6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

CADERNOS AUTOCORRETIVOS: FRAÇÕES e suas possibilidades de uso em sala de aula

Marcelo Firer

Laura Santos Afonso Ferreira

Beatriz Rittner Coelho

ANPMat

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

CADERNOS AUTOCORRETIVOS: FRAÇÕES e suas possibilidades de uso em sala de aula

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

CADERNOS AUTOCORRETIVOS: FRAÇÕES e suas possibilidades de uso em sala de aula

Marcelo Firer

Laura Santos Afonso Ferreira

Beatriz Rittner Coelho

1ª edição

2025

Rio de Janeiro

ANPMat

Cadernos Autocorretivos: Frações e suas possibilidades de uso em sala de aula

Projeto gráfico: Gabriel Brasil Nepomuceno

Produção editorial: Editora Pi
www.editorapi.com.br | contato@editorapi.com.br | +55 21 97748-7208

Distribuição: Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
www.anpmat.org.br | editoraanpmat@anpmat.org.br

ISBN: 978-65-88013-29-8

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Firer, Marcelo
Cadernos autocorretivos [livro eletrônico] : frações e suas possibilidades de uso em sala de aula / Marcelo Firer, Laura Santos Afonso Ferreira, Beatriz Rittner Coelho. -- Rio de Janeiro : ANPMat, 2025. -- (6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática)
PDF

Bibliografia.
ISBN 978-65-88013-29-8

1. Frações - Estudo e ensino 2. Matemática - Estudo e ensino 3. Professores de matemática - Formação I. Ferreira, Laura Santos Afonso. II. Coelho, Beatriz Rittner. III. Título. IV. Série.

25-255230 CDD-370.71

Índices para catálogo sistemático:

1. Professores de matemática : Formação : Educação 370.71

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415

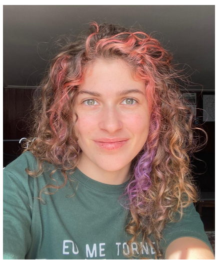
Sobre os autores

Marcelo Firer
mfirer@ime.unicamp.br

Marcelo Firer, doutor em matemática pela Hebrew University of Jerusalem, é professor do Imecc - Unicamp desde 1999. Além da pesquisa em matemática, tem se dedicado à formação de professores de matemática na educação básica e alguma pesquisa na área.

Laura é graduanda em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Atua como professora de matemática na Educação Popular desde 2023. Durante a graduação, se envolveu em diversas atividades relacionadas à educação matemática, tendo sido vice-presidente em uma empresa júnior do ramo e atuado na organização de eventos voltados para a licenciatura. Foi bolsista da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Fapesp), desenvolvendo um projeto na área de ensino e aprendizagem de frações. Grande parte do conteúdo deste e-book é fruto dos aprendizados e das experiências que este projeto proporcionou.

Laura Santos Afonso Ferreira
l177477@dac.unicamp.br



Beatriz Rittner Coelho
b232043@dac.unicamp.br

Beatriz é graduanda em Licenciatura em Matemática no Imecc - Unicamp. Atua como professora de matemática no Ensino Médio e Ensino Fundamental Anos Finais desde 2022. Participou do PIBID e PICME focados no ensino de matemática e tem se aprofundado no treinamento para olimpíadas do conhecimento.

Dedicamos este *e-book* aos alunos da Escola Curumim e à equipe do Programa de Residência Pedagógica que desenvolveu a primeira versão dos *Cadernos Autocorretivos: Frações*.

Sumário

Lista de Figuras

Prefácio

Os *Cadernos Autocorretivos: Frações* (CAFs) são uma coleção de oito pequenos cadernos de atividades a serem desenvolvidas de modo relativamente autônomo por alunos e alunas da Educação Básica. Os CAFs foram desenvolvidos por uma equipe de estudantes da Unicamp e experimentado em sala de aula. A primeira experiência em sala evidenciou a necessidade de complementar as atividades dos alunos com intervenções sistemáticas por parte da professora e do professor[1].

Estas intervenções foram sistematizadas através de uma coleção de slides que pautavam as conversas com a turma, em sala de aula.

Neste texto apresentamos os *Cadernos Autocorretivos: Frações*, as propostas estruturadas de intervenção e discutimos resumidamente o impacto que esta intervenção em sala de aula teve na prevalência de *misconceptions* sobre frações e no desenvolvimento de conhecimento conceitual sobre o tema.

Aprofundando o que era almejado com a oficina aplicada no 6° Simpósio da Formação do Professor de Matemática, esperamos que, a partir do conteúdo deste e-book, o professor seja estimulado e esteja suficientemente apto a utilizar os CAFs em sala de aula e a encarar de modo sensível e crítico as sequências de intervenções propostas pelos autores, que devem ser vistas como um ponto de partida para as opções didáticas dos docentes.

São Paulo, julho de 2023.

Marcelo Firer
Laura Santos Afonso Ferreira
Beatriz Rittner Coelho

[1] Ao longo do texto, usaremos professores ou professoras indistintamente. Quando nos referimos a docente específico, acrescentamos a inicial de seu nome: professora L. (Laura S. A. Ferreira) ou professor D. (Daniel Castro).

Agradecimentos

Agradecemos às instituições que viabilizaram a elaboração deste material: à Capes pelo financiamento no Programa Residência Pedagógica; e à Fapesp (processo 2022/01609-8) e ao CNPq (processo n° 118637/2021-5) pelos financiamentos dos projetos de iniciação científica envolvidos.

À EMEF Maria Pavanatti Fávaro, à Escola Curumim e à ONG Lar das Crianças da CIP, assim como aos professores Daniel Castro, Diego Sabino e Danilo Souza, por nos receberem em suas turmas e apoiarem o projeto em todos os momentos.

Agradecemos também a todos os envolvidos na elaboração e confecção dos *Cadernos Autocorretivos: Frações:* à equipe da Residência Pedagógica e outros colaboradores[2], e ao Estúdio FI.Ta e à Paula Gonçalves que trabalharam na diagramação.

Por fim, agradecemos ao Vitor Batista Rodrigues, estudante de pós-graduação do curso de Estatística da Unicamp, orientado pela professora Mariana Rodrigues Motta, por realizar a análise estatística que é apresentada em parte ao fim desse texto.

Marcelo Firer
Laura Santos Afonso Ferreira
Beatriz Rittner Coelho

[2] Douglas Silva Mariano, Geovana Matos de Albuquerque, João Marcelo Vieira Santa Maria, Karoline Mirella da Silva, Raphael Santa Terra de Carvalho, Vitor José Martinotti, Beatriz Rittner Coelho, Douglas Felipe Speck, Laura Santos Afonso Ferreira e Victória Pincinato Angeli foram todos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Unicamp que desenvolveram os *Cadernos Autocorretivos: Frações*. Uma parte significativa destes atua hoje como professor da educação básica. A coordenação e orientação foi feita por Marcelo Firer, professor do Imecc - Unicamp.

1

Introdução

Os *Cadernos Autocorretivos: Frações* (ou simplesmente CAFs) foram desenvolvidos inicialmente pelos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Unicamp, bolsistas do Programa Residência Pedagógica da Capes. Esse grupo teve a desafiadora missão de atuar junto a alunos dos 5°s e 6°s anos de uma escola pública EMEF Maria Pavanatti Fávaro - no ano de 2020, em plena pandemia de Covid-19.

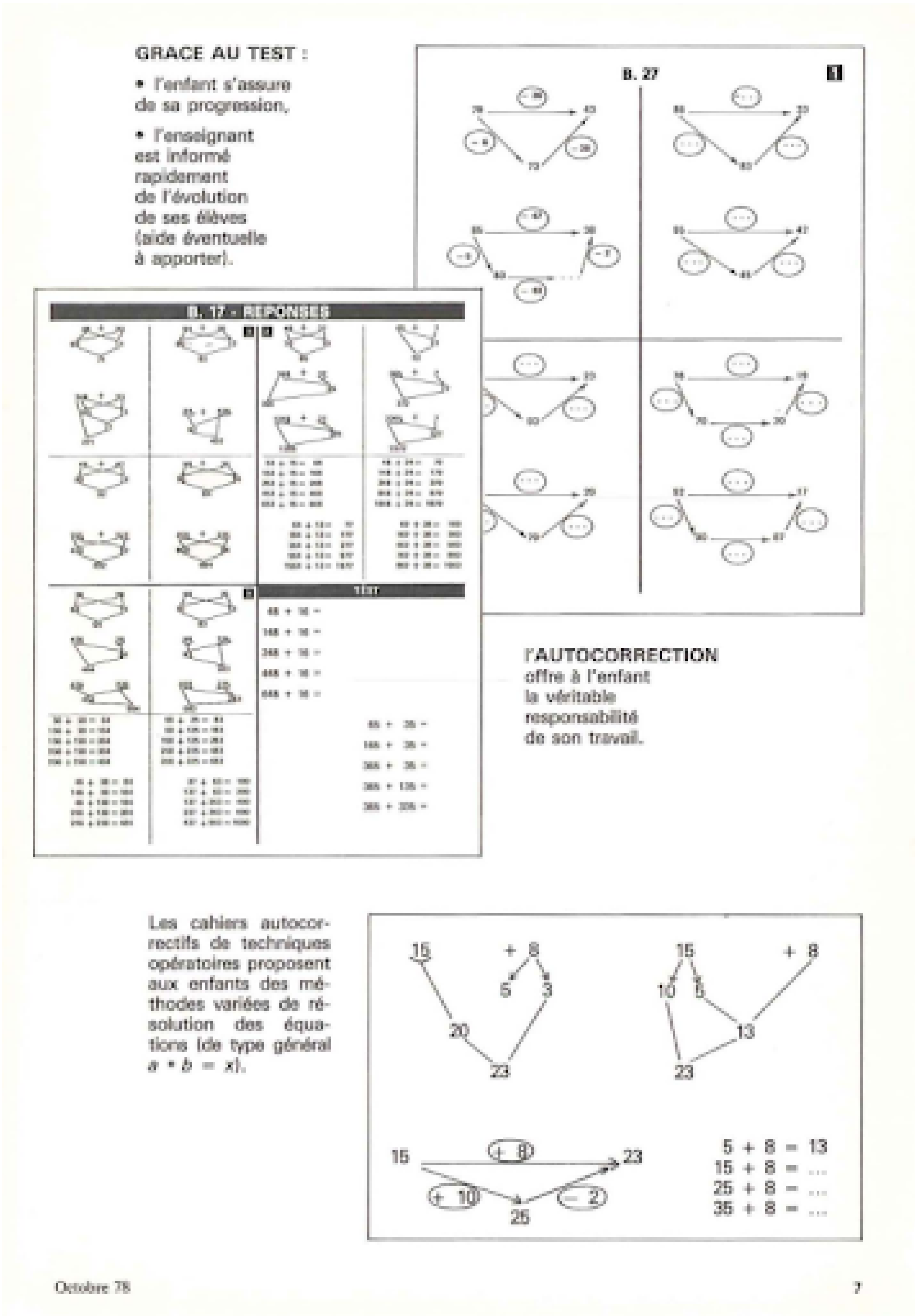
A motivação inicial foi desenvolver um material físico, para distribuir aos alunos, contendo um conjunto de atividades breves que os alunos pudessem fazer a cada *dia*. A proposta era resgatar o envolvimento dos alunos com um processo minimamente regular de atividades. Após um semestre trabalhando com atividades lúdicas e temáticas que apenas tangenciavam conteúdos, surgiu a iniciativa de realizar um trabalho mais sistemático, em torno do tema de frações. O tópico foi definido após consulta aos professores da escola, que confirmaram uma deficiência que é ampla e generalizada: a defasagem no que se refere à aprendizagem de frações chegou a ocupar manchetes de jornais (vide aqui matéria do jornal O Globo). Mais ainda, a compreensão e conhecimento de *frações*, além da importância intrínseca, é essencial para o desenvolvimento de conhecimentos posteriores, principalmente Álgebra, um senso comum retificado por pesquisa sólida:

> é um dos tópicos mais importantes que os alunos devem entender para serem bem sucedidos em álgebra e além, mesmo assim é uma área que os alunos dos EUA têm dificuldade. Os resultados do NAEP mostraram que os alunos têm pouco conhecimento sobre os conceitos de frações. (SOWDER; WEARNE, 2006; WEARNE; KOUBA, 2000; apud VAN DE WALLE).

O formato adotado, de cadernos autocorretivos, foi inspirado (ou mesmo copiado) dos *Cadernos Autocorretivos de Matemática*, versão brasileira dos Cahiers de Calcul da pedagogia Freinet (MONTHUBERT, 2002). É um conjunto de quatro grupos com quatro cadernos cada. Cada caderno tem oito sequências de atividades. Cada sequência de atividade tem quatro páginas e inicia-se com um exemplo, que deve ser seguido pelos alunos. Ao final da sequência (após três páginas com 12 atividades), os alunos podem corrigir suas atividades e fazer um pequeno teste, a ser acompanhado pela professora ou professor.

Desde o início de seu desenvolvimento, e em plena concordância com o proposto em Monthubert (1978), os CAFs foram vistos apenas como um material de uso individual, que permitia um trabalho dos alunos em ritmos adequados a cada um, mas que de modo algum configuraria um *"curso de frações"*. Ainda durante a pandemia, o trabalho dos alunos foi acompanhado por um encontro semanal (a distância, via plataforma Meet), coordenado pelos residentes.

Passada a pandemia, começa uma segunda etapa do projeto. Uma pequena equipe de estudantes da Unicamp deu continuidade ao projeto, revisando os cadernos existentes (1 a 6), elaborando os cadernos 7 e 8 (que tratam de operações com frações, em casos genéricos). Em seguida, como parte de um projeto de iniciação científica, o material foi utilizado de maneira mais sistemática com crianças, de maneira presencial. Este uso demandou desta pequena equipe uma sensibilidade pedagógica típica de professor e ao mesmo tempo, um olhar atento e inquiridor de pesquisador. O trabalho em sala de aula, feito por uma das autoras (Laura S. A. Ferreira, estudante do curso de licenciatura e bolsista da Fapesp), em um certo sentido complementa os cadernos em si. Se por um lado serviu para respaldar uma série de decisões feitas na elaboração dos cadernos (e corrigir uns tantos erros, aprimorar outras tantas situações), por



GRACE AU TEST :

• l'enfant s'assure de sa progression,

• l'enseignant est informé rapidement de l'évolution de ses élèves (aide éventuelle à apporter).

B. 27

B. 17 - REPONSES

TEST

l'AUTOCORRECTION offre à l'enfant la véritable responsabilité de son travail.

Les cahiers autocorrectifs de techniques opératoires proposent aux enfants des méthodes variées de résolution des équations (de type général $a * b = x$).

5 + 8 = 13
15 + 8 = ...
25 + 8 = ...
35 + 8 = ...

Octobre 78 — 7

Figura 1: Imagem dos *Cahiers* em texto de seu autor (MONTHUBERT, 1978) outro lado deu vida à parte que faltava: como utilizar esse material em uma turma, almejando uma aprendizagem sólida e significativa de frações.

Este pequeno texto está organizado do seguinte modo: no Capítulo 1 discutimos alguns poucos tópicos relacionados ao ensino de frações. O capítulo destaca alguns poucos pontos que são relevantes para entendermos os CAFs, sem ter a pretensão de ser uma apresentação sistemática sobre o tema. No Capítulo 2, explicamos a estrutura dos cadernos autocorretivos, os princípios norteadores dos cadernos de fração e damos um breve panorama sobre o conteúdo de cada um dos oito cadernos. No Capítulo 3, falamos sobre o uso pedagógico que foi feito dos cadernos, explicando a natureza das intervenções pedagógicas e os contextos em que foram trabalhados. Na sequência, Capítulo 4, apresentamos um relato comentado de diversas situações de sala de aula, vivenciadas pela autora Laura S. A. Ferreira[1]. Nestas situações, são discutidas com a classe questões que emergem dos CAFs e são sintetizados conceitos importantes. Estas discussões foram organizadas por meio de apresentações de slides em cima das quais a professora L. fazia anotações, os alunos faziam os seus comentários e por fim, chegava-se a uma síntese, um momento de conceituar a atividade. Relatamos neste capítulo seis destas sínteses.

No Capítulo 5 fazemos uma apresentação sucinta dos primeiros resultados de um projeto de iniciação científica financiado pela Fapesp, que tinha como objetivo principal verificar uma possível contribuição dos CAFs à superação de *misconceptions* (pré-concepções equivocadas) relacionadas a frações.

No Capítulo 6 tecemos algumas poucas *considerações finais*.

Por fim, como um *apêndice*, incluímos os guias de uso das seis sínteses que foram relatadas foram incluídos como um apêndice.

Observação: Todo o material -*Cadernos Autocorretivos: Frações* e slides de síntese - está disponível online, para uso de professores. Esperamos que este texto estimule e auxilie professores e professoras a utilizá-los com seus alunos.

1.1 Alguns pontos importantes sobre o ensino de frações

Frações é o tópico mais complexo da matemática elementar. Neste capítulo, discutimos alguns pontos que consideramos críticos para o ensino de frações, sem termos a pretensão de realizarmos uma abordagem sistemática. Nosso intento é apenas apontar alguns pontos por trás das inúmeras decisões tomadas no desenvolvimento dos CAFs e que permeiam as intervenções feitas em sala de aula.

1.1.1 Representação de frações

Existem diversas representações básicas de frações: área (18 de pizza), comprimento (14 de metro) e partes de um conjunto (12 da classe), razão e divisão, sendo que as três primeiras têm apelo visual. Para se apropriar do conceito de fração é necessário explorar os três modelos de modo consistente, eventualmente utilizando material concreto antes da representação gráfica. Existe, na literatura, uma discussão sobre a conveniência de se explorar exaustivamente cada um dos modelos antes de passar ao próximo (abordagem em blocos), ou de entrelaçar os modelos um ao outro, assunto explorado por Rau, Aleven e Rummel (2010), que constataram que explorar em blocos é mais efetivo, admitindo

[1] Fazemos referência a essa autora algumas vezes como "professora L", outras como "pesquisadora", a depender do contexto e para evitar repetições

algum entrelaçamento. Os CAFs adotam essa postura: as primeiras 16 sequências de atividades são dedicadas basicamente à exploração do conceito de fração simples (com numerador menor ou igual ao denominador) nessas representações, conforme podemos ver na Figura 2.

Sobre as representações em si, destacamos alguns pontos:

- A representação de área por meio de pizzas é a mais comum nos livros didáticos e isso se justifica pelo papel quase ubíquo das pizzas no universo de desejos: o alimento aparece em primeiro lugar em inúmeras listas de pratos mais populares do mundo. Não obstante, é importante variar os formatos (desde que tenham simetrias facilmente perceptíveis).

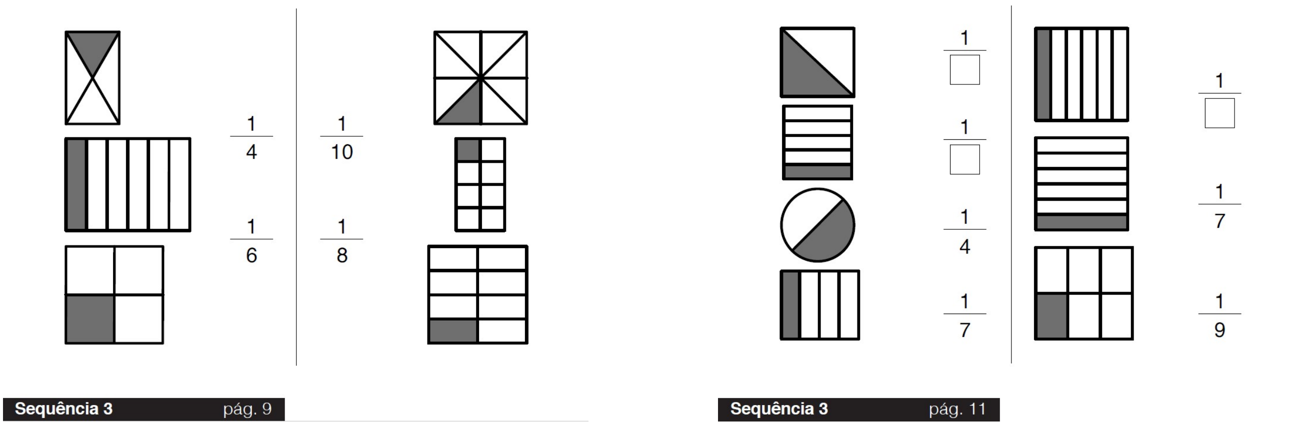


Figura 2: Circunferências, retângulos e triângulos, sempre com simetrias visíveis.

