6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

SEMENTES MATEMÁTICAS

Uma coleção de atividades ricas, visuais e acessíveis

Leonardo Barichello

Rita Santos Guimarães

ANPMat

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

SEMENTES MATEMÁTICAS

Uma coleção de atividades ricas, visuais e acessíveis

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

SEMENTES MATEMÁTICAS
Uma coleção de atividades ricas, visuais e acessíveis

Leonardo Barichello
Rita Santos Guimarães

1ª edição
2025
Rio de Janeiro

ANPMat

Sementes Matemáticas: uma coleção de atividades ricas, visuais e acessíveis

Projeto gráfico: Gabriel Brasil Nepomuceno

Produção editorial: Editora Pi
www.editorapi.com.br | contato@editorapi.com.br | +55 21 97748-7208

Distribuição: Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
www.anpmat.org.br | editoraanpmat@anpmat.org.br

ISBN: 978-65-88013-30-4

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Barichello, Leonardo
Sementes matemáticas [livro eletrônico] : uma coleção de atividades ricas, visuais e acessíveis / Leonardo Barichello, Rita Santos Guimarães. -- Rio de Janeiro : ANPMat, 2025. -- (6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática)
PDF

Bibliografia.
ISBN 978-65-88013-30-4

1. Matemática (Atividades e exercícios) 2. Matemática - Estudo e ensino 3. Professores de matemática - Formação I. Guimarães, Rita Santos. II. Título. III. Série.

25-255159 CDD-370.71

Índices para catálogo sistemático:

1. Professores de matemática : Formação : Educação 370.71

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415

Sobre os autores

Leonardo Barichello
leobarichello@ime.usp.br
<www.mais.mat.br/leo>

Leonardo Barichello é professor do Instituto de Matemática e Estatística da USP e Doutor em Educação com interesse em desenvolvimento de recursos educacionais e em Computação na Educação Básica.

Rita Santos Guimarães é licenciada e bacharel em Matemática, mes tre em Ensino de Ciência Exatas e doutora em Educação. Atualmente é professora do Instituto de Matemática e Estatística da USP com interesse em formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática.

Rita Santos Guimarães
guimaraes.rita@ime.usp.br

Sumário

Lista de Figuras

Agradecimentos

Agradecemos aos estudantes, licenciandos e professores que participaram das nossas aulas e oficinas quando utilizamos as primeiras versões das “Sementes Matemáticas”. Como você poderá notar ao longo deste livro, cada uso de uma semente é único e gera discussões muito variadas, todos esses momentos de aplicação foram fundamentais para a elaboração das atividades e também deste texto. Muito obrigado por participarem!

1

Introdução

A proposta central deste livro é apresentar a coleção Sementes Matemáticas, composta por 30 atividades, disponíveis gratuitamente na internet <www.mais.mat.br/sementes>, voltadas para todos os níveis da Educação Básica, dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental ao Ensino Médio.

Essas atividades foram desenvolvidas para incentivar o ensino através da resolução de problemas, conforme delineado por Onuchic (1999). Além disso, a elaboração das Sementes Matemáticas surgiu três princípios norteadores, atividades acessíveis e com grande alcance, visuais e ricas, cujo entendimento constitui o segundo objetivo deste livro. O princípio "acessível e de grande alcance" garante que as atividades sejam acessíveis a todos os alunos, independentemente de seu nível de habilidade matemática inicial, enquanto o alcance refere-se ao potencial de desdobramentos para conteúdos e discussões mais avançados. Visual refere-se ao suporte oferecido por imagens dos próprios enunciados ou da possibilidade de diferentes representações que podem ser exploradas ao se engajar com uma das Sementes. Por fim, uma atividade rica é aquela que valoriza a fase de exploração e criação de conjecturas, possivelmente admite várias respostas e oferece diferentes oportunidades de aprendizagem ao longo de sua discussão.

Para tanto, ao longo do livro vamos apresentar, resolver e discutir em profundidade quatro atividades da coleção e também relatar experiências em diferentes níveis com as atividades escolhidas. Com descrições detalhadas, observações sobre a sala de aula e considerando contextos distintos, esperamos que essa apresentação permita aos leitores vislumbrar o potencial do uso das Sementes, dada a gama de oportunidades de discussão que atividades, com as características elencadas anteriormente, podem gerar. Neste momento, explicitaremos e problematizaremos os princípios que nortearam a criação das Sementes Matemáticas de modo que o professor não apenas esteja ciente dessas características, mas possa também utilizá-las para considerar outras atividades ou desenvolver as suas próprias.

Em seguida, discutiremos um pouco os diferentes usos que podem ser feitos das Sementes Matemáticas como um todo: motivação inicial; adquirir fluência; aplicação de um conteúdo; e investigação. Fechamos o livro com algumas considerações sobre as contribuições que elas podem trazer para professores de matemática bem como para formadores desses professores.

2

Desenvolvimento

2.1 Os princípios norteadores

A criação das Sementes Matemáticas partiu do pressuposto de que o ensino de matemática deve ocorrer através da resolução de problemas, como proposto por Onuchic (1999). A autora defende que:

- Não devemos ensinar para resolver problemas: em sua forma extrema, essa abordagem posiciona a resolução de problemas como uma prática que deve ocorrer apenas após o ensino dos conceitos e técnicas;
- Não devemos ensinar resolução de problemas: em sua forma extrema, essa abordagem enfatiza o ensino de estratégias gerais que possam ser aplicadas na resolução de qualquer problema, transformando esse processo em sequências de etapas que podem ser universalmente aplicadas;
- Devemos ensinar através da resolução de problemas: em termos práticos, essa postura opõe-se ao clássico modo de apresentação do conteúdo matemático na sequência: definição, exemplo, exercício. O que essa abordagem propõe é que essa sequência seja sempre iniciada com um problema cuja solução demande o conhecimento matemático que se deseja ensinar. A partir disso, o conteúdo pode ser sistematizado, explorado com mais detalhamento através de exemplos e, se for necessário, praticado para que os estudantes adquiram fluência em sua utilização.

Para que tal abordagem seja viável, é necessário conhecer bons problemas que sejam acessíveis para os estudantes a partir do que eles já sabem e que permitam a introdução dos conteúdos almejados. Esse tipo de efeito pode ser atingido com problemas de diversos tipos, dependendo do nível de ensino, do perfil dos estudantes envolvidos, da forma como o professor apresenta e discute a questão etc. Como argumentam Mason e Johnston-Wilder (2006), a atividade estudantil que resulta de uma questão proposta pelo professor depende de muitos fatores.

O ponto de partida para a criação das Sementes Matemáticas são justamente algumas características que defendemos serem especialmente propícias para esse tipo de aplicação. Essas características, a que chamamos de "princípios norteadores", serão apresentadas e justificadas nas seções subsequentes.

