de vela. Da mesma forma, ao multiplicarmos os próximos elementos correspondentes, obteremos o valor do gasto com óleo, corante e barbante para o Modelo 1. Ao somarmos os quatro valores obtidos, obteremos o gasto total para esse modelo.

O mesmo processo pode ser realizado para obter os gastos dos dois próximos modelos. Ao escrevermos as tabelas acima em forma de matrizes e realizarmos as mesmas operações, realizaremos a multiplicação dessas matrizes!

Com os valores da primeira tabela, montamos uma matriz  $3 \times 4$ , isto é, possui três linhas e quatro colunas. Com os valores da segunda tabela, montamos uma matriz coluna  $4 \times 1$ , com quatro linhas e uma coluna.

$$\begin{pmatrix} 20 & 1 & 0,3 & 1 \\ 50 & 2 & 0,2 & 1 \\ 25 & 0,5 & 0,1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,02 \\ 1 \\ 2 \\ 0,05 \end{pmatrix}$$

Para obter o preço de cada um dos modelos basta somar os produtos da multiplicação de cada elemento da primeira matriz pelo elemento correspondente na segunda matriz coluna:  $20 \cdot 0,02 + 1 \cdot 1 + 0,3 \cdot 2 + 1 \cdot 0,05 = 2,05$ .

Essa multiplicação é possível, pois a primeira matriz tem dimensões  $3 \times 4$  e a segunda matriz  $4 \times 1$ . Nesse caso, a matriz resultante dessa operação será uma matriz que indica o preço de cada um dos modelos de velas e terá dimensões  $3 \times 1$ .

$$\begin{pmatrix} 2,05 \\ 3,45 \\ 1,25 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz faz referência a cada um dos modelos de velas da loja do Sidmar. Desse modo, R\$2,05 é o preço da vela de Modelo 1; R\$3,45 é o preço da vela de Modelo 2 e R\$1,25 é o preço da vela de Modelo 3.

Para finalizar a aula, sugerimos uma formalização a respeito de multiplicação de matrizes. Os livros didáticos também podem ser fontes de contextos para soma e subtração de matrizes, bem como para outras ideias de multiplicação. De qualquer forma, acreditamos que introduzir o processo de multiplicação de matrizes da forma que sugerimos nesta atividade permitirá que os estudantes adquiram não somente maior familiaridade com a melâmica em si, mas também percebam vantagens ao se registrar e obter informações nesse formato. Um comentário final do professor poderia ser sobre a possibilidade de manter tabelas (matrizes) muito grandes em arquivos de planilhas eletrônicas (com custo de produtos) e usar a ferramenta para obter valor de custo final de forma rápida e simples.

### 3.2.4 Aspectos fundamentais

#### Motivação inicial

A possibilidade de apresentar o processo de multiplicação de matrizes de forma contextualizada e não apenas como uma sequência de passos pode permitir uma melhor apropriação desse conteúdo. Note, ainda, que o contexto, apesar de ser uma simplificação, é rápido de apresentar e pode ser adaptado de diversas formas – por exemplo, tipos de caixas de bombons de valores diferentes; opções de cestas de café da manhã; tabelas de campeonatos esportivos – onde se tem pontos diferentes para vitória, empate e derrota, etc.

#### Arbitrário e necessário

Para esta atividade temos como arbitrário os conceitos de linhas e colunas de uma matriz, o elemento  $a_{ij}$ , ordem de matriz e nomes de matrizes mais comuns, como matriz coluna, por exemplo.

Compreender a ideia de multiplicação de matrizes é um conceito que, alguns alunos podem obter sem a interferência do professor.

### 3.2.5 Créditos

Este material foi desenvolvido durante a disciplina MA840 - Matemática do Ensino Médio para professores 2, do curso de Licenciatura em Matemática da Unicamp. A escrita teve participação de Daniela Ferrari de Oliveira e Rita Santos Guimarães.

## 3.3 Onde colocar a lixeira, por Lucas Almeida Barjud

### 3.3.1 Informações

#### Localizando a atividade

Para esta atividade o aluno deve ter conhecimento de geometria analítica acerca dos seguintes tópicos:

- Saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações;
- Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas;
- Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas.

A atividade serve como uma revisão para fixação das habilidades acima.