Fonte: Cadernos Autocorretivos: Frações (2021), Caderno 1.

- Destacamos a importância de se explorar as representações retangulares, que são particularmente adequadas para tratar o conceito de divisão de frações por inteiros, frações equivalentes e soma de frações, conforme ilustrado na Figura 3.

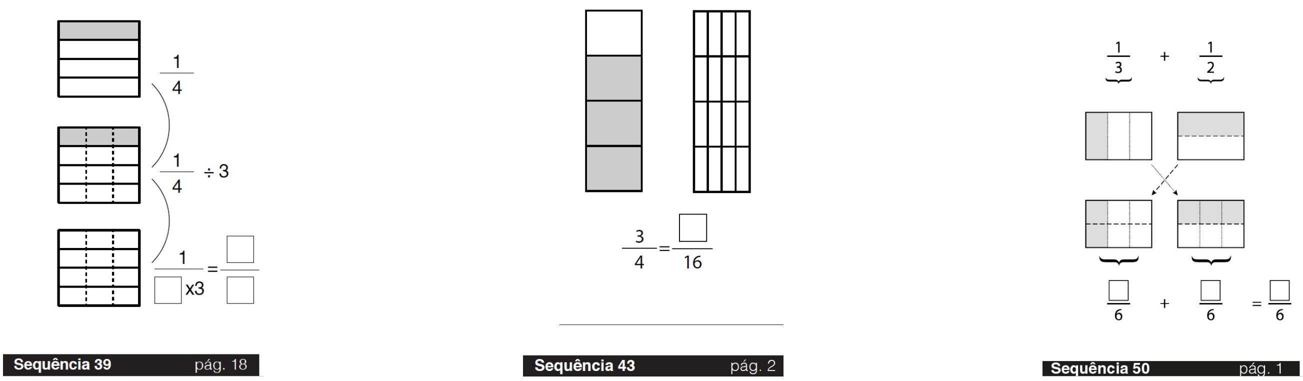


Figura 3: Divisão de fração por inteiro, frações equivalentes e soma de frações

Fonte: Cadernos Autocorretivos: Frações (2021), Cadernos $5, 6$ e 7.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

- Ao se perguntar, como faz Ma (2010), qual o significado de dividir $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$, a pergunta pertinente é "quantas vezes $\frac{1}{2}$ cabe $1\frac{3}{4}$?". O modelo de reta é intuitivo para explorar frações mistas e divisão de frações. Hung-Hsi Wu, da Universidade da Califórnia em Berkeley, defende a representação na reta como uma representação unificadora e escreveu notas de aula (em inglês) introduzindo e explorando frações apenas com essa representação (WU, 2014). Esta abordagem pode ser vista na Figura 4.

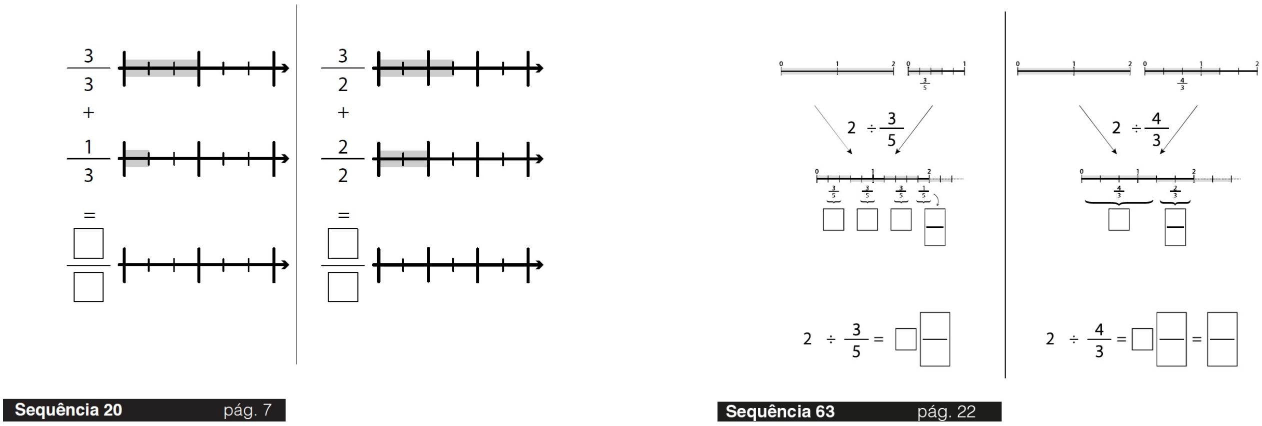


Figura 4: Frações mistas e divisão de frações

Fonte: Cadernos Autocorretivos: Frações (2021), Cadernos 3 e 8.

- Por fim, representar frações como divisão de um conjunto em partes iguais é crucial por envolver muitas situações problemas cotidianas e também porque, em alguma medida, a divisão em parcelas é percebida por crianças como uma questão de justiça (ENGELMANN; TOMASELLO, 2019).

1.1.2 Definição de frações

Em muitos livros didáticos, não encontramos uma definição propriamente dita de frações, apenas sua representação como pedaços de pizza. Isto é claramente insuficiente para desenvolver o conteúdo mais avançado de frações e também para aprofundar alguns conceitos que serão explorados em outras circunstâncias, matemáticas ou não. Esses conceitos são introduzidos de modo sistemático pela primeira vez no contexto do ensino de frações, como é o caso de relações de equivalência. A definição formal aceita no ensino superior, de frações como pares ordenados de números naturais, se é poderosa para uma construção rigorosa dos números racionais, é inadequada se quisermos ensinar crianças.

Contrapondo-se ao modelo das pizzas (nos Estados Unidos por vezes substituído pelas tortas de maçã), Wu (2014) introduz uma definição formal particionando um intervalo $[a, b]$ da reta em segmentos de mesmo comprimento. Wu defende enfaticamente esta definição, quando contraposta à representação como pizza:

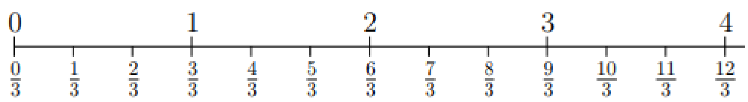


Figura 5: Divisão em terços.

> Esta definição de fração, comparada com a definição habitual de pedaço de uma torta, é de fato mais simples: substituímos uma torta redonda por um segmento (o segmento unitário), e qualquer aluno dirá que é muito mais fácil dividir um segmento em 5 partes de igual comprimento do que dividir uma circunferência em 5 partes congruentes. É também muito mais flexível, no sentido em que especificando a unidade 1 como sendo uma maçã, $\frac{1}{3}$ será um terço da maçã, e se designarmos a unidade 1 como sendo uma milha, 54 será 54 milhas. Finalmente, e isto é o mais importante, todas as frações, próprias ou impróprias, podem ser facilmente representadas na reta numérica, o que permite que todas as frações sejam tratadas da mesma forma. Pode especular-se, e isto é algo em que os pesquisadores podem trabalhar, que a razão pela qual a conceção de frações dos alunos se limita a frações próprias com numeradores e denominadores de um só dígito e denominadores de um só dígito é porque o modelo da torta obriga os professores e os livros didáticos a trabalhar dentro de uma única torta. É um juízo de valor matemático, que pode ser amplamente justificado, que uma concepção tão limitada das frações limita automaticamente a compreensão conceitual da matéria por parte dos alunos. A superioridade desta definição em todos os aspectos relacionados com o ensino das frações será demonstrada no resto deste artigo. ((WU, 2014), tradução dos autores).

Ron Aharoni, em seu Arithmetic For Parents (citamos a edição em inglês pois a tradução portuguesa está esgotada faz tempo) advoga por uma definição que é ao mesmo tempo rigorosa e adequada para o ensino: "Uma fração é a combinação da divisão e da multiplicação, nesta ordem" ((AHARONI, 2015), tradução dos autores).

De fato, esta definição é explorada nos CAFs ao tratarmos, por exemplo, de produto e divisão de frações e é crucial, como nota Wu (2014), para que os alunos possam fazer entender o significado de fazer o produto $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$: se tivermos $\frac{2}{5}$ de litro de algum líquido, repartimos esta quantidade em quatro partes iguais (divisão por 4) e pegamos três destas partes (multiplicação por 3).

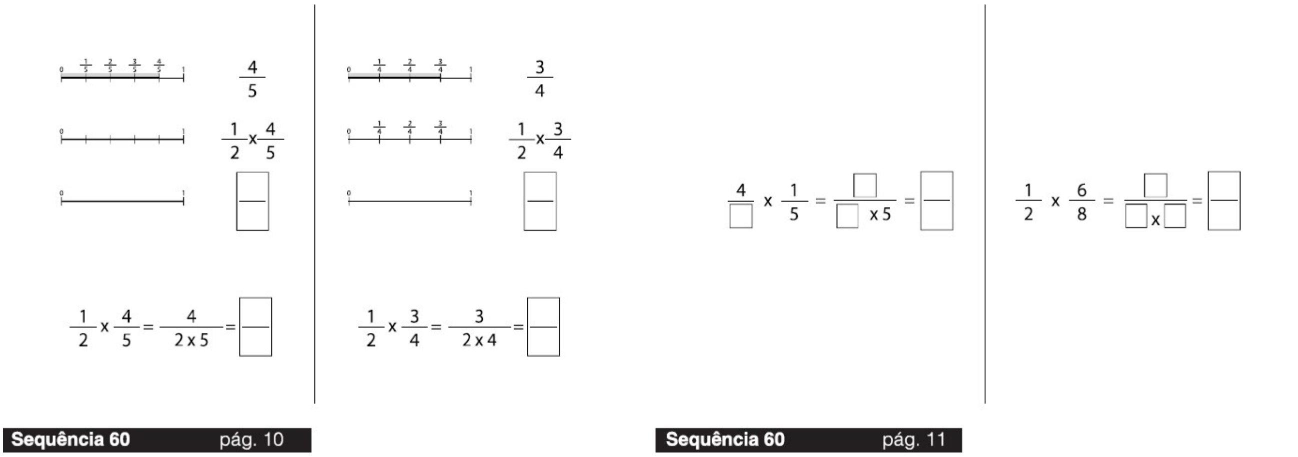


Figura 6: Produto de frações

Fonte: Cadernos Autocorretivos: Frações (2021), Caderno 8.

1.1.3 Operação com frações

Somar e subtrair frações com o mesmo denominador é um conceito bastante simples, em última instância se reduz a uma simples contagem: do mesmo modo que 2 bananas mais 3 bananas somam 5 bananas, 2 sétimos mais 3 sétimos somam 5 sétimos, ou seja, simplesmente somamos (ou contamos) os numeradores, que representam as quantidades de sétimos. O mesmo raciocínio se aplica à subtração de frações, que demanda a mesma restrição da diferença de números naturais, o minuendo deve ser maior ou igual ao subtraendo:

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5},\quad \frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{6}{7}\quad \text{e}\quad \frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5},\quad \frac{6}{7}-\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$$

A soma de frações com denominadores distintos costuma desafiar e confundir as crianças, com a introdução do *m.m.c*, o *mínimo múltiplo comum* entre os denominadores. A introdução do m.m.c é problemática por diversos motivos. O primeiro deles é que costuma ser feito junto com um algoritmo obscuro, uma verdadeira caixa preta ininteligível para os alunos [2]. Mais ainda, isto é totalmente desnecessário e mascara a verdadeira natureza do somar frações.

Somar frações com denominadores distintos é similar à ideia de somar objetos de natureza distinta. Se juntarmos 3 laranjas e 5 limões, o que temos? Em princípio, apenas 3 laranjas e 5 limões (ou se preferirmos, 5 limões e 3 laranjas), ao menos que consigamos um denominador comum para laranjas e limões, como por exemplo, frutas. Ou seja, podemos afirmar que

$$3 \text{ laranjas } + 5 \text{ limões } = 8 \text{ frutas.}$$

Poderíamos, eventualmente, ter escolhido um denominador mais restrito e dizer que temos 8 frutas cítricas, mas 8 frutas é uma resposta absolutamente precisa. Raciocínio semelhante se passa com frações: se quisermos somar sextos e quartos, precisamos encontrar um denominador comum. Por exemplo, se quisermos somar $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$, podemos considerar como denominador comum o produto $24 = 4\times 6$, obtendo que

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1\times 6}{4\times 6}+\frac{1\times 4}{6\times 4}=\frac{10}{24}$$

Observe que o mínimo múltiplo comum de 4 e 6 é 12, e efetuando o algoritmo com o m.m.c. obteríamos

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$$

As duas frações obtidas, $\frac{10}{24}$ e $\frac{5}{12}$ não são iguais, mas são equivalentes. Introduzir o m.m.c dificulta a compreensão, torna o processo em si mais intrincado e, no final das contas, nos faz perder a oportunidade de discutir o conceito de *equivalência de frações* de modo mais amplo e natural.

No que se refere ao produto de frações, a abordagem nos CAFs segue, grosso modo, a definição adotada por Aharoni (2015): a divisão de uma fração por um inteiro, seguida da multiplicação por outro inteiro. Começamos, na realidade, multiplicando uma fração por um inteiro $\left(3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\right)$, apenas

[2] Uma apresentação e discussão inteligível deste tópico passa pela fatoração de inteiros em fatores primos (o Teorema Fundamental da Aritmética), algo importante e interessante per si, mas que costuma ser abordado apenas bem mais adiante nos currículos escolares.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

como uma soma repetida. Depois uma fração de um inteiro $\left(\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}\right)$ para então partirmos, já no último caderno, para a divisão seguida de multiplicação:

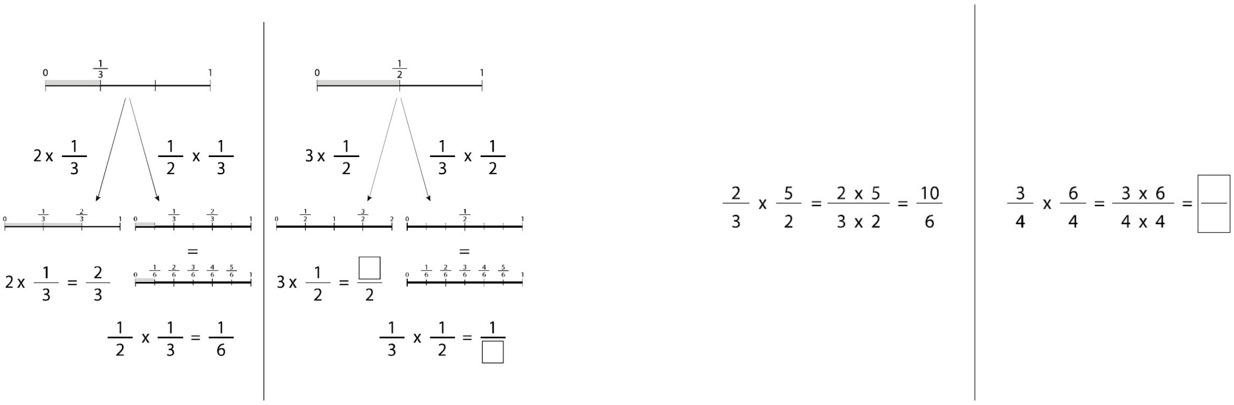


Figura 7: Divisão por um inteiro (à esquerda), seguida por um produto (à direita)

Fonte: Cadernos Autocorretivos: Frações (2021), Caderno 8.

1.1.4 Equivalência de frações

Equivalência de frações é um conceito que merece ser trabalhado com muita atenção.

O conceito abstrato de equivalência é um conceito de primeira grandeza na matemática. Uma relação entre objetos é dita uma *relação de equivalência* se for *reflexiva* (X é equivalente a X), *simétrica* (se X é equivalente a Y então Y é equivalente a X) e *transitiva* (se X é equivalente a Y e Y é equivalente a Z, então X e Z são equivalentes). A relação de *"ter o mesmo pai e a mesma mãe"*, vulgo ser irmãos, é uma relação de equivalência (admitindo então que sou irmão de mim mesmo). A relação de ser primo é simétrica, mas não é nem transitiva nem reflexiva; *ser descendente de* é transitiva, mas claramente não é reflexiva.

Se tudo isso parece muito abstrato (como de fato é), há muitas outras relações de equivalência que os alunos aprenderão em sua vida escolar, começando por congruência e semelhança de triângulos e figuras geométricas em geral, equivalência de sistemas de equações, etc. Trabalhar o conceito de equivalência de frações é importante também por preparar o terreno para todas estas instâncias vindouras.

Não obstante, a equivalência de frações permite responder a dois desafios: a soma de frações com denominadores distintos (quando buscamos frações equivalentes com o mesmo denominador, podendo então apenas *somar* os numeradores) e a comparação de frações (quando buscamos frações equivalentes com o mesmo denominador, podendo então apenas *comparar* os numeradores). Observe que, nos CAFs, esse conceito é construído de modo paulatino. No CAF 4, trabalhamos com equivalência entre frações em que o denominador de uma é múltiplo da outra e comparamos frações que tenham o mesmo denominador ou o mesmo numerador ou alguma característica marcante (ser maior ou menor que um inteiro, por exemplo).

O CAF 6 é todo devotado a trabalhar equivalência de frações (considerando múltiplos comuns), expansão e redução de frações. Nas primeiras sequências de atividades, a representação geométrica é explorada para visualizar a expansão de frações e, ao longo do caderno, é paulatinamente construído

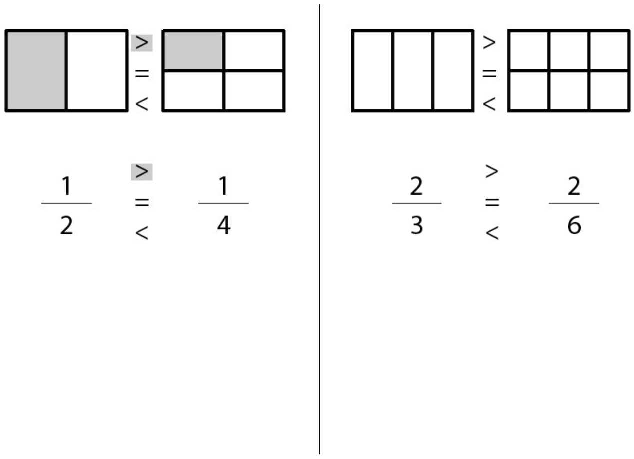


Figura 8: Comparação de frações quando o denominador de uma é múltiplo da outra.

Fonte: Cadernos Autocorretivos: Frações (2021), Caderno 4.

o algoritmo para a obtenção de frações equivalentes com denominador múltiplo dos denominadores iniciais. Observe que em nenhum momento aparece o m.m.c.!

