5º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Uma abordagem prática, tecnológica e interdisciplinar

Marlon Mülhbauer

Lucas dos Santos Maciel

Claudio Iavorski

ANPMat

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

10 ANOS

5º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Santa Maria - RS / nov. 2022

GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Uma abordagem prática, tecnológica e interdisciplinar

Geometria não euclidiana na educação básica: uma abordagem prática, tecnológica e interdisciplinar

Projeto gráfico e capa: Gabriel Brasil Nepomuceno

Produção editorial:
Editora Pi
https://www.editorapi.com.br | contato@editorapi.com.br | +55 21 97636-9137

Distribuição:
Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
http://www.anpmat.org.br | editoraanpmat@anpmat.org.br

ISBN: 978-65-88013-26-7

5º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Uma abordagem prática, tecnológica e interdisciplinar

Marlon Mülhbauer

Lucas dos Santos Maciel

Claudio Iavorski

1ª edição

2023

Rio de Janeiro

ANPMat
Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
10 ANOS

Sobre os autores

Marlon Mülhbauer

Natural de Rio Negro – PR, sempre foi apaixonado pelos números e, em especial, pela geometria. Licenciado em Matemática pela Universidade do Contestado, Especialista em Tecnologias, Comunicação e Técnicas de Ensino e Mestre em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná, atualmente trabalha sob dedicação exclusiva no Instituto Federal de Santa Catarina, Campus Canoinhas. Participa frequentemente de eventos matemáticos para sempre se atualizar e tornar o ensino de matemática mais significativo para seus alunos.

Natural de Santa Maria RS, Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Pelotas – UFPEL e Especialista em Metodologia do Ensino de Física e Matemática pela Uninter PR. Atualmente trabalha como professor de Matemática na Rede Marista de Ensino e na Secretaria Municipal de Educação de Cachoeira do Sul, cidade na qual reside. Possui diversas participações em congressos e simpósios e sempre busca se aprimorar para tornar as aulas mais significativas e ter uma abordagem mais prática, tecnológica e interdisciplinar do conteúdo.

Lucas dos Santos Maciel

Claudio Iavorski

Nascido em Campo Largo, Paraná, cursou Licenciatura em Matemática pela Universidade Tuiuti do Paraná (UTP) e Mestrado em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná – campus Curitiba (UTFPR). Atualmente trabalha sob dedicação exclusiva no Instituto Federal do Paraná, nos campi de Telêmaco Borba e de Campo Largo, sua cidade natal. Leciona em disciplinas no Técnico Integrado, na Licenciatura em Matemática e no Bacharel em Engenharia Elétrica. Atualmente também se dedica a projetos que envolvem treinamento e participação dos alunos em olimpíadas de matemática.

Marlon dedica esse livro à sua família, em especial à sua esposa Edna e à sua filha Laura.
Lucas dedica à sua família, em especial à sua esposa Cintia.
Claudio também dedica à sua família, em especial à sua futura esposa Mariana.

Sumário

Lista de Figuras

Prefácio

As geometrias não euclidianas são um tema pouco trabalhado na educação básica. Talvez por isso, os autores motivaram-se a elaborar um plano de ação que abordasse, de maneira introdutória, esse assunto que é tão importante quanto os outros que os livros didáticos normalmente trazem. Tais autores possuem ampla experiência em todas as etapas da educação, trabalhando há mais de uma década com os Ensinos Fundamental II e Médio, Ensino Técnico e Tecnológico e Ensino Superior. Conhecem, assim, a realidade educacional atual e almejam novas formas de aprendizado, de maneira contextualizada com o dia a dia da comunidade escolar, remetendo para um conhecimento significativo.

O tema escolhido para o minicurso é desdobramento da dissertação de mestrado pelo PROFMAT (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) de um dos autores Mülhbauer e Bernardes (2014). As formas de abordagem dos conceitos e a sua execução têm sido alteradas e aperfeiçoadas constantemente, de acordo com as sugestões e observações nas aplicações em salas de aula e em outros eventos.

Tal *e-book* é formado por cinco capítulos, que abordarão os conceitos inerentes ao desenvolvimento das atividades que foram propostas no minicurso ministrado no V Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática, durante o período de 04 a 06 de novembro de 2022, em Santa Maria, Rio Grande do Sul. Resumidamente, o primeiro capítulo trata da Introdução ao tema. O Capítulo 2 traz o Referencial Teórico, citações de autores e de documentos oficiais a respeito da importância do estudo de outras geometrias, além da euclidiana. O Capítulo 3 explana definições de geometria esférica, um caso particular das geometrias não euclidianas, e que são base para o desenvolvimento de uma série de atividades, dentre as quais destacam-se aquelas aplicadas no evento e descritas no capítulo seguinte. O Capítulo 4, então, detalha a metodologia aplicada no minicurso, explicando cada etapa e refletindo sobre os pontos positivos e negativos que observamos no evento e considerações a respeito do *software* GeoGebra, importante aliado na compreensão dos conceitos e atividades realizadas. Finalizamos com o Capítulo 5, no qual expomos as considerações finais a respeito da aplicação do minicurso.

Os apêndices trazem um modelo para elaborar o "Transferidor Esférico", um material didático bastante útil para desenvolver e reproduzir as atividades em sala de aula, e uma sequência de três listas de exercícios, dos mais simples até os mais elaborados, para serem utilizados com os alunos da educação básica. Analisando o contexto atual de nossos estudantes, acreditamos que alguns ajustes podem e devem ser realizados, a depender do nível de ensino que o professor estiver trabalhando. Para a sequência didática sugerida, os alunos precisam ter noções de geometria analítica plana e espacial, o que inclui conceitos vetoriais da física, além de um embasamento geográfico no que concerne ao entendimento de cartografia.

Metodologia

Este *e-book* apresenta uma metodologia para o desenvolvimento de uma sequência didática sobre geometria não euclidiana, com foco na geometria elíptica. A proposta visa fornecer um guia para professores interessados em explorar e compartilhar conhecimentos sobre esse fascinante campo da matemática.

O material inicia com uma apresentação do tema, revisão bibliográfica, definição dos objetivos, estruturação teórica, desenvolvimento do minicurso e coleta e análise dos dados obtidos. Isso acompanhado de uma proposta didática voltada a alunos do ensino básico, que foi apresentada e desenvolvida ao longo do minicurso.

A metodologia aqui apresentada busca auxiliar professores e demais curiosos sobre o tema a organizarem suas ideias, compreenderem o estado atual do conhecimento na área, e transmitirem informações claras e concisas sobre a geometria não euclidiana, com um enfoque específico na geometria elíptica.

Esperamos que desfrutem de uma boa leitura e continuem se aprimorando em prol da melhoria na qualidade da educação de nosso país.

Santa Maria, novembro de 2022

Marlon Mülhbauer
Lucas dos Santos Maciel
Claudio Iavorski

Agradecimentos

Agradecemos à ANPMat pela realização e organização do evento e pela oportunidade de ministrar este minicurso para uma gama de professores da maioria das regiões do Brasil; ao Instituto Federal de Santa Catarina (Câmpus Canoinhas), ao Instituto Federal do Paraná (Câmpus Telêmaco Borba) e ao Colégio Marista Roque (Cachoeira do Sul-RS) pelo apoio financeiro e flexibilização de horários para que pudéssemos estar presentes no Simpósio.

Capítulo 1

Introdução

A geometria é uma área fascinante da matemática que estuda as propriedades e relações dos objetos no espaço. Por muitos séculos, a geometria euclidiana, baseada nos postulados estabelecidos por Euclides, dominou os estudos geométricos. No entanto, ao longo do tempo, surgiram outras formas de geometria que desafiaram os axiomas euclidianos e expandiram nossos horizontes matemáticos.

Dessa forma, a geometria não euclidiana rompe com as regras clássicas da geometria e explora outras possibilidades. A geometria não euclidiana é motivada pela busca por um entendimento mais profundo da estrutura do espaço e das relações entre seus elementos. Ela desafia as noções de paralelismo, ângulos e distâncias, e abre caminho para novas perspectivas e aplicações em diversas áreas do conhecimento.

Os objetivos gerais do estudo da geometria não euclidiana, em particular da geometria elíptica, são ampliar nosso entendimento sobre as estruturas geométricas e enriquecer nosso conhecimento matemático, romper os limites da geometria euclidiana, estimular o pensamento abstrato e investigar a natureza do espaço. Além disso, a geometria não euclidiana tem aplicações práticas em áreas como a física, a astronomia e a computação gráfica, onde a compreensão de diferentes formas de espaço e suas propriedades é essencial.

Dentre os objetivos específicos do estudo da geometria elíptica, podemos destacar: analisar as propriedades e características únicas dessa geometria; explorar os diferentes axiomas e postulados que a fundamentam; investigar as relações entre ângulos, distâncias e formas na geometria elíptica; comparar as diferenças e semelhanças entre a geometria elíptica e a geometria euclidiana; e compreender as aplicações práticas da geometria elíptica em diversas áreas do conhecimento.

Ao embarcar nessa jornada pela geometria não euclidiana, especialmente pela geometria elíptica, somos desafiados a expandir nossos horizontes mentais e explorar um universo matemático repleto de possibilidades e surpresas. O estudo dessas geometrias não convencionais conduz-nos a um mergulho profundo no entendimento da estrutura do espaço e contribui para uma compreensão mais abrangente e sofisticada do mundo que nos cerca.

Capítulo 2

A Geometria nos documentos oficiais e nos livros

“Linha curva: o caminho mais agradável entre dois pontos!”

Mário Quintana

A arte de ensinar matemática é uma tarefa desafiadora. Não são poucas as vezes em que o aluno demonstra dificuldade durante o processo de aprendizado e, seguidamente, devido à falta de contextualização a situações cotidianas, acaba surgindo a célebre pergunta: "onde eu vou usar isto na minha vida?"