#### Sugestões

- Ano de aplicação: 2º ano do Ensino Médio.
- Duração: 2 ou 3 aulas de 50 minutos.
- Material: papel quadriculado impresso, laboratório de informática e *datashow*, régua, compasso e transferidor são opcionais, de acordo com demanda dos alunos.

#### Intencionalidade

Esta atividade têm como foco o papel ativo dos alunos durante as discussões em grupo e apresentações de projeto para a localização da lixeira, de forma que eles usem todo o conhecimento adquirido em aulas anteriores para produzir um resultado para o projeto. Considerando isso, a pretensão de que durante as discussões os grupos discutam e desenvolvam o problema com conceitos de geometria analítica como: lugares geométricos, em particular, mediatriz, circunferência, cálculo de distância entre dois pontos, distância entre ponto e reta, fórmulas de reta, circunferência e parábola.

Ao final da atividade cada grupo deve ter consolidado seus argumentos de maneira sistemática, utilizando recursos matemáticos do conteúdo em questão, a fim de desenvolver uma explicação do critério escolhido para o projeto.

#### Dinâmica

Após uma retomada breve dos conceitos de geometria analítica trabalhados previamente, o professor deve apresentar a proposta de atividade. A turma deve ser dividida em grupos de 4 a 5 alunos que deverão decidir entre si um critério para a produção de seu projeto. A partir do critério, os grupos devem desenvolver um projeto com argumentação matemática para ser apresentado no final da aula. Durante a dinâmica de grupos, é importante que o professor acompanhe cada grupo, indagando e instigando os alunos quando necessário.

### 3.3.2 Atividade

Júlia e Alana moram em uma fazenda. As propriedades de Alana e Júlia são vizinhas e têm acesso por uma mesma estrada retilínea. Elas precisam construir uma (única) lixeira que atenda às duas propriedades. Vocês foram contratados para criar um projeto que sugira o local onde elas devem construir tal lixeira. Considerando que não há empecilhos nos terrenos, como elas poderiam decidir a posição da lixeira?

Elas forneceram um mapa e solicitaram que esteja claro:

1. O critério escolhido para a posição da lixeira;
2. Como seria possível determinar, no mapa, o local exato da lixeira que segue o seu critério? Monte a sugestão de projeto para Alana e Júlia. Justifique suas decisões e inclua informações sobre distâncias e qualquer outra que considerar relevante.