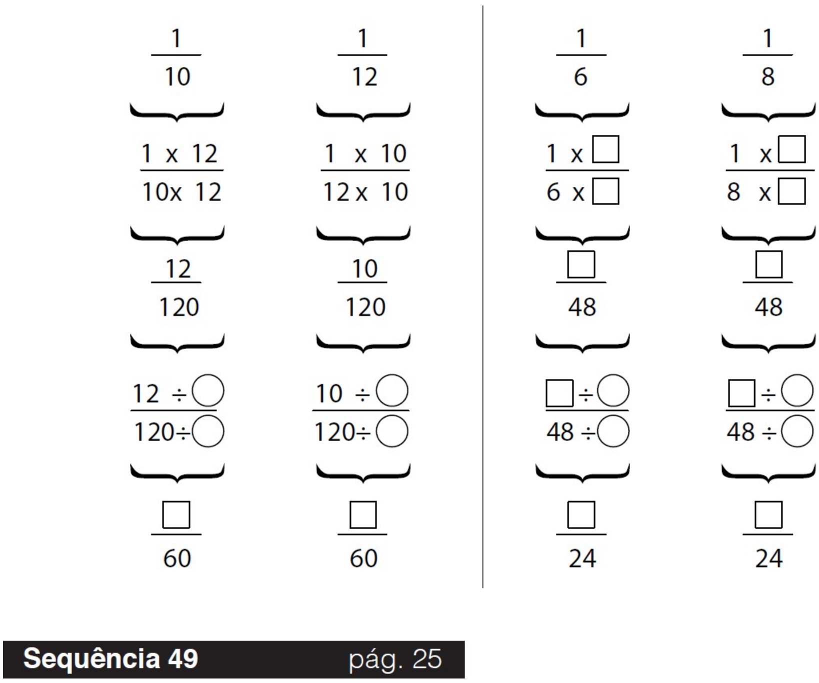


Figura 9: Frações equivalentes com denominador comum.

Fonte: Cadernos Autocorretivos: Frações (2021), Caderno 6.

1.1.5 Atalhos verbais

Temos, por fim, uma observação que está mais relacionada ao uso pedagógico que foi feito dos CAFs do que com os cadernos em si: os atalhos verbais.

Conforme veremos no Capítulo 4 (Relato de Intervenções), na gravação das conversas feitas na sala de aula, ouvimos com alguma frequência frases como *"multiplica em cima e embaixo"* que, por vezes, convive com o vocabulário formal e consagrado de numerador e denominador. A frase imperativa, indicando como proceder para multiplicar frações, tem um papel similar a muitos cacoetes mnemônicos utilizados no ensino de matemática, como por exemplo as expressões "vai um" e "empresta um" utilizadas nos anos iniciais (ao invés dos termos técnicos de agrupar e decompor) e também os inúmeros macetes adotados nos cursinhos preparatórios para exames. Todos eles têm uma característica em comum, que em geral são perniciosas para uma aprendizagem significativa de matemática: traduzir em comandos (algoritmos) ações que devem ser feitas para se atingir um objetivo, ocultando os princípios fundamentais que constroem e tornam inteligíveis esses pequenos algoritmos. Se esses comandos podem ser efetivos a curto prazo, a médio prazo acabam tornando a matemática mecânica e a longo prazo são totalmente inúteis: passada a prova, são logo esquecidos. Em resumo, trocam-se alguns poucos princípios fundamentais bastante básicos e compreensíveis por uma enorme quantidade de regras sem qualquer sentido.

Feito todo este discurso contra o vocabulário imperativo-operacional, resta uma pergunta: por que então ouvimos esse vocabulário utilizado em uma sala de aula que pretende desenvolver o conteúdo de frações de modo inteligível? A resposta é muito simples: esses termos acabam sendo atalhos verbais, que tornam a conversa matemática mais ágil e fluída. Não há problema em utilizar o *"vai um"*, desde que isso seja feito depois de os alunos compreenderem o que está ocorrendo de fato (um reagrupamento de grandezas). Em resumo, use, mas não abuse dos atalhos verbais!

1.1.6 Para saber mais

Se o leitor chegou a este ponto sentindo que sabe pouco sobre frações e desejando saber mais, isso significa que o capítulo cumpriu com seu propósito: dar às pessoas apenas uma visão do quanto este tema elementar da matemática é rico e complexo. Para quem está interessado em estudar de modo mais profundo este tema fascinante, sugerimos alguns textos, com características bastante distintas:

- O livro *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (VAN DE WALLE, 1990)[3] é uma obra monumental sobre o ensino dos conteúdos matemáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental (grosso modo até o 6º ano dos programas brasileiros). Incluindo mais de 1300 referências bibliográficas, os capítulos 15 e 16 tratam do ensino de frações. Traz o estado da arte da pesquisa sobre o ensino de frações, elenca de maneira clara e destacada as principais dificuldades e sugere atividades pertinentes para sala de aula.

- Os livros *Arithmetic For Parents: A Book For Grown-ups About Children's* (AHARONI, 2015) e *Elementary School Mathematics For Parents And Teachers* (KUPFERMAN, 2017) foram escritos por pesquisadores de matemática de certo renome e ambos os textos fazem uma apresentação relativamente sistemática de aritmética (incluindo frações) para leigos - ou seja, não matemáticos e pessoas pouco afeitas ao formalismo das estruturas contemporâneas da matemática. São textos pedagogicamente sensíveis, que surgiram da experiência dos autores com ensino básico, Aharoni acompanhando algumas salas dos anos iniciais, Kupferman envolvido em cursos de formação continuada de professoras.

[3]Existe uma edição em português, "Matemática no Ensino Fundamental: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula" (VAN DE WALLE, 2009). Como esta edição está esgotada e é de difícil acesso, optamos pela edição em inglês.

- Hung-Hsi Wu é outro matemático profissional, que a partir de 1992 começou a se interessar por questões de ensino de matemática. Escreveu diversos textos sobre e para ensino de frações, pensados como textos para professores. O texto *Fractions, Decimals, and Rational Numbers* (WU, 2014) faz uma exposição interessante, matematicamente coerente e muito bem escrita sobre frações, trabalhando essencialmente com a representação na reta real. Este texto pode ser complementado por *Teaching Fractions According to the Common Core Standards* (WU, 2011), que localiza o conteúdo no currículo comum norte-americano. Ambos os textos estão disponíveis na página do autor (<https://math.berkeley.edu/~wu/>), onde também é possível encontrar uma série de 5 vídeos curtos de aulas sobre o tema. Todo o material está em inglês, mas atualmente arquivos em formato PDF podem ser traduzidos com qualidade bastante razoável por diversos softwares gratuitos, disponíveis na internet.

- O texto *As diferentes "personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de problemas* (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008) explora representações e instâncias de números racionais, sendo frações uma delas. É um texto saboroso, complementa as outras leituras.

- O*National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics*(NCETM) possui uma variedade de materiais para o ensino de matemática na Educação Básica, incluindo material sobre frações (NCETM, 2024). Dentre os materiais disponíveis, há uma coleção de slides para uso em sala de aula. Esses slides são destinados a fomentar discussões e conversas em sala de aula e são muito bem construídos e diagramados. Os slides são acompanhados de guias para o professor. Material de alto nível e de fácil apropriação e uso por parte do professor. (<https://www.ncetm.org.uk/teaching-for-mastery/mastery-materials/primary-mastery-professional-development/fractions/>)

2

Cadernos Autocorretivos: Frações

Os *Cadernos Autocorretivos: Frações* representam uma abordagem inspirada nos Cahiers de Calcul, desenvolvidos inicialmente por Monthubert (2002). Esses cadernos foram concebidos para integrar-se às escolas que adotam a pedagogia de Celestin Freinet, destacando-se pela ênfase na autonomia dos alunos, um princípio fundamental dessa abordagem pedagógica (KANAMARU, 2014).

Na versão original, os Cadernos Autocorretivos compõem um conjunto de 16 cadernos organizados em quatro conjuntos, cada um contendo oito sequências de atividades. Cada sequência inicia-se com um exemplo, seguido por atividades ao longo de três páginas, totalizando 12 exercícios. Na quarta página os alunos encontram as respostas das atividades para corrigirem sozinhos e um pequeno teste, que possibilita à professora acompanhar o desenvolvimento individual.

Sobre os objetivos desses cadernos, Monthubert destaca que não se resumem a levar as crianças a mecanizar algoritmos pré definidos, mas sim a compreender as relações entre números:

> "O nosso objetivo, através destes cadernos, não é levar as crianças a mecanizar um algoritmo que lhes foi imposto de antemão. É fazê-los sentir que existem relações entre números, que as diferentes composições numéricas obedecem a certas leis que são independentes das formas de representação (⋯). É por isso que sugerimos que as crianças façam sempre cálculos com os números, substituindo a mecânica pelo raciocínio."
>
> Tradução dos autores, adaptado de <www.icem-pedagogie-freinet.org/node/2990>.

Os Cadernos Autocorretivos: Frações (CAFs), desenvolvidos pela equipe da Residência Pedagógica da Matemática da Unicamp, seguem essa filosofia e compartilham dos mesmos objetivos. O processo de desenvolvimento dos CAFs teve como ponto de partida uma análise genética do conteúdo sobre frações, baseada principalmente em três textos: os livros dos matemáticos Aharoni (2015), Kupferman (2017), e do educador matemático Van De Walle (2009). Esses textos fornecem uma base sólida e consistente, abrangendo tanto uma visão matemática madura e sensível quanto, em Van De Walle (2009), uma visão panorâmica do estado da arte do que sabemos sobre ensino de frações.

Assim como nos Cadernos Autocorretivos originais, cada sequência de atividades nos CAFs é estruturada em quatro páginas, divididas em quatro quadrantes. Conforme pode ser visto Figura 10, a primeira página apresenta um exemplo no primeiro quadrante, que serve como referência para as atividades nas três páginas subsequentes. Na última página, cada um dos três primeiros quadrantes traz as respostas das atividades anteriores, enquanto o último é destinado a um teste, facilitando a avaliação por parte do professor.

A seguir, exploramos os princípios norteadores dos CAFs, evidenciando cada um deles com figuras extraídas dos cadernos:

1. **Multiplicidade de Representações:** Conforme recomendações encontradas em Van De Walle (2009), os CAFs exploram diversas representações de frações, incluindo abordagens geométricas, como a representação em formato de pizza e retangular, além de representações em reta real, conjuntos e a simbólica $\frac{a}{b}$. Como já mencionado, a abordagem intercalada dessas representações favorece o desenvolvimento da proficiência matemática (RAU; ALEVEN; RUMMEL, 2010).

2. **Apelo Visual:** Os CAFs exploram com muita ênfase as representações visuais de frações, o que é sugerido pela literatura profissional que deve gerar maior impacto em alunos de baixo rendimento (BARICHELLO, 2019).

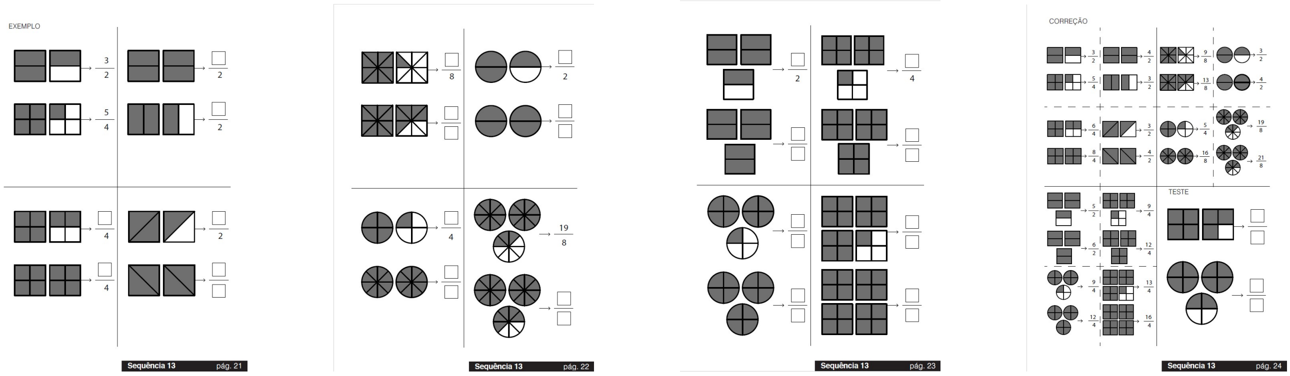


Figura 10: Exemplo de uma sequência do CAF 2.

Fonte: Cadernos Autocorretivos: Frações (2021), Caderno 2 (sequência 13, p. 21 – 24).

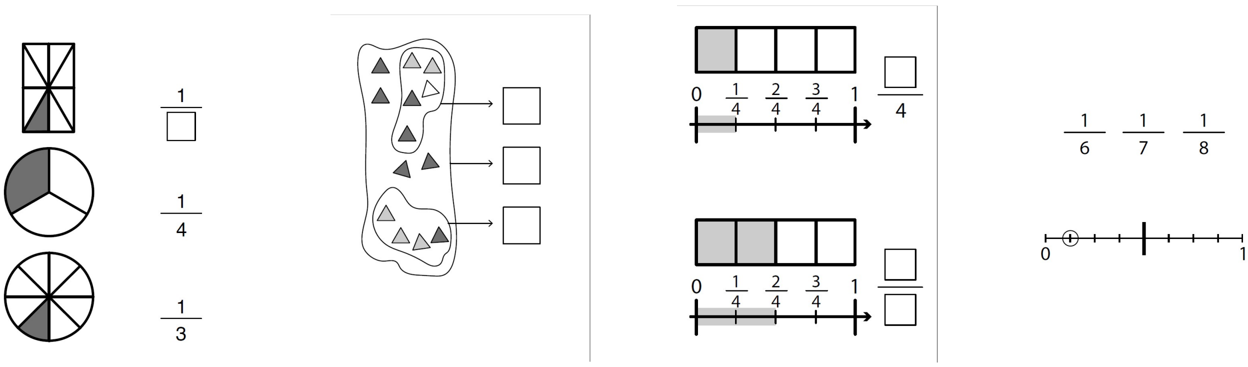


Figura 11: Representações de frações exploradas nos CAFs

Fonte: Cadernos Autocorretivos: Frações.

3. **Gradatividade:** as atividades são desenvolvidas em um crescimento de dificuldade muito sutil e delicado, uma granulação fina das dificuldades e desafios, permitindo que o aluno avance e tenha experiência de sucesso.

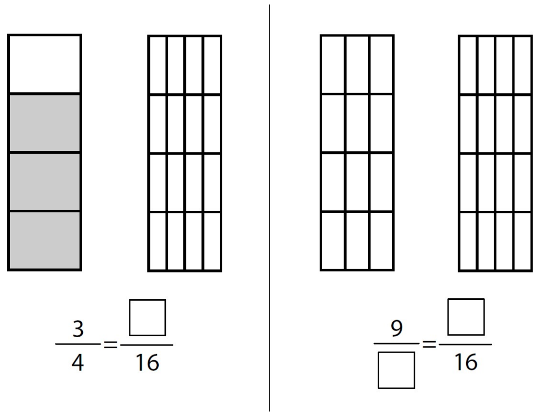


Figura 12: Gradatividade de dificuldade nos CAFs.

Fonte: Caderno Autocorretivo: Frações (2021), Caderno 6.

À esquerda, a atividade propõe que o aluno pinte a representação e preencha o numerador, contando retângulos. À direita, é dado um pequeno passo, pedindo que o aluno identifique o denominador da primeira fração e o numerador da segunda, pintando ambas as representações.

4. **Apresentação das Estruturas:** O foco dos CAFs é apresentar esquematicamente as estruturas de pensamento, concentrando-se nas estruturas racionais, em detrimento dos atos mecânicos/operacionais condensados nos algoritmos.

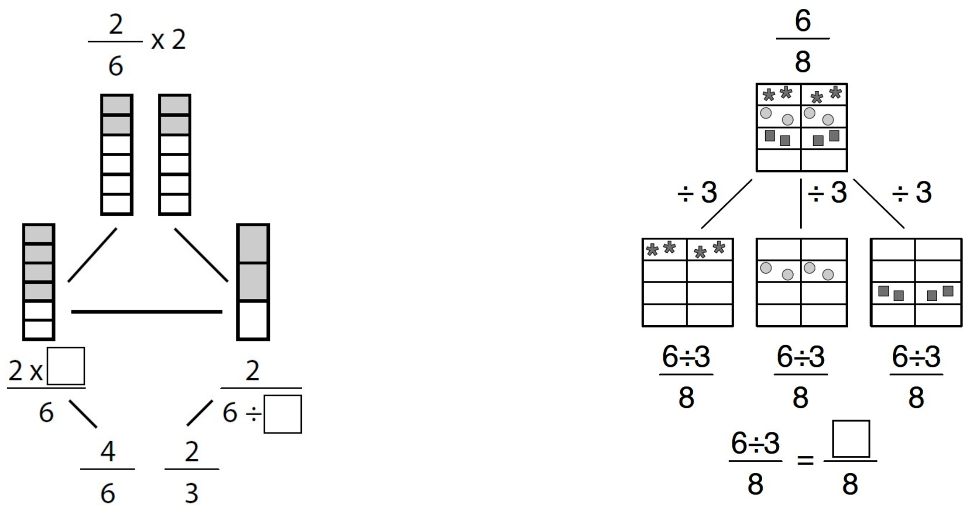


Figura 13: Apresentação de estruturas de pensamento nos CAFs.

Fonte: Cadernos Autocorretivos: Frações (2021), Caderno 5.

Estruturas de pensamento para multiplicação (como soma de parcelas iguais) e divisão (como equipartição) de uma fração por inteiro. Do lado esquerdo temos o produto $\frac{2}{6} \times 2$ e, do direito, o quociente $\frac{6}{8} \div 3$.

5. **Autocorreção:** Ao final de cada sequência, os alunos têm acesso às respostas das atividades, proporcionando uma oportunidade para esclarecer suas dúvidas e verificar se suas respostas estão corretas.

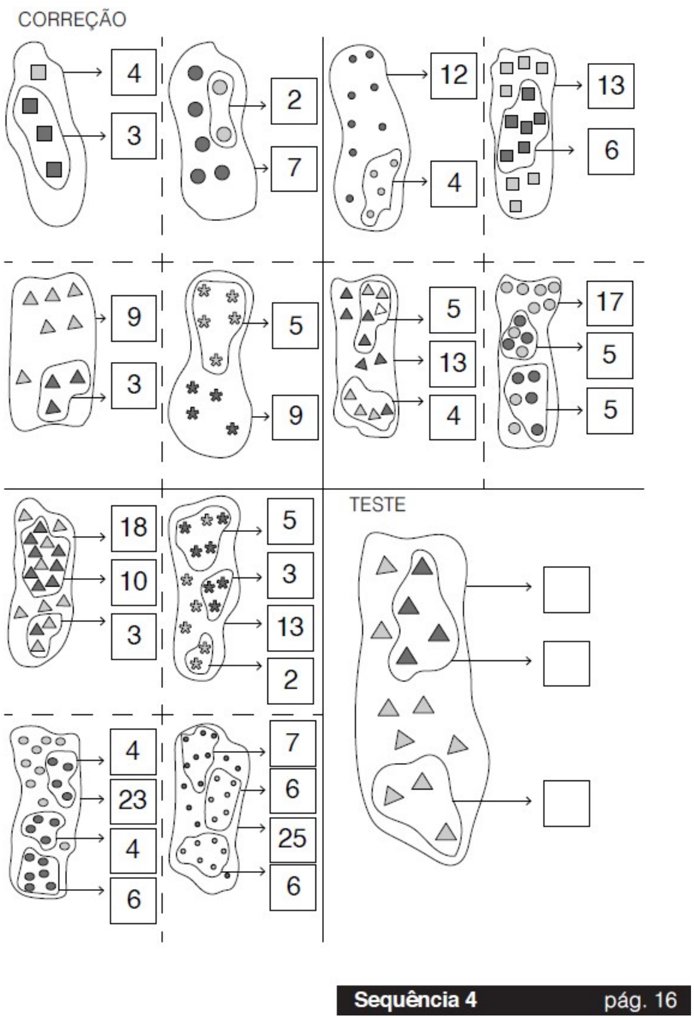


Figura 14: Modelo da página de autocorreção dos CAFs.