Atualmente, o ensino desta ou de qualquer outra disciplina de forma isolada acaba se tornando obsoleto e desinteressante. Precisamos integrar os componentes curriculares e mostrar suas conexões com o mundo atual, juntamente com suas aplicações cotidianas para despertar o interesse dos educandos e assim tornar o ensino por si só mais prazeroso.

Este trabalho tem por objetivo geral contribuir para o ensino de geometrias não euclidianas, utilizando tópicos de geografia e física para melhor contextualização do assunto, ligando assim, esses três componentes curriculares numa sequência didática que pode ser utilizada tanto no Ensino Fundamental II quanto no Ensino Médio. O professor que deseja aplicar os conceitos deste *e-book* em sala de aula deve estar ciente que o aluno precisará ter noções de álgebra vetorial e conhecimentos cartográficos. Sugerimos que uma conversa com os professores de física e geografia seja importante, para uma atividade interdisciplinar efetiva e qualitativa.

Nesta seção, apresentamos como a geometria deve ser conduzida de acordo com os documentos oficiais, em especial, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A BNCC é um documento norteador dos currículos das redes de ensino, a fim de definir as competências e habilidades que o aluno necessita desenvolver em cada nível de ensino. De maneira especial, o documento traz, como uma das competências gerais,

> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL, 2018, p.9)

Nunca o ser humano foi tão importante para o desenvolvimento da história. Por isso, a geografia é a ciência do presente e é inspirada na realidade contemporânea. O objetivo principal desses conhecimentos é contribuir para o entendimento do mundo atual, sabendo que é através da organização do espaço que eles dão sentido aos arranjos econômicos e aos valores sociais e culturais construídos historicamente. A BNCC, no segmento das ciências humanas e sociais aplicadas, reforça a importância do conhecimento histórico, social e cultural dos povos para compreender transformações na sociedade. Assim, o desenvolvimento de atividades que englobem questões físicas e políticas da Terra são de extrema importância para a elevação da capacidade cognitiva dos educandos.

> [...] a compreensão do espaço contempla as dimensões histórica e cultural, ultrapassando suas representações cartográficas. Espaço está associado aos arranjos dos objetos de diversas naturezas, mas também às movimentações das sociedades, nas quais ocorrem eventos, disputas, conflitos, ocupações ou dominações. No espaço (em um lugar) se dá a produção, distribuição e consumo de mercadorias. Nele são realizados fluxos de diversas naturezas (pessoas e objetos) e são desenvolvidas relações de trabalho, com ritmos e velocidade variados. Brasil (2018, p.127)

5º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Santa Maria - RS / nov. 2022

Segundo SEED (2008), o professor de matemática do ensino médio do Paraná deve ensinar, dentre outras, noções de geometrias não euclidianas a seus alunos, visto que alguns problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos por meio delas. Entretanto, de acordo com Mülhbauer e Bernardes (2014), a maioria das diretrizes curriculares, em especial aquelas dos estados da Região Sul do Brasil, e livros didáticos ainda não incentivam a introdução dessas geometrias na educação básica.

Foi realizada uma pesquisa bibliográfica em nove coleções de livros didáticos, de diferentes autores e editoras, e pudemos perceber que poucos trazem informações a respeito de geometrias não euclidianas. Quando trazem, geralmente são em anexos aos capítulos, em "Curiosidades" ou "Um pouco da história". Entretanto, Smole e Diniz (2005) destacam que três cidades (Havana, Tanger e Cairo) estão alinhadas no globo terrestre, mas no mapa não. Apesar de ter caráter de curiosidade, é um excelente ponto de partida para introduzir novos conceitos com os educandos.

A pouca, ou nenhuma, utilização de geometrias não euclidianas na educação básica deixa de lado uma parte significativa do conhecimento que já poderia estar sendo desenvolvida na educação básica. Assuntos cotidianos, como a busca de uma rota no GPS, poderiam ser usados como ponto de partida para discussões em sala de aula e, em seguida, ativar nos alunos a curiosidade por aprofundamento, auxiliando na construção de criticidade, além de ligar os diferentes saberes matemáticos e estimular a aprendizagem como um todo.

> A geometria pode desenvolver habilidades ligadas à forma, espaço, distância, percepção entre outros, permitindo uma maneira de compreender, descrever e representar organizadamente o mundo no qual vivemos, bem como estabelecer aplicações práticas nas atividades cotidianas. (CARVALHO; CARVALHO, 2011)

Já Baldin (2008), de maneira preocupante, enfatiza que a não utilização desse conteúdo nem sempre é por negligência, tão pouco proposital, mas sim pela falta de conhecimento, o que implica uma falha de formação e acaba por deixar lacunas no pensamento lógico-dedutivo. Revisões nos projetos pedagógicos dos cursos de licenciatura deveriam ocorrer mais frequentemente para atender as demandas sociais e educacionais que, de maneira fluida, evoluem cada vez mais rapidamente. Essa inércia nas metodologias de ensino restringem o modo de pensar do estudante, pois para ele haverá uma única linha de raciocínio, e essa será tomada como verdade absoluta, ao menos que ele por si próprio chegue a uma dedução lógica sobre o determinado assunto, o que seria pouco provável. De maneira especial, eventos como o Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática têm esse objetivo: incentivar o aprofundamento de saberes dos professores para que esses possam transmitir a seus alunos.

Além disso, há de se destacar a importância do uso de tecnologias em sala de aula, pois

> [...] possibilita aos estudantes aprofundar sua participação ativa nesse processo de resolução de problemas. São alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. (BRASIL, 2018, p. 104)

Em linhas gerais, as seções a seguir tratarão das geometrias, euclidiana e não euclidianas e de maneira particular, a Esférica, para que se tenha um embasamento teórico suficiente para a compreensão do próximo capítulo, onde traremos conceitos e demonstrações específicos sobre a geometria esférica, possibilitando aplicar as atividades subsequentes.

2.1 A Geometria

É notória a presença da geometria no cotidiano das pessoas. Estudos supõem que tal ramo tenha surgido, provavelmente, antes da própria escrita e com diversas possibilidades. Segundo Leonardo (2010), Heródoto (485-420 a.C.) afirmava que a geometria surgiu em razão das necessidades dos povos em relação a medições de terras a cada ano, após as recorrentes inundações nas proximidades dos rios. Já Aristóteles (384-322 a.C) acreditava numa classe sacerdotal dedicada à construção de templos. Além disso, Boyer (1974) acreditava que a geometria poderia ter surgido pelo próprio prazer de fazer geometria, com preocupações com o aspecto estético, buscando padrões e simetrias:

> A preocupação do homem pré-histórico com configurações e relações pode ter origem em seu sentimento estético e no prazer que lhe dava a beleza das formas, motivos que geralmente propelem a matemática de hoje. Gostaríamos de pensar que ao menos alguns dos antigos geômetras trabalharam pela pura satisfação de fazer matemática, não com auxílio prático à mensuração. (BOYER, 1974)

Segundo Eves (1997), uma das possíveis origens da geometria foi a necessidade de delimitação de terras, motivo pela qual se tornou necessário o esboço de desenhos, plantas baixas, medidas de áreas, cálculos de capacidades e o início da elaboração de fórmulas para determinados cálculos de área e volume.

Para Mlodinow (2005), Tales de Mileto (624-558 a.C.) teve papel fundamental para o fortalecimento da geometria. Tales viajava muito para o Egito e lá buscava explicações de como eram construídas as pirâmides e, como conhecido até hoje, determinou um método para encontrar a medida de uma altura inacessível, no caso das pirâmides, utilizando o comprimento de sua sombra. Surgiam aí o teorema que leva seu nome e os primeiros conceitos de semelhança de triângulos.

Posterior a Tales, tantos outros pensadores surgiram, como Pitágoras e Platão. Este último, em especial, interessou-se muito pela geometria deixando um legado da necessidade de uma demonstração matemática para comprovação e não somente uma verificação por experimento. Também era um entusiasta da geometria espacial sendo que, até hoje, tem seu nome utilizado nos sólidos geométricos regulares, os Poliedros de Platão.

Por séculos a Geometria ficou sem contribuições significativas, mas entre os séculos XV e XVII, a Matemática volta a ter um grande enfoque nessa área. Provavelmente em razão do Renascimento e da ascensão das Grandes Navegações, surgia a Geometria Analítica, introduzida por Renè Descartes, na qual usava a Geometria aliada à Álgebra para "calcular ao invés de medir". Dessa forma, o desenvolvimento algébrico da geometria passou a ter maior importância.

Na sequência, entre os séculos XVII e XIX, outros nomes surgiram para revolucionar a Geometria: Bolyai, Lobachevski, Riemann e Gauss. Entretanto, suas ideias serão explanadas adiante, visto que impactaram diretamente nos estudos, até então, inabaláveis de Euclides, citado por diversos autores como o Pai da Geometria. Por isso, os estudos de Geometria que seguem seus preceitos são denominados de Geometria Euclidiana.

2.2 A Geometria Euclidiana

Euclides de Alexandria (325-285 a.C.) provavelmente é um dos mais célebres nomes de toda a Matemática em razão de sua mais famosa obra: *Os Elementos*. É uma coletânea composta de treze livros, dos quais os seis primeiros volumes tratam de geometria plana elementar, os três seguintes de teoria dos números, o décimo sobre incomensurabilidade e os três últimos sobre geometria espacial. Vale salientar que Euclides é autor de cerca de doze obras, relacionadas a óptica, música, seções cônicas e astronomia. Entretanto, essas ficaram à sombra da revolução causada por *Os Elementos*.

De acordo com Thomaz e Franco (2008), Os Elementos utilizaram não somente todos os conhecimentos matemáticos da época, mas deixaram como legado um modelo de desenvolvimento que é utilizado até os dias atuais. Os famosos postulados de Euclides são afirmações ditas como verdades, sem necessidade de demonstração. A seguir, são listados os cinco primeiros, do livro I.

> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
> 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
> 3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
> 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
> 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (EUCLIDES, 2018)

Esses postulados, nos livros didáticos, vêm descritos de maneira mais simplificada. De maneira especial, o quinto é utilizado com uma reformulação atribuída ao matemático escocês John Playfair (1748-1829): "por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única paralela à reta dada". A Figura 1 a seguir ilustra tal raciocínio. Se $\alpha + \beta < 180°$, as retas s e t encontrar-se-ão à direita.

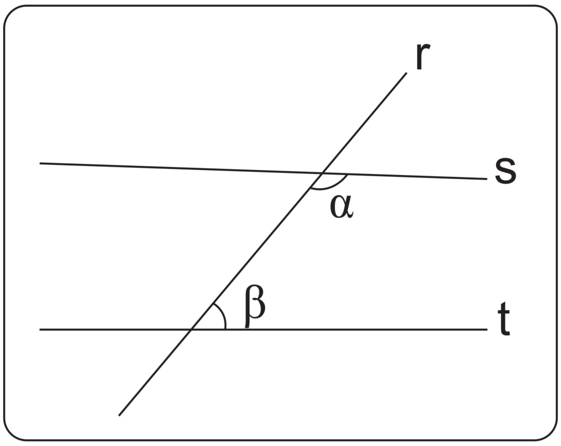


Figura 1: Representação do quinto postulado.
Fonte: Mülhbauer e Bernardes (2014).

Tal postulado foi motivo de críticas durante séculos. Muitos matemáticos achavam que, em vez de ser um postulado, era um teorema e, assim, necessitava de demonstração. A seção a seguir explana, de maneira sucinta, que esse postulado não poderia ser provado, mas havia a possibilidade de ser negado. Surgia aí o alicerce das geometrias distintas daquela de Euclides, as Geometrias Não Euclidianas.

2.3 As Geometrias Não Euclidianas

No início do século XIX, após séculos de tentativas de se provar o quinto postulado de Euclides, alguns matemáticos começaram a entender que ele era independente dos outros e, ao invés de tentarem provar sua veracidade, decidiram negá-lo. Como consequência, surgiram geometrias diferentes da de Euclides, nomeadas, então, de Geometrias Não Euclidianas. Segundo Barbosa (2009), Carl Friedrich Gauss foi o primeiro,

> Nos anos críticos que antecederam a descoberta da nova Geometria, a figura dominante do mundo matemático era Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que deu uma grande contribuição no desenvolvimento de ideias que levaram à sua descoberta. Poucos dos seus resultados, frutos de muitos anos de pesquisa sobre problemas associados ao quinto postulado, foram tornados públicos durante a sua vida. Algumas cartas a outros interessados naqueles problemas, críticas de tratados sobre paralelas, e notas inéditas descobertas entre seus trabalhos são toda a evidência disponível de que foi ele o primeiro a entender claramente a possibilidade de uma Geometria logicamente precisa e diferente da de Euclides. Foi ele o primeiro a designar a nova Geometria de Não Euclidiana.

Havia duas formas de se negar o quinto postulado de Euclides. A primeira era supor que havia mais de uma reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto predeterminado. Esse era o princípio da Geometria Hiperbólica, introduzida independentemente pelos matemáticos Nicolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856) e Johann Bolyai (1802-1860).

Anos mais tarde, o matemático alemão George Friederich Bernhard Riemann (1826-1866) utilizou a outra possível negação do quinto postulado, que por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma reta paralela à reta dada. Dessa forma, surgia a Geometria Elíptica.

Tanto a Geometria Hiperbólica quanto a Elíptica diferem da de Euclides por utilizar um plano diferente do convencional. Tal diferenciação dá-se, segundo Kasner e Newman (1968) como segue: "a Geometria Euclidiana ou Parabólica tem curvatura zero; a Geometria Riemanniana, Esférica ou Elíptica tem curvatura positiva e a Geometria Lobachevskiana ou Hiperbólica tem curvatura negativa".

Outro fato que também podemos citar é que nas geometrias não euclidianas a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é diferente de 180°. Na verdade, vale salientar que essa é uma propriedade interessante e fácil de ser mostrada para diferenciar as geometrias. A soma dos ângulos internos de um triângulo na geometria hiperbólica, por exemplo, é sempre menor que 180° e, na esférica, sempre maior que 180°. Em se tratando de atividade em sala de aula, onde rapidamente os alunos respondem o valor de 180° (para o clássico triângulo no plano euclidiano), essa estratégia pode ser aplicada para introdução a esse conteúdo. A Figura 2 ilustra, de maneira reduzida, essas considerações.

Compreender que há outras geometrias é de extrema importância para o desenvolvimento cognitivo dos educandos pois,

> [...] se os estudantes compreendessem alguns conceitos da geometria esférica, os mesmos poderiam ter uma melhor compreensão de localização no globo terrestre. Esta situação evidencia pequenas aplicações que fazem parte das necessidades intrínsecas do ser humano e que muitas vezes acabam por não saberem como fazer tal aplicação, pois o referido conteúdo não o foi explanado enquanto os mesmos estavam na educação básica. (DUELI, 2013, p.14)

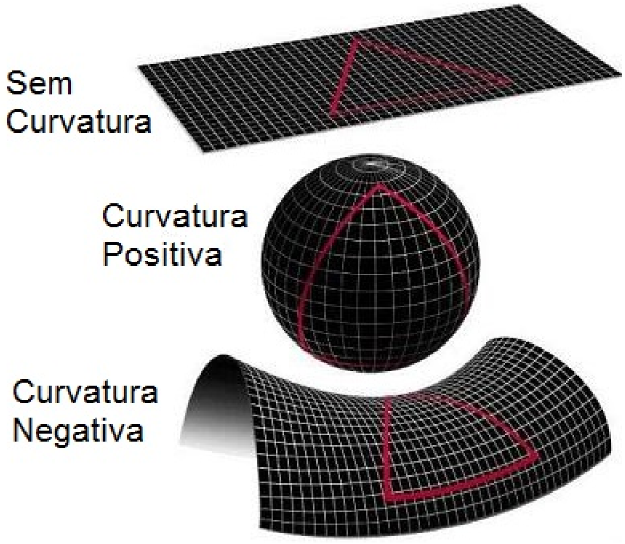


Figura 2: Representação da curvatura das três geometrias.
Fonte: Silva (2015).

O capítulo a seguir trata de Geometria Esférica, um caso particular da Geometria Elíptica de Riemann.

Capítulo 3

A Geometria Esférica

Neste capítulo, desenvolvemos algumas ferramentas que possibilitam o estabelecimento de um método para a determinação da distância entre dois pontos da superfície esférica. Mas antes apresentamos a linguagem e embasamento necessários.

Definição 1 (Esfera)
Dado $r > 0$, chama-se esfera de raio r, com centro O de R^3 o conjunto $E = \{\vec{v} \epsilon R^3 | |\vec{v}| = r\}$. Escrevendo $\vec{v} = (x, y, z)$, temos $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e E é o conjunto solução da equação $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

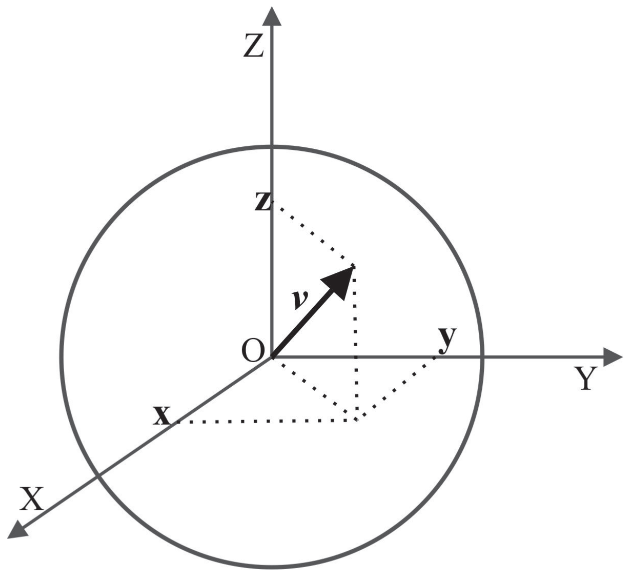


Figura 3: A esfera.
Fonte: Mülhbauer e Bernardes (2014)

Definição 2 (Círculo Máximo de uma Esfera)
Chama-se círculo máximo, a interseção entre a superfície esférica e um plano que passa pelo seu centro O. Veremos adiante que a menor distância entre dois pontos da superfície esférica é o arco de circunferência máxima que os une. Nesse sentido, um círculo máximo está para a esfera assim como a reta está para o plano euclidiano.

Definição 3 (Pontos Antípodas de uma Esfera)
Dois pontos, P e P', pertencentes à esfera, são ditos antípodas se forem simétricos à esfera em relação a seu centro O, ou seja, diametralmente opostos.

Salienta-se que o círculo máximo é, na esfera, análogo à reta na geometria euclidiana plana. Assim, as definições 2 e 3 confirmam a negação do quinto postulado sobre a não existência de nenhuma reta paralela a uma dada que passe por determinado ponto P. Na Terra, os polos Norte e Sul podem ser entendidos como pontos antípodas.

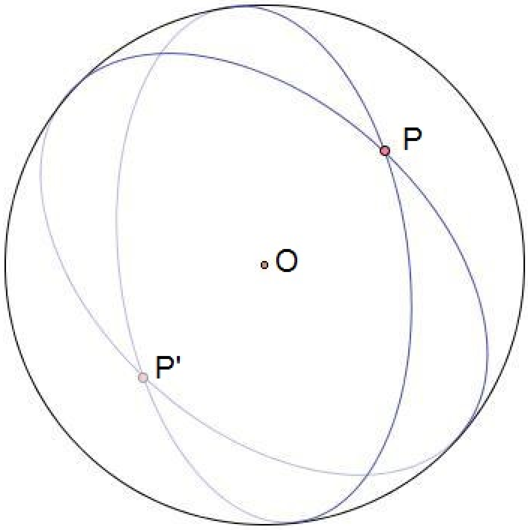


Figura 4: Representação de P e P', pontos antípodas.
Fonte: Mülhbauer e Bernardes (2014).