2.1.1 Primeiro princípio: Acessível e com grande alcance

Este princípio vem da expressão em inglês *low threshold, high ceiling*, cuja tradução em português seria "piso baixo e teto alto". Ela refere-se à ideia de que uma atividade pode ser acessível para estudantes com diferentes níveis de domínio de conteúdos matemáticos (*low threshold* ou piso baixo) e, ao mesmo tempo, permitir extensões e aprofundamentos que viabilizem a discussão de conteúdos mais avançados ou entendimentos mais profundos (*high ceiling* ou teto alto).

Boaler (2018) e Silva e Porto (2021) apontam essa como uma das características capazes de criar ambientes mais equitativos e encorajadores em aulas de matemática.

2.1.2 Segundo princípio: Visual

Representações visuais são normalmente apontadas como favoráveis à aprendizagem por um motivo: elas são capazes de servir como base para que consigamos transferir, para contextos mais abstratos, aquilo que já aprendemos em contextos concretos (BARICHELLO, 2019).

De maneira geral, boas representações visuais permitem-nos utilizar habilidades que desenvolvemos através da interação do nosso corpo com o mundo concreto, como mover, girar, sobrepor, justapor, contar etc, para iniciar a exploração de contextos mais abstratos. Não se trata apenas de uma analogia simples entre objetos, mas da possibilidade de transferir toda a lógica de funcionamento de um contexto concreto com o qual já temos familiaridade para um contexto mais abstrato que estamos desbravando.

Nesse sentido, apresentar problemas que partam ou encorajam o uso de representações visuais na sua resolução pode oferecer ferramentas acessíveis e poderosas tanto para a exploração inicial do problema quanto para sua resolução e, posteriormente, sistematização dos conteúdos envolvidos.

2.1.3 Terceiro princípio: Rica

A ideia de atividade rica dialoga com o conceito de problema, em oposição a ideias como as típicas listas de exercícios, em que as questões são muito semelhantes entre si ou a exemplos apresentados anteriormente, ou então selecionadas com o único intuito de promover a fluência com alguma técnica específica.

Entretanto, consideramos fundamental salientar o que entendemos por uma atividade rica.

Concordamos com a definição dada por Foster (2013) de que atividades ricas são aquelas que oferecem oportunidade para explorações independentes, múltiplas abordagens e criatividade. Acrescentamos ainda que ao usar atividades ricas, as respostas finais são muito menos interessantes do que as resoluções, e é a discussão e a apresentação, por parte dos estudantes, das resoluções que abrem portas para conteúdos e discussões matematicamente interessantes.

2.2 As Sementes Matemáticas

Nesta seção, apresentaremos algumas Sementes Matemáticas e comentaremos as suas características de forma mais aprofundada do que é feito nas postagens do Instagram ou no *site* onde disponibilizamos os arquivos com as atividades. Além disso, cada uma delas será acompanhada de um relato de uso em sala de aula priorizando a Educação Básica, mas incluindo também situações com licenciandos em matemática.

As atividades que serviram de ponto de partida para as sementes vieram de fontes diversas, tanto repositórios sistemáticos disponíveis *online* quanto do repertório geral dos autores. Sempre que possível, a fonte foi citada.

Antes de qualquer apresentação, é necessário apontar mais um fator que influenciou na criação das Sementes Matemáticas: o desejo de divulgá-las no formato de carrossel no Instagram. Isso implica a escolha de um formato fortemente baseado em imagens e textualmente sintético. Assim, cada proposta é composta por cerca de cinco imagens que introduzem a atividade e mais duas imagens com conteúdo textual trazendo questões para o estudante e para o professor. Esse formato de apresentação pode ser visto em <www.instagram.com/mais.educacional>.

É importante salientar que as sementes não vêm com as respostas para as perguntas propostas, nem para os estudantes nem para os professores. Inicialmente, essa omissão foi intencional para que o professor, antes de utilizar qualquer uma das sementes, precisasse se engajar com ela como estudante,

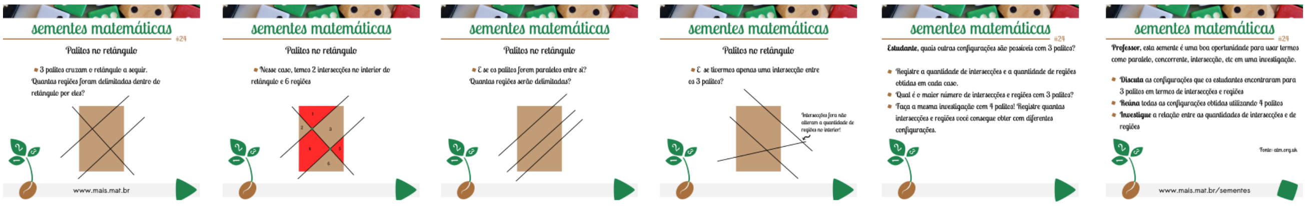


Figura 1: Exemplo das telas de uma semente no carrossel do Instagram. Telas inicias de apresentação seguidas de uma tela com perguntas para os estudantes e outra para os professores.

entendendo os contextos, cenários e perguntas antes de refletir, agora como professor, sobre os possíveis usos daquele material.

A escolha do Instagram como canal principal se deu essencialmente pela popularidade da rede em questão no momento em que o projeto foi concebido. Entretanto, a rede é bastante limitada em relação a formas de organização e inclusão de materiais complementares às imagens. Por conta disso, as atividades também foram disponibilizadas em um *site* que permite busca por nível de ensino, conteúdos e habilidades da BNCC (Base Nacional Curricular Comum) e ainda oferece em formato editável os arquivos que geraram as imagens disponibilizadas no Instagram. Esse formato de apresentação pode ser visto em <www.mais.mat.br/sementes/>.

2.2.1 Incêndio: a semente

Uma das sementes matemáticas que discutimos na oficina é chamada Incêndio.

Essa atividade propõe um cenário em que os estudantes devem simular a propagação de um incêndio florestal a partir de uma regra simples: a cada hora, as árvores que estão queimando espalham o fogo para as árvores adjacentes e, em seguida, apagam-se, por terem queimado completamente.

A questão ampla colocada aos estudantes refere-se à possibilidade de prever quantas árvores estarão queimando e quantas já terão se queimado após um certo tempo.

Essa exploração leva à criação de sequências numéricas a partir de um contexto com forte apelo visual (basta relacionar as árvores queimando ao perímetro da região atingida, e as que já se queimaram com a área "interna" dessa região) e admite múltiplas abordagens: pensando de modo recursivo ou no termo geral de cada sequência, relacionando as duas sequências ou trabalhando com cada uma delas independentemente etc.

Em termos de conteúdo matemático, essa atividade permite falar sobre: sequências numéricas no sentido amplo, pensando em como algebrizar os termos dessas sequências a partir de um padrão essencialmente geométrico; e termo geral ou soma dos termos de uma progressão aritmética.