Fonte: Cadernos Autocorretivos: Frações (2021), Caderno 1.

Modelo da página de autocorreção dos CAFs. Modelo da página de autocorreção dos CAFs. O quadrante inferior direito é um teste, para que o professor possa acompanhar o desenvolvimento dos alunos.

6. **Abordar *Misconceptions* Comuns:** Os CAFs abordam situações das quais emergem e se manifestam as *misconceptions* mais prevalentes sobre o tema (VAN DE WALLE, 1990), buscando aderir a sugestões do autor para lidar com elas.

Apenas a título de exemplo, apresentamos aos alunos uma questão (do instrumento de avaliação de *misconceptions*) que pedia identificassem a fração representada pela parte cinza de algumas imagens. Na Figura 15 vemos as respostas de um aluno às mesmas questões, antes e após ter trabalhado com os CAFs.

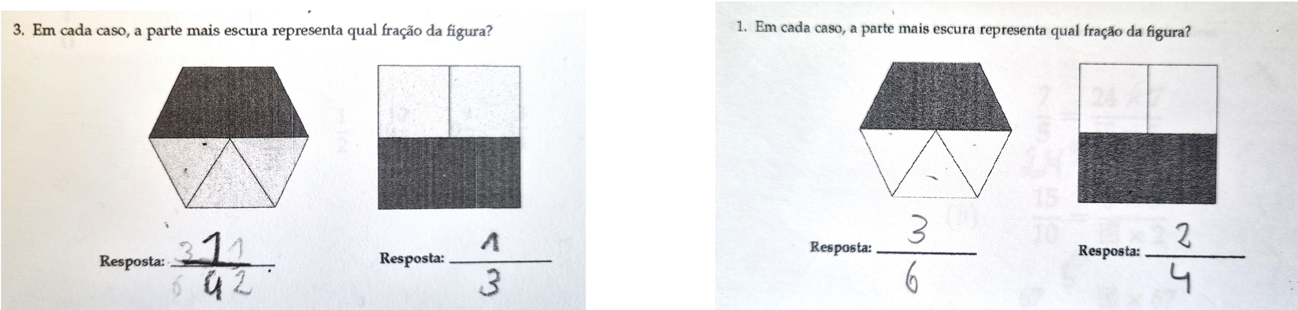


Figura 15: Resposta de aluno no pré e pós teste, respectivamente, em uma questão que aborda uma *misconception* sobre frações.

Cada caderno compreende aproximadamente oito sequências de atividades. Atualmente, há oito cadernos, totalizando cerca de 256 páginas de atividades. A seguir, apresentamos um breve resumo dos conteúdos de cada um dos oito cadernos:

- Caderno 1: Introdução do conceito de fração, uma parte do todo (fração com numerador igual a 1) e representação geométrica e de conjunto.

- Caderno 2: Representação na reta. Frações com numerador diferente de 1. Nomenclatura em português.

- Caderno 3: Soma e diferença de frações com mesmo denominador ou com denominadores que são múltiplos simples.

- Caderno 4: Frações mistas. Comparações de frações com mesmo denominador ou mesmo numerador. Estimativas de grandeza.

- Caderno 5: Produto e divisão de frações por números inteiros. Produto e divisão de inteiros por frações.

- Caderno 6: Frações equivalentes. Redução e expansão de frações. Denominador comum.

- Caderno 7: Soma e subtração de frações (caso genérico).

- Caderno 8: Produto e divisão de frações (caso genérico).

3

Uso pedagógico

Os CAFs foram efetivamente utilizados em sala de aula. Este uso foi feito, antes de tudo, para fim de desenvolvimento e aprimoramento do material. Isto ocorreu com uma quantidade pequena de turmas e alunos, mas o uso foi acompanhado com esmero. Neste capítulo, descrevemos a natureza e o contexto das intervenções pedagógicas realizadas.

3.1 Intervenções pedagógicas

Desde a concepção dos CAFs, durante o período de Residência Pedagógica, foi considerada a necessidade de intervenções da professora ao longo da jornada do aluno através dos cadernos. Isso no sentido de que os CAFs não pretendiam ensinar frações por si só, necessitando de mediação e intervenção docente no decorrer de seu uso. Após as experiências à distância feitas em 2021 pelos estudantes do programa Residência Pedagógica, em plena pandemia, os CAFs foram trabalhados de forma presencial com estudantes de duas instituições: uma escola particular de Campinas - referida apenas como Escola (em 2022 e 2023) - e uma ONG em São Paulo (apenas em 2022).

Buscando referências sobre a natureza de intervenções docentes em atividades relativamente longas e estruturadas, que podem ser desenvolvidas com certo grau de autonomia pelos alunos, encontramos - trabalho sobre sequência didática feito por Natanael de Freitas Cabral. Em seu livro Sequências Didáticas - Estrutura e Elaboração, Cabral (2017) apresenta um conjunto de intervenções didáticas que se destacam por sua abordagem objetiva, focada em ações concretas. Essas intervenções materializam o texto de uma sequência didática (SD), que é uma estrutura pedagógica que organiza as atividades de ensino de forma sequencial e articulada, com o objetivo de conduzir os alunos a alcançar objetivos de aprendizagem relativamente complexos (CABRAL, 2017).

No sentido exposto por Cabral, entendemos que os CAFs funcionam como intervenção exploratória, uma vez que estimulam o aluno a perceber regularidades e padrões a partir da execução de certos procedimentos, explorando estruturas de pensamentos e não algoritmos. Essa atividade exploratória é central no processo e pode ser feita de modo relativamente assíncrono e individual. O que chamamos de intervenções ao longo deste trabalho são situações em que a professora trabalha com toda a turma, muitas vezes de modo síncrono.

Assim, para além do trabalho individual dos alunos com as atividades dos cadernos, enxergamos 5 tipos de intervenções necessárias para abordar os conteúdos de frações utilizando os CAFs como material de apoio: Reflexão, Instrução Funcional, Intervenção de Síntese, Exercícios de Fixação e Situações Problema, que são explicadas a seguir.

Reflexão Inicial: elemento disparador, se materializa por meio de um questionamento, pode ser feita no início do uso de um CAF ou no início de uma síntese.

Instrução Funcional: visa esclarecer possíveis dúvidas que o aluno tenha em relação a funcionalidades do caderno, as quais podem tentar ser previstas antes do uso em sala. Essencialmente lida com questões do tipo: "o que eu preciso fazer aqui?".

Intervenção de Síntese (IS): momento para conceituar e sistematizar o que foi aprendido em um caderno, relembrando algumas atividades e as relacionando diretamente com o conceito tratado. Estamos olhando para essa intervenção como um processo, um momento dialógico; os próprios alunos desenvolvem a ideia do conceito que se pretende estudar, com sua linguagem; o professor conduz a discussão e formaliza o conceito ou ideia com os termos matemáticos necessários. Há momentos de síntese que se reduzem a pouquíssimas falas, mas há aqueles mais elaborados. De qualquer modo, a nosso ver, este é o momento mais complexo do ponto de vista pedagógico e, por isso, será explorado em detalhes no Capítulo 4.

Exercícios de Fixação: resolução de exercícios que envolvam diretamente os conceitos estudados, com o objetivo de compreender o significado do objeto e justificar e praticar o uso de propriedades e operações decorrentes.

Situações Problema: modelagem matemática de situações problema é parte importante das habilidades e dos conteúdos, demandando do aluno mobilizar suas noções conceituais e propriedades operacionais conhecidas em contextos diversos para resolvê-los.

Essas intervenções foram definidas a priori, mas o trabalho pedagógico desenvolvido na Escola mostrou, em nossa avaliação, que foi uma definição adequada e funcional.

Neste ponto, para finalizar esta seção, vamos discorrer um pouco sobre o modo como as Intervenções de Síntese eram organizadas. A partir de 2022, na *Escola*, essas intervenções foram realizadas com a classe como um todo, após finalizarem um caderno específico. Esses encontros, assistidos pelo professor D., responsável pela turma, mas coordenados pela pesquisadora-professora Laura (co-autora deste texto), duravam aproximadamente meia hora e eram conduzidos de forma dialógica, em muito inspirados no modo de condução de conversas matemáticas exposto em Humphreys e Parker (2019).

3.2 Contexto de uso

A primeira experiência de uso dos CAFs foi feita a distância, durante a pandemia de Covid-19 e, pelas circunstâncias, houve poucos elementos para avaliar seus méritos e seus problemas. Em 2022, foi feita uma segunda experiência de uso, no contexto de um projeto de iniciação científica. Essa experiência pretendia ser mais sistemática, buscando entender em que medida os CAFs contribuem para uma melhor compreensão conceitual de conteúdos relacionados a frações. Para isso, foi elaborado um instrumento diagnóstico com 14 questões sobre frações, a ser aplicado nas turmas antes e depois do uso da coleção de cadernos, como pré e pós-teste.

Os cadernos foram usados com um total de 87 alunos, em duas instituições:

1. Escola Curumim: escola particular em Campinas, em que os alunos já estão acostumados com a dinâmica de cadernos autocorretivos por utilizarem os cadernos de aritmética de Monthubert (2002). Turmas de sexto e sétimo anos. (*Escola*)

2. Lar das Crianças: ONG de São Paulo, em que as crianças ficam e estudam no contra turno. Turmas de sexto e sétimo anos. (*ONG*)

É importante destacar que a dinâmica de uso dos cadernos foi diferente em cada instituição. A dinâmica prevista para o trabalho com os CAFs consiste nas seguintes etapas:

1. Uso de um caderno

2. Mediação individual e discussão coletiva de uso
3. Correção por parte da professora
4. Revisão de erros por parte dos alunos
5. Intervenção de Síntese

Na *Escola*, o processo foi próximo do previsto, contudo não foi possível utilizar todos os cadernos e nem realizar todas as intervenções de forma sistemática. Na ONG, a dinâmica foi completamente diferente desta prevista para os CAFs, e está descrita na seção 3.2.1.

Isso levou a uma terceira experiência de uso, em 2023, que ocorreu na Escola. Esta pretendia ser mais rigorosa ao seguir a dinâmica prevista e sistematizar as Intervenções de Síntese, que em um primeiro momento ainda estavam pouco desenvolvidas.

Cada uma dessas experiências é descrita a seguir.

3.2.1 Experiências de uso em 2022

As atividades com os CAFs começaram em outubro, quando os alunos já tinham visto o conteúdo de frações com o professor. Na *Escola*, as atividades foram feitas com 4 turmas, duas de 6° ano e duas de 7° ano, totalizando 58 alunos. Os alunos trabalharam com os CAFs majoritariamente nos períodos das aulas, levando-os para terminar em casa quando necessário. Assim, foi possível sanar dúvidas de forma individual e também coletiva, no quadro, quando necessário. Além disso, a troca entre os próprios alunos, ao fazerem grupos para resolver os CAFs, foi muito rica e pareceu engajar mais os alunos na atividade.

Apesar da dinâmica ter sido próxima do imaginado nesta instituição, seguindo as etapas até a revisão com quase todos os cadernos, ainda houve limitações no processo. Consideramos que o uso dos CAFs foi parcial, pois nenhuma turma trabalhou com o conjunto completo dos cadernos ou conseguiu trabalhar em todas as etapas previstas para todos os cadernos.[1]

Estando ainda na fase de estruturação e revisão da metodologia, o que chamamos de Intervenção de Síntese foi feito de modo muito mais conciso e pouco exploratório. Foi essa experiência que evidenciou a necessidade de intervenções mais intencionais, valorizando a participação ativa dos alunos, na tentativa de promover diálogos sobre o tema de frações, também chamado de "conversas numéricas" (HUMPHREYS; PARKER, 2019). Isso será melhor explorado no Capítulo 4.

Na *ONG*, foram usados os primeiros 6 cadernos com três turmas, porém de uma forma totalmente diferente do que foi inicialmente imaginado para o trabalho com os CAFs. Não foi possível acompanhar todas as aulas em que os CAFs foram usados, tendo sido feitas apenas duas visitas. Na primeira, acompanhamos as aulas de matemática de duas das turmas durante o uso dos CAFs, e, na segunda, fizemos a aplicação do instrumento diagnóstico como pós-teste. Todas as turmas incluem alunos de 6° e 7° anos, sendo que uma tem a grande maioria de alunos do 6° ano e as outras duas contam com uma proporção mais equilibrada, sendo estes alunos de várias escolas diferentes.

Como as crianças que frequentam a *ONG* não são da mesma escola, além de cada turma ter alunos de anos diferentes, a coordenação e o professor de matemática decidiram tentar usar os CAFs como

[1] Os problemas enfrentados na aplicação muitas vezes derivaram do próprio calendário escolar, que foi afetado devido a eventos internos e externos, como a Copa do Mundo de 2022.

um instrumento de nivelamento, de apoio e de forma não sistemática. Para isso, eles imprimiram os cadernos e os separaram por sequência. Assim, ao invés de todos fazerem o mesmo caderno, na sequência proposta e ao mesmo tempo, o professor foi entregando as sequências conforme a necessidade que via no aluno.

Para identificar essas necessidades, além dos próprios CAFs e o que conhecia dos alunos, o professor diz ter utilizado inclusive um instrumento diagnóstico que foi feito a partir dos CAFs. Se o aluno começava a ter mais dificuldades, então ele entregava uma sequência mais inicial para este ou retomar algum conceito ou apenas recobrar a confiança. Além desta diferença significativa, também não houve momentos de síntese, uma vez que os alunos não estavam todos seguindo uma ordem específica dos cadernos.

Apesar de não usarem os CAFs de forma sistemática, o coordenador tinha um controle de quais sequências cada aluno já havia feito, para garantir que os alunos fizessem todas as sequências de todos os cadernos. O professor era novo na ONG e fez as aplicações sozinho. A primeira coisa que fez com os alunos ao entrar na instituição foi uma revisão geral de frações, com um material expositivo criado por ele e utilizando também material manipulativo, para depois iniciar o uso dos CAFs.

Essa dinâmica de uso é completamente diferente da pensada para o uso dos CAFs, mudando sua formatação inicial e fazendo um uso alternativo não planejado. Como estas mudanças metodológicas são bastante significativas, decidimos não utilizar esses dados na análise.

3.2.2 Experiência de uso em 2023

Em 2023, houve uma terceira experiência de uso dos CAFs, agora apenas na *Escola*. Como, em 2022, o uso dos CAFs foi parcial, pois nenhuma turma trabalhou com o conjunto completo dos cadernos ou conseguiu trabalhar com todas as etapas previstas em todos os cadernos, decidimos repetir o processo com as turmas de 6° ano de 2023, buscando adequar a dinâmica de uso. O uso dos CAFs se iniciou em maio, quando o professor D. estava começando o conteúdo de frações com os alunos.

É importante pontuar que, na BNCC (BRASIL, 2018), o conceito de fração aparece pela primeira vez no 4° ano do Ensino Fundamental, dando continuidade no 5° ano, mas só sendo aprofundado no 6° ano. Assim, no 6° ano, a ideia de fração não é completamente nova. Nessa escola, os alunos veem nos anos iniciais apenas representações de frações e algumas frações elementares, como múltiplos de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{10}$. Portanto, no 6° ano o conteúdo de frações se inicia revendo representações de frações. Foi nesse momento que as turmas começaram o CAF 1, após já ter uma explicação inicial do professor D. e terem feito alguns exercícios.

O trabalho com os CAFs foi desenvolvido de forma integrada ao do professor das turmas. Contudo, os CAFs foram preenchidos majoritariamente de forma assíncrona, como tarefa de casa, tendo a possibilidade de tirar dúvidas com a pesquisadora quando necessário nas aulas, mas raramente com um momento específico para isso. Apesar de não ser o cenário que enxergamos como ideal, a dinâmica funcionou bem e as Intervenções de Síntese (IS) ocorreram como planejado, com exceção da IS do CAF 8, que não foi realizada. Por se tratar de um projeto proposto por um terceiro, apoiado em todos os momentos, mas não guiado primordialmente pelo professor da turma, foi necessário se adequar à dinâmica do professor D. e da *Escola*, aproveitando as aberturas dadas sem sobrepor as necessidades do projeto às necessidades da turma e do docente.

Em 2023, o uso dos CAFs seguiu de maneira bastante próxima às etapas previstas:

1) Uso de um caderno;

2) Mediação individual e discussão coletiva de uso;

3) Correção por parte do professor;

4) Revisão de erros por parte dos alunos;

5) Intervenção de Síntese.

Ao entregar um caderno para os alunos (etapa 1), eles são instruídos a fazer as atividades se atentando para os exemplos de cada sequência e a conferir suas respostas no gabarito. Cada aluno deve fazer todas as atividades do seu caderno, mas pode conversar com os colegas e tentar resolver o caderno em conjunto e também pedir orientação à professora L. (etapa 2). Depois que o aluno terminava o caderno, ele o entregava para a pesquisadora, que corrigia o caderno (etapa 3), principalmente os testes, de modo que o aluno pudesse saber o que errou e pudesse consertar, sem que o caderno ficasse marcado definitivamente. Na *Escola*, os alunos estão acostumados ao professor D. colocando um "R" de "REVER" (a lápis) nas atividades que tenham algum erro, para que eles confiram o que estava errado e corrijam, então assim foi feito. O teste é corrigido com caneta. Depois, a pesquisadora devolvia o caderno ao aluno para que revisasse seus erros (etapa 4).

Sempre era dado um prazo para que os alunos entregassem cada CAF, mas muitas vezes alguns alunos não entregavam e acabavam ficando atrasados. Assim que a maioria tivesse corrigido os CAFs, era marcado o encontro de síntese (etapa 5). Esse processo para cada caderno durou, em média, duas semanas de aula, variando muito a depender das atividades da Escola. Foram usados de forma plena os 3 primeiros CAFs antes das férias de inverno, e os outros 5 depois das férias de inverno, terminando o uso no final de novembro.

No capítulo seguinte, detalhamos a dinâmica dos encontros de síntese, os slides elaborados para sustentar a discussão e três desses encontros de síntese são relatados de modo mais pormenorizado, reproduzindo em detalhes os diálogos com os alunos em seis momentos distintos.

4

Relato de intervenções

Ao fim do uso e correção de cada caderno, foram aplicadas Intervenções de Síntese (IS), que duraram em média 30 minutos. Para cada, foi desenvolvida pela pesquisadora uma sequência de slides que foram projetados no quadro branco, cada sequência abrangendo o conteúdo de um CAF[1]. A proposta era ter slides preparados, praticamente sem textos, que visavam estimular e sustentar uma conversa matemática em sala de aula. Dessa forma, foi possível interagir com as imagens e textos, escrevendo por cima das projeções. Por exemplo, muitas vezes foi apresentada alguma atividade do CAF em escala aumentada e pedido que algum aluno resolvesse no quadro, escrevendo no próprio slide.

Para o desenvolvimento dessas aulas, que têm características de aula expositiva, mas com caráter essencialmente dialógico, fomos inspirados pelo livro *Conversas Numéricas* (HUMPHREYS; PARKER, 2019). A *posteriori*, apenas recentemente, nos deparamos com uma iniciativa muito estruturada de slides preparados para sustentar conversas numéricas em sala de aula, o material desenvolvido pelo National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics [2].

No geral, os alunos demonstraram gostar bastante desse momento, interagindo com a professora-pesquisadora e se voluntariando para resolver atividades no quadro. Contudo, alunos em sua maioria mais tímidos ou que "não se consideram bons em matemática", a não ser que sejam convocados a participar, acabam interagindo pouco, ofuscados pelos que têm mais desenvoltura em matemática. Durante as intervenções, buscou-se incluir o máximo de alunos, chamando diferentes pessoas para escrever no quadro, com auxílio, e fazendo perguntas direcionadas.