Definição 4 (Geodésica)
Chama-se geodésica a curva pertencente à superfície esférica de menor distância entre dois pontos dados.

Na geometria euclidiana, as geodésicas são segmentos de reta que unem dois pontos. No caso da geometria esférica, são arcos de círculo máximo. O comprimento desse arco é a distância entre os dois pontos. E é essa medida do comprimento que será o foco de nossos trabalhos nas informações que seguem e, consequentemente, na aplicação do minicurso.

Em se tratando de uma esfera, é habitual representar cada ponto de sua superfície, de maneira algébrica, como um ponto $P = (x, y, z)$, sendo $P \epsilon R^2$, onde x, y e z são as projeções respectivas nos eixos OX, OY e OZ. Porém, nas considerações a seguir, representaremos esse ponto de outras duas formas, que seguem:

a) Forma Esférica: $P = (r, \alpha, \theta)$, onde r é a distância do centro à superfície, α é o ângulo entre a projeção de $\overrightarrow{OP}$ no plano OXY e o eixo OX e θ é o ângulo entre a projeção de $\overrightarrow{OP}$ no plano OXY e o próprio vetor. Para efeitos de aplicações no planeta Terra, nas atividades a serem desenvolvidas, denotaremos esses três elementos de r: raio, α: longitude e θ: latitude. A Figura 5 a seguir ilustra esses elementos. Além disso, precisamos definir orientações para esse ponto. Quando as coordenadas do ponto remeterem ao Norte e Leste geográficos, os ângulos serão positivos. Caso contrário, negativos.

b) Forma Cartesiana: $P = (r \cdot \cos\alpha \cdot \cos\theta, r \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\theta, r \cdot \operatorname{sen}\theta)$. Com essa representação, consegue-se converter a representação geográfica de qualquer ponto do planeta para as coordenadas no plano R^3, considerando a Terra esférica e, utilizando como raio médio, o valor de $r = 6371$km. A demonstração dessa representação é simples, utilizando trigonometria no triângulo retângulo. A Figura 5 a seguir ilustra tal raciocínio. Sejam X, Y e Z as projeções das coordenadas do ponto P em seus respectivos eixos, e P' a projeção de P no plano OXY. No triângulo OXP', $OP' = r \cdot \cos\theta$, $OX = r \cdot \cos\alpha \cdot \cos\theta$ e $XP' = OY = r \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\theta$ e, pelo triângulo OPP', $PP' = OZ = r \cdot \operatorname{sen}\theta$.

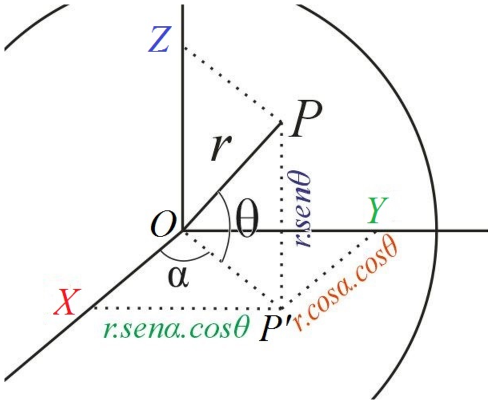


Figura 5: Coordenadas esféricas e cartesianas de um ponto P na superfície esférica.
Fonte: Mülhbauer e Bernardes (2014).

Teorema 5

Dados dois pontos, $P = (a, b, c)$ e $Q = (d, e, f)$, extremos dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente, pertencentes à superfície de uma esfera de raio r, a geodésica entre eles é um arco de ângulo β, tal que:

$$\beta = \arccos\left[\frac{<\vec{u}, \vec{v}>}{r^2}\right].$$

Demonstração. O arco de ângulo β também é a medida do ângulo central formado pelos vetores na esfera. Assim, de acordo com a Figura 6, denotando como $||\vec{k}||$ a norma de certo vetor $\vec{k}$ e aplicando o Teorema dos Cossenos, temos:

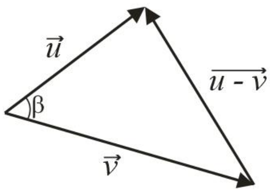


Figura 6: Diferença entre vetores.
Fonte: Mülhbauer e Bernardes (2014).

$$||\overrightarrow{u-v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2 \cdot ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\beta,$$

donde

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= \frac{||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\overrightarrow{u-v}||^2}{2 \cdot ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} \\
&= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 - [(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2]}{2 \cdot ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} \\
&= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) + 2 \cdot (ad + be + cf)}{2 \cdot ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\beta = \arccos\left[\frac{ad+be+cf}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||}\right] \Leftrightarrow \beta = \arccos\left[\frac{<\vec{u},\vec{v}>}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||}\right].$$

A representação $<\vec{u},\vec{v}> = ad+be+cf$ é citada por Lima (1977) como o espaço vetorial com produto interno mais clássico e aplicável a esse nível de ensino. Como os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ medem r na esfera, para esse caso, temos que:

$$\beta = \arccos\left[\frac{<\vec{u},\vec{v}>}{r^2}\right]. \qquad \blacksquare$$

Com o valor de β em mãos, basta usar proporcionalidade que se obtém a distância entre os dois pontos selecionados, ou seja, a distância d será determinada pela expressão:

$$d = \frac{2\cdot\pi\cdot r\cdot\beta}{360°}.$$

Com as considerações citadas e demonstradas nesta última seção, já é possível determinar a distância entre duas cidades quaisquer no planeta.

Por exemplo, vamos calcular a distância entre duas cidades: Santa Maria, no Brasil e Kiev, na Ucrânia, com coordenadas geográficas $29°41'29"S$, $53°48'3"O$ e $50°27'13"N$, $30°30'59"L$, respectivamente Wepoke (2022).

Convertendo os ângulos para a forma decimal, supondo o raio da Terra $r \approx 6371$km e analisando seu sinal, temos as coordenadas esféricas:

Santa Maria: $(r;\alpha;\theta) = (6371; -29,6914°; 53,8008°)$.

Kiev: $(r;\alpha;\theta) = (6371; 50,4536°; 30,5164°)$.

Após isso, obtém-se as coordenadas cartesianas dessas cidades, representadas pelos vetores a seguir:

Santa Maria: $\vec{u} = (x_{1'}, y_{1'}, z_{1'}) = (3268,66; -4466,187; -3155,736)$.

Kiev: $\vec{v} = (x_{2'}, y_{2'}, z_{2'}) = (3494,55; 2059,8; 4912,738)$.

Em seguida, calcula-se o produto interno entre os dois vetores:

$$\begin{aligned} <\vec{u};\vec{v}> &= (x_1.x_2) + (y_1.y_2) + (z_1.z_2) \\ &= (3268,66.3494,55) + (-4466,187.2059,8) + (-3155,736.4912,738) \\ &= -13280260,34. \end{aligned}$$

Assim, $\beta = \arccos\left[\frac{-13280260,34}{6371^2}\right] = -0,327183489$, e, portanto, $\beta = 109,098°$.

Mas, se uma circunferência máxima da Terra mede $C = 2\cdot\pi\cdot 6371 = 40030,17$km, então o arco $\beta = 109,098°$ medirá $40030,17\cdot\frac{109,098°}{360°} = 12131,14$km.

Segundo Wepoke (2022), a distância entre as cidades é de 12126 km, ou seja, uma variação de cerca de 0,042%. Essa diferença provém das aproximações utilizadas tanto nas transformações de coordenadas, quanto no raio da Terra. Vale salientar ainda que a Terra não é perfeitamente esférica (seria mais bem modelada como uma elipsoide) e, portanto, seu raio varia de 6357 km (raio polar) e 6378 km (raio equatorial).

Salientamos que nosso trabalho foi desenvolvido utilizando graus como unidade angular. O professor pode preferir utilizar em radianos. O desenvolvimento ficará semelhante, algumas fórmulas ficarão mais compactadas, entretanto, o resultado final será o mesmo.

A Figura 7 a seguir ilustra a tela do *site* mencionado, mostrando a trajetória geodésica entre as cidades.

Figura 7: *Layout* do *site* que indica a distância entre Santa Maria e Kiev.
Fonte: Wepoke (2022).

Note que, através de cálculos relativamente simples, usando ferramentas matemáticas e tecnologias acessíveis a alunos dos ensinos fundamental II e médio, é possível calcular a distância entre duas cidades com uma precisão consideravelmente grande, além de, constantemente, criar provocações nos alunos em relação à utilidade da matemática e suas tecnologias em outras áreas, como física e geografia.

No capítulo a seguir será explicada, de maneira detalhada, a metodologia de aplicação do minicurso.

Capítulo 4

O minicurso

Este minicurso foi programado para ocorrer em três etapas que perfazem um tempo total de três horas: 1ª) discussões acerca dos tópicos de geometria que os livros didáticos trazem e o que os professores ensinam a seus alunos (tempo estimado: 20 min); 2ª) atividade prática com utilização de material concreto para determinação de elementos e propriedades relativas à geometria esférica (tempo estimado: 1h10); e 3ª) atividade de demonstração e aplicação de fórmulas para a determinação da distância entre duas cidades (tempo estimado: 1h30).

O grupo de trabalho foi composto pelos professores Claudio Iavorski (licenciado e mestre em matemática, egresso PROFMAT e docente no IFPR *campus* Telêmaco Borba), Lucas dos Santos Maciel (licenciado em matemática, especialista em metodologias do ensino de matemática e física, docente de matemática no Colégio Marista Roque de Cachoeira do Sul-RS) e Marlon Mülhbauer (licenciado e mestre em matemática, especialista em tecnologias, comunicação e técnicas de ensino, egresso PROFMAT e docente no IFSC *campus* Canoinhas), além dos professores e alunos de graduação que participaram do minicurso.