Inclusive, no caso específico do contexto proposto nesta atividade, propusemos uma segunda Semente Matemática com nível maior de aprofundamento: em "Incêndio 2" sugerimos que os estudantes obtenham relações gerais ao invés de apenas valores numéricos para as diferentes sequências numéricas que podem aparecer no problema.

2.2.2 Incêndio: uma experiência

A semente Incêndio foi utilizada pelo primeiro autor deste texto como atividade introdutória para o tema sequências numéricas, que abria o conteúdo programático do 2° ano do Ensino Médio em duas

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

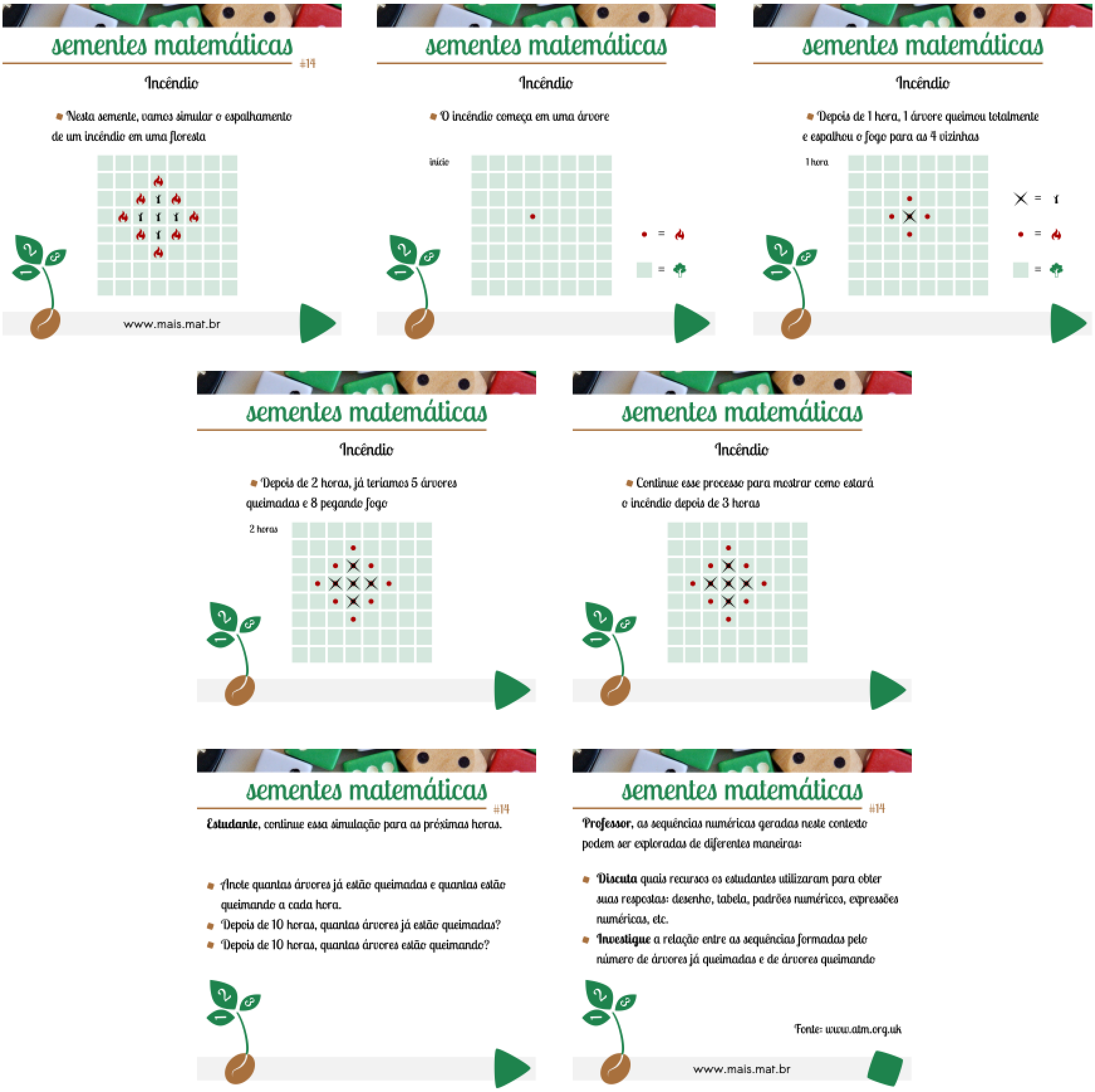


Figura 2: As telas de semente “Incêndio”

Fonte: <www.instagram.com/p/CGBF3pHFZvQ/>

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

turmas de uma escola particular em 2021. Tratava-se de duas turmas com cerca de 30 alunos em cada e, devido à pandemia, as aulas estavam ocorrendo em modo virtual e síncrono nesse período.

A introdução da atividade foi feita pelo professor explicando, a partir das imagens disponíveis, como funciona o modelo de propagação do incêndio, usando uma lousa digital, conforme mostrado nas imagens a seguir.

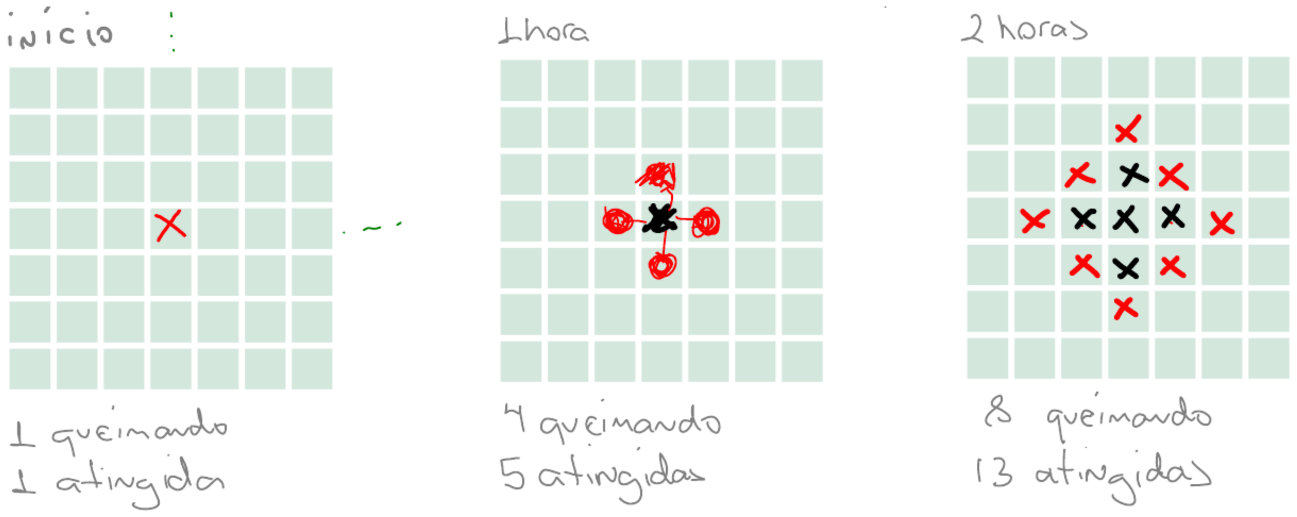


Figura 3: Imagens usadas para apresentar a semente Incêndio de forma remota para estudantes do 2° ano do Ensino Médio.

