5º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

MUSEU DA MATEMÁTICA UFMG

Divertimentos Geométricos

Carmen Rosa Giraldo Vergara

Fabio Enrique Brochero Martínez

ANPMat
Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
10 ANOS

MUSEU DA MATEMÁTICA UFMG

Divertimentos Geométricos

Museu da Matemática UFMG: Divertimentos Geométricos

Projeto gráfico e capa: Gabriel Brasil Nepomuceno

Produção editorial:
Editora Pi
https://www.editorapi.com.br | contato@editorapi.com.br | +55 21 97636-9137

Distribuição:
Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
http://www.anpmat.org.br | editoraanpmat@anpmat.org.br

ISBN: 978-65-88013-28-1

5º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

MUSEU DA MATEMÁTICA UFMG

Divertimentos Geométricos

Carmen Rosa Giraldo Vergara

Fabio Enrique Brochero Martínez

1ª edição

2023

Rio de Janeiro

ANPMat
Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
10 ANOS

Sobre os autores

Carmen Rosa Giraldo Vergara
carmita@mat.ufmg.br

Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidad Industrial de Santander (1994), mestre em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (1997) e doutora em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (2002). Atualmente é professora associada do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais. Sua área de pesquisa é a álgebra de grupos e atualmente seu trabalho está direcionado para divulgação e popularização da Matemática. Em conjunto com o professor Fabio Enrique Brochero Martínez, idealizaram e criaram o Museu da Matemática UFMG.

Graduado em Matemática pela Universidad Nacional de Colombia (1994), mestre em Matemática pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (1997), doutor em Matemática pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (2001). Atualmente é professor titular da Universidade Federal de Minas Gerais e desenvolve pesquisa na área de corpos finitos. Em conjunto com a professora Carmen Rosa Giraldo Vergara, idealizaram e criaram o Museu da Matemática UFMG.

Fabio Enrique Brochero Martínez
fbrocher@mat.ufmg.br

Aos professores e professoras que fazem a diferença.

Sumário

Lista de Figuras

Prefácio

O Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG tem atuado, por meio de diversos projetos de extensão, junto a professores e alunos dos ensinos Fundamental e Médio com o objetivo de contribuir para a popularização do conhecimento matemático e com a melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática.

Nesse contexto, o Museu da Matemática UFMG foi criado, em 2018, para promover a Matemática através de atividades lúdicas que estimulem o interesse dos visitantes, especialmente dos professores, levando-os a uma reflexão sobre as propostas que passem uma visão positiva do ensino e aprendizagem da Matemática e objetivando difundir a Matemática Recreativa enquanto ferramenta didática.

Este trabalho é resultado do minicurso *Museu da Matemática UFMG: Divertimentos Geométricos* ministrado no 5º *Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática*, em 2022, na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Nele são apresentadas algumas das atividades desenvolvidas nesse minicurso e objetos matemáticos tangíveis e visualmente atraentes e que podem ser usados por professores dos ensinos Fundamental e Médio para desenvolver diversos conceitos geométricos em diferentes níveis escolares. Cada uma das atividades combina Matemática e arte com o objetivo de estimular o interesse dos estudantes e facilitar, por exemplo, o estudo de padrões e simetria, o raciocínio espacial e a resolução de problemas, proporcionando assim a possibilidade de experimentar diversos recursos promotores de uma visão positiva do ensino-aprendizagem da Geometria.

Consideramos que atividades vistas a partir de uma perspectiva lúdica contribuem eficientemente para a disseminação do conhecimento matemático.

Belo Horizonte, setembro de 2023.

Carmen Rosa Giraldo

Agradecimentos

Agradecemos ao David Brochero pela cuidadosa leitura e sugestões de redação do texto. Nossos agradecimentos ao Departamento de Matemática pelo apoio de sempre, à Pró-reitoria de Extensão da UFMG, à Rede de Museus da UFMG e à Fapemig pelo apoio financeiro em diversos editais e chamadas. À equipe do Museu e ao grupo PET-MAT-UFMG pela colaboração na mediação das visitas das escolas ao Museu da Matemática UFMG.

Capítulo 1

Sólidos Platônicos

"Que não entre quem não saiba geometria." *Platão*

Os sólidos perfeitos, também conhecidos como Sólidos Platônicos, são corpos convexos tais que todas as faces são polígonos regulares congruentes e sobre cada vértice incidem a mesma quantidade de polígonos. Eles têm uma beleza simétrica que fascinou muitas pessoas ao longo do tempo. Alguns poliedros regulares já eram conhecidos pelos antigos egípcios, que os usavam em sua arquitetura.

Os antigos gregos estudaram esse tipo de figuras exaustivamente. Acredita-se que Pitágoras já conhecesse algumas delas, mas Teeteto foi o primeiro que deu uma descrição matemática e mostrou que somente podem existir 5 poliedros com essas características. Platão escreveu sobre eles no diálogo Timeu em 360 a.C., no qual associou quatro deles aos quatro elementos terra, ar, água e fogo. Já Platão deu ao quinto poliedro, o dodecaedro, uma interpretação de organizador das constelações do céu. Por sua vez, Aristóteles interpretou como um quinto elemento o éter, e postulou que os céus eram feitos desses elementos.

1.1 Por que somente 5 Sólidos Perfeitos?

Existe uma infinidade de formas de se desenhar um polígono regular (e convexo) no plano. De fato, para cada número de lados existe um polígono regular convexo correspondente. Por outro lado, se quisermos construir um poliedro regular no espaço, as possibilidades diminuem drasticamente.

Um poliedro regular é um sólido limitado por faces planas (polígonos regulares). Além disso, um poliedro é chamado de convexo quando cada um dos planos que contém uma face deixa todo o sólido do mesmo lado.

Uma das primeiras figuras que pensamos quando falamos de um sólido é um cubo. Isso talvez se deva às características interessantes que vemos nele, das quais podemos listar três:

1. Todas as faces são quadrados.
2. Cada um de seus vértices toca exatamente 3 quadrados.
3. O cubo é um poliedro convexo.

Surge então uma pergunta natural: Quais outros sólidos têm essas mesmas características?, ou seja, quais outros poliedros cumprem que:

1. Todas as faces sejam polígonos regulares.
2. Em cada um de seus vértices coincidam exatamente a mesma quantidade de polígonos.
3. O sólido seja convexo.

A seguir daremos uma explicação matemática e elementar de que existem apenas 5 sólidos perfeitos, também chamados de sólidos platônicos.

Observemos primeiramente que:

- cada vértice deve tocar três ou mais figuras, pois com apenas duas, elas estariam no mesmo plano, assim não formariam um vértice real da figura.
- a soma dos ângulos das figuras que tocam um vértice tem que ser menor do que 360°. Pois caso a soma dos ângulos seja maior, a figura deixa de ser convexa.

Com isso, chegamos às seguintes conclusões:

1. Caso as faces do sólido sejam triângulos equiláteros, então sobre cada vértice do poliedro pode tocar 3, 4 ou 5 triângulos, pois os ângulos internos do triângulo medem 60° e a soma dos ângulos das figuras em um vértice tem que ser menor que 360°. (Note que com 6 triângulos equiláteros teremos uma figura plana).

2. Caso as faces sejam quadrados, então o número de polígonos incidindo sobre um vértice teria que ser 3, uma vez que os ângulos internos do quadrado medem 90°. (Note que 4 quadrados também formam uma figura plana).

3. Caso as faces sejam pentágonos regulares, então o número de polígonos tocando um vértice teria que ser 3, uma vez que os ângulos internos do pentágono medem 108°.

4. Como o hexágono regular tem ângulos de 120° e $3 \times 120 = 360$, então é impossível usar 3 ou mais deles em um vértice, pois nesse caso a soma dos ângulos dos polígonos seria maior ou igual a 360°, impossibilitando que o sólido seja convexo.

As condições anteriores limitam quais dos polígonos, podem ser usados para construir poliedros regulares, podendo ser apenas triângulos equiláteros, quadrados e pentágonos regulares. Agora surge então outra pergunta: quantos poliedros se podem formar com cada uma dessas figuras?

Podemos responder essa pergunta usando uma bela fórmula que relaciona o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, conhecida como a "Fórmula de Euler".

Leonhard Paul Euler naceu em Basel, Suíça em 1707 e morreu em São Petersburgo, Império Russo em 1783. Foi o matemático mais prominente do século 18 e um dos maiores de toda a história.

Ele viveu em São Petersburgo (Rússia) e em Berlim (Prússia) durante a maior parte de sua vida adulta, e fez importantes contribuições a diversas áreas da Matemática, entre elas, Teoria dos Números, Geometria, Cálculo, Álgebra e Probabilidade. Euler também teve relevantes trabalhos nos campos da Mecânica, Ótica e Astronomia. Foi responsável pelo nascimento da Teoria de Grafos, resolvendo o problema das sete pontes de Königsberg, e deixou sua marca na Matemática Recreativa.

Euler é considerado uma das pessoas com maior número de trabalhos e artigos em diversas áreas do conhecimento, comparável apenas a Gauss. Ele publicou uma média de 800 páginas de artigos por ano no período de 1727 a 1783, e grande parte de sua obra era inédita. A produção de Euler não só trouxe uma Matemática nova, como também muita da nomenclatura moderna. O famoso π foi uma das notações introduzidas e popularizadas por Euler.

De volta aos sólidos convexos, Euler descobriu, em 1750, que para esse tipo de sólidos a seguinte relação é sempre verdadeira:

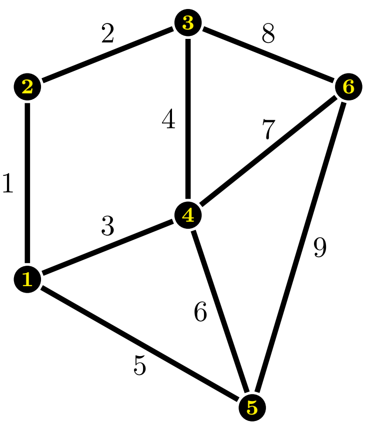
Fórmula de Euler

Dado um poliedro, não necessariamente regular, mas sem buracos, se denotamos por V o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces do poliedro, então esses três números estão relacionados pela fórmula

$$V + F - A = 2.$$

Essa fórmula também vale para qualquer *mapa plano*, isto é, nas quais as fronteiras não se cruzam em nenhum ponto além dos vértices.

Consideremos por exemplo o seguinte mapa



Nele o número de arestas é $A = 9$, o número de vértices é $V = 6$, e eles dividem todo o plano em cinco regiões (contando a parte externa); dessa forma $F = 5$. Assim temos que $V + F - A = 6 + 5 - 9 = 2$, satisfazendo então a Fórmula de Euler. Nesse caso o mapa do exemplo esta formado por, três triângulos, um quadrilátero, e a outra exterior é o complemento de um pentágono (que chamaremos simplesmente de pentágono).

Consideremos agora o mapa da Figura 1 e observemos que novamente a Fórmula de Euler é válida.