No que tange aos materiais utilizados na sua execução, destacamos: bolas de isopor, elásticos em látex, canetas, lápis, transferidor de graus, régua, tesoura e quadro branco (ou de giz). Além disso, foi importante que os participantes levassem calculadoras científicas e/ou algum aparelho que possua planilha eletrônica, seja *smartphone*, *notebook* ou *tablet*. E mais, o acesso à internet foi importante para utilização do *software* Geogebra e pesquisas em *sites* de georreferenciamento. Na sequência, serão explanadas cada uma das três etapas supracitadas.

4.1 Etapas do minicurso

4.1.1 1ª Etapa

Iniciando o minicurso, questionamos os participantes sobre os tópicos de geometria que ensinam aos seus alunos, se eles embasam-se apenas no livro didático, se buscam outras metodologias de ensino para favorecer o aprendizado e o que listam como indispensável a ministrar em cada fase da educação, ensinos fundamental II e médio. Utilizamos esse momento para criar uma ligação entre os tópicos elencados pelos docentes e a introdução às geometrias não euclidianas: a incerteza quanto ao quinto postulado de Euclides. Esse foi o ponto de partida para a segunda etapa.

4.1.2 2ª Etapa

Com o *link* realizado na primeira etapa, fizemos uma breve contextualização histórica sobre a criação de novas geometrias e, de maneira particular, aprofundamos as propriedades e características da geometria elíptica, foco das atividades posteriores. Assim, explicamos de forma prática, que as definições que muitos alunos pensam serem únicas e imutáveis relativas à geometria euclidiana não podem ser utilizadas ao trocarmos o plano em questão por uma esfera, por exemplo. A discussão a respeito da soma dos ângulos internos em um triângulo no plano euclidiano deu início a uma nova discussão.

Representamos, então, com o auxílio de elásticos e caneta, um triângulo sobre a superfície esférica de uma bola de isopor, conforme a Figura 8 a seguir. De posse desse objeto e utilizando um transferidor de graus, impresso em papel, medimos os ângulos internos do triângulo representado e chegamos em uma propriedade importante sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

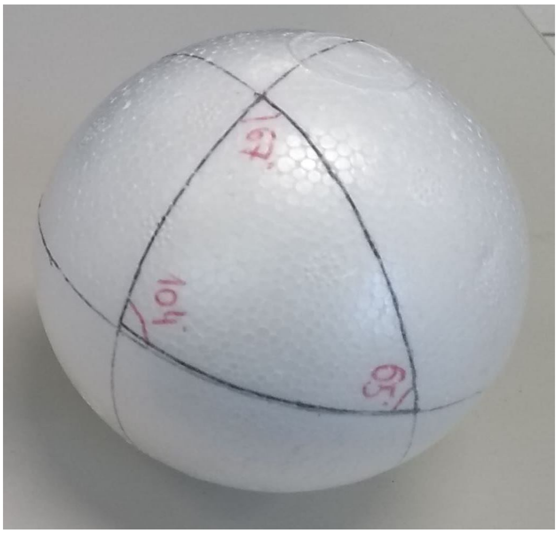


Figura 8: Triângulo esférico.
Fonte: Os Autores (2022).

Para melhor absorção dos conceitos, utilizamos o *software* gratuito GeoGebra para mostrar mais alguns triângulos esféricos como, por exemplo, observamos na Figura 9 a seguir. Essa abordagem deu espaço para interpretações e discussões com a turma, que serão comentadas mais à frente. A importância de um *software* como esse é que podemos simular diversas possibilidades, de modo rápido e eficaz, e ampliar os horizontes dos alunos que, muitas vezes, não têm a habilidade de visualização espacial bem desenvolvida.

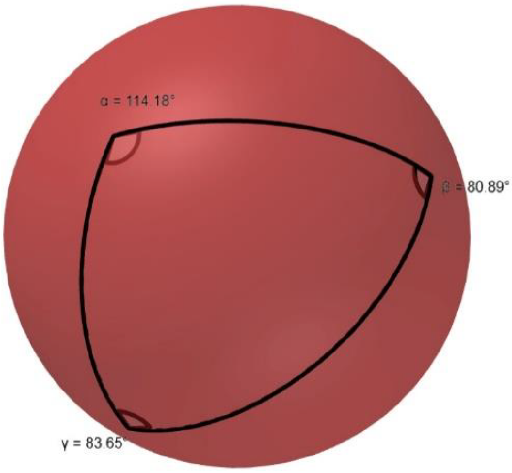


Figura 9: Triângulo esférico no Geogebra.
Fonte: Iavorski (2022).

Utilizando outra bola de isopor, com raio conhecido, traçamos dois círculos máximos perpendiculares para que simulasse a linha do Equador e o meridiano de Greenwich para a segunda atividade prática dessa etapa: calcular a distância entre duas cidades quaisquer do planeta. Pedimos aos professores que pesquisassem esses dois locais e anotassem suas coordenadas geográficas, representando com a maior exatidão possível a localização na bola de isopor, com o auxílio do transferidor. Realizaram a medição desses dois pontos com uma régua impressa em papel, para ficar flexível, disponibilizada juntamente com a bola. Assim, por meio de proporcionalidade, puderam calcular a distância aproximada. A Figura 10 a seguir mostra uma das bolas de isopor preparadas pelos alunos, que mediu a distância entre as capitais dos Estados Unidos da América e Madagascar, Washington e Antananarivo, respectivamente. O resultado diferiu do real em cerca de 4%. Levando em conta os instrumentos de medição não tão precisos, esse erro pode ser considerado pequeno, mas que certamente seria reduzido com a aplicação da terceira e última etapa.

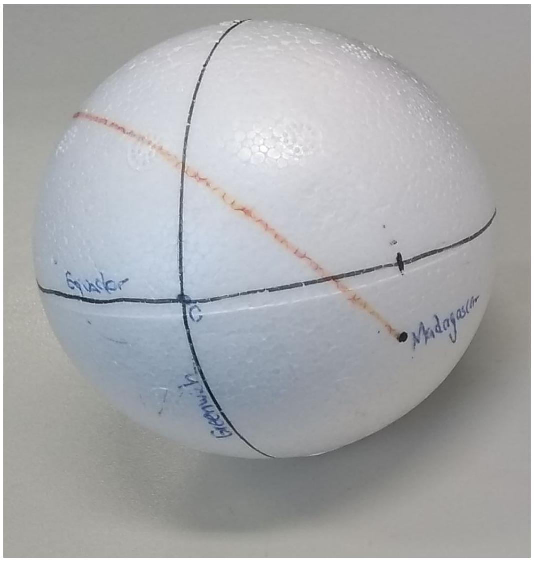


Figura 10: Bola de isopor para o cálculo da distância entre cidades.
Fonte: Os Autores (2022).

Por fim, foi solicitado que pesquisassem em *sites* ou aplicativos de GPS qual é a distância exata e compararam os resultados. Esse é o ponto no qual a terceira etapa encaixou-se: como determinar de maneira mais precisa a distância entre dois pontos do globo terrestre? Aproveitamos o momento para discutir com os participantes as causas dessa imprecisão: a Terra não ser esférica, a diferença entre a altitude das cidades escolhidas, as aproximações e o uso limitado de casas decimais, por exemplo.

Em razão do nível de dificuldade que a terceira etapa exige, aconselhamos aplicá-la apenas para alunos do Ensino Médio que já tiveram conhecimento suficiente sobre vetores, geometria espacial e analítica.

4.1.3 3ª Etapa

Para a etapa final do minicurso, repassamos definições importantes da geometria esférica para melhor compreensão das fórmulas que seguem. Conceitos de produto interno, norma de vetor, trigonometria nos triângulos e transformação de coordenadas foram revistas para que, ao final, pudéssemos aplicar o Teorema 5 e determinar a distância entre as duas cidades. Informamos aos participantes que seria mais proveitoso aplicar com as mesmas cidades utilizadas na segunda etapa, para novamente comparar o resultado e verificar o percentual de erro em relação ao real, que, confirmamos, foi menor.

Para tal, uma sequência de atividades foi executada:

1. Pesquisar as coordenadas geográficas de duas cidades;

2. Transformar em coordenadas cartesianas;

3. Calcular o produto interno entre elas;

4. Substituir na fórmula a fim de determinar o comprimento do arco de ângulo β;

5. Utilizar o raio médio da Terra ($r \approx 6371km$); e

6. Determinar a distância entre as cidades, e comparar com o valor real, por meio de um *site* específico.

Os participantes executaram o primeiro exemplo utilizando calculadora científica. Posteriormente, utilizamos uma planilha eletrônica para conferir os resultados das distâncias entre as cidades obtidas na atividade prática. Foi sugerido aos participantes que utilizassem a planilha eletrônica nas aulas, com seus alunos, com a finalidade de programar as transformações e as fórmulas para que, ao alimentar células com as coordenadas geográficas pesquisadas, a distância seja instantaneamente informada. Essa é uma estratégia que torna o aprendizado mais significativo devido ao desenvolvimento manual de uma resolução que, posteriormente, pode ser acelerada otimizando o tempo de aula para aprofundar outros conceitos.

A Figura 11 a seguir mostra uma planilha preenchida, como exemplo da distância entre as cidades de Florianópolis, no Brasil, e Amsterdam, na Holanda. Em relação aos resultados, o valor obtido difere cerca de 0,04% do fornecido em Wepoke (2022), o que é bastante razoável para a atividade em questão. Tal planilha pode ser baixada em: Planilha. Ressaltamos que apenas as células em azul escuro – que informa as coordenadas das cidades – devem ser preenchidas.