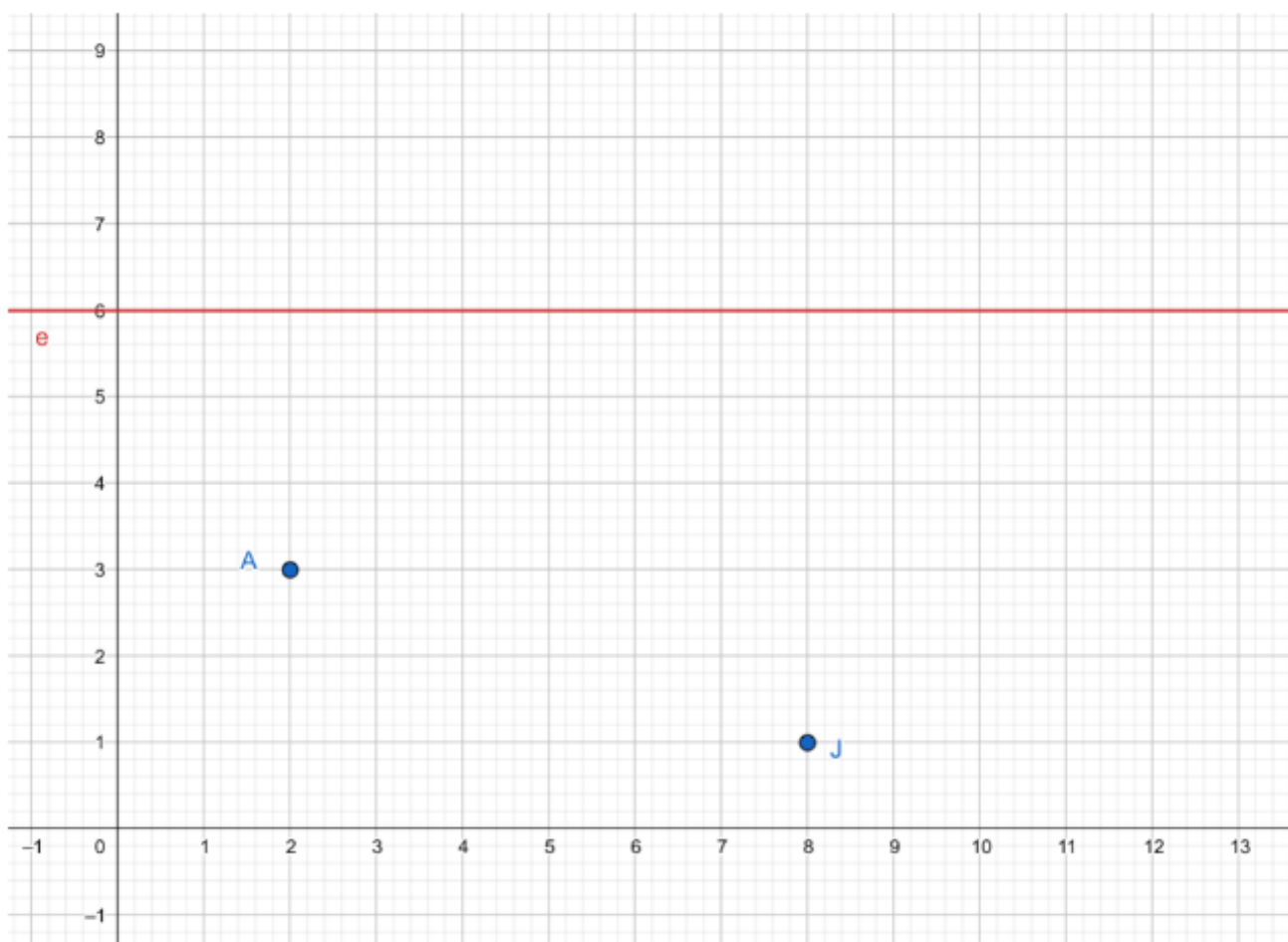


Figura 10: Posições para a atividade.

No eixo cartesiano acima, o ponto  $A$  indica a posição da casa de Alana, o ponto  $J$  é a posição da casa de Júlia, e a reta  $e$  representa a posição da estrada que dá acesso às fazendas.

### 3.3.3 Resolvendo

Diversos critérios poderão surgir a partir das ideias discutidas pelos alunos. É interessante, caso surjam critérios onde a resposta não for tão evidente e estiver fora do alcance do professor, que seja feito um estudo sobre o significado geométrico e algébrico do critério para que uma explicação possa ser levada aos alunos em alguma aula posterior. A seguir, apresentamos duas sugestões de critérios e as possíveis resoluções.

**Critério 1:** Alana e Júlia devem percorrer a mesma distância de suas fazendas até a lixeira, que deverá ser posicionada na estrada.

Primeiro, identifique pontos das fazendas de Alana e Julia:  $A = (2, 3)$  e  $J = (8, 1)$ ; e o ponto onde a lixeira deve ser colocada:  $L = (x_L, 6)$ . Perceba que, como queremos encontrar o ponto da reta no qual a distância entre a lixeira e a propriedade de Alana, a lixeira e a propriedade de Júlia serão iguais, podemos montar o triângulo abaixo.