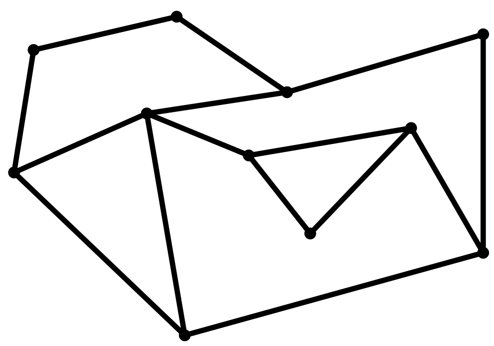


Figura 1: Grafo plano

De fato, esse mapa tem 15 arestas, 11 vértices e 6 faces (2 triângulos, 1 pentágono, 2 hexágonos e a região externa), e assim $V + F - A = 11 + 6 - 15 = 2$.

Para pensar

1. É possível construir um mapa plano, que seja formado por 5 triângulos, 2 quadriláteros e 2 pentágonos? Justifique sua resposta.

2. Quantos vértices têm um mapa plano formado por 6 triângulos, 1 quadrilátero e 2 pentágonos?

Observemos que nos exemplos anteriores sobre mapas, desconsideramos a exigência de que as figuras fossem regulares. Isto é, a Fórmula de Euler não considera outros fatores geométricos, e unicamente se atenta às relações de fronteira comum e à incidência nos vértices. Para o estudo de poliedros regulares, adicionaremos essas propriedades geométricas, o que nos permite reduzir drasticamente o número de casos a serem considerados.

Para isso, primeiro vamos supor que em um vértice do poliedro incidem n triângulos (lembrando que n pode ser 3, 4 ou 5).

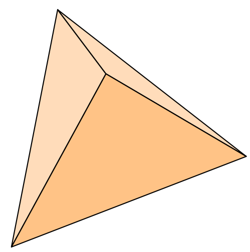
No caso $n = 3$, de cada vértice saem 3 arestas, e cada aresta tem dois vértices em seus extremos. Isso significa que V e A cumprem a relação

$$3V = 2A.$$

Da mesma forma, cada face tem 3 lados (arestas), e cada aresta é compartilhada por 2 triângulos. Logo A e F satisfazem a relação

$$3F = 2A.$$

Multiplicando a relação de Euler por 3 e substituindo V e F nessa fórmula, obtemos que



Tetraedro

$$6 = 3V + 3F - 3A = 2A + 2A - 3A = A.$$

Logo a figura terá 6 arestas, e portanto 4 faces e 4 vértices. Esta figura é chamada de *Tetraedro Regular* .

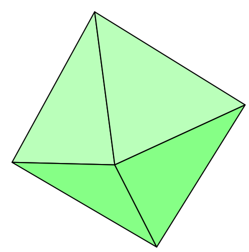
No caso $n = 4$, de cada vértice saem 4 arestas, e cada aresta tem dois vértices em seus extremos. Isso significa que V e A cumprem a relação

$$4V = 2A.$$

Da mesma forma cada face tem 3 lados (arestas) e cada aresta é compartilhada por 2 triângulos. Logo A e F satisfazem a relação

$$3F = 2A.$$

Multiplicando a relação de Euler por 6 e substituindo V e F nessa fórmula obtemos que



Octaedro

$$12 = 6V + 6F - 6A = 3A + 4A - 6A = A.$$

Logo a figura terá 12 arestas, e portanto 8 faces e 6 vértices. Esta figura é chamada de *Octaedro Regular*.

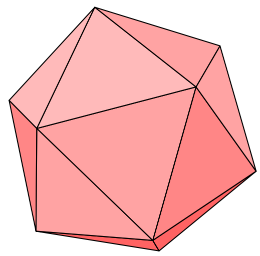
No caso $n = 5$, de cada vértice saem 5 arestas, e cada aresta tem dois vértices em seus extremos. Isso significa V e A cumprem a relação

$$5V = 2A.$$

Da mesma forma cada face tem 3 lados (arestas) e cada aresta é compartilhada por 2 triângulos. Logo A e F satisfazem a relação

$$3F = 2A.$$

Multiplicando a relação de Euler por 15 e substituindo V e F nessa fórmula obtemos que



Icosaedro

$$30 = 15V + 15F - 15A = 6A + 10A - 15A = A$$

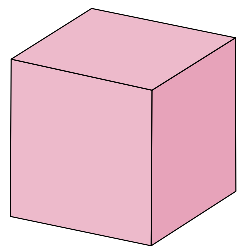
Logo a figura terá 30 arestas, e portanto 20 faces e 12 vértices. Esta figura é chamada de *Icosaedro Regular*.

No caso em que as faces sejam quadrados teremos as relações

$$3V = 2A \quad \text{e} \quad 4F = 2A$$

Multiplicando a relação de Euler por 6 temos

$$12 = 6V + 6F - 6A = 4A + 3A - 6A = A.$$

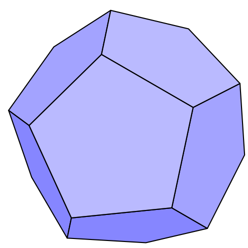


Cubo

Logo a figura terá 12 arestas, e portanto 6 faces e 8 vértices. Esta figura é chamada de *Cubo*.
Finalmente, no caso em que as faces sejam pentágonos regulares teremos as relações

$$3V = 2A \quad \text{e} \quad 5F = 2A.$$

Multiplicando a relação de Euler por 15 e substituindo V e F nessa fórmula obtemos que



Dodecaedro

$$30 = 15V + 15F - 15A = 10A + 6A - 15A = A.$$

Logo a figura terá 30 arestas, e portanto 12 faces e 20 vértices. Esta figura é chamada de *Dodecaedro Regular*.

Podemos resumir isso na seguinte tabela:

Poliedro	Vértices	Faces	Arestas
Tetraedro	4	4	6
Octaedro	6	8	12
Icosaedro	12	20	30
Cubo	8	6	12
Dodecaedro	20	12	30

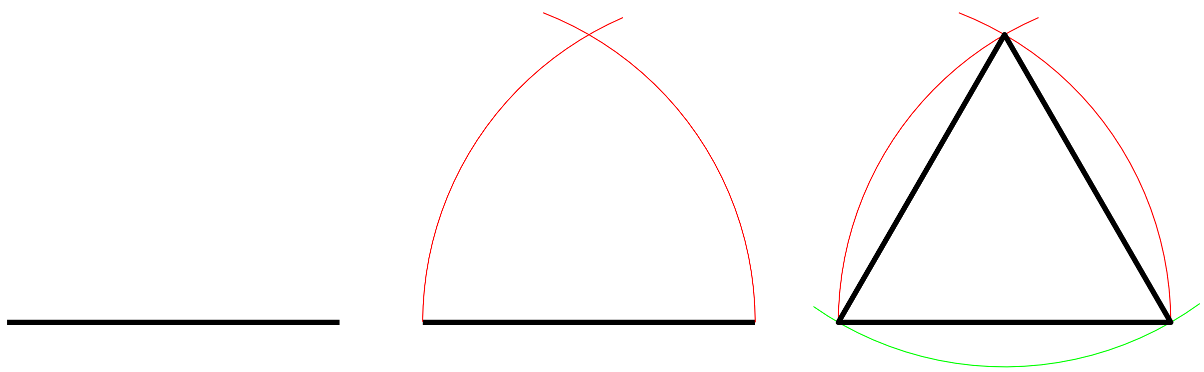
1.2 Construção de “Polígonos de Encaixe”

Nesta seção mostraremos como construir as peças que serão utilizadas para montar os sólidos perfeitos. Estamos anexando nesta cartilha os moldes dessas figuras mas elas podem ser construídas também usando regra e compasso. A seguir mostramos essa construção.

1.2.1 Triângulos de encaixe

Para a construção da figura triangular, é preciso construir primeiro um triângulo equilátero. Para isso

- Trace um segmento com comprimento igual à medida do lado do triângulo equilátero.
- Coloque a ponta de um compasso num dos extremos do segmento desenhado e a abertura do compasso igual ao comprimento do segmento. Em seguida trace um arco de circunferência, como indicado em vermelho na Figura 2(b), e faça o mesmo procedimento com o outro extremo do segmento. Note que os dois arcos coincidem em um ponto e a distância desse ponto a cada um dos extremos é igual ao comprimento do segmento desenhado inicialmente. Esse ponto será o terceiro vértice de nosso triângulo equilátero.
- Trace os outros dois segmentos para obter o triângulo equilátero.
- Trace um terceiro arco como indicado em verde na Figura 2(c) usando a mesma abertura do compasso usada anteriormente, e desta vez, com centro no terceiro vértice.



(a) (b) (c)

Figura 2: Confeccionando os Triângulos de Encaixe

- Trace, desde cada vértice, uma linha perpendicular ao lado oposto, como mostrado na Figura 3a.
- Marque o ponto médio do segmento limitado entre cada arco e os lados, como mostrado na Figura 3b.
- Com centro em cada um desses pontos trace meia circunferência tangente tanto ao lado do triângulo como ao arco (veja Fig. 3c).

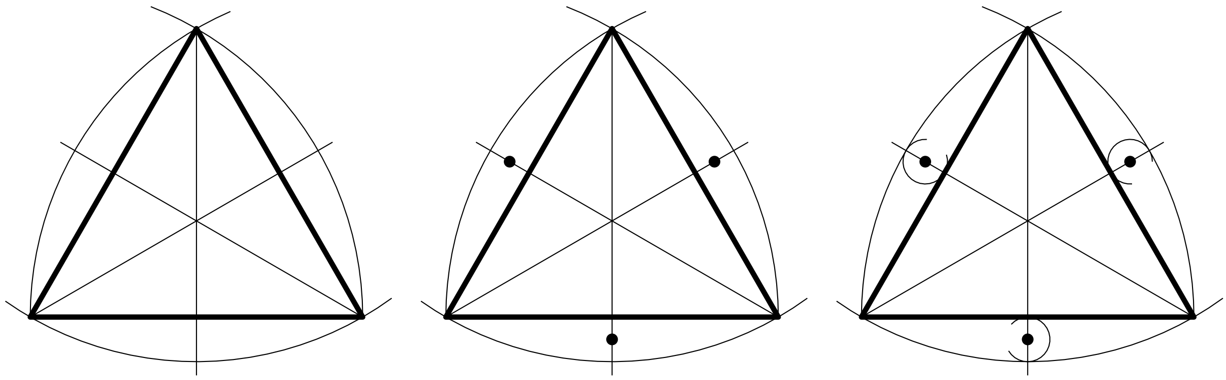


Figura 3: Construção dos cortes de encaixe

A peça construída nesse processo fica como mostrado na Figura 4(a). O polígono que esta peça representa é o exemplo mais simples dos chamados *Polígonos de Reuleaux* . Esses polígonos têm a propriedade de serem curvas de largura constante, isto é, a distancia entre qualquer par de retas tangentes paralelas é sempre a mesma.