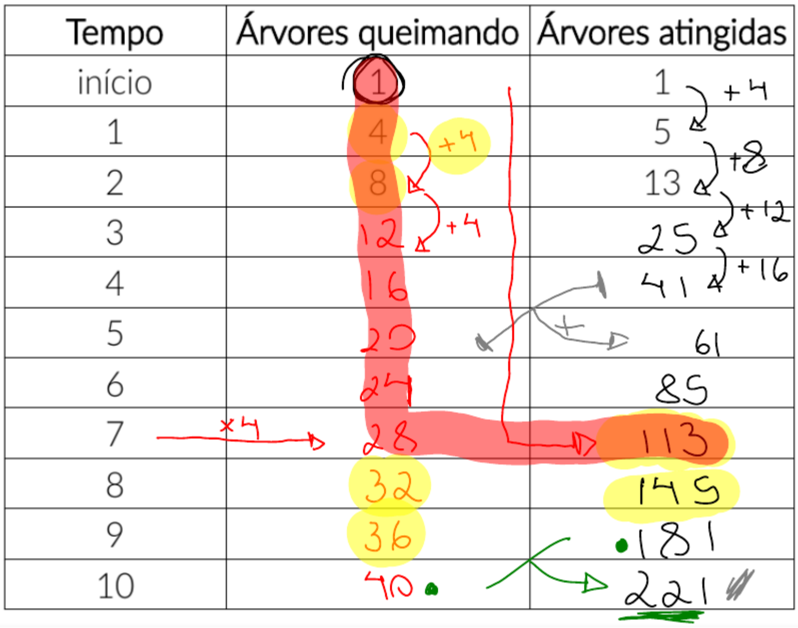
Isso feito, e dúvidas esclarecidas, o professor sugeriu aos alunos o uso de uma tabela, como a mostrada a seguir, para registrar os valores obtidos e para servir de base para as análises que exigiriam generalização dos padrões observados.

Preencha a tabela abaixo com os dados sobre o avanço do incêndio.

Tempo	Árvores queimando	Árvores atingidas
início	1	0
1	4	5
2	8	13
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Figura 4: Tabela sugerida pelo professor para registro das quantidades de árvores queimando e atingidas (queimadas + queimando).

Após algum tempo para que os alunos explorassem o contexto individualmente, o professor preencheu uma tabela igual à dos alunos em sua lousa digital e iniciou a discussão sobre os padrões que podem ser observados. A imagem a seguir é o resultado de cerca de 50 minutos de discussão sobre os diferentes padrões observados e sobre as diferentes formas de expressá-los. Note os rabiscos em cores sobre a tabela: cada cor ilustra um padrão ou forma de expressá-lo, cada um vindo de um estudante diferente.



Tempo	Árvores queimando	Árvores atingidas
início	1	1
1	4	5
2	8	13
3	12	25
4	16	41
5	20	61
6	24	85
7	28	113
8	32	145
9	36	181
10	40	221

Figura 5: Tabela preenchida com as observações dos estudantes, durante discussão mediada pelo professor.

Alguns dos padrões que foram observados pelos estudantes foram:

- Representado pela seta horizontal na linha da tabela com tempo = 7: o estudante notou que o número de árvores queimando é igual ao tempo transcorrido multiplicado por 4;
- Representado pelas setas de cima pra baixo em vermelho na coluna do meio: o estudante notou que o número de árvores queimando em um determinado momento é sempre 4 unidades a mais do que no momento anterior;
- Representado pelas setas em preto na terceira coluna: o estudante notou que a quantidade de árvores atingidas aumenta seguindo os múltiplos de 4;
- Representado pelas setas em cinza e verde, ligando valores da segunda e terceira colunas: o estudante notou que o número de árvores atingidas em um momento é igual ao número de atingidas no momento anterior mais o número de árvores queimando naquele momento;
- Representado pelo grifo em vermelho que desce pela coluna do meio: um estudante notou que a soma das quantidades de árvore queimando desde o início é igual ao número de árvores atingidas até o momento.

Cada uma dessas respostas veio espontaneamente dos alunos após a exploração da representação visual do incêndio se espalhando, potencializadas pela mediação do professor, que agia como um encorajador das respostas e como especialista incentivando, fazendo perguntas e complementando as ideias, algumas vezes pouco estruturadas, compartilhadas pela turma.

Na sequência dessa aula, o professor buscou sistematizar esses padrões em forma algébrica, aproveitando para explorar tanto a forma recursiva de alguns dos padrões como as não recursivas. A imagem a seguir mostra algumas das sistematizações realizadas. Veja que na frente de algumas das respostas estão os nomes das estudantes responsáveis.