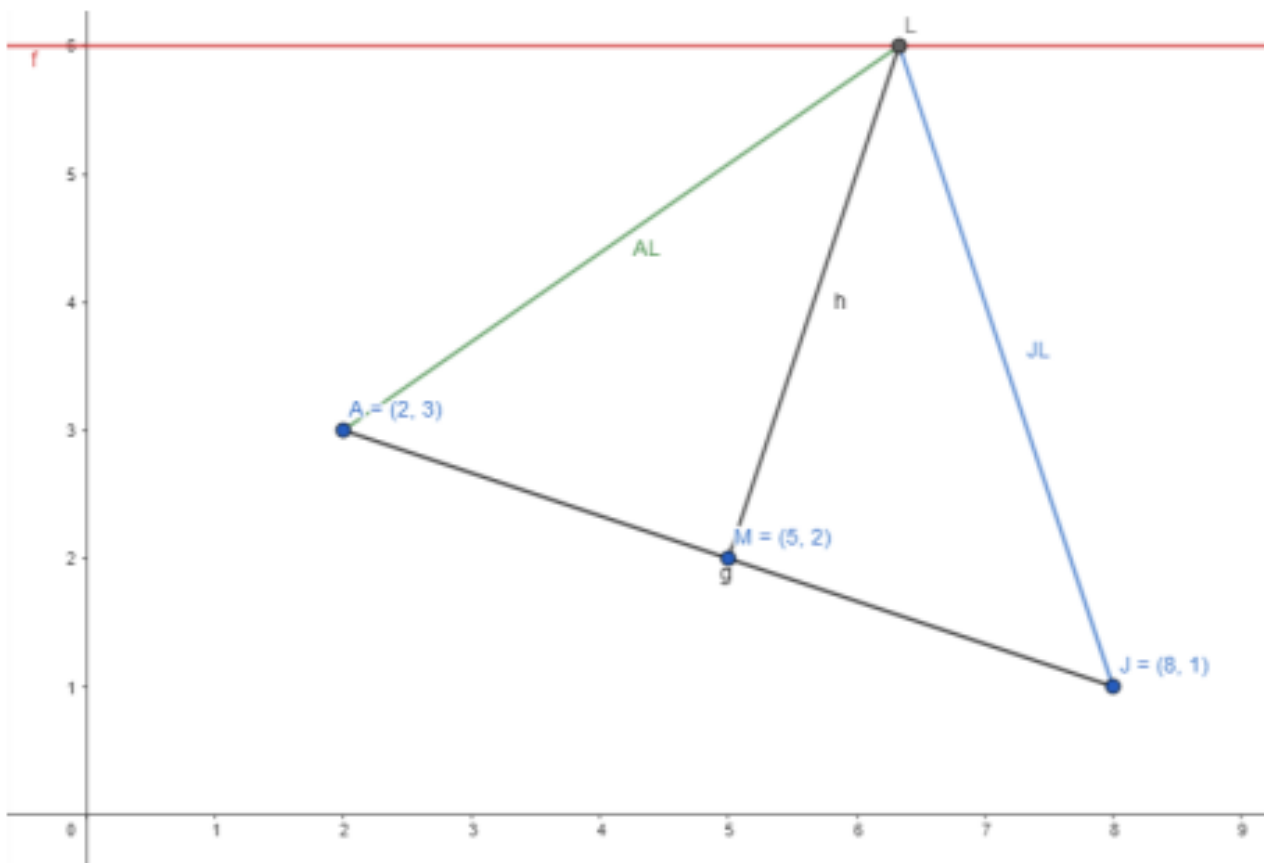


Figura 11: Esquema para resolução.

Através da fórmula de distância entre dois pontos (ou igualando as hipotenusas dos triângulos  $AML$  e  $JML$ ), podemos encontrar as coordenadas do ponto  $L$ .

$$\sqrt{(x-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (6-1)^2} \rightarrow x = \frac{19}{3}$$

Portanto, a lixeira está localizada no ponto  $(19/3, 6)$ .

**Critério 2:** Alana, Júlia e o lixeiro devem percorrer a mesma distância até a lixeira, que deverá ser posicionada dentro de alguma fazenda (não necessariamente na estrada).

O desenvolvimento algébrico da resposta para esse critério é mais complicado que o primeiro. Em particular, encontrar o ponto  $P$  desejado pode ser muito trabalhoso para se fazer manualmente, então é aconselhado o uso de alguma calculadora gráfica ou aplicativos como *wolfram alpha* e *geogebra* para resolver as equações obtidas.

Como a distância que o lixeiro percorrerá precisa ser a menor possível, seu percurso deve ser perpendicular à estrada. Assim, se pensarmos o lugar geométrico dos pontos que têm a mesma distância da estrada até cada uma das casas separadamente, chegamos em duas parábolas:

- Parábola 1 com foco em  $(2, 3)$ , reta diretriz  $y = 6$  e, portanto, equação dada por  $-x^2 + 4x - 6y = -23$
- Parábola 2 com foco em  $(8, 1)$  e reta diretriz  $y = 6$ , portanto, equação dada por  $-x^2 + 16x - 10y = 29$

A intersecção entre essas parábolas resultará em um ponto  $P$  que tem mesma distância aos focos (casas) e à reta diretriz (estrada). O gráfico abaixo ilustra o raciocínio.