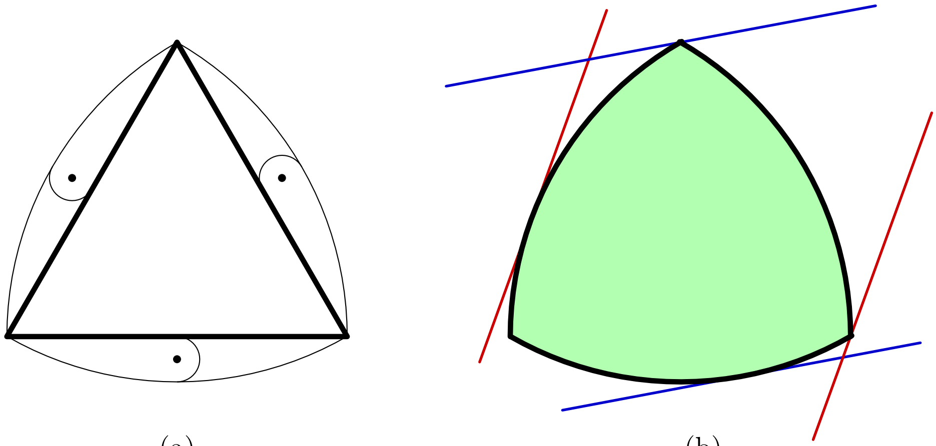


Figura 4: "Peça Triangular" e Polígono de Reuleaux

Essas figuras serão usada para montar três poliedros: Tetraedro, Octaedro e Icosaedro. Para a construção de cada um deles precisaremos respectivamente 4, 8 e 20 triângulos de encaixe.

1.2.2 Quadrados e Pentágonos de encaixe

Análoga à construção das peças triangulares, constroem-se as peças quadradas e pentagonais, como mostrado na Figura 5, para construir o Cubo e o Dodecaedro respectivamente. Sugerimos que as abas construídas sobre os lados do quadrado e do pentágono tenham o mesmo tamanho que as abas construídas sobre os lados do triângulo. Isso permitirá a elaboração de outros projetos tais como primas, antiprismas e alguns Sólidos Arquimedianos.

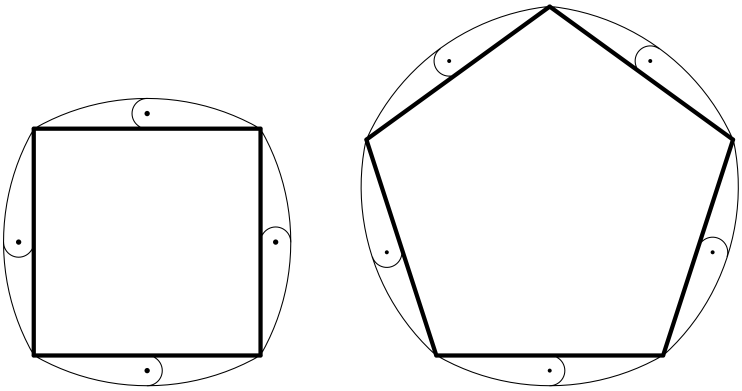


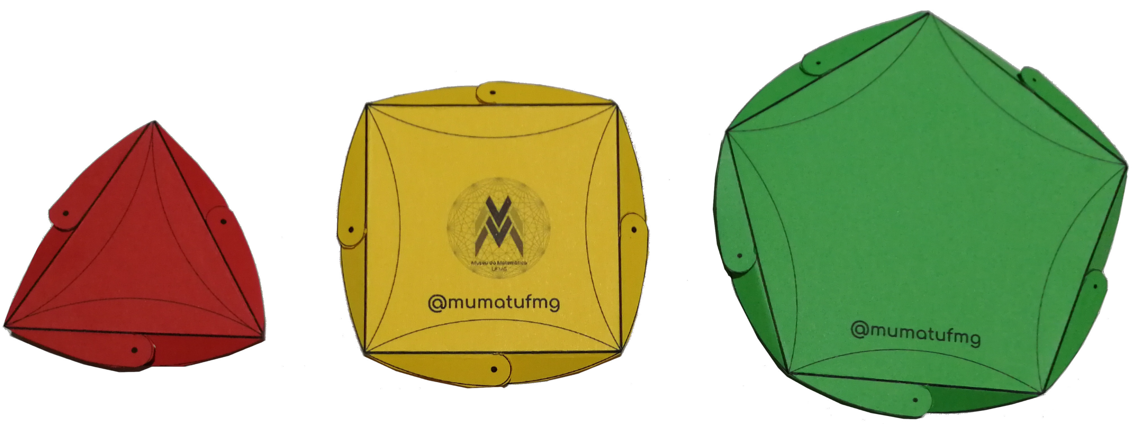
Figura 5: "Peças Quadrada e Pentagonal"

1.3 Uma proposta para sala de aula

A seguir, apresentamos a construção de alguns objetos matemáticos tangíveis e visualmente atraentes visando estimular o interesse dos estudantes. Trata-se de atividades com materiais didáticos concretos com os quais é possível trabalhar diversos conceitos matemáticos. Cada uma dessas atividades possui suas características e trabalha com habilidades específicas. Isso permite ao professor selecionar, adaptar e explorar os recursos que atendem melhor às demandas envolvidas no processo de ensino-aprendizagem.

O uso desta atividade é justificado não somente pela curiosidade natural que ela desperta, como também pelo fato de proporcionar o desenvolvimento de habilidades geométricas (planoespaciais), nesse contexto, ela deve ser explorada para além da simples "montagem de peças". Essa atividade fornece um rico material que pode ser usado em sala de aula, sendo um interessante "quebra-cabeça lógico" e um ótimo exercício na resolução de problemas e no aprimoramento do raciocínio espacial e no reconhecimento de padrões geométricos e coloridos. Além da sua interdisciplinaridade com a arte, arquitetura e temas de Matemática de nível superior.

As peças devem ser reproduzidas em cartolina, ou papel de uma gramatura semelhante à da cartolina. Depois de reproduzidas, é preciso recortá-las. Em seguida, marcar uma dobra sobre os lados do triângulo, quadrado ou pentágono. Finalmente recortar os pequenos arcos de circunferência das abas, e as peças estarão prontas.



1.3.1 Montando o Tetraedro

O Tetraedro é um poliedro com 4 faces, 6 arestas e 4 vértices, nas quais cada um dos vértices toca três triângulos. Para a construção do Tetraedro são utilizadas 4 peças triangulares.

Encaixe as abas das 4 peças como indicado na figura ao lado.

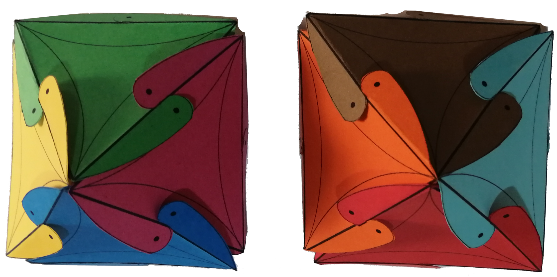
Em seguida encaixe os triângulos laranja e azul e finalmente encaixe as abas dos triângulos azul, laranja e amarelo, formando assim o tetraedro.

1.3.2 Montando o Octaedro

O Octaedro é um poliedro com 8 faces triangulares, 12 arestas e 6 vértices, no qual cada um dos vértices toca quatro triângulos. Para a construção do octaedro são utilizadas 8 peças triangulares.

Encaixe quatro peças triangulares de tal forma que fiquem com um vértice em comum formando assim uma piramide.

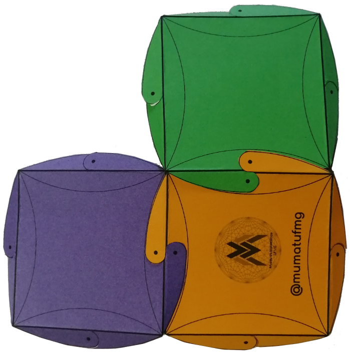
Repita esse processo para a construção de uma segunda piramide como mostrado na figura ao lado.



Finalmente encaixe as abas das duas pirâmides formando assim o octaedro.

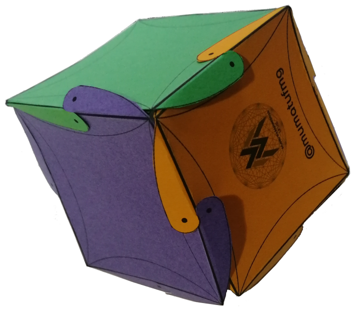
1.3.3 Montando o Cubo

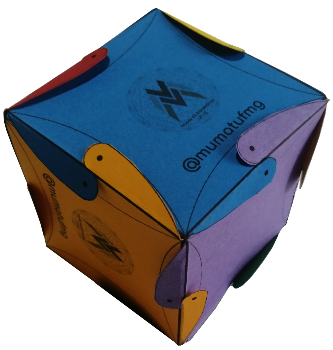
O cubo possui 6 faces quadradas, 12 arestas e 8 vértices, no qual cada um de seus vértices toca três quadrados. Para a construção do Cubo são utilizadas 6 peças quadradas.



Encaixe as abas de 3 peças quadradas como indicado na figura ao lado.

Repita o procedimento anterior para obter duas figuras como as da imagem ao lado.





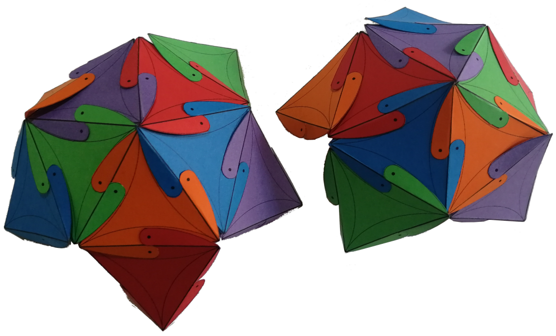
Finalmente encaixe as abas das duas figuras obtidas no passo anterior, formando assim o Cubo.

1.3.4 Montando o Icosaedro

O Icosaedro possui 20 faces triangulares, 30 arestas e 12 vértices, no qual cada vértice toca cinco triângulos. Para a construção do Icosaedro são utilizadas 20 peças triangulares e em cada um de seus vértices são encaixados 5 triângulos.

Encaixe cinco peças triangulares, de tal forma que fiquem com um vértice em comum.

Encaixe um peça triangular em cada "borda" da figura obtida no passo anterior.



Repita o procedimento para obter outra figura igual à figura acima.

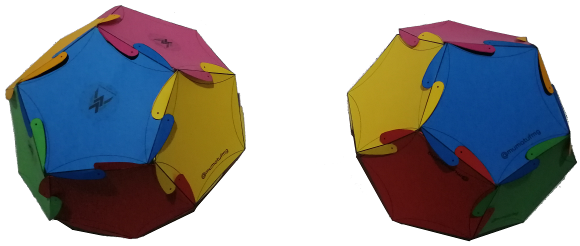
Finalmente encaixe as abas das duas figuras, formando assim o Icosaedro.

1.3.5 Montando o Dodecaedro

O Dodecaedro possui 12 faces pentagonais, 30 arestas e 20 vértices, no qual cada um de seus vértices toca três pentágonos. Para a construção do Dodecaedro serão utilizadas 12 peças pentagonais.