Pensando nos produtivos diálogos que houve nesses momentos, destinamos este capítulo ao relato de algumas intervenções realizadas ao longo de 2023 na *Escola*. O intuito é oferecer ao leitor um pouco do sabor dessas aulas que são expositivas - baseadas nos slides já preparados - mas bastante dialógicas.

Foi esse ambiente de conversas matemáticas que buscamos recriar na oficina oferecida no 6° Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática. Nela, foi proposto que os participantes planejassem algumas intervenções didáticas, com foco na Intervenção de Síntese, de modo que pudessem conhecer os CAFs e vivenciar a riqueza pedagógica que há nesse processo. Buscamos evidenciar a intencionalidade nas escolhas das atividades usadas como disparadores para uma síntese e também incentivá-los a pensar em possíveis cenários de sala de aula. As situações a seguir buscam aprofundar e tornar palpável essa experiência.

Algumas pequenas observações sobre a apresentação das situações vivenciadas em sala de aula: *(i)* Reproduziremos pequenos diálogos com os alunos. Para distinguir os papéis, as falas da professora L. estão em negrito. *(ii)* As conversas com os alunos foram gravadas e transcritas. *(iii)* As intervenções feitas nos slides pelos alunos e pela professora foram reconstituídas a partir das anotações da pesquisadora. *(iv)* Onde houver dois, ou mais, alunos participando da conversa, iremos distingui-los pelas letras A, B, C e D.

4.1 Situação 1 - Frações com numerador maior que denominador (CAF 4)

Os slides usados nessa situação representam uma reflexão inicial para começar a falar sobre o tema do CAF 4. Os alunos tinham terminado de preencher e corrigir esse caderno, que aborda *números mistos*

[1] Todas as IS usadas no projeto estão disponíveis neste link.

[2] O material sobre frações para ser discutido em sala de aula está disponível neste link (acessado em fevereiro de 2024). Os direitos autorais deste material permitem tradução, adaptação e uso ilimitado.

na primeira metade e *comparação de frações* na segunda. A intenção aqui é que os alunos percebam que: (1) frações em que o numerador é maior que o denominador precisam de mais de um inteiro para serem representadas, ou seja, são maiores que 1; (2) frações em que o numerador é menor ou igual ao denominador precisam de apenas um inteiro para serem representadas, ou seja, são menores que 1.

Figura 16: Slides com reflexão inicial sobre números mistos.

Fonte: Slides da intervenção do CAF 4.

Os slides têm poucas palavras, eventuais subconjuntos ou agrupamentos são indicados com o uso de cores. O slide da esquerda apresenta a primeira questão; no da direita, a resposta à primeira pergunta vira ponto de partida para a seguinte.

Aqui, os alunos já tinham falado sobre a diferença entre os conjuntos de frações, dizendo que as da direita "são números mistos porque o numerador é maior do que o denominador". Dois alunos participaram da resolução, cada um fazendo a representação de uma das frações. O aluno que fez a representação de $\frac{2}{3}$ não costumava participar muito e apresentava dificuldade nos conteúdos. Assim, a pesquisadora o auxiliou no processo com perguntas norteadoras.

— Então eu dividi o número inteiro em quantas partes?

— Aluno A: Três.

— Então divide em três partes... [aluno divide]

— Certo? São três partes, quantas eu peguei?

— Aluno A: Duas. [aluno pinta duas partes]

— Aluno B: Ficou bem torto, mas tudo bem.

— Mas deu pra entender.

— Dois terços e cinco terços... **o que essas representações têm de diferente?**

— Vários alunos: Prá você representar cinco terços você precisa de mais de um quadradinho e, prá dois terços, não!

Em nossa avaliação, nessa situação, os alunos entenderam exatamente o que era desejado que fosse entendido por meio dos questionamentos e intervenções dessa síntese.

4.2 Situação 2 - Número misto (CAF 4)

Essa situação envolve os slides de síntese sobre números mistos, que aconteceu depois da situação anterior e ainda de uma atividade do CAF 4 utilizando a representação na régua, ou se preferirmos, a reta numérica, explorada sistematicamente em (WU, 2014).

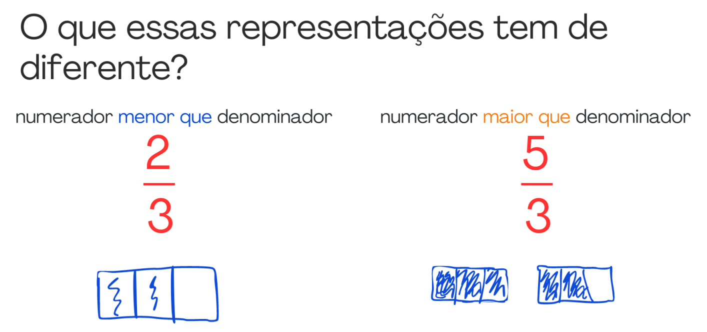


Figura 17: Reconstrução do quadro após resolução dos alunos

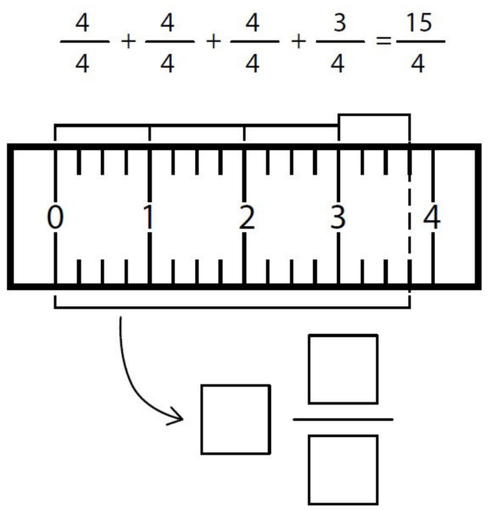


Figura 18: Atividade do CAF 4 usada como disparador da síntese desejada.

Fonte: Cadernos Autocorretivos: Frações (2021), Caderno 4.

Na atividade apresentada na Figura 18 utiliza-se da representação de frações maiores que 1 na régua para fazer a relação com a forma mista. Essa figura deixa clara a identificação da parte inteira e da parte fracionária, relacionando a forma mista com a forma "imprópria", e portanto, os alunos devem conseguir escrever $\frac{7}{2}$ como um número misto.

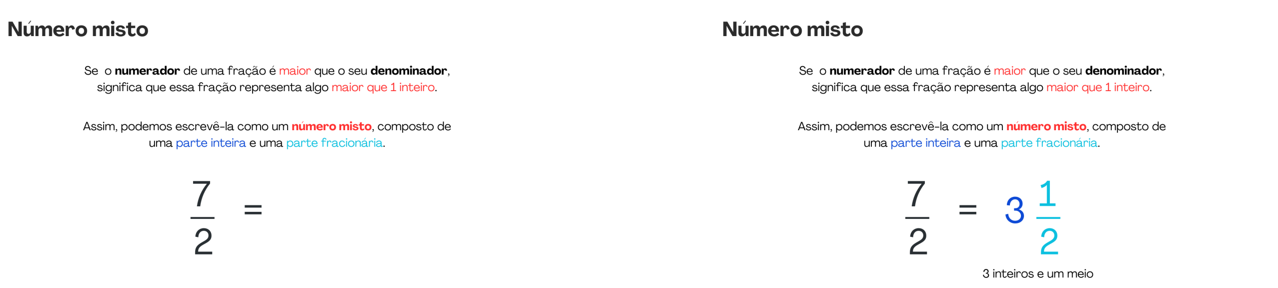


Figura 19: Slides de síntese sobre números mistos.

Fonte: Slides da intervenção do CAF 4.

A questão proposta, à esquerda, e a conclusão a que se chegou a partir da conversa com os alunos, à direita.

- E esse aqui, como ficaria?

- Três inteiros e um sobre dois... três inteiros e um meio.

- É! E o que você pensou?

- É porque 3 vezes 2 é igual a 6 . Aí eu pensei em colocar mais um meio. Porque dois meios mais dois meios é igual a 2 inteiros. E colocando mais um meio dá três inteiros.

- Mais dois meios!

- Mais dois meios?

- $\frac{2}{2}+\frac{2}{2}+\frac{2}{2}$ **dá seis meios, né?** [3]

- Isso, seis meios. Aí é só adicionar mais um meio que dá sete meios.

- É isso mesmo!

Sempre que um aluno responde algo, é pedido que ele explique o que pensou. Nesse caso, o aluno respondeu quase corretamente e a pesquisadora apenas reformulou sua resposta acrescentando o que faltou de modo que ele percebesse o erro e todos os alunos acompanhassem o raciocínio. Também era feito o registro da fala dos alunos, no canto da lousa: $\frac{2}{2}+\frac{2}{2}+\frac{2}{2}=\frac{6}{2}$. Esse tipo de registro matemático das falas dos alunos era feito por eles mesmos, a pedido da professora, quando estavam junto à lousa, ou pela professora, quando sentados.

Muitas vezes, após conceituarmos o aprendido, era dado um exercício que servia como exemplo do conceito. Na Figura 20, vemos essa situação, com a solução feita e explicada por um aluno. Vemos nesta intervenção dois exemplos muito similares, mas com funções distintas que ilustram bem as funções descritas por Rowland (2008): o primeiro visa provocar os alunos e facilitar a abstração, o segundo tem o caráter de um exercício, que exemplifica o que foi conceituado e abstraído.

Na Figura 20, vemos as resoluções de dois alunos ao ser solicitado que escrevessem as frações $\frac{12}{5}$ e $\frac{22}{4}$ como números mistos, como exercício de fixação. O primeiro aluno colocou a forma mista direto, sem nenhum passo processual intermediário. Ele explica que pensou que "o 5 cabe duas vezes no 10 e sobra 2". Já o segundo, começou escrevendo 22, o número do numerador, como uma soma de parcelas de 4, o número do denominador, até que não fosse mais possível somar 4, de forma que ele obteve $4+4+4+4+4+2$. Depois, ele separou essa fração em sucessivas somas de frações, evidenciando os inteiros da forma $\frac{4}{4}$, que são 5 , chegando no resultado que é $5\frac{2}{4}$.

O primeiro aluno efetuou a divisão pensando em partição, já o segundo percebeu a divisão de 22 por 4 pensando como uma distribuição sucessiva.

4.3 Situação 3 - Estratégias para comparar frações (CAF 4)

Essa situação é referente a um momento da Intervenção de Síntese da segunda parte do CAF 4, que envolve atividades sobre comparação de frações e estimativa de tamanho. O objetivo da atividade em questão, apresentada na Figura 24, é exatamente permitir que os alunos explorem estratégias para

[3] No que diz respeito a termos fracionários, estamos apresentando por extenso as respostas verbais dos alunos, para exprimir exatamente o que falaram. A exceção é feita quando falamos de algo que foi feito por escrito no quadro, como é este caso, onde usamos a notação matemática.

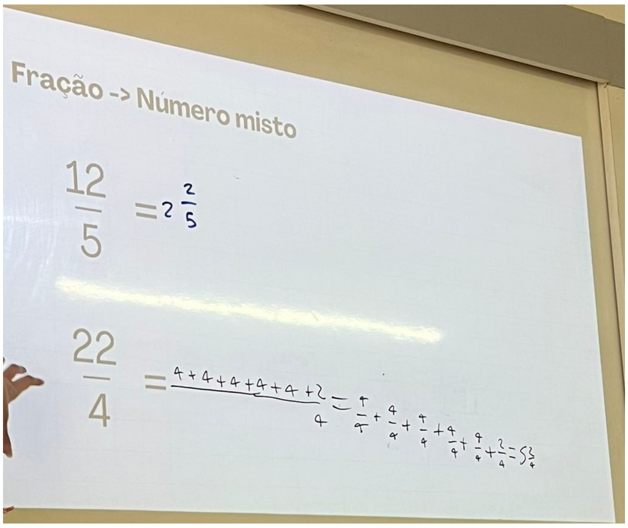


Figura 20: Resolução no quadro de alunos durante a intervenção do CAF 4.

comparar pela ordem uma fração com outras, evidenciando o conceito de fração como um número, que pode ser representado em uma reta. Queríamos que eles criassem suas estratégias, mas também que notassem que sempre é possível cair nos casos anteriores, quando os denominadores (ou os numeradores) são iguais; para isso, deveríamos obter uma fração equivalente com denominador (ou numerador) igual ao da outra fração a ser comparada.

Atividades como essa, envolvendo representação de frações na reta numérica, são fortemente sugeridas por Doug Clarke, Anne Roche e Annie Mitchell no artigo *10 practical tips for making fractions come alive and make sense (2008)*, e por (WU, 2014). Também em (VAN DE WALLE, 1990) encontramos essa sugestão, justificada inclusive como meio para superar a *misconception 1*, em que os alunos têm dificuldade de ver a fração como um único valor, tendendo a considerar numerador e denominador como números separados.

Nesse ponto, os alunos já tinham feito atividades de comparação de frações com denominadores iguais e com numeradores iguais, como as das Figura 21 e Figura 22, com as respectivas sínteses desses casos, apresentadas na Figura 23.

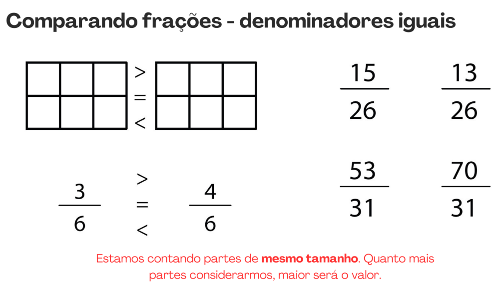


Figura 21: Comparando frações com o mesmo denominador. Em vermelho, a síntese que foi feita com os alunos.

Fonte: Slides da intervenção do CAF 4.

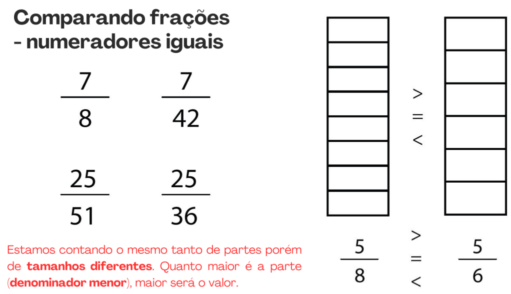


Figura 22: Comparando frações com o mesmo numerador. Em vermelho, a síntese que foi feita com os alunos.

Fonte: Slides da intervenção do CAF 4.

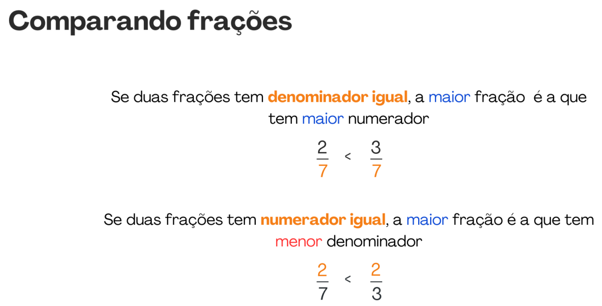


Figura 23: Síntese das situações discutidas.

Fonte: Slides da intervenção do CAF 4.

Assim, foi apresentada a atividade da Figura 24 e pedido que um aluno resolvesse no quadro.

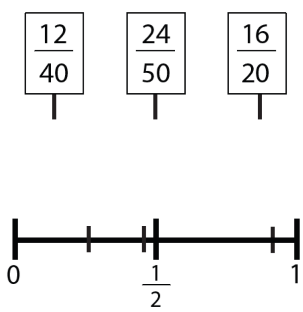


Figura 24: Atividade para localizar as frações na reta.

Fonte: Cadernos Autocorretivos: Frações (2021), Caderno 4.

— Aqui já tem os pontos, é só ligar. Aluno A, quer fazer aqui?

— Aluno A: É só ligar?

— Aluno B: Tem que ligar certo, né.

[Alunos resolvendo]

— Aluno A, porque você colocou esse aqui?

— Aluno A: Porque eu percebi..

— Aluno C: Tá mais perto da metade!

— Aluno A: Eu percebi tipo, eu peguei, qual é a metade de 50? 25. Aí pus no lugar do 25 mas fui um pouquinho mais pra trás.

Aqui, nota-se uma estratégia interessante que demonstra um bom entendimento do conceito de fração e de equivalência de frações. Essa compreensão superou as etapas de *ação e processo* da teoria APOS (DUBINSKY; MCDONALD, 2001), segundo a qual os alunos fariam contas (por exemplo dividindo em uma calculadora). Neste ponto, as frações são compreendidas como um *objeto* (novamente, de acordo com APOS) em si, sobre os quais é possível tecer considerações (e não apenas agir). O aluno utilizou uma fração bem conhecida por ele, $\frac{1}{2}$, como um referencial para a estimativa. Essa técnica é chamada de benchmarking (CLARKE; ROCHE; MITCHELL, 2008), a qual foi usada pelos alunos com maior índice de sucesso na atividade de comparação proposta em seu estudo.

"A primeira nós chamamos de *benchmarking*: os estudantes comparam o tamanho de frações com $0, \frac{1}{2}$ e 1 . Para o par $\left(\frac{3}{7}, \frac{5}{8}\right)$, os alunos podem perceber que $\frac{3}{7}$ é menos que $\frac{1}{2}$ e que $\frac{5}{8}$ é mais que $\frac{1}{2}$." (CLARKE; ROCHE; MITCHELL, 2008) Em seguida, a professora L. apenas reforçou o que o aluno falou para o resto da turma, buscando evidenciar a estratégia usada:

— Entenderam o que ele falou? Qual é a metade de 50?

— 25.

— Então 25 sobre 50, isso aqui é equivalente a o quê?

— Vários alunos: meio.

— Vários alunos: um meio.

— Então seria aqui *[na metade]*, **só que não é 25, é 24. É um pouquinho menor, certo? Porque essas frações têm o mesmo denominador: a maior é o do 25 e 24 vai ser um pouquinho antes. Agora essas duas aqui, o que vocês pensariam?**

— É porque o 16 tá mais perto de chegar no 20 do que o 12 de chegar no 40.

— Isso! Então se a gente pensasse: isso aqui é dividir tudo isso em 20 pedacinhos e pegar 16. Qual é a metade de 20?

—10.

— Isso aqui é $\frac{1}{2}$ *[coloca $\frac{10}{20}$ na metade]*. **Então o $\frac{16}{20}$ vai estar depois do $\frac{1}{2}$ ou antes do $\frac{1}{2}$?**

— Depois!

—Certo! Então só dá para ser esse aqui *[conecta o $\frac{16}{20}$ no tracinho mais à direita]*. **Outra coisa que vocês poderiam fazer também, é multiplicar essa fração por $\frac{2}{2}$. Aí vai ficar $\frac{32}{40}$, que é o mesmo denominador aqui, aí é só comparar. Qual é maior, $\frac{32}{40}$ ou $\frac{12}{40}$?**

— O trinta e dois.

— O $\frac{32}{40}$, então o $\frac{12}{40}$ vai ficar aqui *[conecta o $\frac{12}{40}$ no tracinho restante]*. **Certo?**

— Sim!

É interessante notar que nessa situação surgiram 3 estratégias de comparação, todas também presentes em Clarke, Roche e Mitchell (2008). A primeira foi o *benchmarking*, para estimar o valor de $\frac{24}{50}$. A segunda, foi o que os autores chamam de *residual thinking* (pensamento residual), que nada mais é do que considerar o quão próxima de 1 cada fração está, ou quanto falta para "completar um inteiro". Essa estratégia foi usada para comparar $\frac{16}{20}$ e $\frac{12}{40}$, concluindo que falta menos para $\frac{16}{20}$ completar um inteiro do que o $\frac{12}{40}$, e portanto, $\frac{16}{20}$ é maior. A última foi a de igualar denominadores, no caso dessas mesmas frações, concluindo que $\frac{16}{20}$ é maior porque $\frac{32}{40}$ tem maior numerador que $\frac{12}{40}$.