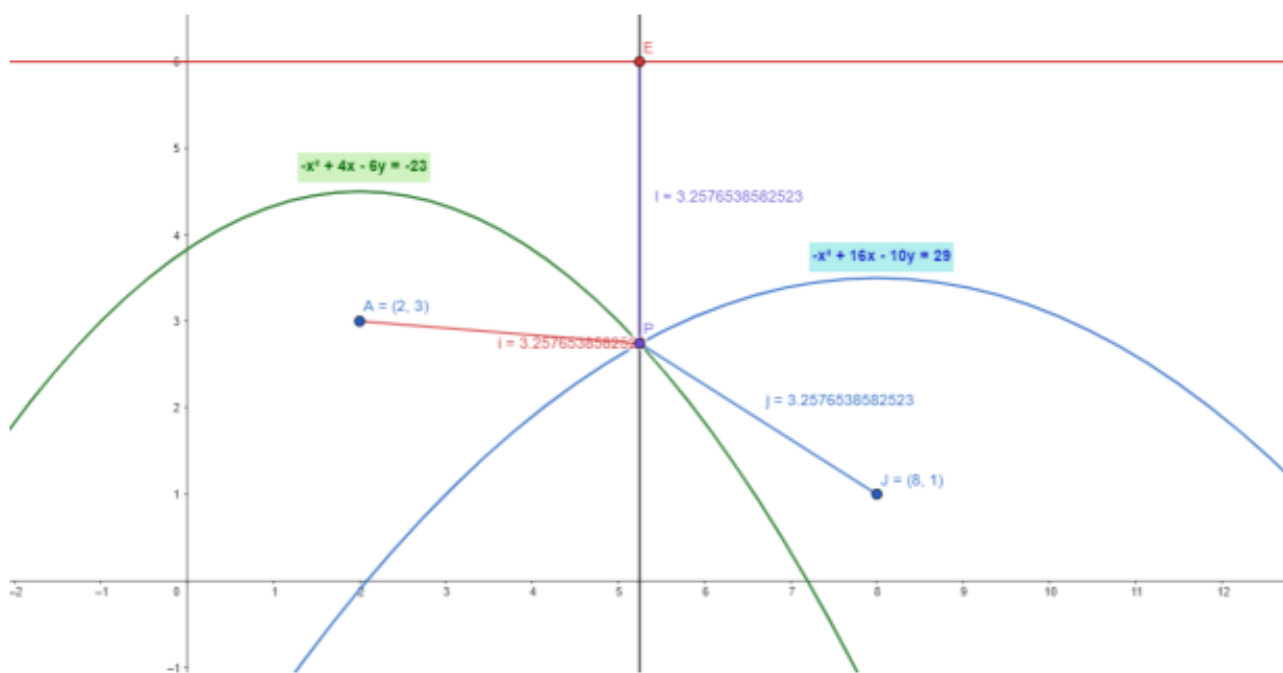


Figura 12: Solução para o segundo critério.

### 3.3.4 Aspectos fundamentais

#### Barreira e limite

Apesar dessa atividade partir de uma situação simples, como o problema que deverá ser resolvido pelos alunos depende do critério definido pelo grupo, existe a presença de uma característica de resposta aberta com possibilidades de soluções banais, como colocar a lixeira no ponto médio entre as duas propriedades, e soluções mais rebuscadas como considerar que Alana, Júlia e o lixeiro deverão andar a mesma distância até a lixeira.



É interessante notar que, dependendo do contexto utilizado, essa tarefa pode produzir uma situação onde os alunos acabam desconstruindo as barreiras de conteúdo que existem na escola, partindo no caminho para uma proposta interdisciplinar. Um exemplo possível disso é pensar em uma proposta como a apresentada, durante a disciplina de MA840, por um professor do Ensino Médio que usou esta atividade, mas onde, em vez de duas fazendas existiam duas vilas: a dos Morangos e a das Jaboticabas. A partir desse contexto, os critérios para construção da estação de trem poderiam levar em consideração fatores como, número de população, renda e condições sociais da população, existência ou não de exportação de produtos em cada vila e outros que surgissem da imaginação dos alunos.