Encaixe 5 peças pentagonais nas abas de um sexto pentágono como indicado na figura ao lado.

Repita o procedimento com as outras 6 peças pentagonais para obter duas figuras como ao lado.



Encaixe as duas figuras obtidas anteriormente e finalmente teremos montado o Dodecaedro.

Capítulo 2

Quebra-cabeças Geométricos

"Afinal de contas o que é a matemática senão a solução de quebra-cabeças? E o que é a ciência senão um esforço sistemático para obter respostas cada vez melhores para os quebra-cabeças impostos pela natureza?"

Martin Gardner

O uso de quebra-cabeças geométricos em sala de aula é justificado não somente pela curiosidade natural que eles despertam, como também pelo fato de proporcionarem o desenvolvimento de habilidades geométricas (planoespaciais) tais como visualização e reconhecimento de figuras, percepção de posição, comparação de distância, áreas e volumes, organização de estratégias, capacidade de análise, enriquecimento do vocabulário geométrico, raciocínio lógico, entre outras habilidades.

Nesse contexto, o uso dos quebra-cabeças no ambiente escolar deve ir além da simples "montagem de peças"; esse recurso deve proporcionar o aprimoramento das técnicas de resolução de problemas, induzir o descobrimento de relações entre as peças que o compõem e explorar, naturalmente, conceitos matemáticos tais como: lado, vértice, ângulo, centro, meio, área, assim como nomes e características de figuras planas e espaciais.

2.1 Quebra-cabeça "Quadrado Duplo"

O quebra-cabeça "Quadrado Duplo" é composto por 5 peças poligonais (um quadrado e quatro não quadrangulares) que podem ser unidas para formar quadrados. Este quebra-cabeça é um desafio interessante: com 4 peças (das 5), é possível formar um quadrado perfeito, e com todas as 5 peças pode-se formar um quadrado um pouco maior.

Com frequência, a solução do quebra-cabeça com as 4 peças não quadrangulares é encontrada de maneira rápida, o que não acontece quando são usadas todas as peças. Geralmente a dificuldade com a montagem do quadrado usando as 5 peças está no fato de que as pessoas não percebem que a peça pentagonal convexa possui três vértices com ângulo reto e o vértice "menos óbvio" é justamente um vértice do quadrado a ser montado.

- Inicialmente o professor deve pedir aos alunos que recortem um quadrado a partir de uma folha de papel de tamanho $A4$.

- Em seguida, eles devem ser orientados a traçar as diagonais e os segmentos que unem os pontos médios dos lados do quadrado, obtendo assim, um quadrado subdivido em 16 triângulos retângulos congruentes. Ver Figura 6.

- A partir do quadrado obtido, os alunos precisam recortar as 4 peças não quadrangulares do quebra-cabeça, como mostra a Figura 7. Para a quinta peça do quebra-cabeça, pede-se aos alunos que recortem, do pedaço de papel que sobrou da folha $A4$, um quadrado de área equivalente a 2 dos triângulos retângulos obtidos inicialmente.

Construídas as peças é hora de pedir para eles construírem um quadrado usando todas as 5 peças. A solução é mostrada na Figura 8.

Note que, com as 5 peças construídas dessa forma, é possível mostrar que se, por exemplo, o quadrado formado pelas quatro peças não quadrangulares do quebra-cabeça tem área de 400cm^2, a peça quadrada do quebra-cabeça terá área de 50 cm^2. Portanto, o quadrado formado com todas as peças terá uma área de 450 cm^2.

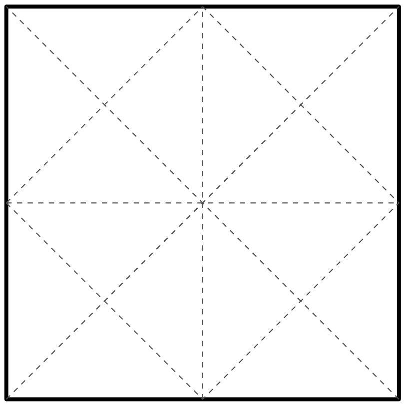


Figura 6: Construindo o quebra-cabeça Quadrado Duplo

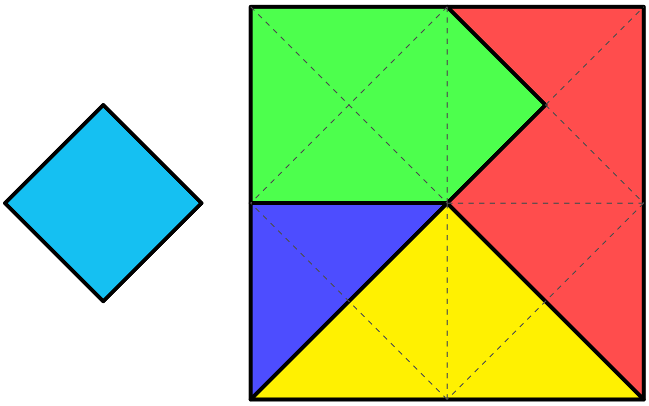


Figura 7: As 5 peças do Quadrado Duplo

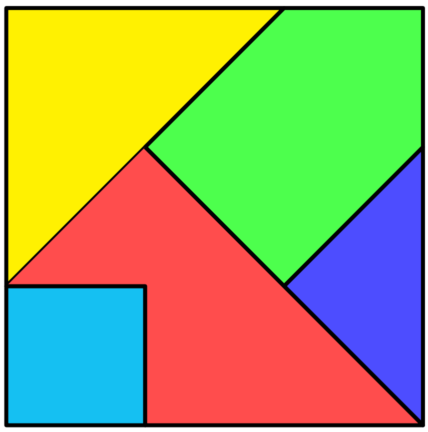


Figura 8: Quadrado com as 5 peças

2.2 Do Quadrado à Cruz de Sam Loyd

Sam Loyd foi um incansável inventor de quebra-cabeças de cunho matemático e um dos maiores criadores de enigmas da história. Para ele não tinha melhor treino mental que resolver quebra-cabeças, e este passatempo devia ser considerado mais seriamente do que uma mera moda passageira ou diversão. Os melhores de seus enigmas matemáticos foram coletados no livro *Loyd's Cyclopedia of Puzzles*.

O quebra-cabeça *Do Quadrado à Cruz de Sam Loyd* resultou da dissecção de um quadrado em 5 peças. A história dele ainda é um mistério, mas acredita-se que Loyd inventou esse enigma como anúncio publicitário para um empresa.

O quebra-cabeça consiste em formar um quadrado utilizando todas as 5 peças. Com ele pode-se formar outras figuras como uma cruz, um retângulo, um triângulo retângulo, um trapézio ou um losango [4, p. 104]. Assim, esse quebra-cabeça é um material muito rico enquanto recurso didático, pois, com ele, o professor pode explorar tópicos diversos como classificação de algumas figuras geométricas, medidas de comprimento, pontos médios de segmentos, ângulos, comparação de área, construções geométricas, entre outros. Além disso, é possível explorar o uso de régua para medição e o transferidor.

2.2.1 Uma proposta para Sala de aula

Os quebra-cabeças do Museu e, em particular, o quebra-cabeça Quadrado Duplo podem ser explorados em diversos níveis do ensino. Porém, os apresentados nesta cartilha estão orientados para alunos dos últimos anos do Ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio.

Disponibilizamos os moldes dos quebra-cabeças na seção de Anexos. Assim eles podem ser reproduzidos por professores e/ou alunos em diversos materiais como cartolina, papelão ou EVA.

A seguir, algumas dicas para o professor aplicar a atividade com a construção do quebra-cabeça em sala de aula. Para isso:

- Peça aos alunos para construir um quadrado (é recomendado fazer o quadrado em cartolina ou papelão).
- Desenhado o quadrado, eles devem traçar segmentos de cada vértice ao ponto médio do primeiro lado oposto em sentido horário.
- Solicite aos alunos que recortem as peças, conforme o modelo da Figura 9.

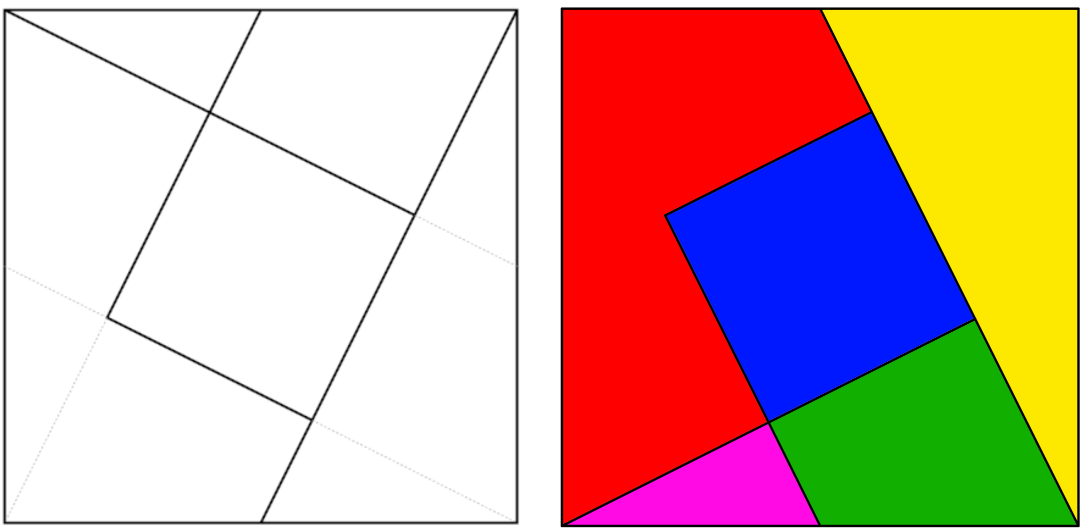


Figura 9: Confecção do quebra-cabeça "Do Quadrado à Cruz de Sam Loyd"

O momento da confecção das peças pode ser aproveitado para explorar conceitos geométricos como, por exemplo, medida de segmentos e medição de ângulos. Sugerimos neste processo incentivá-los a procurar peças que tenham ângulos de 90°, ou peças que tenham 2 vértices cujos soma dos ângulos seja 90°.