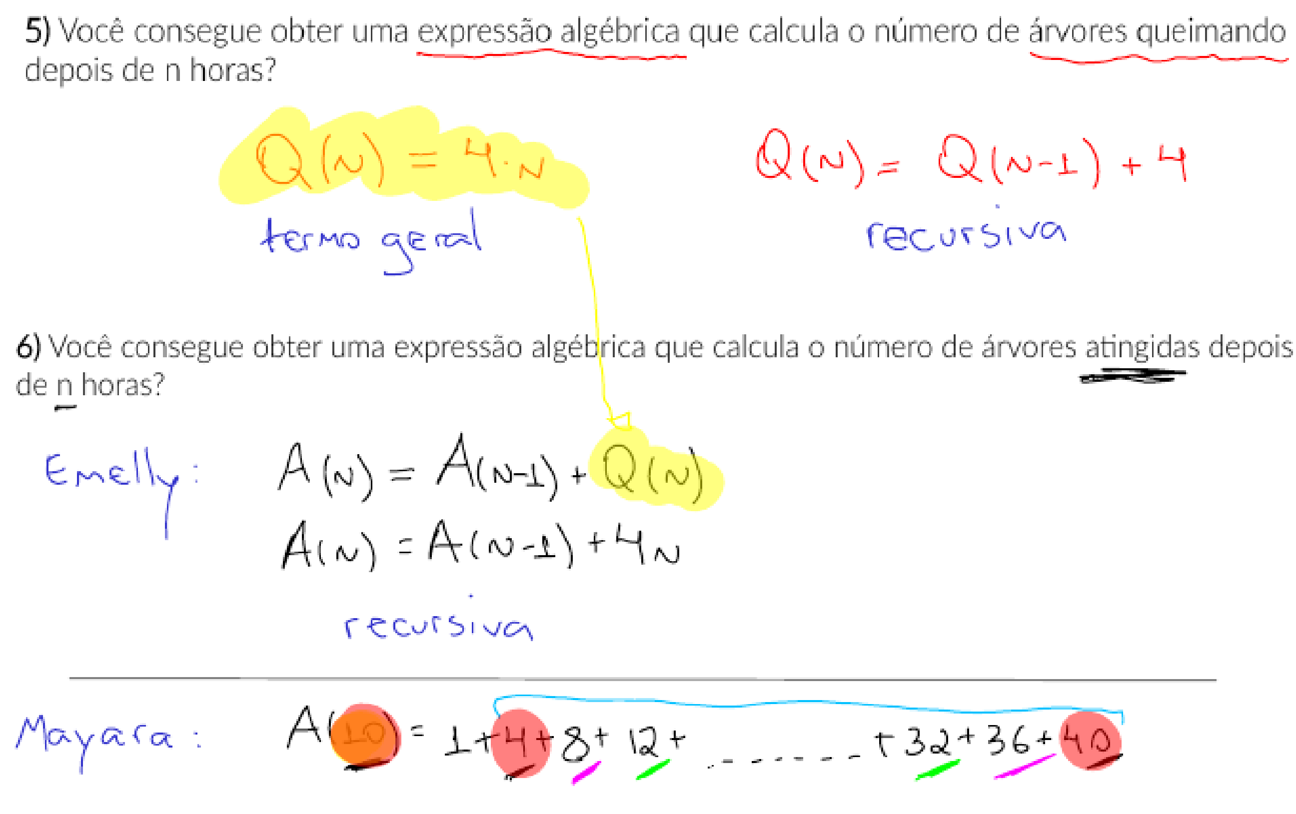


Figura 6: Sistematização realizada na aula seguinte, ainda em formato de discussão mediada, mas com foco em obter as expressões algébricas.

A partir da resposta da Mayara, o professor apresentou a ideia da soma de Gauss (vide o agrupamento sugerido em azul na parte de baixo da imagem anterior), chegando a abordar tópicos (soma de uma progressão aritmética) que seriam tipicamente deixados para o final do conteúdo sequências numéricas. Com isso, o problema foi dado como encerrado, e o professor partiu para uma apresentação mais sistemática de progressões aritméticas.

Durante esta experiência, um aspecto que se destacou foi o fato de diversos alunos terem participado ativamente da aula, contribuindo com valores para a tabela ou compartilhando padrões observados. Essa constatação representa a aplicação concreta do princípio do "piso baixo": vários alunos conseguem se envolver com a atividade, mesmo que tenha sido apenas através de desenhos que representassem literalmente cada etapa do processo, os quais foram registrados na tabela. Isso possibilita que, mesmo se um estudante não tenha conseguido identificar padrões por conta própria, todos tenham algum grau de familiaridade com os dados quando seus colegas compartilham as observações feitas.

Além disso, note que a riqueza da atividade concretiza-se na diversidade de respostas dadas pelos estudantes: relações recursivas, relações gerais ou mesmo relações que combinavam características de ambos os tipos (vide a resposta inicial dada pela Emelly na imagem anterior). Essa diversidade só ocorre se a atividade for rica o suficiente e se o professor conduzir a socialização dos dados de forma ampla, incluindo contribuições e buscando o valor de cada uma delas, por mais estranhas que possam parecer no começo.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Por fim, o princípio “com grande alcance” manifesta-se pelo quanto foi possível avançar em termos de conteúdo a partir de uma única proposta: desde sequências numéricas até soma de progressões aritméticas. A escolha de aprofundar cada um dos conteúdos que surgiram nas discussões da atividade deve se pautar pelas características da turma, currículo programado e objetivos educacionais, mas o fato de uma mesma atividade permitir esse “passeio” rompe, inclusive, a visão compartimentalizada do conteúdo matemático e permite que a atividade sirva como motivadora para tópicos que serão introduzidos no futuro. Após a apresentação de outras três sementes, discutiremos de forma estruturada algumas possibilidades de uso dessas atividades.

2.2.3 Zerando quadrados: a semente

A atividade chamada Zerando quadrados foi a primeira semente que elaboramos e ainda não tínhamos a tela do estudante, apenas a do professor. A seguir, as telas que apresentam a atividade.

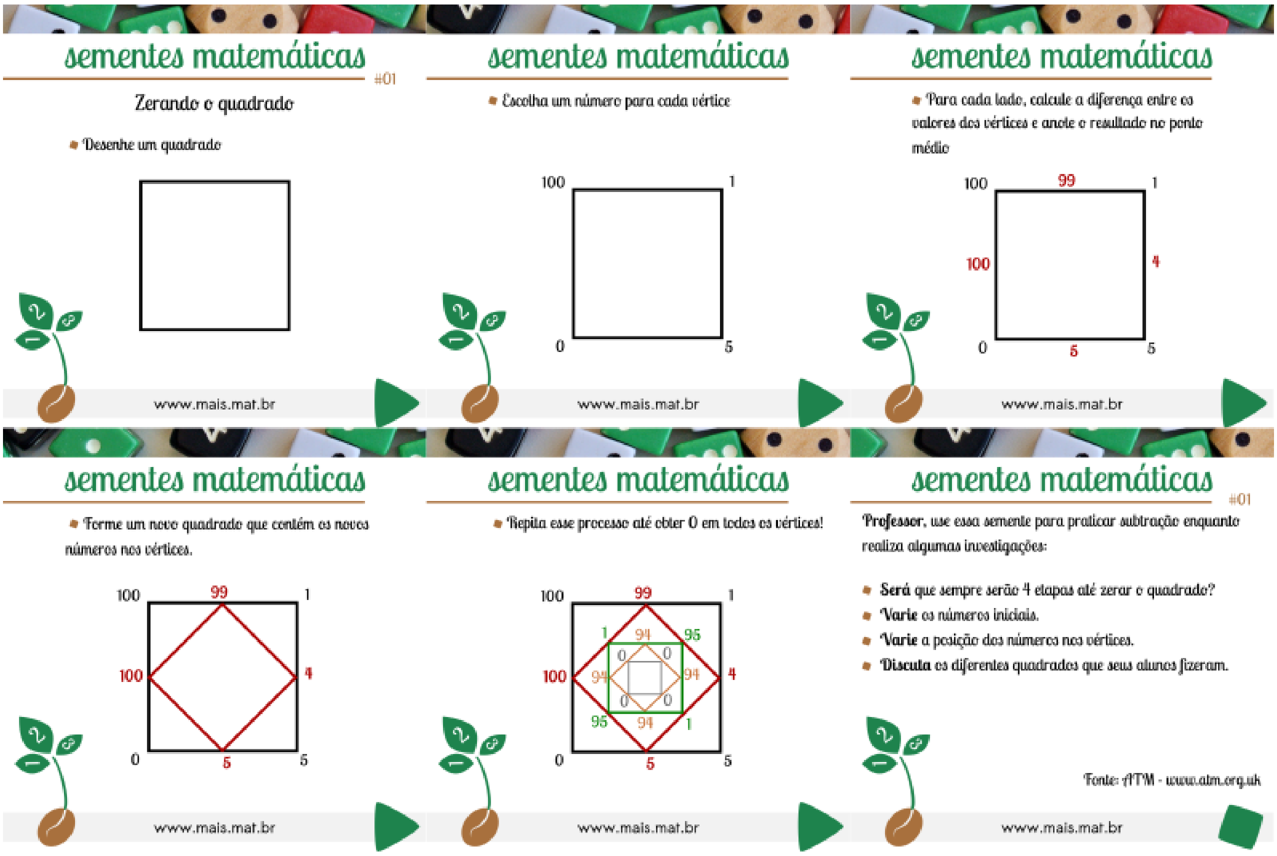


Figura 7: As telas de semente “Zerando quadrados”.