Com tais fatores, os critérios definidos poderiam se embasar em conceitos estrangeiros à Matemática, como ética e moral, ao pensar no que seria justo, considerando os fatores evidenciados, a geografia e economia local ao avaliar questões como relevo, produção de produtos agrícolas ou de outros tipos. As possibilidades são múltiplas e servem como base para o pensamento do modelo matemático que resolve o problema proposto. Dessa forma, torna-se possível expandir tal atividade para produzir algum tipo de projeto multidisciplinar.

### **Adaptação**

Esta atividade permite múltiplas possibilidades de alteração na contextualização para situações mais comuns ao cotidiano dos alunos, por exemplo: Duas alunas, Alana e Julia são as únicas que pegam um ônibus fretado na Avenida Brasil, que faz uma trajetória retilínea com respeito às suas casas. Onde deve ser colocado o ponto de subida para o fretado de modo a contemplar as duas alunas?

Além disso, por ter a característica mencionada anteriormente, a atividade acaba sendo acessível para a maior parte dos alunos - desde que se considere um critério relativamente simples. O conteúdo específico trabalhado durante a atividade dependerá do critério definido pelo grupo. Isso pode ser visto nas sugestões de solução apresentadas, uma usando apenas propriedades de triângulo retângulo e outra usando a interseção de duas parábolas para encontrar o local desejado da lixeira.

Em outras palavras, caso o critério definido pelo grupo mostre-se muito difícil a ponto de inviabilizar a resolução, é possível intervir, sugerindo escolher critérios mais simples; e, caso a turma consiga finalizar a atividade com rapidez, a fim de prolongar a atividade, é viável apresentar critérios mais complicados para toda a turma, permitindo que os grupos tentem resolver o problema originado e posteriormente discutindo as soluções em lousa.

### **3.3.5 Créditos**

Este material foi desenvolvido durante a disciplina MA840 - Matemática do Ensino Médio para professores 2, do curso de Licenciatura em Matemática da Unicamp. A escrita teve participação de Lucas Almeida Barjud e Rita Santos Guimarães.

# Capítulo 4

## Considerações finais



Neste *e-book*, foram apresentados 8 aspectos que podem guiar a discussão sobre atividades de matemática para sala de aula. Esses aspectos foram sugeridos com base em diversas pesquisas na área de ensino, aprendizagem e formação de professores que ensinam matemática. Além disso, eles foram utilizados em duas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática da Unicamp, sendo a autora deste texto a docente responsável.

Dada a complexidade da profissão docente e a diversidade de contextos nos quais os professores trabalham, buscou-se oferecer uma estrutura que pudesse organizar aspectos fundamentais a serem considerados ao planejar e/ou discutir uma atividade para sala de aula.

A experiência de usar os aspectos como catalisadores para focar a discussão durante as aulas da graduação mostrou-se bastante profícua em criar oportunidades para que os futuros professores fossem capazes de considerar potencialidades e limitações de atividades matemáticas para sala de aula do Ensino Básico. Os aspectos também serviram de estrutura para o planejamento de planos de aula pelos futuros professores que cursaram as disciplinas, e três desses planos foram apresentados neste *e-book*.

# Apêndice A

## Lista de *sites* e repositórios



Neste apêndice apresenta-se uma lista de *sites* e repositórios utilizados como fonte de atividades pela autora durante as disciplinas e para a oficina oferecida durante o 5º Simpósio da ANPMat. Além disso, são sugestões que podem ser úteis para professores e para formadores de professores:

- Matemática Multimídia: <<https://m3.ime.unicamp.br/>>
- Um Livro Aberto: <<https://livroaberto.uniriotec.br/>>
- Mathematics Assessment Project: <<https://www.map.mathshell.org/index.php>>
- ATM: <<https://www.youtube.com/@AssocTeachersMaths>>
- NCETM: <<https://www.ncetm.org.uk/>>
- Nrich: <<https://nrich.maths.org/>>
- E-aulas: <<http://www.mais.mat.br/aulas/>>
- Sementes matemáticas: <<https://www.mais.mat.br/sementes/>>
- OBMEP: <<http://www.obmep.org.br/apostilas.htm>>
- Youcubed: <<https://youcubed2stg.wordpress.com/pt-br/>>
- STEM Learning: <<https://www.stem.org.uk/elibrary/collection/2933>>

Ressalta-se que os repositórios listados explicitam suas políticas relacionadas à permissão de uso e reprodução dos materiais, sendo, em geral, bastante permissivas.