Explique aos alunos que o processo de corte, realizado com o quadrado, é uma dissecção e que é possível formar outras figuras com essas mesmas peças. Dito isso, o professor deve desafiá-los a montar, por exemplo, um retângulo, um trapézio, ou alguns dos polígonos da Figura 10 e explorar com eles as caraterísticas desses polígonos. A Figura 11 mostra a solução do desafio apresentado:

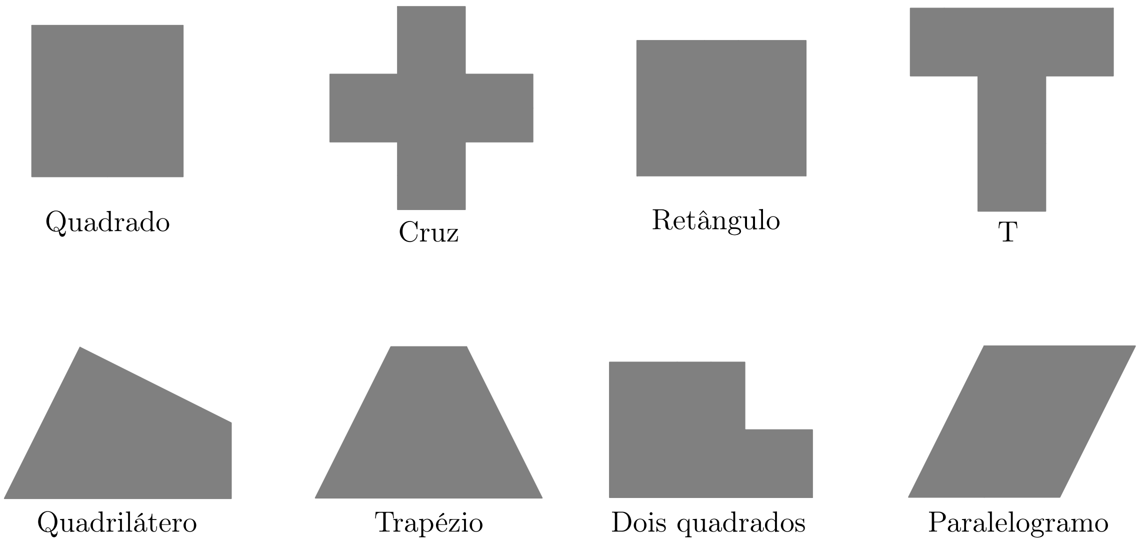


Figura 10: Construindo outros polígonos

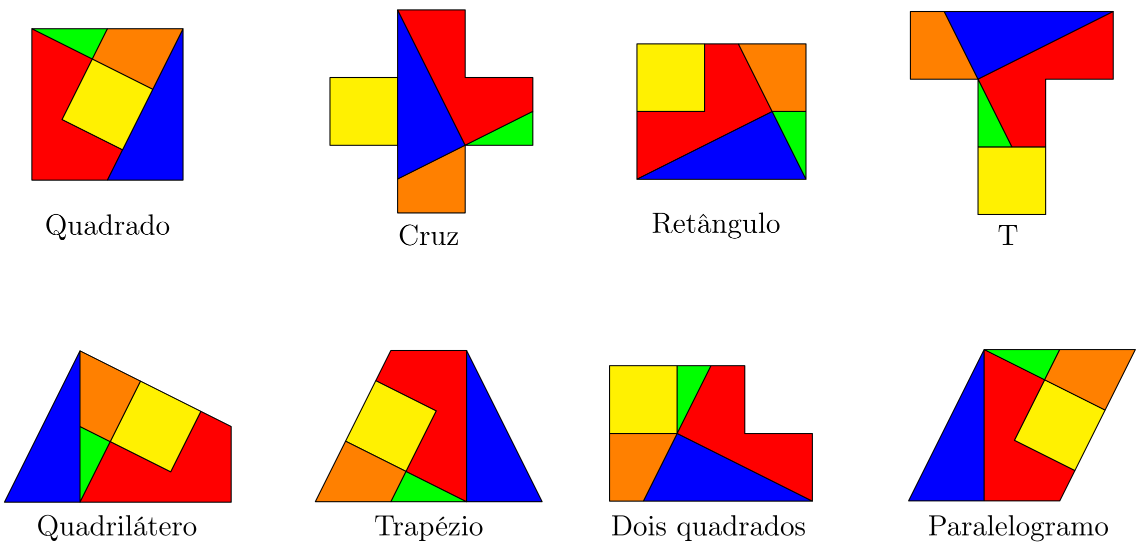


Figura 11: Polígonos com as peças do Quadrado à Cruz de Sam Loyd

Capítulo 3

Cúpula de Leonardo da Vinci

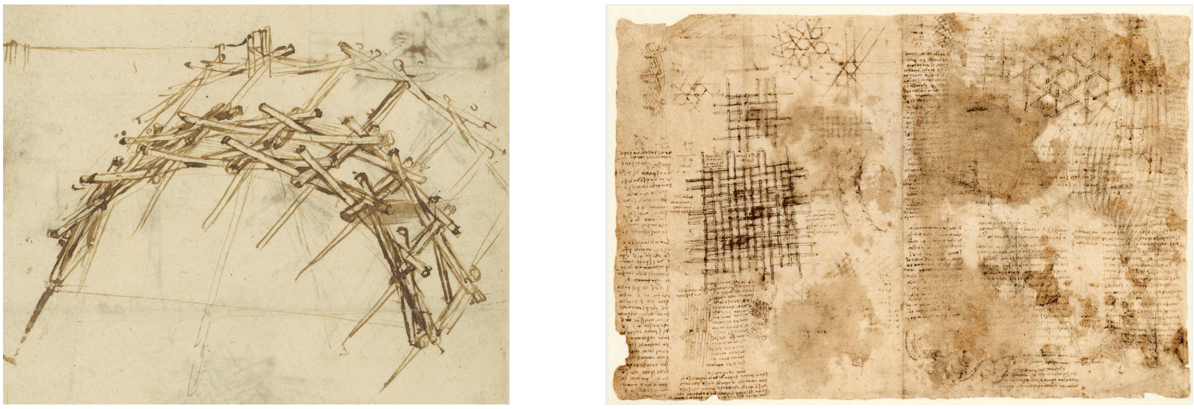
"Você tem que gastar alguma energia e esforço para ver a beleza da matemática."
Maryam Mirzakhani

Leonardo da Vinci foi um dos maiores artistas renascentistas, junto com Rafael Sanzio e Michelangelo Buonarrotti. Ele foi um autodidata e incansável observador dos fenômenos naturais, desenhando tudo o que despertou sua curiosidade. Muitas das ideias de Leonardo estão reunidas no Codex Atlanticus, coleção constituída por doze volumes que abrangem diversos assuntos como Astronomia, Química, Anatomia, Geografia, Mecânica, Matemática, estudos sobre o voo, entre outros.

3.1 Estruturas Autoportantes de Leonardo da Vinci

De todos os projetos de pontes de Leonardo, a ponte autoportante é certamente o mais engenhoso pela simplicidade de sua estrutura e construção. Ela é uma estrutura composta por vigas cilíndricas, que são montadas sem o uso de fixações ou juntas de intertravamento. Uma vez montada, o peso da ponte deve ser suficiente para exercer a pressão necessária para que as vigas longitudinais bloqueiem as vigas transversais, evitando assim que a estrutura colapse. Assim, quanto maior a pressão na parte superior da ponte, maior será sua estabilidade.

O mesmo principio usado nas pontes pode ser usado em duas dimensões para assim construir as cúpulas de Leonardo. Tais estruturas são construídas a partir de um único tipo de peça e sem nenhum amarre, apenas mediante o acoplamento tridimensional das peças, que se apoiam e sustentam entre si, seguindo determinados padrões geométricos. Na coleção de documentos de Leonardo da Vinci, nas folhas 899v e 899r do Codex Atlanticus, são apresentados alguns desses padrões.



(a) Ponte de Leonardo
Fonte: Folhas 899v e 899r do Codex Atlanticus

(b) Padrões da Cúpula de Leonardo.
Fonte: Folha 71v do Codex Atlanticus.

Figura 12: Modelo de Padrões de Estruturas Autoportantes

3.2 Uma proposta para Sala de Aula

A construção da ponte e das cúpulas de Leonardo tem um grande valor didático, pois desenvolve a capacidade de raciocínio e a faculdade de abstração mediante a descrição de padrões e relações espaciais e aplicações de transformações geométricas, além de capacidades manuais e trabalho em equipe.

Uma das oficinas ofertadas pelo Museu é a construção de cúpulas a partir de padrões criados por Leonardo da Vinci. Essa atividade, nomeada de *Leonardome,* foi desenvolvida pelo Museu de Mate-

(a) Ponte de Leonardo.

(b) Cúpula de Leonardo.

Figura 13: Estruturas Autoportantes de Leonardo da Vinci
Fonte: Acervo do Museu da Matemática UFMG.

mática de Catalunha. Tal atividade proporciona a construção coletiva de um tipo de cúpula descrita por Leonardo da Vinci. Nesta atividade os alunos podem ser divididos em grupos e cada grupo poderá escolher o tipo de cúpula entre onze modelos diferentes. Ela é recomendada para alunos a partir do 6^o do ensino fundamental e pode ser trabalhada em conjunto com outras disciplinas como história e arte por exemplo. Para construir a cúpula é usado um único tipo de peça, como mostrado na Figura 14.

Figura 14: Peça Cúpula de Leonardo.
Fonte: Acervo do Museu da Matemática UFMG

Orientações para montagem da cúpula

Para a montagem da cúpula é necessário que:

1. As peças sejam colocadas com os "recortes" dos cantos sempre virados para baixo e os recortes centrais para cima, como mostrado na Figura 14.

2. O "recorte" na extremidade da peça sempre passa por cima de um "recorte" central de outra peça como mostrado na Figura 15.

Inicialmente o professor deve pedir aos alunos escolher um padrão entre os 11 propostos (Ver Figura 16) e montar alguns padrões para se familiarizar com o posicionamento das peças. Para iniciar a montagem da cúpula sugerimos escolher como ponto de partida um dos três primeiros padrões com as peças perpendiculares como mostrado na Figura 17a. Durante esse processo sugere-se também fazer uma análise das formas geométricas que aparecem em cada um dos padrões escolhidos.

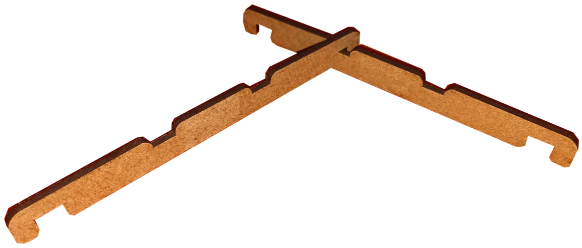


Figura 15: Peça Cúpula de Leonardo.
Fonte: Acervo do Museu da Matemática UFMG.