Cidade	Latitude (θ)			N/S	Latitude decimal	Longitude (α)			L/O	Longitude Decimal
	Graus	Minutos	Segundos			Graus	Minutos	Segundos		
Florianópolis	27	35	49	S	-27,59694444	48	32	58	O	-48,54944444
Amsterdam	52	18	29	N	52,30805556	4	58	9	L	4,969166667

Vetores	(x,	y,	z)
P = u	3737,61	-4231,95	-2951,36
Q = v	3880,69	337,412	5041,433

Produto interno	
<u,v>	-1802487,391

Raio Médio da Terra	
6371	km

cos β	-0,044407572

arccos β	92,54520344

DISTÂNCIA	10290,56	km

Figura 11: Planilha preenchida, determinando a distância entre Florianópolis e Amsterdam.
Fonte: Os Autores (2022).

Para finalizar, ouvimos os participantes do minicurso, suas reflexões e sugestões acerca das atividades apresentadas e discutimos sobre outras possibilidades de abordagem e aplicação com seus alunos.

4.2 O auxílio da Geometria Dinâmica na atividade

É sabido o quanto o professor de matemática procura meios para que seus alunos visualizem melhor o problema para encontrar soluções. Os aplicativos de geometria dinâmica ajudam, e muito, nessa tarefa, graças à simplicidade, à independência na manipulação e a interação que traz entre problema, professor e aluno. Pensando nisso, uma ferramenta que auxiliou na execução do minicurso foi o *software* GeoGebra.

As atividades propostas durante o 5º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática foram antes testadas e aperfeiçoadas. Dentre as dificuldades percebidas, em testes prévios e aplicações em outros momentos, referimo-nos ao fato de que, ao construir um triângulo esférico, o aluno acabava pegando pontos muito próximos e, com isso, o torna muito "parecido com o triângulo euclidiano". Esperava-se que os participantes notassem de forma natural que a soma dos ângulos internos pode ir muito além do que 180°. Uma solução encontrada foi marcar os pontos de interseção de retas esféricas, com o uso de elásticos de látex, tornando a escolha mais aleatória, gerando triângulos com somas de ângulos internos aparentando valores como 200, 300 e até 400°. Aí sim, conseguimos dar abertura para um problema gerador: qual o intervalo numérico das possíveis somas dos ângulos internos em um triângulo elíptico? Alguns alunos perceberam que, quando os pontos ficavam próximos, "quase coplanares", o triângulo aproximava-se de um euclidiano, e, assim, a soma aproximava-se de 180°. Mas e qual o valor máximo possível? Mesmo criando nas bolas de isopor dezenas de triângulos com a turma, os alunos ainda se abstinham de lançar palpites. É aí que entrou a ajuda do Geogebra. De forma interativa foi possível arrastar três pontos em uma esfera e instantaneamente desenhar triângulos. Assim, os alunos foram encontrando padrões e sugerindo lugares estratégicos para colocar os pontos.

A Figura 12 exemplifica alguns dos triângulos esféricos criados no referido *software*. Esses podem ser acessados através do *link* e utilizados livremente no *software*.

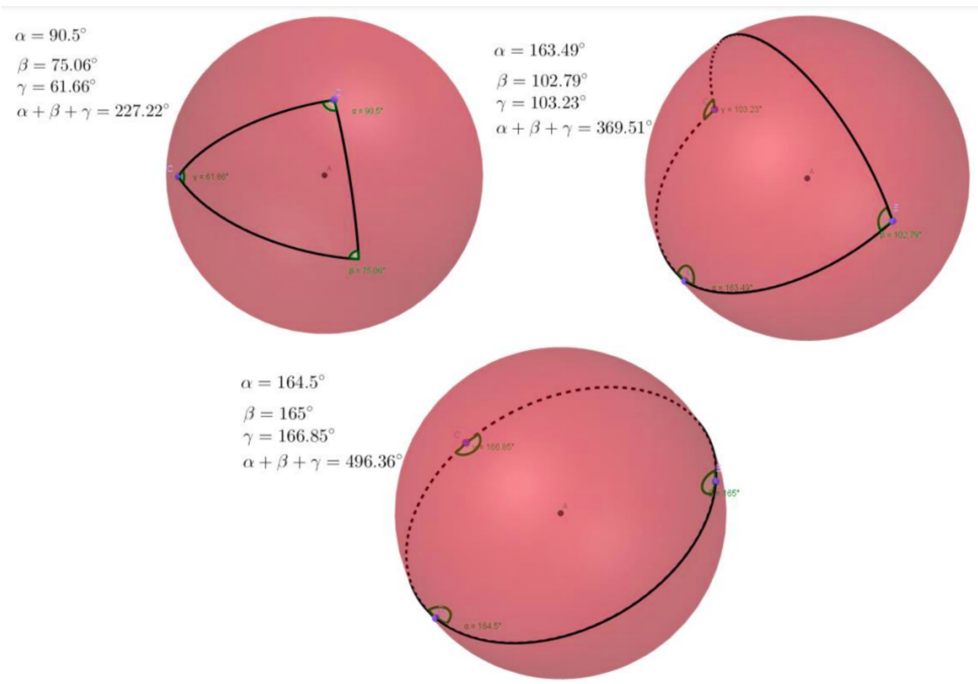


Figura 12: Triângulos esféricos elaborados no *software*.
Fonte: Iavorski (2022).

Com base nas sugestões dos alunos e "arrastando" os vértices do triângulo, logo um licenciando respondeu com toda certeza que "a soma máxima é menor do que 540°" e ao ser questionado o porquê, comentou que "ao colocar os três pontos próximos de um meridiano, cada ângulo interno se aproxima de 180°". Chegava, assim, no resultado esperado e mostrava o quão intuitivo ele pode ser. Salienta-se que isso ocorre não apenas escolhendo um meridiano (provavelmente assim denominado ao se associar ao planeta), mas ao escolher aleatoriamente qualquer círculo máximo da esfera.

Concluímos que o uso de aplicativos de geometria dinâmica pode transformar interpretações abstratas em algo bem visual e, assim, aumentar potencialmente o número de exemplos que o aluno pode construir, resultando em uma maior segurança para encontrar padrões e criar conjecturas. Simulações como essa ainda podem ser disponibilizadas aos alunos por meio de QR *Code*, permitindo que todos possam manipular e interagir em pequenos grupos, com seus próprios *smartphones* ou *tablets* do colégio.

4.3 Reflexões a respeito da aplicação do minicurso

No dia que o minicurso foi executado, recebemos uma gama de informações e considerações a respeito da educação brasileira, pois os participantes eram de três das cinco regiões do Brasil. As Figuras 13 e 14 a seguir mostram os perfis geográfico e acadêmico dos frequentadores, respectivamente.

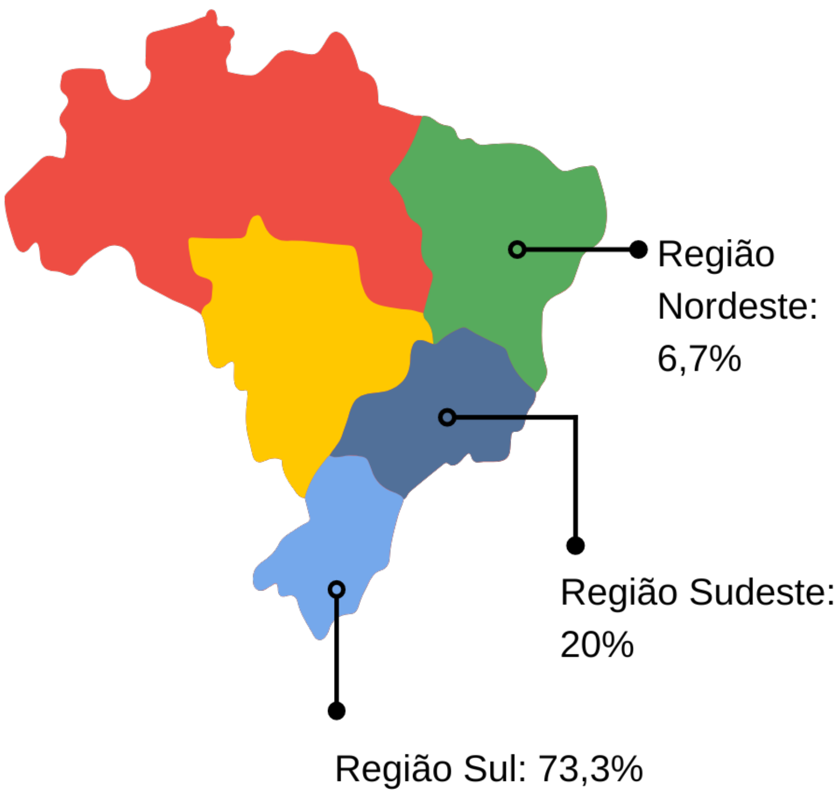


Figura 13: Região de origem dos participantes do minicurso.
Fonte: Os Autores (2022).