Fonte: <www.instagram.com/p/CCV9EL8jlnW>

Essa atividade propõe uma situação de investigação matemática de padrão numérico bastante simples, usando apenas números naturais e subtração. Os estudantes devem desenhar um quadrado (a forma geométrica em si não é relevante) e escolher quatro números naturais quaisquer, um para cada vértice do quadrado. A próxima etapa é calcular a subtração dos valores, dois a dois, que estejam em vértices adjacentes, sempre calculando a diferença positiva entre eles. O resultado deve ser escrito no ponto médio do lado correspondente. As quatro diferenças formarão um novo quadrado, como na imagem a seguir.

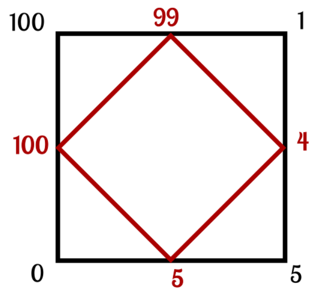


Figura 8: Obtenção do segundo quadrado, ligando os pontos médios do quadrado original.

O processo deve ser repetido diversas vezes, até que os valores das diferenças sejam todos zero. Este resultado deve ser pelo menos um pouco inusitado à primeira vista e a atividade consiste em instigar os estudantes a fazerem perguntas sobre a situação, buscando maneiras de respondê-las.

Algumas perguntas que devem emergir rapidamente, e que estão postas na própria atividade, são:

- Se mudarmos os números iniciais, o quadrado ainda zera?
- O exemplo dado nas imagens zera em 5 etapas. Serão sempre 5 etapas até zerar o quadrado?
- Se variarmos a posição dos números nos vértices, alguma coisa muda?
- Será possível criar um quadrado que zere em 6 etapas?

Em termos de conteúdo, para que se possa usar esta semente basta que os estudantes saibam subtração de números naturais e, ao mesmo tempo, as indagações colocadas acima já sugerem conteúdos como sequências numéricas e permutações.

Na próxima seção, apresentaremos como algumas perguntas podem levar as discussões para conteúdos específicos. Porém, um dos aspectos mais importantes dessa semente é a possibilidade de investigar uma situação estritamente matemática, mas que não apresenta uma única resposta e, mais ainda, naturalmente instiga novas perguntas.

2.2.4 Zerando quadrados: algumas experiências

Por se tratar da primeira semente disponibilizada, tivemos mais tempo para colecionar situações de uso desta atividade. Por isso, além de comentar sobre a discussão que tivemos na oficina que gerou este livro, vamos comentar alguns contextos variados onde o Zerando quadrados foi utilizado.

Anos iniciais do Ensino Fundamental

Uma possibilidade para estudantes que acabaram de aprender subtração com números de dois dígitos é oferecer alguns quadrados cujos números nos vértices apresentem apenas um dígito e, na sequência, oferecer outros quadrados incluindo números com dois dígitos.

Como aquecimento, pode-se solicitar que os estudantes criem quadrados e troquem entre si ou que utilizem números que façam parte do universo da turma: como o número na chamada, o total de colegas na turma, idades, número da casa, dia e mês de nascimento etc. Já em um segundo momento, pode-se pedir aos estudantes que tentem criar quadrados que demorem muito para zerar ou que zerem com uma quantidade definida de etapas.

Para atender a esses desafios, os estudantes terão que realizar muitas subtrações, promovendo a fluência com essa técnica mas dentro de um contexto mais rico do que uma simples lista. Além disso, eles poderão levantar hipóteses sobre o comportamento dos quadrados e explorar questões relacionadas que sejam colocadas pelo professor, ou seja, terão a oportunidade de explorar um problema estruturado e ainda assim muito rico.

Oficina 6º Simpósio da ANPMat

Durante a oficina oferecida, solicitamos que os participantes resolvessem o primeiro quadrado até zerar e na sequência, solicitamos que escolhessem outros números para os vértices e repetissem o processo. Isso bastou para que o clima de investigação fosse instaurado. Vale lembrar que o simpósio tinha um público de professores e futuros professores de matemática, o que já garante um certo interesse e uma possível predisposição para esse tipo de investigação. Em uma sala de aula com estudantes da Educação Básica, talvez seja necessário levantar questionamentos, instigar o espanto e sugerir outros exemplos para que eles adquiram maior familiaridade com a situação e possam notar a existência de outras questões.

Em pequenos grupos, os participantes começaram a investigar diversas perguntas, independentemente de serem as perguntas que apresentamos. Destacamos aqui algumas que poderiam ser usadas no aprofundamento de um conteúdo específico.

1. Quais permutações na ordem dos números ao redor do quadrado mantêm e quais alteram a quantidade de etapas necessárias para zerar um quadrado? Alguma dessas permutações resulta sempre no quadrado “mais demorado” ou no “mais rápido”?

2. Será que a paridade dos números iniciais determina a quantidade de etapas necessárias para zerar um quadrado? O que ocorre se forem usados apenas números primos?

3. Será que números que formam sequências numéricas específicas, como progressões aritméticas, geométricas ou números de Fibonacci, resultam em quadrados com algum comportamento comum?

4. É possível identificar padrões nos números obtidos nos quadrados formados logo antes de o quadrado zerar?

Todas essas perguntas foram espontaneamente levantadas pelos participantes da oficina e exploradas, dentro do que o limite do tempo permitiu, por eles. Alguns grupos preferiram testar casos específicos buscando por confirmações ou refutações de suas hipóteses, outros preferiram algebrizar suas hipóteses e tentar deduzir conclusões. De todo modo, a variedade das perguntas e a diversidade de abordagens já salienta a riqueza da atividade, mesmo entre professores de matemática.

Curso de Pensamento Computacional

Esta semente também foi utilizada em um curso de extensão *online* sobre Pensamento Computacional oferecido pelo primeiro autor para professores ou futuros professores de matemática. A intenção por trás dessa escolha era mostrar como algoritmos poderiam facilitar a proposição e investigação de hipóteses em torno do contexto proposto.