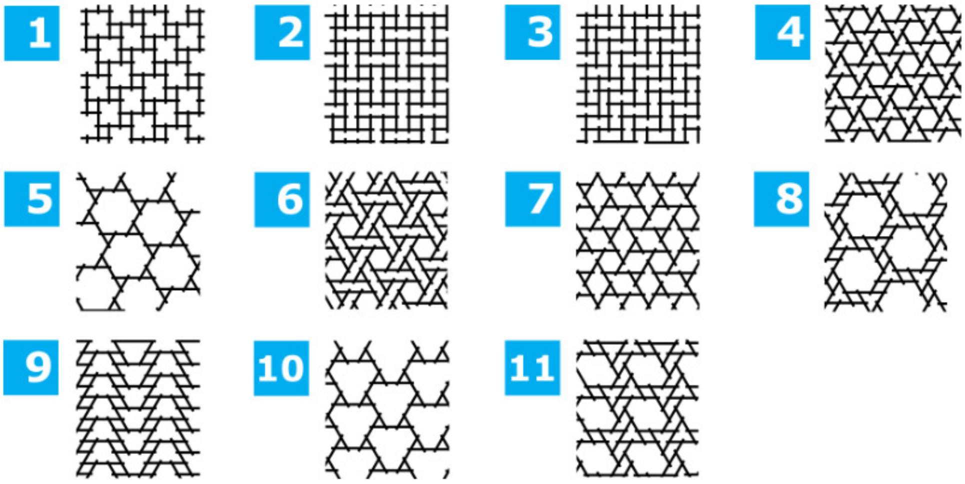
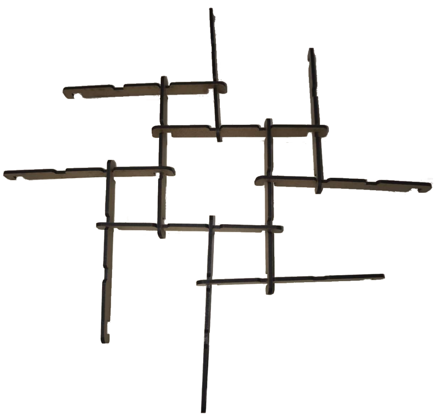


Figura 16: Padrões para Montagem de Cúpulas.
Fonte: Imagem do acervo do MMCA.



(a) Padrão para montagem.

(b) Oficina do Museu.

Figura 17: Montagem da Cúpula de Leonardo da Vinci: Padrão 1.
Fonte: Acervo do Museu da Matemática UFMG.

Os participantes terão que decidir simultânea e repetidamente sobre a posição e orientação de cada peça, seguindo um padrão bidimensional e tendo em conta o sistema de sobreposição (acima e abaixo). É conveniente construir de forma uniforme e coordenada para evitar que a estrutura colapse. Os resultados são imediatos e assim, a medida que o diâmetro e a altura da cúpula aumenta, os alunos ficam surpresos e motivados.

(a) Padrão para montagem da Cúpula de Leonardo.

(b) Montagem Cúpula de Leonardo.

Figura 18: Montagem da Cúpula de Leonardo da Vinci: Padrão 5
Fonte: Acervo do Museu da Matemática UFMG.

A montagem das cúpulas pode ser aproveitada para introduzir o conceito de ladrilhamento do plano. Um ladrilhamento, tesselação ou pavimentação do plano é uma coleção de figuras planas que preenchem o plano sem sobreposições ou lacunas. Existe uma enorme quantidade de pesquisas sobre pavimentações em todo o mundo e elas são uma fonte de muitos materiais de ensino em Matemática e arte.

Algumas considerações interessantes para discutir com os alunos após a montagem da cúpula:

- A estrutura se curva, mesmo usando padrões geométricos, porque os recortes inferiores das peças não estão alinhados com os superiores. Se os superiores fossem mais profundos, a estrutura não subiria.
- A medida que a cúpula fica cada vez maior, principalmente nas cúpulas formadas por grandes hexágonos, se chega rapidamente ao ponto em que, ao colocar mais uma peça, as peças vizinhas soltam-se, pois a estrutura vai ficando menos flexível.
- Com os 11 padrões utilizados não é possível fechar a cúpula como se fosse uma bola, pois são estruturas planas. Para isso seria necessário criar uma estrutura derivada do icosaedro truncado (a bola de futebol) composta por 12 pentágonos e 20 hexágonos.

Capítulo 4

Caleidociclos

“A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar.”

Jacques Bernoulli

Os caleidociclos são anéis de tetraedros que podem ser rotacionados indefinidamente e revelam padrões com o estilo de caleidoscópio. O primeiro caleidociclo conhecido foi inventado, em 1926, pelo matemático e artista alemão Paul Schatz. Em 1958, Wallace Walker descobriu alguns caleidociclos, no decorrer de seu trabalho sobre formas estruturais de papel. Posteriormente, ele e a matemática Doris Schattschneider recobriram os caleidociclos com tesselações de Escher, resolvendo, de certa forma, o problema colocado pelo artista sobre como representar de forma infinita uma pavimentação infinita do plano. A Figura 19 mostra o Caleidociclo recoberto com a obra Lizard/Fish/Bat n 85 de Escher (1952).

Figura 19: Caleidociclo de Escher

Existem diferentes tipos de caleidociclos, o mais conhecido é o anel de seis tetraedros. Na figura 20 apresentamos caleidociclos de 6 e 10 tetraedros.

Figura 20: Caleidociclos de 6 e 10 tetraedros

Nos festivais de Matemática organizados pelo Museu da Matemática UFMG, a oficina de construção de caleidociclos é sempre bem acolhida pelos alunos. Desse modo, podemos afirmar que se trata de um ótimo exercício para desenvolver conceitos matemáticos de diferentes naturezas.

Para aplicar essa atividade em sala de aula, o professor pode consultar a referência [6], onde é explicado o modo de montar um caleidociclo e, também, são apresentados alguns exemplos de atividades relacionadas com propriedades de poliedros e com a simetria de regiões planas.

Na sequência, apresentamos sugestões de assuntos que podem ser explorados durante a construção de caleidociclos. É aconselhável reproduzir os moldes em papel de gramatura 180gr.

4.1 Caleidociclo de Sierpinski

Neste modelo de caleidociclo representamos três iterações do processo de construção do chamado Triângulo de Sierpinski. O Triângulo de Sierpinski é, possivelmente, um dos fractais mais conhecidos. Ele foi idealizado em 1916 pelo matemático polonês V. Sierpinski e foi obtido retirando partes do interior de um triângulo mediante os seguintes passos:

1. Tome como ponto de partida o primeiro triângulo equilátero verde da Figura 21.

Figura 21: Interações do Triângulo de Sierpinski

2. Para a primeira iteração do processo, conecte, usando um segmento, os pontos médios de cada lado do triângulo, obtendo assim 4 triângulos menores. Pinte o interior do triângulo central de branco.

3. Para a segunda iteração, repita o passo anterior em cada um dos triângulos verdes menores obtidos em 2.

O triângulo de Sierpinski é o conjunto formado pelos pontos verdes após repetir o processo anterior indefinidamente. Na Figura 21, apresentamos as quatro primeiras iterações deste processo de construção. Esta atividade pode ser desenvolvida em sala de aula, iniciando-a com a construção das primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski. Notemos que a estas iterações podem ser associadas várias sequências: a sequência do número de triângulos, a sequência da área de cada triângulo retirado, a sequência da área restante dos triângulos e a sequência do perímetro total dos triângulos.

Após a construção do caleidociclo usando o molde (Figura 28) pode-se analisar junto com os alunos a variação do número de triângulos da cor verde em cada face do caleidociclos. O professor pode pedir a eles que registrem esses dados, e, em seguida, motive-os a responder as seguintes perguntas:

- Quantos triângulos verdes há em cada uma das faces dos tetraedros que formam o caleidociclo? Vocês poderiam continuar a sequência? Resposta: 1, 3, 9 e 27.

- Supondo agora que a área do triângulo em cada face é A, qual é a área de cada um dos triângulos verdes que aparecem nas faces do caleidociclos? Resposta: $A, \frac{1}{4}A$, $\frac{1}{16}A$, e $\frac{1}{64}A$.

- Qual é área da região verde em cada face do Caleidociclo? Resposta: A, $\frac{3}{4}A$, $\frac{9}{16}A$, e $\frac{27}{64}A$.

- Vocês conseguem continuar a sequência do item anterior? Resposta: o termo n-ésimo da sequência é $(\frac{3}{4})^n A$. Isso implica que a área verde decresce para 0 quando n aumenta.

4.2 Montando o Caleidociclo

Geralmente para a montagem do caleidociclo se construe uma cadeia dos tetraedros e se encaixam as abas para fechar o caleidociclo como mostrado na Figura 22. Com o decorrer das oficinas que ofertamos no Museu consideramos que os alunos apresentam maior facilidade para a montagem da maneira que mostramos a continuação:

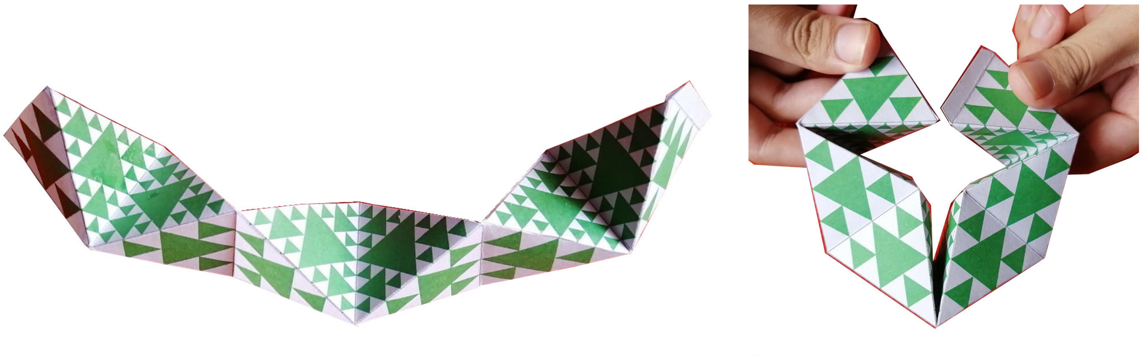


Figura 22: Montagem comum do Caleidociclo

- Recorte o molde e faça dobras por todos os segmentos de linhas marcando assim os triângulos que serão as faces dos tetraedros como mostrado na Figura 23.

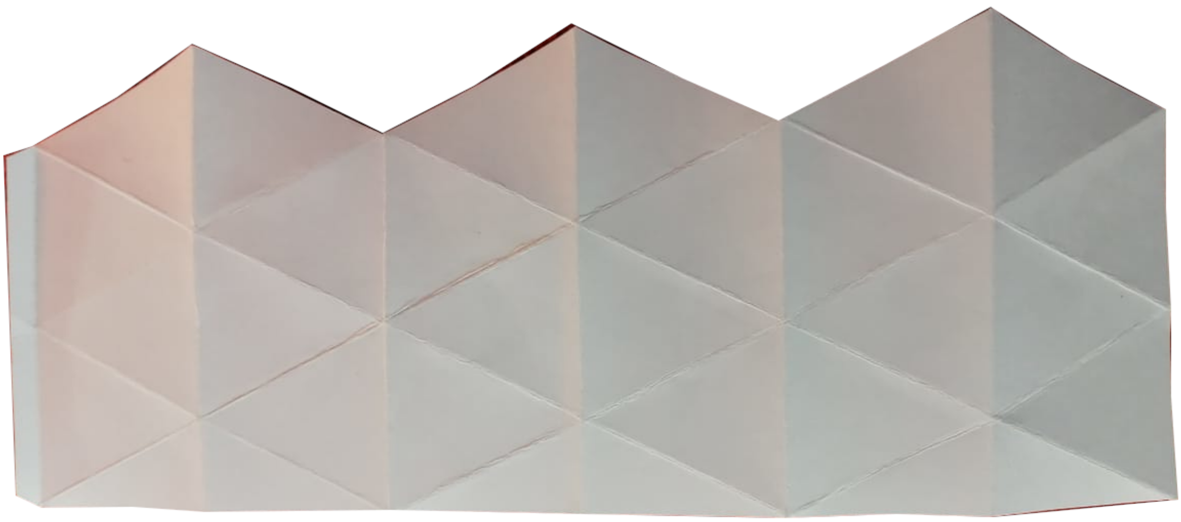


Figura 23: Dobras no molde

- Cole as abas laterias do molde formando uma especie de "coroa".
- Dobre as partes brancas da "coroa" e a partir dessa dobragem vamos "enroscar" até obter o caleidociclo como mostrado como mostrado na Figura 24. Finalmente cole as três abas fechando assim o caleidociclo.