4.4 Situação 4 - Modos de gerar fração equivalente (CAF 6)

Nesta situação, os alunos haviam trabalhado algumas atividades do CAF para encontrar o fator (**único**) que estabelece a equivalência entre duas frações dadas. No caso da Figura 25, é o fator 3.

$$\frac{2}{5} = \Big(\underbrace{\frac{2}{5} \div \square}\Big) \times \square = \frac{6}{15}$$

Figura 25: Atividade do CAF 6 sobre equivalência de frações

Fonte: Cadernos Autocorretivos: Frações (2021), Caderno 6.

Nesse encontro, a pesquisadora tinha a intenção de provocar a percepção de que qualquer fator a ser utilizado resultaria em uma fração distinta, mas equivalente. Para isso, utilizou como disparador um slide com a mesma situação do CAF, apenas omitindo a fração $\frac{6}{15}$.

$$\frac{2}{5} = \Big(\underbrace{\frac{2}{5} \div \square}\Big) \times \square$$

Figura 26: Atividade do CAF 6 que foi apresentada na intervenção, com a fração $\frac{6}{15}$ omitida.

— Nessa parte do CAF, algumas pessoas ficaram em dúvida ... mas o que ele propunha: dividir e multiplicar por um mesmo valor. Porque se a gente divide e multiplica pelo mesmo valor, o que acontece?

— O número, teoricamente, continua o mesmo.

— Continua o mesmo, né? Que nem eu pegar aqui 4×2, dá quanto?

—8.

- E se eu pegar isso e dividir por 2?

- Vira 4.

— **Volta pro 4, né? Só que se a gente fizer isso só no numerador, volta para o que era antes. Então a gente vai usar aquilo que vimos no CAF 5, que é: ao invés de dividir em cima, eu vou multiplicar embaixo, que é a mesma coisa de inverter e multiplicar** [que eles já tinham aprendido].

— **Ó, a gente vai pegar uma fração equivalente, vocês querem multiplicar por qual número?**

— Vários alunos: 5 . . . 2 . . . 1 milhão. . . 7.

Neste ponto chegamos ao objetivo pretendido desta síntese: perceber que ao dividir e multiplicar uma fração por um **número qualquer** (diferente de zero) temos uma fração equivalente, que é obtida multiplicando numerador e denominador por este fator. O que no CAF era um exercício para encontrar uma solução única, aqui temos uma infinidade de opções a serem exploradas. Neste encontro, ficamos numa percepção ainda não consolidada deste ponto. Na situação seguinte, esta síntese foi trabalhada de modo mais explícito.

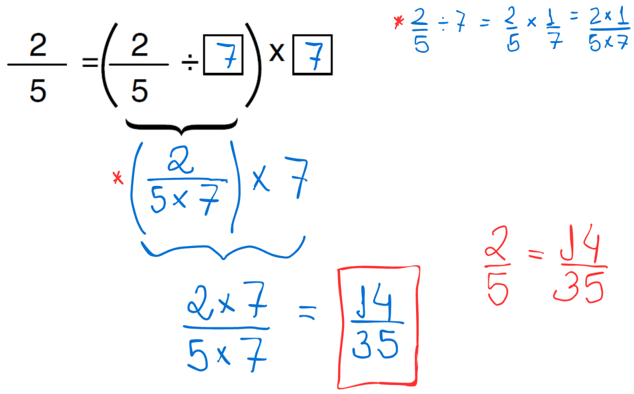


Figura 27: Reconstrução do quadro.

— **7 é bom. Então a gente vai fazer a expressão numérica, eu vou fazer o que tá no parênteses primeiro.** $\frac{2}{5}$ **dividido por 7. Dá para eu dividir 2 por 7 ?**

— Não.

— **Não dá. Então o que a gente faz? ó eu peguei o 7. . . o que é isso? É multiplicar pelo inverso. Quando a gente tá fazendo divisão de fração, isso aqui é a mesma coisa de: eu inverto a operação e inverto o número. Não era assim que vocês faziam?**

— Aluno A: Sim.

— Aluno B: Não sei.

— **Fica** 2×1 **e** 5×7. **Peguei o 7 e multipliquei ele embaixo. E aí eu ainda tenho que multiplicar por 7 aqui, certo?**

— Aluno A: Acho que sim...

Esta intervenção foi feita no mesmo dia, de manhã e à tarde. Na parte da manhã, o professor da turma interviu para fazer a relação da divisão de fração por inteiro, que havia sido abordada no CAF 5 de forma conceitual, com a ideia de "inverter e multiplicar", que eles tinham aprendido recentemente:

$\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b \times c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c}$. Como eles ainda estavam em uma etapa de fixação desse conceito, e consonante com a abordagem do professor D., a pesquisadora trouxe essa relação também na turma da tarde, com o intuito de reforçar os conceitos que sustentam o procedimento.

4.5 Situação 5 - Equivalência de frações e o elemento neutro da multiplicação (CAF 6)

Essa situação se deu logo após a situação anterior, com a mesma turma. Os alunos tinham acabado de exemplificar o conceito de fração equivalente no quadro, a partir do processo de multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo valor, que eles mesmos escolheram.

No caso da situação 5, a atividade disparadora envolve o "caminho inverso", decompondo o numerador e o denominador da fração $\frac{12}{8}$ em produtos que evidenciam um fator comum: 4. Ela tem como objetivo a seguinte síntese: ao multiplicar uma fração por um fator da forma $\frac{n}{n}$, com n inteiro, obtemos uma fração equivalente; isso porque $\frac{n}{n}$ é 1 para todo n diferente de 0 .

Essa síntese, que consiste em um "argumento" processual, se mostrou bastante esclarecedora para os alunos no que diz respeito ao conceito de fração equivalente, uma vez que eles já conhecem a propriedade do elemento neutro da multiplicação.

Durante o uso do CAF 6 e após a correção, notou-se que muitos alunos demonstraram não entender muito bem a proposta da atividade, e foi necessária também uma intervenção instrucional. Por isso, a própria professora preencheu os espaços na lousa, a partir das respostas dos alunos.

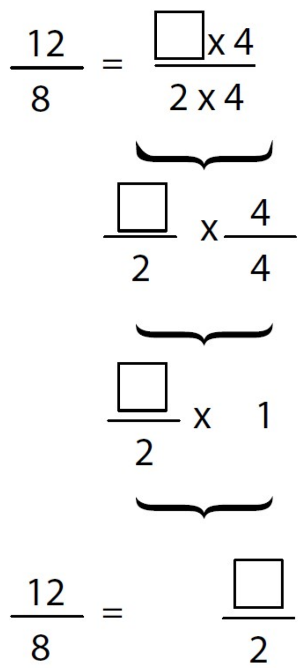


Figura 28: Atividade que trabalha o conceito de fração equivalente destacando a propriedade do 1 como elemento neutro da multiplicação.

Fonte: Cadernos Autocorretivos: Frações (2021), Caderno 6.

— Ó esse aqui, gente, era o contrário... alguns ficaram em dúvida. $\frac{12}{8}$ e aí ele fez o quê aqui?

— Aluno A: Ahh, 3 vezes 4 . . . — Aluno B: 12 é igual a 3 vezes 4 e 8 é igual a 2 vezes 4.

— Ele tá reescrevendo a fração. 08 eu posso escrever como 2×4 e o 12 como. . . ?

— 3 vezes 4.

— Só que agora, ó, eu to multiplicando por 4 em cima e embaixo, o que isso quer dizer?

— Aluno A: Ah. . . 3 vezes. . . três meios vezes quatro quartos. . . é igual. . .

— Aluno B: quatro quartos. . . Ahhh!

— Aluno A: Ahh. . . porque o quatro quartos na verdade é 1 inteiro!

— Aluno B: Faz sentido! Meu Deus!!

— Aluno C: Mas. . . ma. . . mas o quê??

— É 1 inteiro, certo? É o 1 disfarçado, né?

Além do atalho verbal "multiplicar em cima e embaixo", neste momento, a professora L. se apropriou de um outro atalho que já conhecia por acompanhar as aulas do professor D.: dizer que frações da forma $\frac{n}{n}$ aparecem como " 1 disfarçado".

—**$\frac{12}{8}$ eu escrevi dessa forma, aí aqui eu só separei o $\frac{4}{4}$ do $\frac{3}{2}$, beleza? E o $\frac{4}{4}$ é o que? 1. E se eu multiplicar qualquer coisa por 1, o que acontece?**

— Continua igual.

— **Continua igual, porque o 1 é o elemento. . . o quê?**

— Neutro. . . ?

— **Ele é o elemento neutro da multiplicação!**

— Ah, verdade, qualquer coisa dividida por 1 é ela mesma.

— **Isso, qualquer coisa multiplicada [4] por 1 é o próprio número. Então a gente só tá repetindo: $\frac{3}{2}$ e $\frac{12}{8}$ são frações equivalentes. Certo? Lá, no outro slide, a gente pegou isso aqui, multiplicou por um valor em cima e embaixo e chegou. . . em alguma coisa. Aqui a gente só fez o caminho contrário. A gente poderia direto fazer o quê? Dividir o $\frac{12}{8}$ por $\frac{4}{4}$, certo? Se eu pegar aqui $\frac{12}{8}$ e dividir por $\frac{4}{4}$, onde eu chego?**

— Três meios, eu acho.

— **12 dividido por 4?**

— 3.

— **E 8 dividido por 4?**

— 2.

— **Certo? Então isso é aquilo de reduzir, simplificar a fração.**

— Mano, se agora eu já tô esquecendo, imagina depois das férias!

Perceba que, aqui, novamente, a expressão "em cima e embaixo" foi utilizada. Entendemos que, no momento das intervenções, desde que os alunos já estejam cientes dos termos conceitualmente corretos (numerador e denominador), não há problema em utilizar atalhos verbais para facilitar a conversa.

[4]10 Observamos que embora o aluno tenha falado sobre dividir por 1, a professora preferiu reforçar a multiplicação, pois este é o conceito primário: elemento neutro da multiplicação.

Após essa situação, a Intervenção de Síntese do CAF 6 é finalizada com a síntese da Figura 29 sobre frações equivalentes. Novamente, nesse slide, essa sequência de igualdades foi exemplificada com um valor para n, escrevendo por cima do slide.

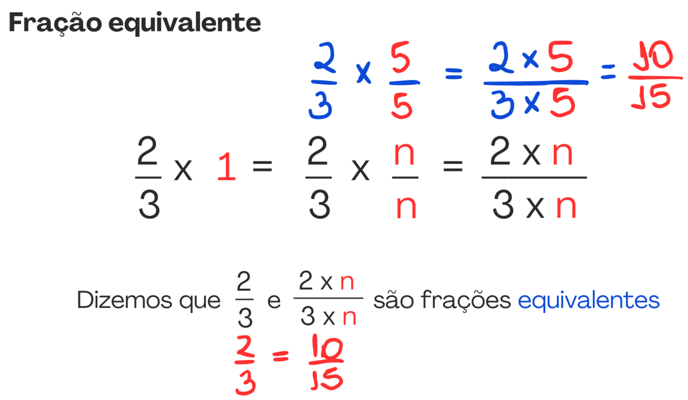


Figura 29: Síntese sobre equivalência de frações, com reconstrução do quadro.

Fonte: Slides da intervenção do CAF 6.

4.6 Situação 6 - Soma e subtração de frações com denominadores diferentes (CAF 7)

Essa situação se deu após a conclusão do CAF 7, que aborda soma e subtração de frações com denominadores genéricos. Os alunos tiveram contato anterior, por meio de atividades do CAF, com situações como essa e com a ideia de "igualar denominadores", que é um atalho verbal muito usado em sala de aula, mas muitas vezes compreendido superficialmente pelos alunos. A proposta da atividade é representar esse processo de igualar denominadores de forma conceitual, instigando os alunos a perceberem que há uma forma certa de fazer isso, pensando em frações equivalentes, e não de modo arbitrário, o que é descrito como um *misconception* comum (VAN DE WALLE, 1990). A síntese que pretende-se chegar é que: ao somar ou subtrair duas frações de denominadores diferentes, sempre podemos tomar frações equivalentes a essas que possuem denominadores iguais, e assim, realizar a soma ou subtração com as novas frações. Mais especificamente, sempre podemos fazer isso multiplicando e dividindo cada uma pelo denominador da outra. Para isso, foi usada uma atividade do CAF 7 envolvendo a representação de área.

— **Eu tenho aqui uma subtração, né? $\frac{1}{2} - \frac{2}{5}$. o que eu tenho que fazer pra conseguir fazer a subtração?**

— Aluno A: Igualar as casas... os denominadores.

— **Tá, tem que igualar o denominador. Eu poderia, então, simplesmente chamar os dois de 5 e fazer assim? Posso?** [escreve $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}$ no quadro]

— Vários alunos: Não!

— **Por quê?**

— Aluno A: Porque aí não são frações equivalentes às que você tinha no início.

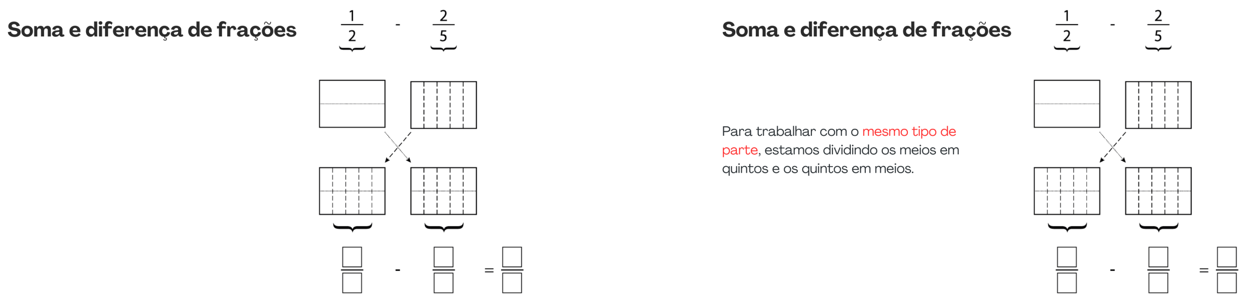


Figura 30: Atividade envolvendo a representação conceitual do processo de subtração de duas frações com denominadores diferentes.

Fonte: Slides da intervenção do CAF 7.

— **Certo, exato! Porque a gente fala normalmente "ah tem que igualar os denominadores", mas não é igualar de qualquer jeito.**

— Aluno B: Agora eu tenho uma dúvida, professora. Independente de quais números estejam aí nos denominadores eu posso só multiplicar um pelo outro e vai dar um número certo?

— **Sim, porque no caso assim, você poderia multiplicar, que é o que a gente tá fazendo aqui... olha, vamos fazer esse exemplo (...)**

Quando o Aluno A fala sobre o procedimento de igualar os denominadores, a professora L. refuta a simples aderência à regra, trazendo a conversa para o aspecto conceitual. Percebe-se que os alunos entenderam o porquê dessa mudança nas frações não poder ser arbitrária, ao fazerem referência à necessidade de manter as frações equivalentes. Além disso, também foi trazido pelo Aluno B uma síntese muito madura, próxima a aquela apresentada no slide seguinte, mostrada na Figura 31.

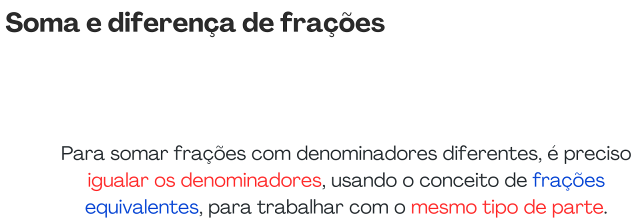


Figura 31: Síntese sobre soma e diferença de frações com denominadores diferentes.

Fonte: Slides da intervenção do CAF 7.

5

Adendo: CAFs, *misconceptions* e avaliação.

Em 2021, um grupo de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática se envolveu na realização de diferentes projetos de iniciação científica com o objetivo de estudar e aprimorar os cadernos.

Atualmente, o impacto dos *Cadernos Autocorretivos: Frações* na aprendizagem de frações dos alunos, com foco na superação de *misconceptions*, está sendo avaliado em um desses projetos de iniciação científica, financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo. Essas *misconceptions* são descritas por Van de Walle como aplicações incorretas do conhecimento de números inteiros no estudo de frações (VAN DE WALLE, 1990). Elas tendem a se manifestar em atividades operacionais (conhecimento procedimental), mas são, contudo, problemas de compreensão conceitual (conhecimento conceitual).

No projeto, foi desenvolvido um instrumento diagnóstico a partir de questões que foram usadas por Van de Walle e por autores citados por ele para identificar *misconceptions* e dificuldades mais prevalentes em frações, o qual está sendo utilizado como pré e pós-teste no experimento com os CAFs.

5.1 Principais *misconceptions*

São, no total, 16 *misconceptions*, organizadas em uma categoria geral e três categorias relacionadas a cada operação (soma e subtração, multiplicação e divisão). Todas as *misconceptions* são cobertas pelo instrumento diagnóstico. Aqui listamos as mais prevalentes da categoria de conceito geral de acordo com a literatura encontrada.

1. Os estudantes pensam que numerador e denominador são valores separados e têm dificuldade em vê-los como um único valor (CRAMER; WHITNEY, 2010, apud VAN DE WALLE, 1990).

2. Os estudantes não entendem que $\frac{2}{3}$ significa duas partes do mesmo tamanho (apesar de não necessariamente objetos do mesmo formato).

3. Estudantes pensam que uma fração como $\frac{1}{5}$ é menor que uma fração como $\frac{1}{10}$ porque 5 é menor que 10 . Por outro lado, os estudantes podem assumir o inverso - quanto maior o denominador, menor é a fração - o que nem sempre é verdade. Por exemplo, $\frac{3}{8}$ é menor que $\frac{7}{12}$, apesar de ter um denominador menor.

4. Os estudantes erroneamente usam "regras" operacionais de números inteiros para operar com frações - por exemplo, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

5. Não vincular a representação algébrica (conhecimento procedimental) ao conceito de fração. Por exemplo, ao somar $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ obter $\frac{1}{4}$, mas chegar no resultado correto por meio de representação geométrica/de área.

6. Dificuldade com frações mistas. Apesar de Van de Walle pontuar essa *misconception* se manifestando apenas na adição, com exemplos mais específicos de problemas nessa operação, consideramos como uma dificuldade geral em operar com frações mistas por não entenderem o conceito, inclusive nas outras operações.

Já é possível ter um vislumbre do impacto dos CAFs na aprendizagem dos alunos ao analisar suas respostas aos testes, como será mostrado a seguir. Oss dados desta avaliação de impacto estão sendo estudados e elaborados.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

A análise estatística apresentada no restante deste capítulo foi feita por Vitor Batista Rodrigues, estudante de pós-graduação do curso de Estatística da Unicamp, orientado pela professora Mariana Rodrigues Motta. A ambos deixamos nosso agradecimento.

5.2 Resumo da avaliação feita até o momento

Cada classe, ou turma, que tenha utilizado os CAFs e já tenha visto anteriormente os conteúdos de frações, fez um teste proceptual (procedimental e conceitual) sobre o tema. O mesmo teste foi aplicado antes de iniciarmos o nosso trabalho e alguns meses depois, ao fim deste trabalho. O teste consiste em 14 perguntas (quase todas abertas). Nosso intento original era avaliar, por meio desses testes, a superação de *misconceptions*, evolução de taxas de acerto e evolução dentro das categorias do sistema de análise *Action-Process-Object-Schema* (APOS) (DUBINSKY; MCDONALD, 2001).