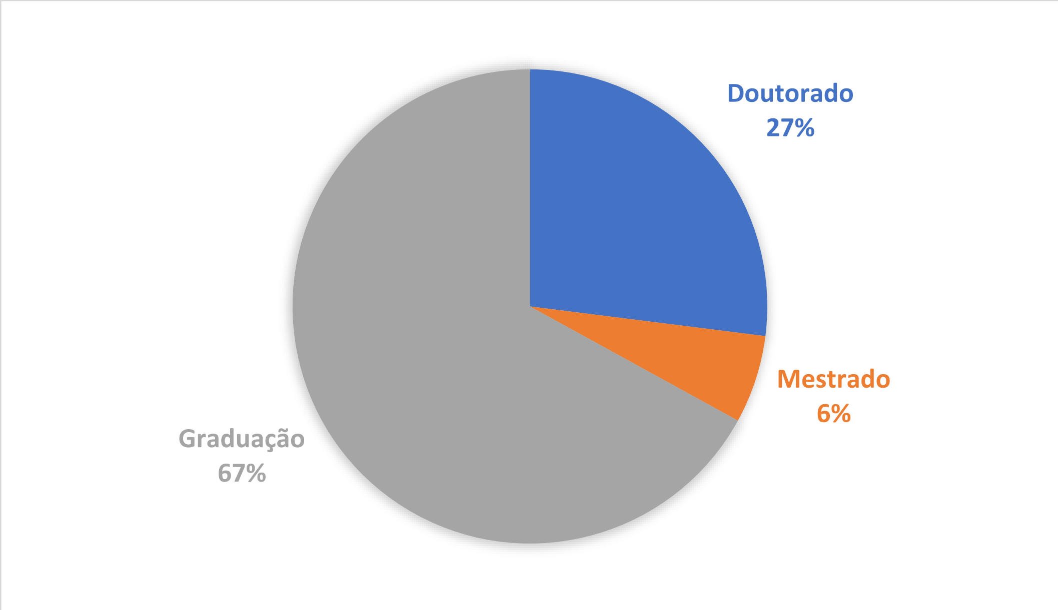


Figura 14: Formação acadêmica dos participantes do minicurso.
Fonte: Os Autores (2022).

A seguir, serão elencados os aspectos positivos e negativos da aplicação das atividades, na visão dos ministrantes, além do *feedback* recebido pelos participantes, tanto no dia, quanto posteriormente, por *e-mail*.

4.3.1 Apontamentos Positivos

- Receptividade e adesão dos participantes (mais de 95% dos inscritos estavam presentes).
- Abertura da turma para dialogar, expondo seus anseios e respondendo às indagações dos ministrantes.
- Participação ativa dos cursistas nas atividades propostas. Percebemos o engajamento de todos na construção do transferidor esférico e realização das atividades sugeridas, fazendo perguntas, opinando e procurando soluções.
- Pudemos perceber que a turma, em muitos momentos, problematizou e discutiu sobre as atividades, contribuindo para a construção de novas formas de trabalhar e compreender o conteúdo exposto.
- Recebemos diversas indagações ao final do curso, demonstrando o interesse dos participantes em explorar mais sobre o assunto, com questionamentos sobre formas de replicar as atividades com seus alunos e relembrar situações de aplicação real do conteúdo ministrado.

- Realizamos trocas de experiência a respeito de métodos de ensino e aprendizagem, da educação matemática e da qualidade do ensino no país.

4.3.2 Apontamentos Negativos

- Alguns participantes tiveram dificuldade no manuseio da bola de poliestireno devido à demarcação e medição dos ângulos, pois os elásticos moviam-se, dificultando a medição do ângulo desejado. Apesar disso, o andamento da atividade não foi prejudicado. Sugere-se que a demarcação seja facilitada com o auxílio de dois alfinetes.

- Duas pessoas não conseguiram chegar no resultado desejado na atividade prática. Houve diferença na marcação do transferidor e, depois de tentarmos descobrir a causa, observamos que a diferença entre lotes de fabricação das bolas de isopor apresentava variações na medida do raio, o que, automaticamente, interferia no resultado da atividade.

- A parte final da apresentação, prevista para a programação de uma planilha eletrônica para agilizar os cálculos, teve que ser compactada, apenas mostrando uma planilha já alimentada, realizando rápidas simulações de distâncias.

4.3.3 *Feedback* dos Participantes

Durante e posteriormente à realização do minicurso, houve *feedbacks* a respeito do conteúdo abordado, juntamente com os experimentos e construções pedagógicas feitas. Compilando-os, podemos explicá-los como:

- A construção do transferidor esférico, realizado com o grupo de professores e estudantes, é quase impossível de ser feita com uma turma de estudantes da educação básica. Essa foi uma discussão devido à dificuldade encontrada pelos cursistas, levando em conta que eles já têm certa experiência na área da matemática. A partir daí foi feita uma comparação com os estudantes adolescentes, que em sua grande parte são agitados e com somente um professor em sala de aula, tal atividade tende a gerar dificuldade para realização;

- Os livros didáticos raramente trazem algo sobre o assunto, apenas citam de modo superficial, com pouca importância ou aplicação cotidiana, algo que não desperta a curiosidade dos estudantes, e o conteúdo acaba ficando de lado sem ser trabalhado;

- A falta de contextualização dos conteúdos. Isso foi algo discutido tanto na etapa inicial do minicurso, quanto no encerramento. Muitos estudantes estão desmotivados e seguidamente se perguntando qual a aplicação de tal conteúdo em sua vida;

- Leitura sem entendimento. Atualmente os estudantes leem os enunciados e não sabem o que deve ser feito nas atividades. Tal fato foi discutido por vários participantes que conjecturam que isso é um problema a nível nacional. Atualmente os estudantes decoram fórmulas e maneiras de resolver tais exercícios ou problemas, mas, muitas vezes, não sabem por qual motivo estão fazendo isso.

5º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Santa Maria - RS / nov. 2022

Figura 15: Professores ministrantes e participantes do minicurso.
Fonte: Os Autores (2022).

As fotos a seguir mostram a equipe participante do minicurso e alguns momentos da realização das atividades propostas.

Figura 17: Momento em que os participantes determinavam a distância entre as cidades escolhidas.
Fonte: Os Autores (2022).

Figura 16: Momento que os participantes desenvolviam a atividade prática com a bola de isopor.
Fonte: Os Autores (2022).

Capítulo 5

Considerações Finais

A supressão do ensino de geometrias não euclidianas na educação básica limita o aprendizado dos alunos e fragiliza a compreensão do mundo. A BNCC recomenda a utilização de tal conteúdo em diversos níveis de ensino, com o propósito de fortalecer o aprendizado e aumentar a criticidade sobre os fenômenos cotidianos. Por exemplo, a determinação da distância entre dois pontos ou a soma dos ângulos internos de um triângulo, num contexto amplo, precisa de um plano definido para tal. Por esse motivo, esse ensino é de suma importância para o desenvolvimento cognitivo e o pensar geométrico do educando.

O minicurso teve por objetivo, dentre outros, propor uma sequência didática de trabalho para que o professor saísse de sua zona de conforto e propiciando um ambiente de trabalho mais significativo a seus alunos, retomando tópicos de geometria e trigonometria, interdisciplinarizando com outras áreas e desenvolvendo um raciocínio algébrico mais apurado.

Esperamos que os frequentadores desse minicurso utilizem o que foi aprendido para propor novas atividades em seus locais de trabalho, que reflitam sobre a educação matemática, a fim de melhorar a qualidade da educação básica em nosso país, tornando os estudantes aptos e críticos para resolverem problemas em suas vidas. Um minicurso não deve ter a função única de criar uma atividade nova para que docentes apliquem nas escolas, mas sim algo maior, de abrir a mente desses profissionais para que várias outras ideias surjam, otimizando o tempo que os jovens passam na escola, para que, efetivamente, aprendam algo que fuja de uma simples memorização de fórmulas.

Num diagnóstico realizado após o evento, entendemos que a aceitação da proposta foi positiva, que os participantes do minicurso estavam realmente interessados em aprender/aprofundar conceitos diferentes para repassar a seus alunos. Também foi obtido um *feedback* bastante positivo em relação à metodologia apresentada, com sugestões de melhorias e outras alternativas para se trabalhar com o assunto, ampliando as possibilidades, desenvolvendo outras formas de se criar o material didático e concreto, englobando outros conteúdos dentro da unidade curricular de matemática.