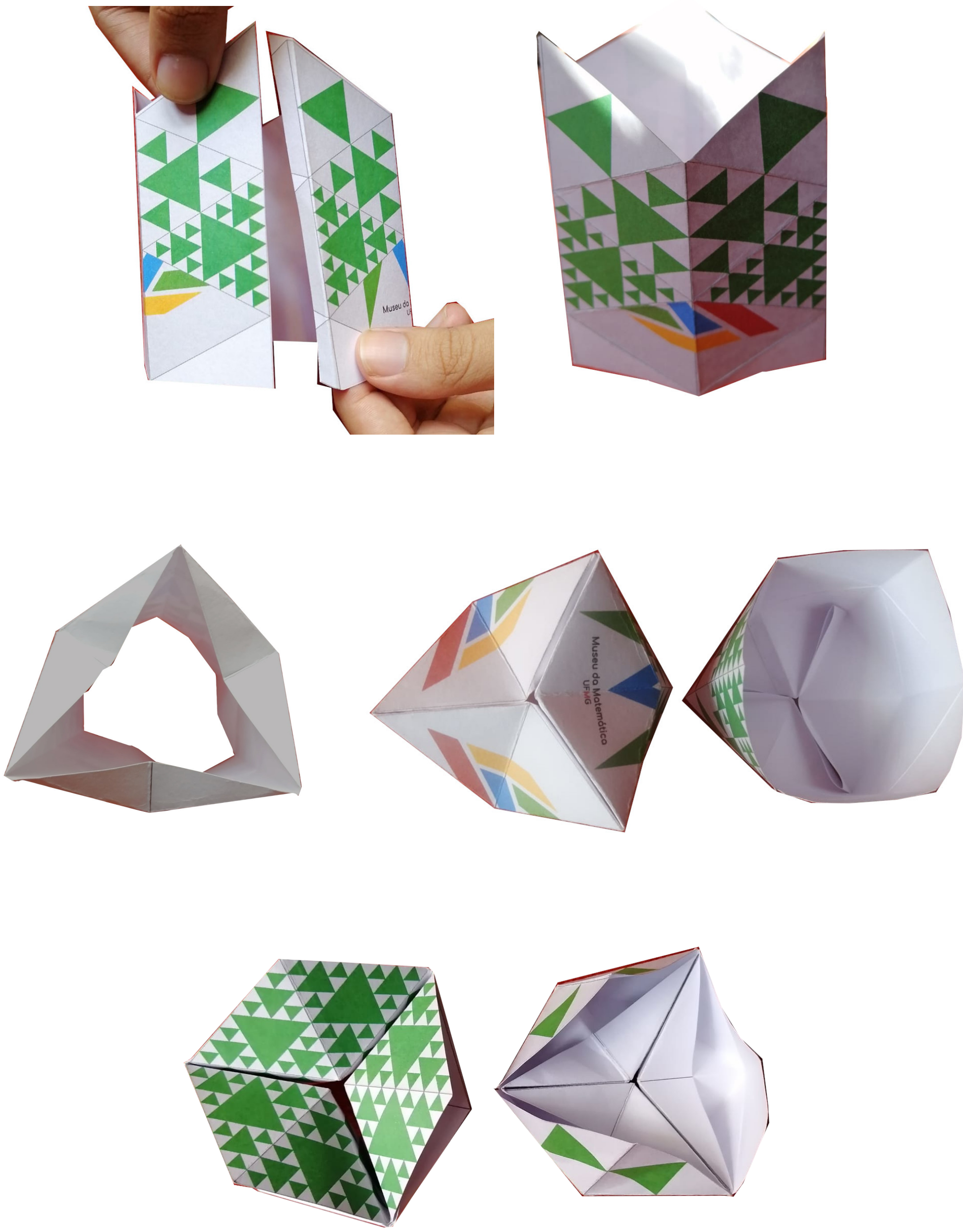


Figura 24: Montagem do Caleidociclo

Anexo A

Do Quadrado à Cruz de Sam Loyd

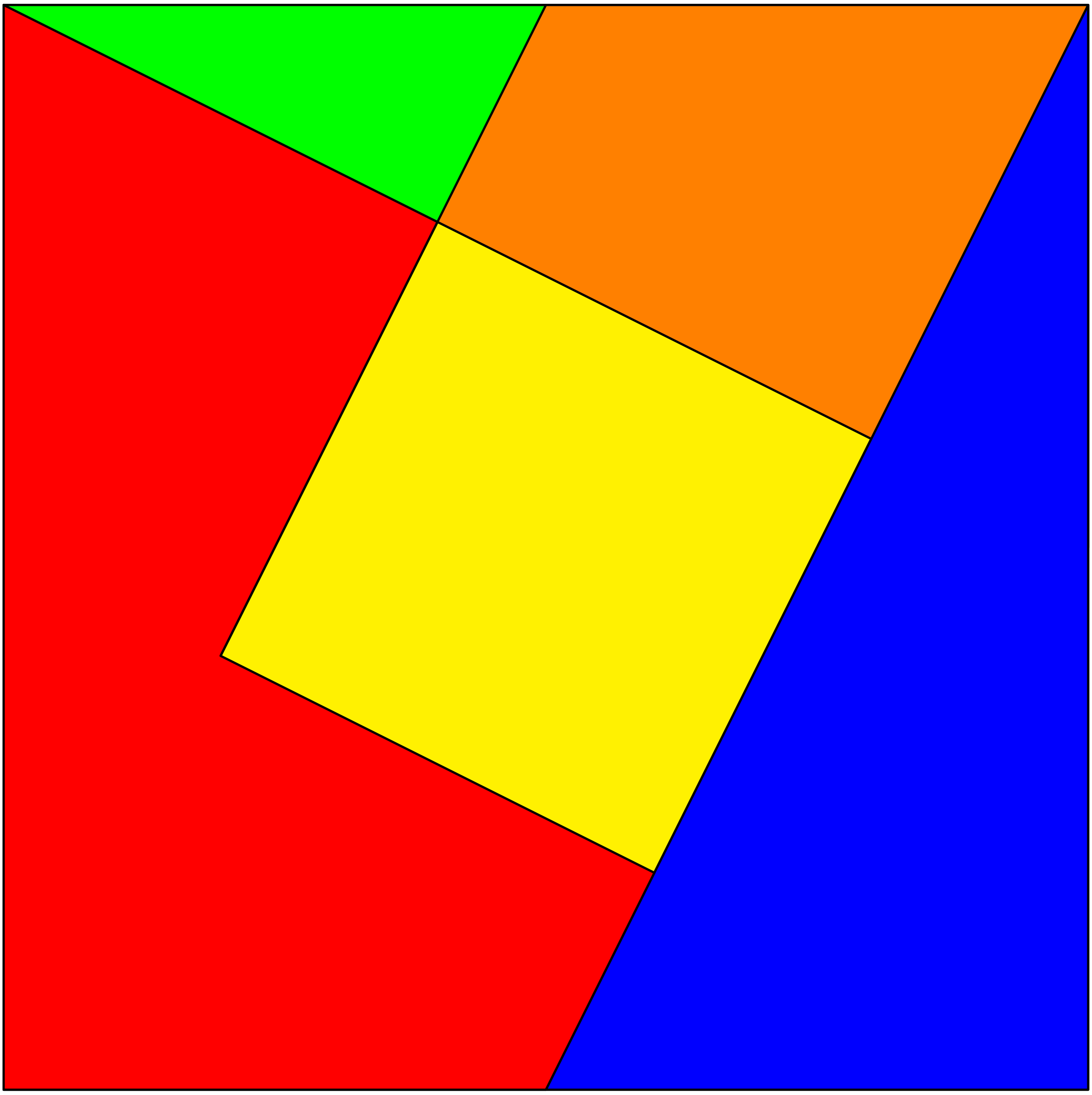


Figura 25: Do Quadrado à Cruz de Sam Loyd

Anexo B

Quadrado Duplo

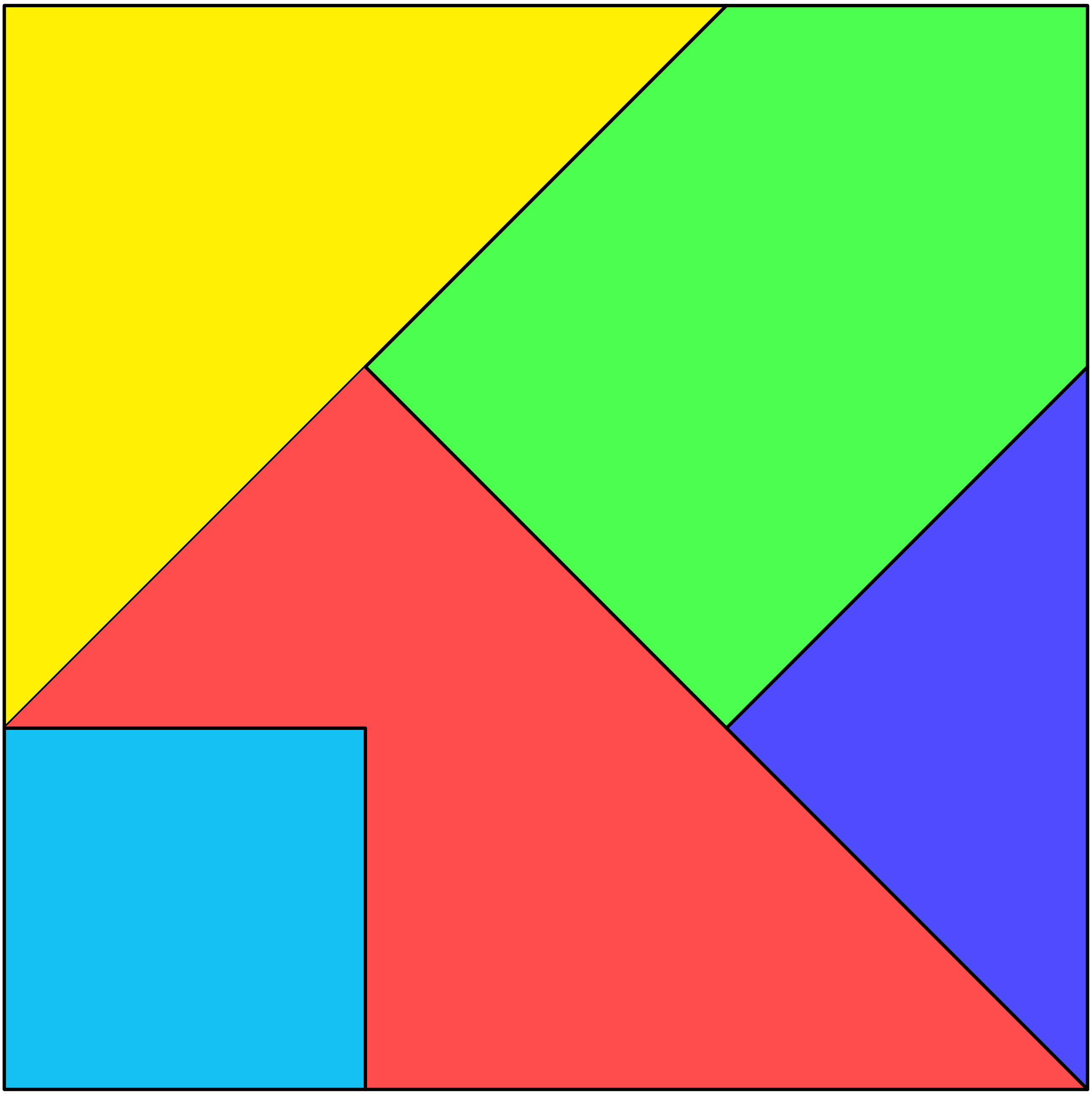


Figura 26: Quadrado Duplo

Anexo C

Cúpula de Leonardo da Vinci

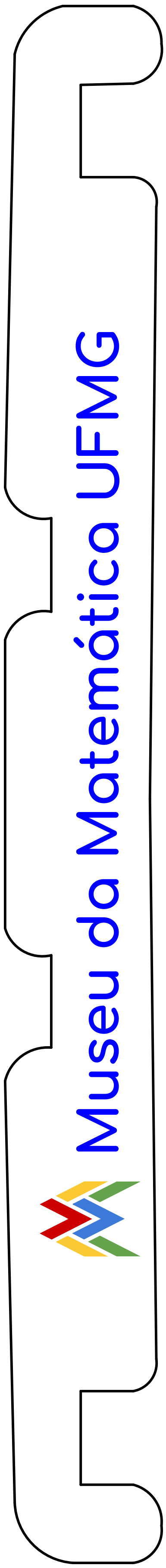


Figura 27: Cúpula de Leonardo da Vinci

Anexo D

Caleidociclo - Triângulo de Sierpinski

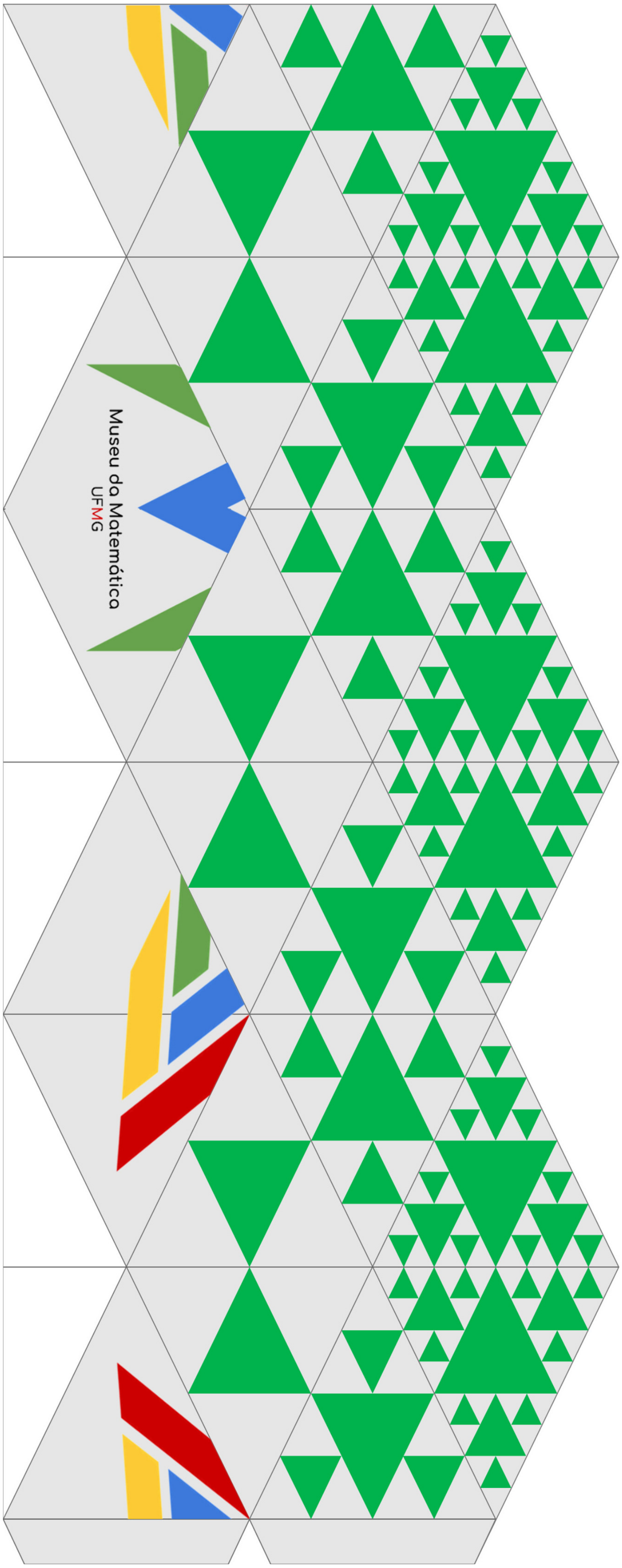


Figura 28: Caleidociclo - Triângulo de Sierpinski

Anexo E

Polígonos de encaixe sólidos Platônicos

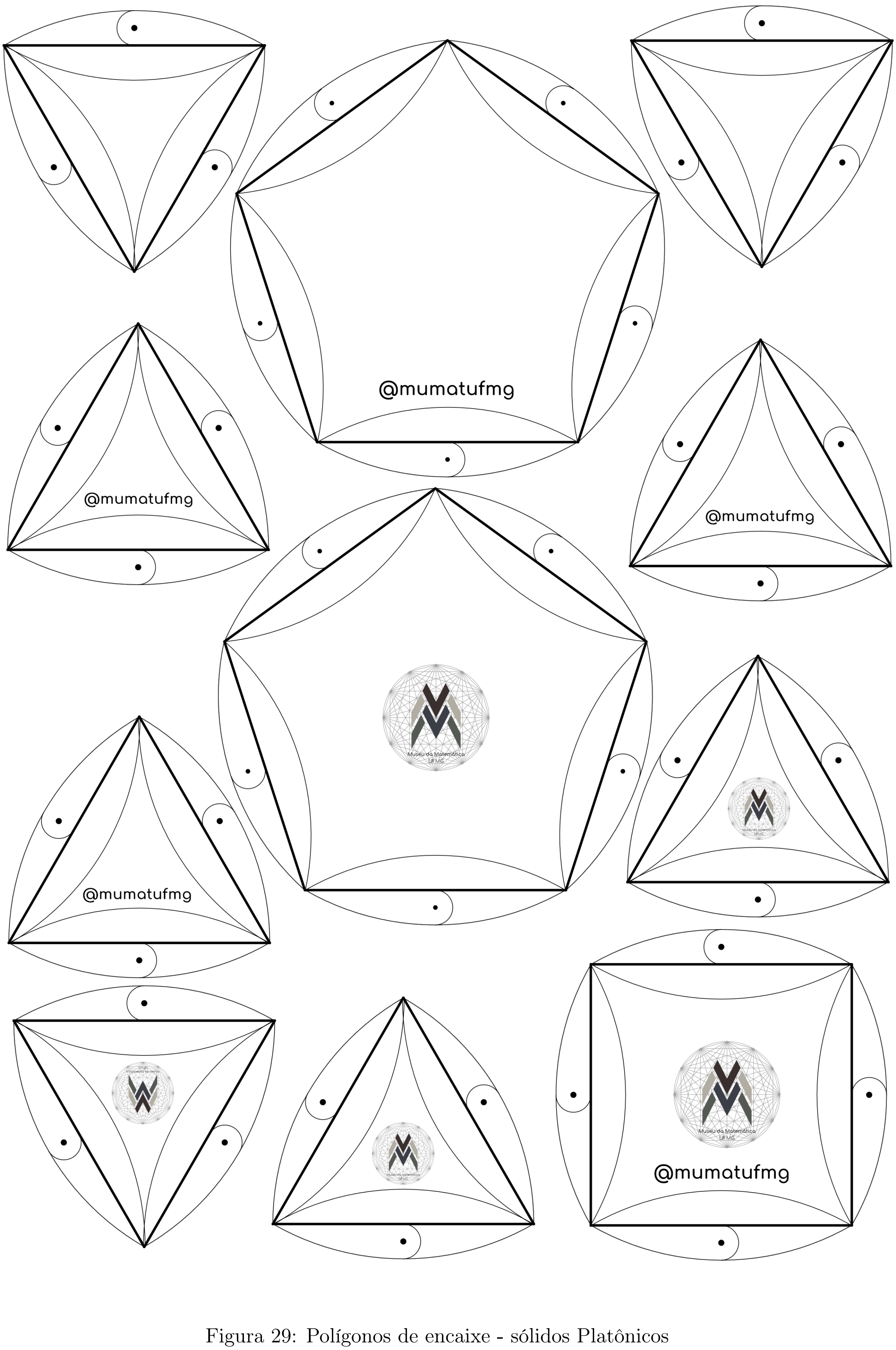


Figura 29: Polígonos de encaixe - sólidos Platônicos

Referências Bibliográficas

[1] BROCHERO, F.; GIRALDO, C. *Manual de Atividades I - Museu da Matemática UFMG.* http://www.mat.ufmg.br/museu/wp-content/uploads/2019/08/ManualEBook.pdf, 2019.

[2] BROCHERO, F.; GIRALDO, C. *Manual de Atividades II - Museu da Matemática UFMG.* https://www.mat.ufmg.br/museu/wp-content/uploads/2020/05/Cartilha2pagina.pdf

[3] FREDERICKSON, G. *Dissections: Plane & Fancy.* Cambridge University Press, 1997.

[4] GARDNER, M. *Divertimentos Matemáticos.* Ibrasa, 1967.

[5] GRANDO, R. *O conhecimento matemático e o uso de jogos em sala de aula.* Campinas: UNICAMP, 2000. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal de Campinas, Campinas, 2000.

[6] SILVA, R. A *Caleidociclos*, Dissertação Profmat, USP - São Carlos, 2017.

[7] SCHATTSCHNEIDER, D.; WALKER, W. *M. C. Escher Kaleidocycles*, Taschen, 1987.

Índice Remissivo

5º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Realização e Organização

ANPMat Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica 10 ANOS

Distribuição

Editora ANPMat

ISBN: 978-65-88013-28-1

9 786588 013281