A Teoria APOS é um modelo teórico de compreensão de aprendizagem matemática, desenvolvido originalmente para conteúdos mais complexos, abordados no ensino superior e posteriormente utilizado para avaliar aprendizagem de conteúdos no ensino básico. Esta teoria estabelece quatro etapas, sucessivas e hierarquizadas, denominadas de *ação (A)*, *processo (P)*, *objeto (O)* e *esquema (S)*, de forma que ação é o nível que indica menor domínio do conceito e objeto o nível que indica maior domínio. Ignoramos a categoria de esquema pois esta aparentemente não se manifestou em um contexto mais elementar que o usual.

Uma outra variável que consideramos foi o nível de engajamento. Essa variável é, em sua essência, observacional e consiste em três níveis: engajado, pouco engajado e desengajado. Cada aluno foi classificado de acordo com esses níveis a partir da perspectiva da professora-pesquisadora, que teve como base aspectos como quantidade de CAFs preenchidos e corrigidos, interesse em tirar dúvidas durante a aula e participação nos momentos de Intervenção de Síntese. Queríamos verificar se o engajamento com o material seria um fator relevante no desempenho dos alunos nos testes.

Lembramos que, a princípio, tínhamos dados de duas instituições. Como no Lar das Crianças a dinâmica de uso foi muito diferente da dinâmica prevista para o uso dos CAFs, decidimos não considerá-la na análise, pois os dados não eram representativos das hipóteses que tínhamos. Assim, o que se segue, incluindo os gráficos, é inteiramente referente aos dados das turmas da Escola Curumim que usaram os CAFs em 2022. No total, foram analisados resultados de 58 alunos.

A Figura 32 a seguir mostra a relação de acertos por período, série e nível de engajamento dos alunos que usaram os CAFs em 2022.

Vemos um desenvolvimento muito consistente das pessoas mais engajadas, e das pouco engajadas não vemos uma tendência clara. É difícil atribuir uma relação causal, uma vez que o uso dos cadernos em 2022 não foi pleno, ou seja, não foram usados todos os CAFs e as sínteses não foram sistematizadas. Além disso, não sabemos se o mérito é do caderno ou simplesmente do engajamento que os cadernos trazem por sua natureza visual e de gradatividade de dificuldade, o que também seria um resultado interessante.

Em ambos é possível notar que os alunos desengajados têm uma média de acertos baixa. Mesmo assim, 4 deles mostram evolução entre o pré e o pós teste.

Em relação aos níveis de compreensão, baseados na teoria APOS de (DUBINSKY; MCDONALD, 2001), é possível ver que, entre os testes, as proporções de Processo e Objeto aumentam enquanto a de

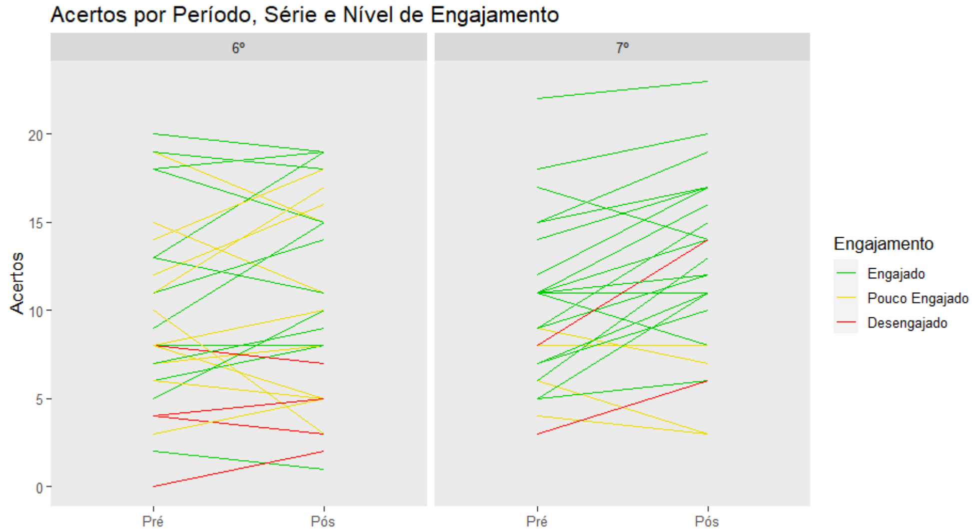


Figura 32: Acertos por período, série e nível de engajamento.

Fonte: relatório da consultoria estatística.

Ação diminui. Isso é positivo, uma vez que o nível Ação é onde o aluno tem menos domínio do conceito, reduzindo-o simplesmente a uma ação.

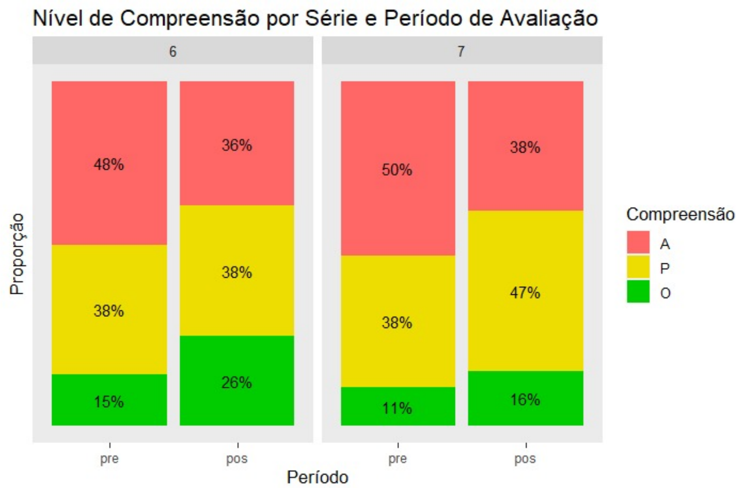


Figura 33: Nível de compreensão baseado na teoria APOS.

Fonte: relatório da consultoria estatística.

Para ilustrar a análise das respostas dos alunos em relação ao modelo APOS, observemos a Figura 34 , que mostra as respostas do aluno A3 à questão 9, no pré e no pós-teste, nessa ordem. Vemos que no pré-teste o aluno parece só conseguir dizer algo sobre a posição de uma fração na reta (ou seu tamanho) se efetuar a divisão do numerador pelo denominador (ação). Já no pós-teste, ele localiza todas as frações corretamente sem fazer nenhuma conta, indicando que tem domínio do conceito para estimar a posição sem se apoiar em uma ação.

Na categoria de *misconceptions* gerais listadas na seção 5.1, apenas as duas primeiras apresentaram redução significativa. Alguns outros casos, referentes às operações, serão tratados em trabalho futuro e não cabem neste texto.

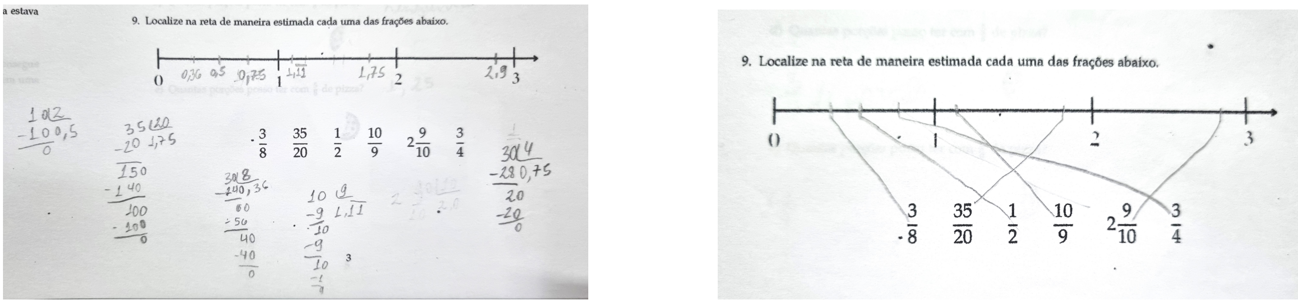


Figura 34: Pré e pós-teste que ilustram a evolução do nível de compreensão.

A análise dos dados referentes ao ano de 2023 ainda está em andamento e resultados detalhados serão divulgados em breve.

6

Considerações finais

Neste texto, tivemos a intenção de apresentar às professoras e professores os *Cadernos Autocorretivos: Frações*, explicando sua estrutura e sua lógica interna e relatando com detalhes a experiência didática feita com este material. A intenção não é convencer os colegas a respeito de qualidades do material, mas simplesmente apresentar as possibilidades que acreditamos serem relativamente consistentes com as propostas do material, ao mesmo tempo em que é organizada o suficiente para facilitar a utilização por parte de professores e professoras que assim desejarem.

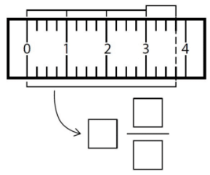
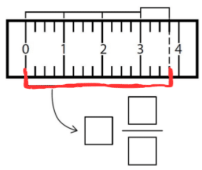
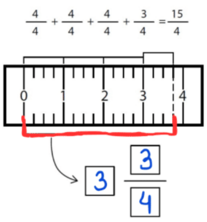
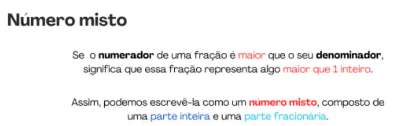
Estamos desenvolvendo uma versão digital dos CAFs, de forma que seja possível rodá-la em múltiplas plataformas, com dois intuitos principais: a) facilitar e baratear o custo de uso; b) permitir acompanhar o uso do material para poder aprimorá-lo.

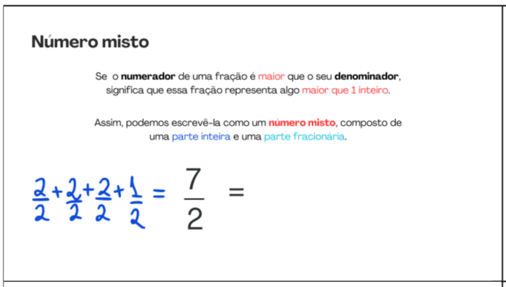
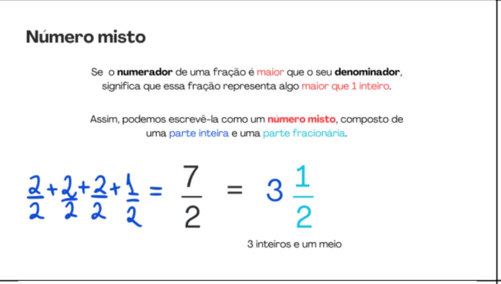
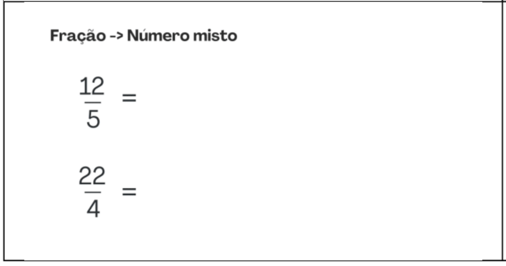
Prevemos uma segunda versão revista e aperfeiçoada dos CAFs e dos slides de apoio às sínteses e assim, ficaremos muito agradecidos em receber um retorno com críticas, sugestões e correções.

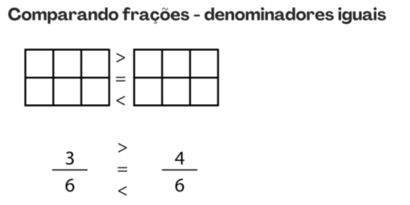
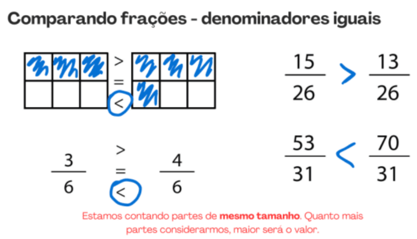
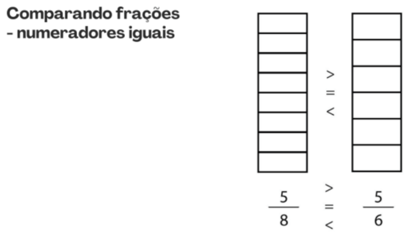
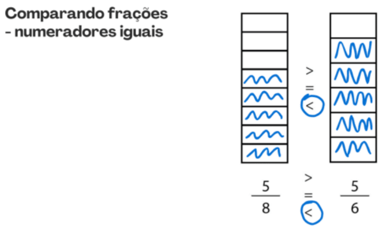
Guia de sínteses

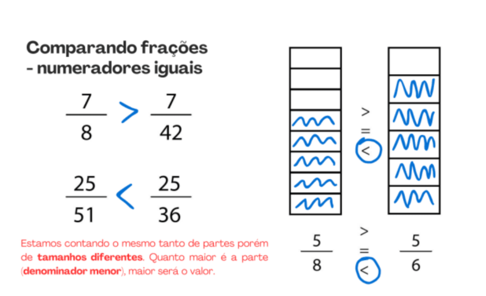
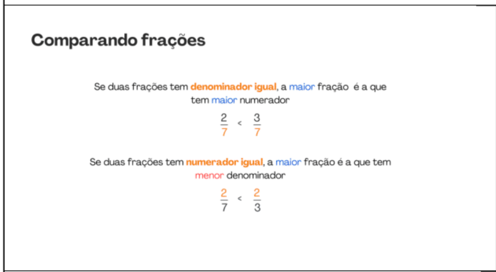
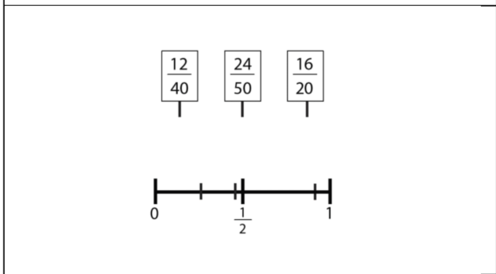
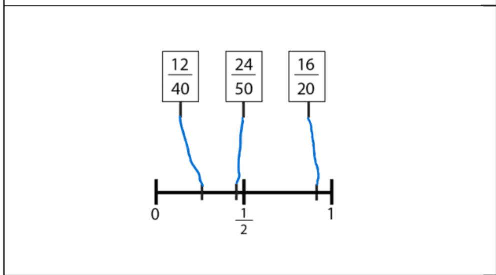
No ano de 2023 foram preparados 175 slides para pautar as conversas com os alunos e, conforme já mencionado, todos estão disponíveis neste link. Inspirados no material desenvolvido pelo NCETM (2014) para desenvolvimento profissional de professoras, começamos a preparar pequenos guias de apoio ao professor, começando pelas seis situações exploradas no capítulo anterior. Deixamos aqui, sem maiores comentários, este material ainda em desenvolvimento.

Situação 1	
Síntese - onde queremos chegar	
Frações em que o numerador é maior que o denominador são maiores do que 1 e precisam de mais de um inteiro para serem representadas. Enquanto frações em que o numerador é menor que o denominador precisam de apenas um inteiro para serem representadas, ou seja, são menores que 1. No caso em que o numerador é igual o numerador, também é preciso apenas um inteiro, na verdade, exatamente 1 inteiro, e essa fração representa 1.	
Slide	**Guia**
O que tem de diferente nessas frações? $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{16}{10}$ $\frac{7}{2}$	Comece apresentando a pergunta do slide e espere as respostas dos alunos. É esperado que eles percebam que as frações da esquerda possuem numerador menor que o denominador, e as da direita numerador maior que o denominador.
O que tem de diferente nessas frações? numerador menor que denominador: $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{8}{9}$ numerador maior que denominador: $\frac{5}{3}$ $\frac{16}{10}$ $\frac{7}{2}$	Nesse slide aparecem as respostas, evidenciando o padrão que espera-se que os alunos percebam. Deve ser apresentado apenas após os alunos terem dito com suas palavras.
Desenhe uma representação das frações em vermelho. numerador menor que denominador: $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{8}{9}$ numerador maior que denominador: $\frac{5}{3}$ $\frac{16}{10}$ $\frac{7}{2}$	Chame dois alunos para desenhar uma representação para as frações 2/3 e 5/3. Note que aqui é intencional as duas frações terem mesmo denominador, para que a relação a seguir fique mais clara.
O que essas representações tem de diferente? numerador menor que denominador: $\frac{2}{3}$  numerador maior que denominador: $\frac{5}{3}$ 	Exemplo de resolução de alunos. O que deve ser evidenciado aqui é que, no caso de 2/3, é necessário apenas um inteiro para representá-lo, ou seja, 2/3 (e qualquer fração com numerador menor que denominador) é menor que 1; e no caso de 5/3, são necessários 2 inteiros, ou seja, 5/3 (e qualquer fração com numerador maior que o denominador) é maior que 1. Vale também chamar atenção para o caso em que o numerador é igual ao denominador, evidenciando que é preciso exatamente 1 inteiro para representar esse tipo de fração, que representa 1 inteiro.

<table>
<tr><th colspan="2">Situação 2 - CAF 4</th></tr>
<tr><th colspan="2">Síntese - onde queremos chegar</th></tr>
<tr><td colspan="2">Podemos representar frações em que o numerador é maior que o denominador como um número misto; ou seja, que possui uma parte inteira e uma fracionária. Isso porque frações desse tipo são maiores que 1. A reta numérica e especialmente propícia para isto.</td></tr>
<tr><th>Slide</th><th>Guia</th></tr>
<tr><td></td><td>Essa é uma atividade no CAF 4, porém com uma parte oculta: a soma de frações que forma quinze quartos, que aparece no próximo slide. Isso é interessante para que os alunos trabalhem apenas com a representação na régua na forma de número misto. Peça que um aluno venha resolver a atividade. Diga que ele deve identificar qual valor esta sendo medido na régua e escrevê-lo como um número misto.</td></tr>
<tr><td></td><td>Se ele tiver dificuldade em entender a proposta, pode ser interessante destacar em vermelho o intervalo em que estamos interessados. Se necessário, oriente o aluno com algumas perguntas: "Onde estão os inteiros nessa régua? Cada um está dividido em quantas partes?", "Estamos medindo até este ponto. Quantos inteiros tem? Quanto (qual fração) sobra?". É interessante ter em mãos uma régua comum para que eles possam fazer a relação com algo já conhecido.</td></tr>
<tr><td></td><td>Depois que o aluno preencher os espaços, peça que ele explique sua resposta. Corrija ou reafirme que na régua podemos contar 3 inteiros e mais 3 espacinhos que representam cada um 1/4, e portanto no total temos 3 3/4. Estando ainda no slide anterior, pergunte se poderíamos olhar para esse valor de outra forma. Chame atenção para a quantidade de partes em que cada inteiro está dividido. Cada inteiro pode ser escrito como 4/4, e portanto podemos representar o valor medido na régua da forma que é mostrado acima nesse slide. Ou seja, 15/4 = 3 3/4. Dê destaque para ideia de que, ao olhar para 15/4, estamos pensando em quantas vezes 4/4 cabe em 15/4. Ou simplesmente quantas vezes o 4 (denominador) cabe no 15 (numerador), que será a parte inteira (3), e o que falta para chegar no 15 (15-12=3) é o numerador da parte fracionária. Assim, temos duas formas de representar essa</td></tr>
<tr><td></td><td>Com isso, nos encaminhamos para a síntese de fato. Peça que os alunos leiam juntos em voz alta o que está no slide, e se achar pertinente, que escrevam no caderno. Dê destaque aos termos coloridos de vermelho e azul.</td></tr>
</table>

	Pergunte à turma, diante do que concluímos, como podemos escrever 7/2 como um número misto. Peça que expliquem o que estiverem respondendo. Eles devem chegar em 3 1/2, pois podemos escrever 3 vezes 2/2 mais 1/2, ou respostas similares.
	Reforce o que é a parte inteira e o que é a parte fracionária, pontuando também a forma como se lê um número misto (três inteiros e um meio).
	Esse slide contém exercícios de fixação. É interessante que os alunos escrevam as frações como números mistos primeiro no caderno, individualmente. Depois, pode-se pedir que dois voluntários resolvam no quadro para todo discutirem.