# Referências Bibliográficas



- BALL, D. L. Uncovering the Special Mathematical Work of Teaching. Em: KAISER, G. (Ed.). *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*. Cham: Springer International Publishing, 2017. p. 11–34.
- FOSTER, C., FRANCOME, T., HEWITT, D., SHORE, C. (2021). Principles for the design of a fully-resourced, coherent, research-informed school mathematics curriculum. *Journal of Curriculum Studies*, 53(5), 621–641. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00220272.2021.1902569>>.
- HEWITT, D. (1999). Arbitrary and necessary part 1: A way of viewing the mathematics curriculum. *For the Learning of Mathematics*, 19(3), 2–9.
- HOOVER, M., MOSVOLD, R., BALL, D. L., LAI, Y. (2016). Making Progress on Mathematical Knowledge for Teaching. *The Mathematics Enthusiast*, 13(1–2), 3–34. Disponível em: <<https://doi.org/10.54870/1551-3440.1363>>.
- LEAVY, A., HOURIGAN, M. (2022). The Framework for Posing Elementary Mathematics Problems (F-PosE): Supporting Teachers to Evaluate and Select Problems for Use in Elementary Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 111(1), 147–176. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10649-022-10155-3>>.
- MA, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum Associates.
- MASON, J., THE OPEN UNIVERSITY (ORGS.). (1988). *Expressing generality*. Centre for Mathematics Education, The Open University. Disponível em: <<https://www.open.edu/openlearncreate/mod/oucontent/view.php?id=19072>>.
- POURNARA, C., ADLER, J. (2022). Revisiting School Mathematics in Pre-service Secondary Teacher Education: Purposes, Opportunities and Challenges. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(2), 391–410. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10763-021-10150-9>>.
- ROWLAND, T., HUCKSTEP, P., THWAITES, A. (2005). Elementary Teachers? Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255–281. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5>>.
- SELLING, S. K., GARCIA, N., BALL, D. L. (2016). What Does it Take to Develop Assessments of Mathematical Knowledge for Teaching?: Unpacking the Mathematical Work of Teaching. *The Mathematics Enthusiast*, 13(1–2), 35–51. Disponível em: <<https://doi.org/10.54870/1551-3440.1364>>.
- SHULMAN, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4–14. Disponível em: <<https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>>.
- SHULMAN, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, 57(1), 1–23. Disponível em: <<https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>>.
- STANLEY, D., SUNDSTRÖM, M. (2007). Extended analyses: Finding deep structure in standard high school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4–6), 391–397. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10857-007-9050-z>>.

SWAN, M. (2005). *Standards Unit-Improving learning in mathematics: Challenges and strategies*. Department for Education UK. Disponível em: <[https://colleenyoung.files.wordpress.com/2010/04/improving\\_learning\\_in\\_mathematicsi.pdf](https://colleenyoung.files.wordpress.com/2010/04/improving_learning_in_mathematicsi.pdf)>. Acesso em: 10 jul. 2022.

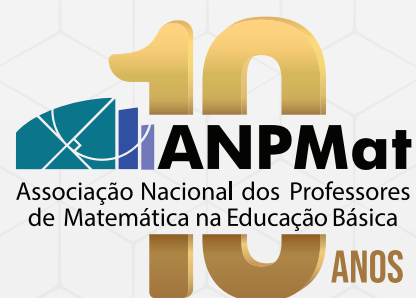
ZASLAVSKY, O., SULLIVAN, P. (2011). Setting the stage: A conceptual framework for examining and developing tasks for mathematics teacher education. *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics* (p. 1–19). Springer.





## 5º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Realização e Organização



Distribuição



ISBN: 978-65-88013-27-4

CRI



9 786588 013274