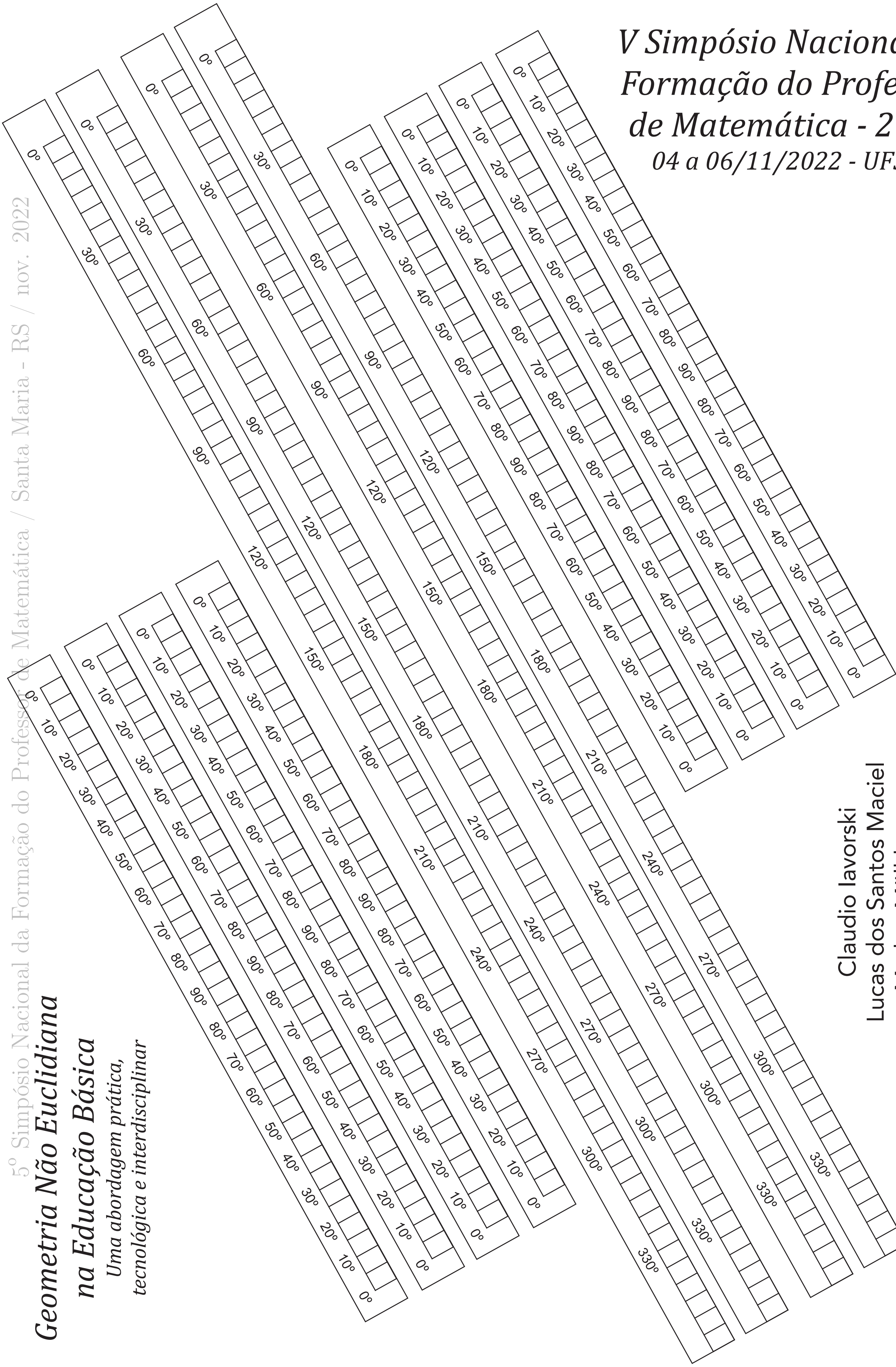
Apêndice A

Transferidor esférico

Modelo para a elaboração do transferidor esférico, para bolas de isopor de 90 mm de diâmetro. Tal arquivo pode ser baixado em: Transferidor Esférico.

V Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - 2022

04 a 06/11/2022 - UFSM



Geometria Não Euclidiana na Educação Básica

Uma abordagem prática, tecnológica e interdisciplinar

Claudio Iavorski
Lucas dos Santos Maciel
Marlon Mülhbauer

Apêndice B

Atividade 1

Tal documento pode ser baixado em: Atividade 1

ATIVIDADE 1

1) Usando seus conhecimentos de Geometria até o dia de hoje, responda as questões abaixo.
   a) Num triângulo qualquer, qual a soma dos ângulos internos?

   b) Qual seria a menor distância entre dois pontos?

   c) Explique com suas palavras, qual a definição de reta e segmento de reta, além de suas principais características.

2) Marque três pontos aleatórios na bola de isopor que lhe foi fornecida. Ao unirmos estes pontos, formaremos o triângulo esférico. Agora com o auxílio de um transferidor em graus, determine o valor de cada um dos ângulos internos deste triângulo e logo após, calcule o valor de sua soma.
   a) Qual foi o valor da soma obtida?

   b) Agora, fazendo uma comparação, responda o que você pode observar em relação a resposta dada no item ‘a’ da questão 1 com o item ‘a’ da questão 2?

   c) Como você explicaria o fato da resposta do item ‘a’ da questão 2, não ser a resposta tradicional?

d) Faça uma comparação com as respostas do item ‘a’ da questão 2 com as respostas dos seus colegas e indique se elas são iguais ou não.

e) Você consegue determinar o intervalo de variação das respostas obtidas?

3) Dado o mapa abaixo, que está na escala **1 : 30.000.000**, determine a distância linear entre as cidades de:

a) Brasília e Rio de Janeiro:

b) Brasília e Florianópolis:

Apêndice C

Atividade 2

Tal documento pode ser baixado em: Atividade 2

ATIVIDADE 2

1) Agora, fazendo referência aos conhecimentos que você tem sobre Geometria Não Euclidiana, especialmente na Geometria Esférica, responda as questões abaixo:

a) Qual a soma dos ângulos internos de um triângulo:
   i) No plano?

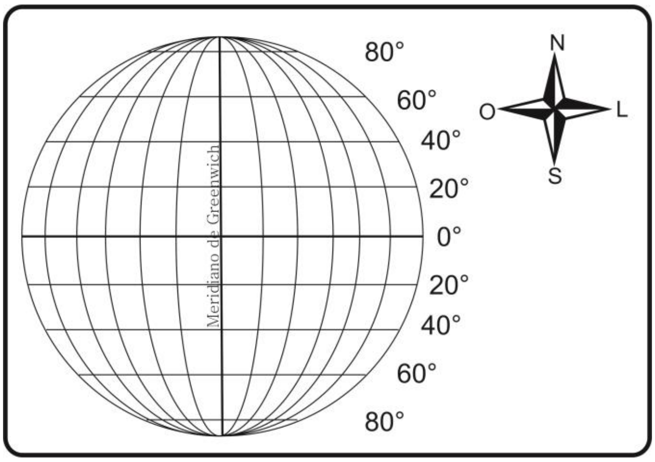
   ii) Na esfera?

b) Qual a menor distância entre dois pontos:
   i) No plano?

   ii) Na esfera?

c) Agora, tomando a esfera como base, explique qual a definição de reta e segmento de reta, além de suas principais características.

2) Explique o que significa dizer que as coordenadas da cidade de Santa Maria-RS são: 29°41’29” S e 53°48’3” O ? Represente aproximadamente a cidade de Santa Maria-RS no globo terrestre abaixo.



3) Considerando que as cidades de Macapá-AP e Pontianak-Indonésia se localizam praticamente sobre a linha do Equador (Latitude zero) e que a Terra seja perfeitamente esférica com raio 6371 quilômetros, determine a menor distância entre as cidades. Dados: Longitude de Macapá-AP: *5°04’ O* e de Pontianak-Indonésia: *109°20’ L*.

Apêndice D

Atividade 3

Tal documento pode ser baixado em: Atividade 3

ATIVIDADE 3

1) Dados os seguintes vetores no espaço definidos por $\vec{v} = (3,2,1)$ e $\vec{w} = (1,-3,5)$. Determine:

a) $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

b) Qual o ângulo entre estes vetores?

2) Considere a cidade de Paris, na França, com coordenadas 48° N e 9° L. Supondo a Terra perfeitamente esférica com raio 6371 km, centrada na origem de um sistema de coordenadas e o meridiano de Greenwich situado no plano OYZ; transforme suas coordenadas geográficas em coordenadas cartesianas.

3) As cidades de Maringá-PR e Sorocaba-SP são 'cortadas' pelo Trópico de Capricórnio, paralelo que divide as Zonas Tropical Sul e Temperada Sul da Terra. Sua latitude é 23°26'16" S. Determine a distância entre essas cidades, se for percorrido um trajeto sobre o Trópico e se a Terra for uma esfera perfeita de raio 6371 km. Dados: cos(23°26'16") = 0,8954; longitude de Maringá-PR: *51°56' O* e de Sorocaba-SP:*47°45' O*.

4) Agora, transforme as coordenadas geográficas da questão anterior em coordenadas cartesianas, com o centro da Terra na origem de um sistema tridimensional de coordenadas e o meridiano de Greenwich situado no plano OYZ. A seguir, calcule através de produtos internos a distância entre as cidades de Maringá e Sorocaba.

5) Qual distância foi a menor? O que você consegue concluir a respeito de distâncias entre cidades num mesmo paralelo? E entre duas cidades quaisquer?

6) Calcule a menor distância entre as cidades de Lisboa (38°25’12” N e 9°6’36” O) e Santa Maria (29°41’29” S e 53°48’3” O)

Referências Bibliográficas

BALDIN, L. A. F. *Geometria não-euclidiana: uma introdução.* Londrina: Caderno Pedagógico (PDE - Programa de Desenvolvimento Educacional), Secretaria Estadual de Educação e Universidade Estadual de Londrina, 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos>. Acesso em: 6 abr 2021.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Hiperbólica.* 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blücher, Ltda, 1974.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília: Ministério da Educação, 2018.

CARVALHO, M. A. S.; CARVALHO, A. M. F. T. O ensino de geometria não euclidiana na educação básica. In: . Recife: [s.n.], 2011. Disponível em: <https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2625/816>. Acesso em: 08 nov. 2019.

DUELI, L. J. *Geometria Esférica: Propostas de Sequências Didáticas Interdisciplinares.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

EUCLIDES. *Os Elementos. Tradução de Irineu Bicudo.* São Paulo: Editora UNESP, 2018.

EVES, H. *Geometria: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Tradução Higino H. Domingues.* São Paulo: [s.n.], 1997.

IAVORSKI, C. *Triângulos Esféricos.* Telêmaco Borba: GeoGebra, 2022. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/ec8bj9nm>. Acesso em: 30 out. 2022.

KASNER, E.; NEWMAN, J. *Matemática e Imaginação: o mundo fabuloso da matemática ao alcance de todos.* Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1968.

LEONARDO, F. M. *Projeto Araribá - 7 ano - Matemática.* São Paulo: Moderna, 2010.

LIMA, E. L. *Espaços Métricos.* Rio de Janeiro: LTC, 1977.

MLODINOW, L. A. *Janela de Euclides. A História da Geometria: das Linhas Paralelas ao Hiperespaço.* São Paulo: Geração, 2005.

MÜLHBAUER, M.; BERNARDES, M. *Cartografia: uma introdução aos conceitos de geometria não euclidiana na educação básica.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014.

SEED, S. do Estado da Educação do P. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática.* Curitiba: Governo do Paraná, 2008.

SILVA, W. D. *Uma introdução à Geometria Esférica.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2015.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Matemática: Ensino Médio.* São Paulo: Saraivao, 2005.

THOMAZ, M. L.; FRANCO, V. S. *Geometrias não euclidianas, a Geometria Esférica.* [S.l.]: Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná - PDE, 2008.

WEPOKE. *Distância entre as cidades.* 2022. Disponível em: <http://www.distanciasentrecidades.com>. Acesso em: 04 set. 2022.

5º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Realização e Organização

10 ANOS
ANPMat
Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

Distribuição

Editora ANPMat

ISBN: 978-65-88013-26-7

9 786588 013267