O mais direto dos algoritmos discutidos foi um que, a partir de um quadrado dado, repetia as etapas até zerá-lo. Esse algoritmo pode ser construído em qualquer linguagem de programação, mas também em uma planilha eletrônica, e o seu uso já permite testar exemplos que reforcem ou invalidem conjecturas.

É possível ir além, escrevendo um algoritmo que teste todos os quadrados gerados pela permutação dos números dos vértices de um quadrado inicial dado, registrando a quantidade de etapas necessárias para zerar cada um deles. Outra opção é escrever um algoritmo que crie quadrados aleatoriamente até encontrar algum que satisfaça certa propriedade (como zerar em uma quantidade definida de etapas).

Todas essas variações foram construídas e discutidas no curso em questão, entretanto, uma outra variação trazida por um cursista surpreendeu o professor: e se considerarmos triângulos, pentágonos ou hexágonos com números em seus vértices?

Note que a pergunta é bastante natural dado o contexto proposto. O cursista em questão estava plenamente convencido de que todo quadrado sempre zeraria e decidiu investigar se o mesmo vale para outros polígonos. Para tanto, ele criou em uma planilha eletrônica um algoritmo que repetia as etapas até que o polígono zerasse. Com auxílio dessa ferramenta, ele encontrou, para espanto dos cursistas, triângulos que nunca zeravam! Isso levou a uma discussão riquíssima sobre os motivos desses comportamentos diferentes e de que forma isso poderia ser sistematizado em demonstrações para os triângulos e quadrados que pudessem ser generalizadas para polígonos com mais lados.

O que queremos salientar com este exemplo é que a riqueza da semente pode ser potencializada não apenas pela condução do professor e engajamento dos alunos, mas também pelo uso de recursos adequados à atividade.

2.2.5 Pirâmide de números: a semente

Esta semente propõe uma investigação sobre padrão numéricos que podem servir como introdução à álgebra ou mesmo como uma aplicação para estudantes que já saibam lidar com equações. A semente é apresenta em duas versões que usam o mesmo contexto, mas que propõem perguntas diferentes, sendo a primeira para estudantes dos Anos Iniciais e a segunda para estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Trata-se de um arranjo especial de números que deve ser preenchido de acordo com duas regras: a partir da posição no canto inferior esquerdo, a linha mais de baixo deve ser preenchida somando se 5 unidades ao número à esquerda. Já as linhas seguintes devem ser preenchidas com a soma dos dois números logo abaixo de cada posição.

As perguntas sempre refere-sem ao preenchimento de pirâmides dadas com apenas uma das posições preenchidas. Porém, o que começa com uma atividade simples envolvendo somas, ganha ares de investigação quando o número dado não está no canto inferior esquerdo.

Esse tipo de questão pode ser resolvida por tentativa e erro ou por meios algébricos. Entretanto, mesmo nas abordagens envolvendo tentativa e erro, os estudantes naturalmente adotam estratégias que podem ser matematicamente ricas, como será discutido a seguir.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

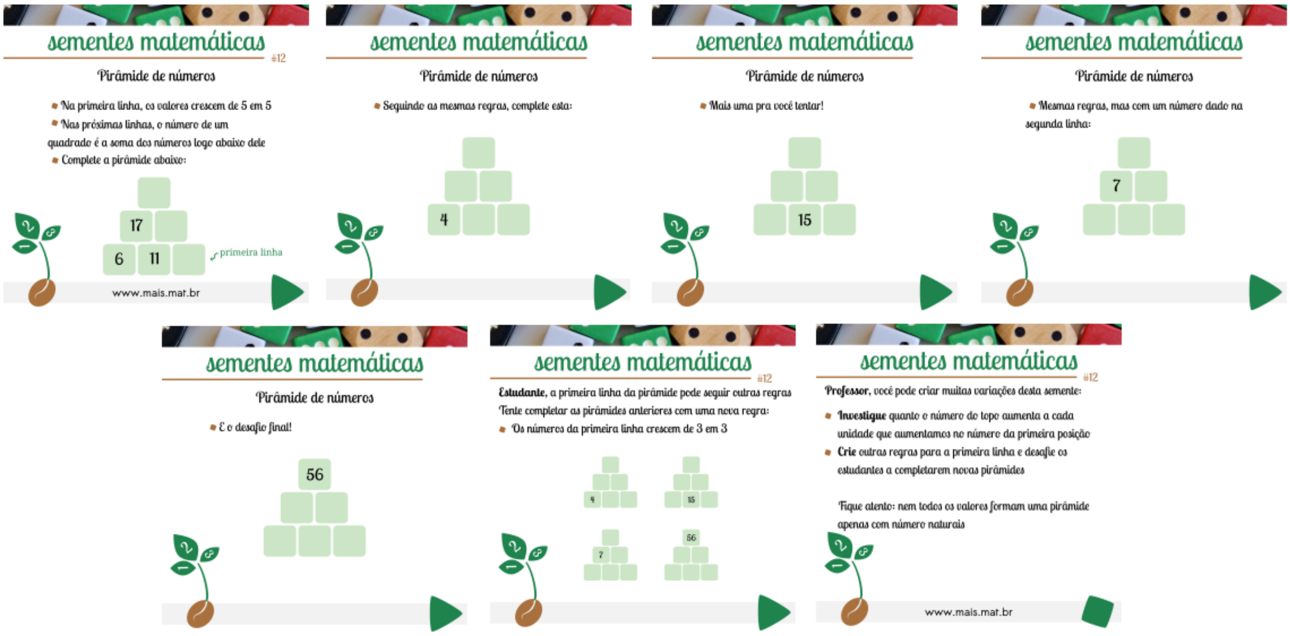


Figura 9: Imagens que compõem a Semente Matemática Pirâmide de Números 1.