Situação 3 - CAF 4	
Síntese - onde queremos chegar	
denominador igual, a maior fração é a que tem maior numerador; numerador igual, a maior fração é a que tem menor denominador; 3. Se duas frações não possuem nem numerador nem denominador igual, é possível usar outras estratégias para comparar, como por um referencial, vendo quanto falta para completar um inteiro ou simplesmente igualando numeradores ou denominadores. Neste momento, não queremos ainda chegar a um denominador comum, uma estratégia universal.	
Slide	**Guia**
	Peça que um aluno resolva a atividade no quadro. É possível que ele pinte corretamente mas não entenda que precisa comparar as frações, então relembre isso. Queremos saber qual fração é maior, e podemos ver isso olhando para a representação: os quadradinhos são do mesmo tamanho nos dois casos e 4/6 tem mais quadradinhos pintados, portanto é maior que 3/6. Pergunte o que as frações tem em comum e o que isso significa. Eles conseguem pensar em um padrão para comparar frações desse tipo? Queremos que eles percebam que, *com denominadores iguais*, estamos contando o mesmo tipo de parte, portanto, a maior fração será a que enumera mais partes, ou seja, a de maior numerador.
	Neste slide aparece, em vermelho, a explicação conceitual citada acima, que o professor pode ler com os alunos. Também sugere dois pares de frações para que os alunos comparem. É interessante que eles façam primeiro no caderno, individualmente, e depois o professor pode resolver no quadro dialogando com eles e pedindo que justifiquem.
	Peça que um aluno resolva a atividade no quadro. Novamente, queremos representar as frações em barra e compará-las. Qual barra está mais pintada (em relação à área)? Esta será a maior fração, que é 5/6. Apenas olhando para a representação simbólica (de números) pode ser muito confuso para os alunos entenderem o conceito e o padrão para comparar frações com numeradores iguais.
	Sugerimos fazer uma ilustração mental com barras de chocolate. Diga para os alunos pensarem nessas barras como sendo de chocolate. Considere duas situações: 1) divido a barra em 8 pedaços e dou 1 para um aluno; 2) divido a barra em 6 pedaçoes e dou 1 para um aluno. Em qual dos casos o aluno come mais chocolate? Qual pedaço é maior? Essa ilustração pode ser feita com valores diferentes dos do exemplo, como 10 e 3, para que a diferença fique mais clara. É esperado que os alunos percebam facilmente que o caso em que divido o chocolate em menos partes é mais vantajoso.

	Nesse slide, aparece uma explicação conceitual que se relaciona com a ilustração do chocolate. Ou seja, se o denominador é o tipo de parte, quanto menor ele for, quer dizer que meu tipo de parte é maior. Se duas frações tem mesmo numerador, estamos pegando a mesma quantidade de partes, e portanto, a maior fração será a que tem partes maiores, a de menor denominador. Peça que os alunos façam as comparações das frações propostas no caderno e depois resolva no quadro dialogando com eles. Pode ser necessário se voltar para a representação em barras novamente para que absorvam o conceito, porém é importante que aprendam o padrão, pois como é o caso das frações propostas, não podem fazer diagramas para
	Este slide aborda as duas sínteses sugeridas pelos slides anteriores. No documento, os elementos vão aparecendo sequencialmente: a frase, depois as frações e depois o sinal de desigualdade; de modo que é dada a oportunidade dos alunos responderem qual fração é maior em cada caso antes de aparecer a "resposta". É interessante que os alunos leiam juntos cada síntese, e, se possível, anotem no caderno.
	Aqui, o objetivo é permitir que os alunos explorem estratégias para estimar o “tamanho” de uma fração comparada a outras, evidenciando o conceito de fração como um número, que pode ser representado em uma reta. Queremos que eles criem suas estratégias, mas também que notem que sempre é possível cair nos casos anteriores utilizando o conceito de fração equivalente. Peça que um aluno faça no quadro, com o auxílio do professor e dos colegas se necessário.
	Mesmo que não surjam a partir dos alunos, é interessante destacar estratégias como: benchmarking, no caso de utilizar a fração 1/2 = 25/50 como referência para definir onde 24/50 está; perceber que 16/20 está mais próximo de completar 1 inteiro do que 12/40, e portanto 16/20 está depois da metade e próximo de 1 e 12/40 antes da metade.; em todos os casos também é possível encontrar frações equivalentes e comparar utilizando os casos anteriores. A intenção aqui não é ser exato na identificação, mas aguçar o olhar dos alunos para as frações como um objeto que eles podem manejar de diversas formas e com diferentes estratégias.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Situação 4 - CAF 6	
Síntese - onde queremos chegar	
Ao dividir e multiplicar uma fração por um número qualquer temos uma fração equivalente, que é obtida multiplicando numerador e denominador por este fator. Ou seja, uma fração possui infinitas frações equivalentes.	
Slide	**Guia**
$\frac{2}{5} = \underbrace{\left(\frac{2}{5} \div \square\right)} \times \square$	Comece perguntando aos alunos o que acontece quando eles dividem e em seguida multiplicam um valor por um mesmo número. Dê um exemplo numérico, como 8 dividido e multiplicado por 2. Eles devem perceber que isso não altera o valor inicial. Com as frações, é o mesmo, só que ao fazer essas operações, é possível alterar os valores do numerador e do denominador, sem alterar o valor da fração em si, gerando uma fração equivalente. Peça que eles escolham um número, destacando que qualquer número inteiro é válido e gerará uma fração equivalente.
$\frac{2}{5} = \underbrace{\left(\frac{2}{5} \div \boxed{7}\right)} \times \boxed{7}$ $* \frac{2}{5} \div 7 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{2\times 1}{5\times 7}$ $* \left(\frac{2}{5\times 7}\right) \times 7$	Para fazer a atividade, pode ajudar relembrar expressões numéricas. Vamos fazer um passo de cada vez, começando pelo parênteses. Nesse ponto, eles já trabalharam com multiplicação e divisão de fração por inteiro no CAF 5, mas podem não lembrar que ao dividir uma fração por inteiro podemos multiplicar o denominador por esse inteiro. Relembre isto. Caso já tenha sido trabalhado a ideia de "multiplicar pelo inverso", também é interessante pontuar isso, como é mostrado no canto superior do slide.
$\frac{2}{5} = \underbrace{\left(\frac{2}{5} \div \boxed{7}\right)} \times \boxed{7}$ $* \frac{2}{5} \div 7 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{2\times 1}{5\times 7}$ $* \underbrace{\left(\frac{2}{5\times 7}\right) \times 7}$ $\frac{2\times 7}{5\times 7} = \boxed{\frac{14}{35}}$ $\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$	Finalizando todos os passos e operações, recaptule o processo e destaque o fato da fração final ser o que chamamos de fração equivalente a primeira. Ou seja, essas duas frações são iguais em valor. Nesse caso, pode ser interessante efetuar a divisão de 2 por 5 e 14 por 35 para que eles vejam que de fato são o mesmo valor, apenas com uma representação simbólica diferente.

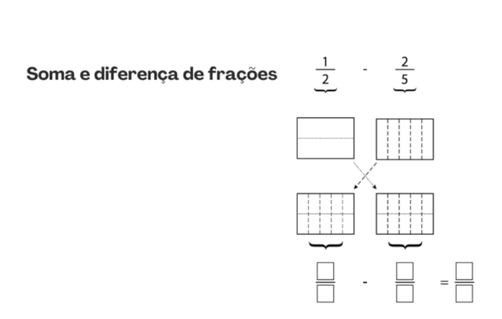
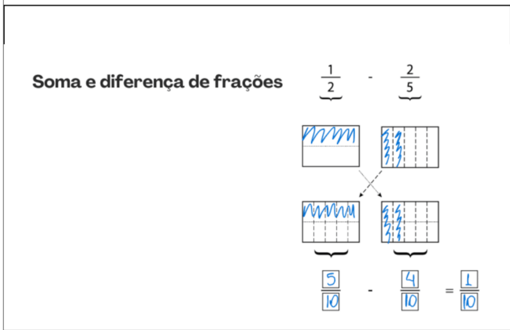
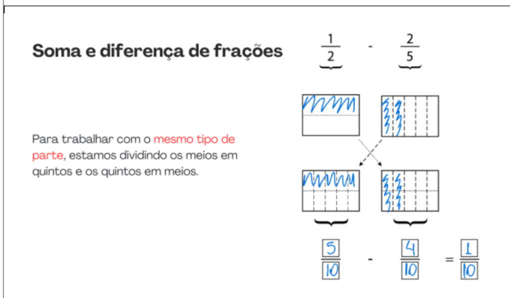
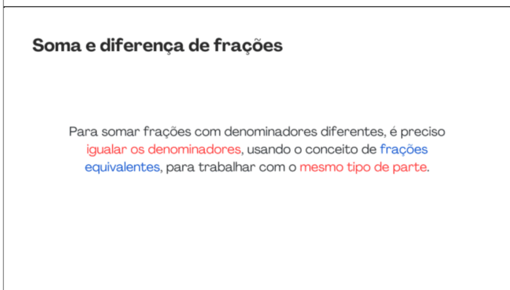
Situação 5 - CAF 6

Síntese - onde queremos chegar

Ao multiplicar uma fração por um fator da forma n/n, com n inteiro, obtemos uma fração equivalente; isso porquê n/n é 1 para todo n.

Slide	Guia
$\frac{12}{8} = \frac{\square \times 4}{2 \times 4}$ $\frac{\square}{2} \times \frac{4}{4}$ $\frac{\square}{2} \times 1$ $\frac{12}{8} = \frac{\square}{2}$	Fazendo uma ligação com a atividade anterior, diga aos alunos que aqui estamos fazendo o caminho inverso, porem exemplificando o mesmo conceito. Ao invés de multiplicar e dividir uma fração por um fator, vamos tentar reescrever essa fração de modo que fique explícito uma fração equivalente "dentro dela". Ou seja, temos que encontrar um fator comum no numerador e denominador.
$\frac{12}{8} = \frac{\boxed{3} \times 4}{2 \times 4}$ $\frac{\boxed{3}}{2} \times \frac{4}{4}$ $\frac{\boxed{3}}{2} \times 1$ $\frac{12}{8} = \frac{\boxed{3}}{2}$	Direcione-os a perceber que, na primeira linha, a atividade propõe que apenas se reescreva cada uma das partes da fração. "8 é igual a 2 vezes 4; e 12 é igual a quanto vezes 4?". Peça que expliquem o que acontece na segunda linha. Pensando na multiplicação de frações, apenas separamos essa operação, ficando com 3/4 x 4/4. A passagem da terceira linha para quarta é o ponto chave, pois é onde eles devem perceber que 3/4 e 12/8 são equivalente pois chegamos em uma multiplicação por 1 (um inteiro), que não altera o valor do primeiro fator por ser o elemento neutro da multiplicação. Percebendo isso, recaptule os passos da atividade e destaque a equivalência das duas frações.
Fração equivalente $\frac{2}{3} \times 1 =$	Na síntese, segue-se uma sequência de igualdade que mostra que 2/3 é igual a 2xn/3xn. É interessante mostrar igualdade por igualdade, de forma que eles possam compreender os passos desenvolvidos e a ideia de "valor arbitrário" representado pelo n, algo que não é comum verem no sexto ano. Comece neste slide, dizendo que 2/3 é a mesma coisa de 2/3 x 1, e pergunte o porquê; Pois o 1 é o elemento neutro da multiplicação, qualquer valor multiplicado por 1 resulta nele mesmo.
Fração equivalente $\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3} \times \frac{n}{n} =$ Sendo n um número inteiro.	Contudo, podemos escrever esse 1 como uma fração em que numerador e denominador são iguais. Exemplifique com valores numéricos: "O que é 3/3? E 5/5? e 13/13?" Se necessário, revisite alguma representação que deixe essa ideia mais clara, como a de barras. Explique que estamos usando a letra *n* para representar *qualquer* valor. *n* é um número qualquer, poderia ser 2, 7, 500, 345, etc. Além disso, poderíamos também escolher qualquer outra letra, mas comumente usamos *n* para representar números naturais ou inteiros na matemática.
Fração equivalente $\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3} \times \frac{n}{n} = \frac{2 \times n}{3 \times n}$ Sendo n um número inteiro.	Agora, podemos simplesmente efetuar a multiplicação dessas duas frações, multiplicando numeradores um a um e denominadores um a um. É importante destacar que a multiplicação de frações só é vista de forma completa no CAF 8, posterior ao trabalhado nessa situação (CAF 6). Contudo, desde o CAF 6 já é possível, e na verdade quase inevitável, falar sobre multiplicação de frações, que é a operação que segue o processo mais natural aos alunos: "operar em cima e em baixo".

Fração equivalente $\frac{2}{3} \times \frac{5}{5} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$ $\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3} \times \frac{n}{n} = \frac{2 \times n}{3 \times n}$ Dizemos que $\frac{2}{3}$ e $\frac{2 \times n}{3 \times n}$ são frações equivalentes $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$	É de extrema importância exemplificar essa sequência de igualdades com um valor numérico para *n*. Assim, deixe que os alunos escolham um valor para *n*, efetue as operações com este valor e destaque a fração equivalente encontrada. Novamente, aqui faremos um exemplo, mas eles devem entender que poderiam escolher *qualquer* valor.

<table>
<tr><th colspan="2">Situação 6 - CAF 7</th></tr>
<tr><th colspan="2">Síntese - onde queremos chegar</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ao somar ou subtrair duas frações de denominadores diferentes, sempre podemos tomar frações equivalentes a essas que possuam denominadores iguais multiplicando e dividindo a cada uma pelo denominador da outra, e assim realizar a soma ou subtração com as novas frações.</td></tr>
<tr><th>Slide</th><th>Guia</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Essa é uma atividade do CAF 7. Dada essa subtração de frações, pergunte aos alunos o que eles tem que fazer para efetuar essa operação. Como eles já trabalharam com o CAF, é possível que digam que deve-se igualar os denominadores. Pergunte se poderíamos apenas manter um dos denominadores, sem alterar os numeradores, e realizar a soma, o que é uma misconception comum. Queremos que entendam que há uma forma correta de "igualar os denominadores", que é utilizando frações equivalentes. Caso digam que basta somar "em cima e embaixo", relembre o que representa cada parte, numerador e denominador, usando a representação da própria atividade, para mostrar que não faz sentido somar "o tipo de parte", que resultaria em outro tipo de parte (sétimos). Peça que um aluno resolva a atividade no quadro.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Se necessário, medie o processo dizendo que, na primeira parte, estamos apenas representando as frações de cima no formato de barras. Na segunda parte, dividimos meios em quintos e quintos em meios. Isso é representado pelas setas, que levam a divisória lisa dos meios no inteiro dividido em quintos e as divisórias pontilhadas dos quintos para o inteiro divido em meios. Destaque que eles devem pintar o mesmo espaço que pintaram na primeira linha, e na verdade é como se estivéssemos simplesmente fazendo essas novas divisões nas próprias representações da primeira linha. Agora, que tipo de parte nós temos? Não são mais meios nem quintos, mas décimos, em ambas as representações. O aluno deve escrever a fração equivalente representada em cada caso e realizar a subtração. Tendo o mesmo tipo de parte, basta operar com os numeradores.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Recaptule o que foi feito e destaque que, ao somar ou subtrair frações, nosso objetivo sempre é trabalhar com o mesmo tipo de parte, pois é algo que sabemos operar. Para isso, dividimos meios em quintos e quintos em meios. Peça que os alunos leiam em voz alta o que está no slide. Isso vale para quaisquer frações, com quaisquer denominadores.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Em seguida, concluímos essa atividade exatamente com essa síntese, dando foco para o conceito de frações equivalentes.</td></tr>
</table>

Referências Bibliográficas

AHARONI, R. *Arithmetic For Parents: A Book For Grown-ups About Children's Mathematics (Revised Edition)*. [S.l.]: World Scientific, 2015. 7, 8, 11, 14

BARICHELLO, L. *An investigation into how low achieving secondary students learn fractions through visual representations*. Tese (Tese (Doutorado em Educação)) — University of Nottingham, Nottingham, 2019. 14

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018. 23

CABRAL, N. F. *Sequências Didáticas: estrutura e elaboração*. [S.l.]: SBEM/SBEM-PA, 2017. 20

CLARKE, D.; ROCHE, A.; MITCHELL, A. 10 practical tips for making fractions come alive and make sense. *Mathematics Teaching in the Middle School*, v. 13, n. 7, p. 372–380, 2008. 32, 33

DUBINSKY, E.; MCDONALD, M. A. Apos: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In: *The teaching and learning of mathematics at university level*. Dordrecht: Springer, 2001. p. 275–282. 32, 41

ENGELMANN, J. M.; TOMASELLO, M. Children's sense of fairness as equal respect. *Trends in Cognitive Sciences*, v. 23, n. 6, p. 454–463, 2019. 6

HUMPHREYS, C.; PARKER, R. *Conversas numéricas: estratégias de cálculo mental para uma compreensão profunda da matemática*. [S.l.]: Penso, 2019. 21, 22, 26

KANAMARU, A. T. Autonomia, cooperativismo e autogestão em freinet: fundamentos de uma pedagogia solidária internacional. *Educação e Pesquisa*, v. 40, p. 767–781, 2014. 14

KUPFERMAN, R. *Elementary School Mathematics For Parents And Teachers - Volume 2*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2017. 11, 14

MA, L. *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. [S.l.]: Routledge, 2010. 6

MONTHUBERT, B. Un nouvel outil pour les maths! un de plus? *L'educatuer*, v. 51, n. 2, p. 5–12, 1978. vii, 2, 3

MONTHUBERT, B. *Cahier de Calcul*. França: Institute Coopératif de Lécole Moderne, PERMF, 2002. 2, 14, 21

NCETM. *Teaching for Mastery - NCETM. Fractions*. 2024. Disponível em: <https://www.ncetm.org.uk/teaching-for-mastery/mastery-materials/primary-mastery-professional-development/fractions/>. Acesso em: 21 de fev. 2024. 12

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. As diferentes "personalidades"do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. *Boletim de Educação Matemática*, v. 21, n. 31, p. 79–102, 2008. 12

RAU, M. A.; ALEVEN, V.; RUMMEL, N. Blocked versus interleaved practice with multiple representations in an intelligent tutoring system for fractions. In: *Proceedings of the 10th International Conference on Intelligent Tutoring Systems*. Pittsburgh: Springer Berlin Heidelberg, 2010. p. 413–422. 4, 14

ROWLAND, T. The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v. 69, p. 149–163, 2008. 29

SOWDER, J. T.; WEARNE, D. What do we know about eighth-grade student achievement? *Mathematics Teaching in the Middle School*, v. 11, n. 6, p. 285–293, 2006. 2

VAN DE WALLE, J. A. *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. New Jersey: Pearson, 1990. 2, 11, 17, 30, 37, 40

VAN DE WALLE, J. A. *Matemática no Ensino Fundamental: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula*. [S.l.]: Penso Editora, 2009. 14

WEARNE, D.; KOUBA, V. L. Rational numbers. In: SILVER, E. A.; KENNEY, P. A. (Ed.). *Results from the seventh mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress*. Reston, VA: NCTM, 2000. p. 163–191. 2

WU, H. *Teaching fractions according to the Common Core Standards*. 2011. Disponível em: <https://math.berkeley.edu/~wu/>. Acesso em: 21 de fev. 2024. 12

WU, H. *Fractions, Decimals, and Rational Numbers*. 2014. Disponível em: <https://math.berkeley.edu/~wu/>. Acesso em: 21 de fev. 2024. 6, 7, 12, 27, 30

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Realização e Organização

ANPMat

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

Distribuição

Editora ANPMat