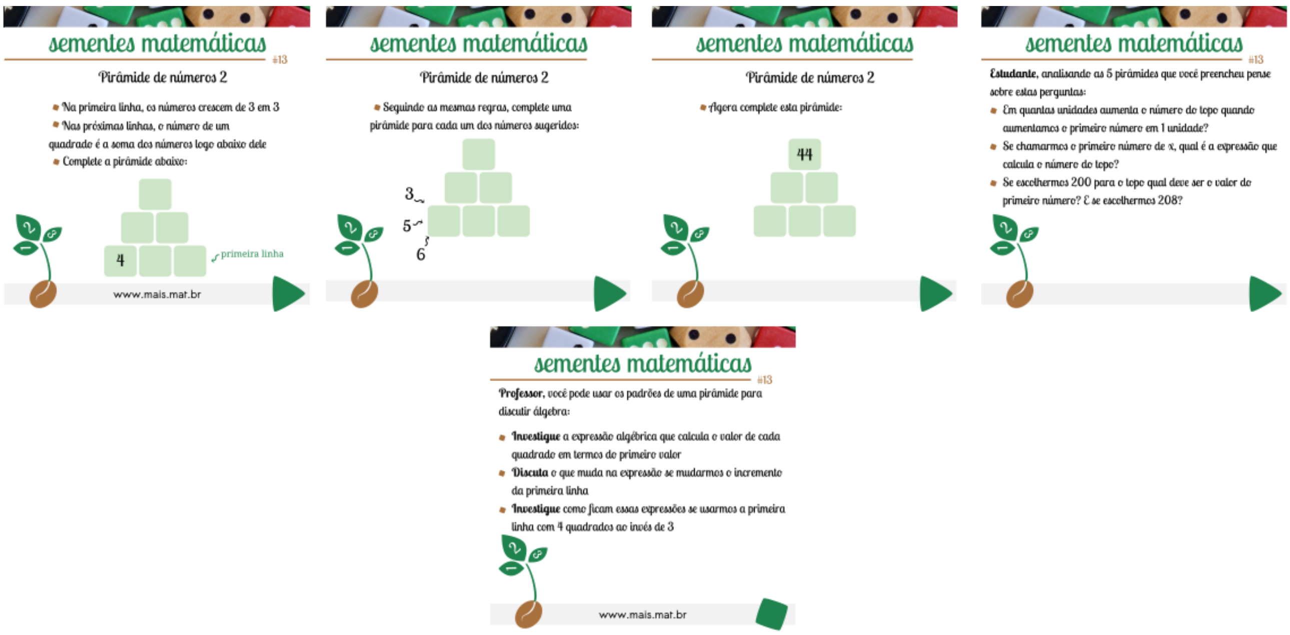


Figura 10: Imagens que compõem a Semente Matemática Pirâmide de Números 2

2.2.6 Pirâmide de números: uma experiência

Esta semente foi utilizada pelo primeiro autor com turmas de 7° e 8° anos do Ensino Fundamental de uma mesma escola pública. Enquanto que com o 8° ano o objetivo era retomar o conteúdo de equações lineares, o objetivo com o 7° ano era introduzir a ideia de algebrização e resolução de equações.

Nas duas turmas, a atividade foi introduzida a partir da primeira versão da semente, e a pergunta colocada foi simplesmente: complete as pirâmides dadas (com apenas um número preenchido, mas cada pirâmide com esse número em uma posição diferente).

O primeiro ponto que chamou a atenção do professor no uso dessa semente foi o engajamento dos estudantes, incluindo aqueles com mais dificuldade. A sensação era de que havia algum tipo de prazer estético ou de desafio genuíno na questão colocada. Apesar de se tratar de uma atividade descontextualizada, a questão era convidativa o suficiente para que todos os estudantes engajassem e a acessibilidade da atividade permitia que todos conseguissem realizar alguma ação que o levasse na direção de uma solução.

Nas duas turmas, o professor apresentou a proposta, explicou a regra de formação das pirâmides, exibiu várias pirâmides com apenas um número preenchido e deixou os estudantes tentarem preenchê-las, percorrendo a sala de aula encorajando, conferindo respostas, pedindo justificativas e incentivando ideias que fossem na direção de alguma generalização algébrica. Nas duas turmas, essa dinâmica ocupou uma aula. Na aula seguinte, o professor procurou socializar as soluções e observações individuais para a turma como um todo, agora sim dando a ênfase que mais lhe interessava por conta do conteúdo de cada turma.

No 7° ano, a ênfase foi na escrita e manipulação de expressões algébricas. Por exemplo, foi amplamente discutido relações como:

- $x + 5 + 5$ é a mesma coisa que $x + 10$;
- a relevância e necessidade de utilizar parênteses ao escrever $(x + 5) + (x + 10)$;
- $x + 5 + x + 10$ é a mesma coisa que $2x + 15$.

Na minha avaliação, o fato de os estudantes estarem muito familiarizados com os números envolvidos por terem resolvido várias pirâmides, serviu como argumento para validar essas equivalências. Em aulas posteriores, entramos na discussão sobre equações e suas resoluções.

Mesmo com esse objetivo algébrico em mente, vários estudantes fizeram observações interessantes sobre a pirâmide de números, como:

- na linha do meio, os números sempre têm o mesmo algarismo das unidades;
- o número do topo aumenta 4 unidades para cada unidade que aumentarmos no número do canto inferior esquerdo;
- o número do topo é sempre 4 vezes o número do meio da linha mais de baixo.

Essas mesmas observações surgiram com as turmas do 8° ano na aula em que os estudantes exploraram as pirâmides livremente. Isso reforça o caráter rico, acessível e de longo alcance da semente.

No 8° ano, porém, o objetivo era diferente. A turma já estava familiarizada com equações e o objetivo do professor era mostrar como essa ferramenta poderia ser usada para resolver uma pirâmide quando o número dado não era o do canto inferior direito e praticar um pouco a resolução de equações simples.

Por conta disso, depois de algebrizar e resolver as equações do problema original, o professor criou outros conjuntos de regras que levassem a padrões numéricos e expressões algébricas diferentes. Essa etapa foi importante para desconstruir algumas generalizações:

- Ao propor uma pirâmide em que os números da primeira linha aumentam de 4 em 4, a propriedade dos algarismos das unidades da segunda linha se perdia;
- Ao propor uma pirâmide em que os números da primeira linha dobravam, a propriedade que diz que o topo é 4 vezes maior do que o número do meio da base também se perde.

Essas variações foram importantes para mostrar a versatilidade da solução algébrica (por permitir aplicação em qualquer conjunto de regras de formação) em relação às propriedades numéricas específicas. Além disso, a cada variação proposta, um novo conjunto de pirâmides era proposto, levando os estudantes a resolverem várias equações, o que contribuiu para prática de fluência dos estudantes em resolução de equações.

2.2.7 Quadrado de expressões: a semente

A semente Quadrado de expressões foi uma das primeiras atividades disponibilizadas no Instagram. Por conta disso, e assim como o Zerando quadrados, essa semente não possui tela para o estudante. De todo modo, a atividade foi usada em diversos contextos e com diferentes públicos pelos autores.

A introdução da atividade deve ser feita com a apresentação de um quadrado cujos vértices possuem expressões algébricas. Além dos lados do quadrado, também traçamos as diagonais, obtendo um total de seis segmentos, ou seis ligações entre as expressões dos vértices. Interpretamos cada ligação como uma igualdade, ou seja, um lado que ligue o vértice $2x+2$ ao vértice $x+5$, gera a equação $2x+2=x+5$. A imagem a seguir traz todas as telas de apresentação da semente.

Inicialmente, é evidente a possibilidade de praticar a resolução de equações quando fornecemos quadrados "prontos", com as expressões nos vértices já determinadas.

Porém, solicitar que os estudantes criem as expressões para um conjunto dado de soluções irá instigar investigações além da resolução direta de equações. O exemplo apresentado nas telas da semente é de encontrar expressões para os vértices de modo que todas as soluções das equações obtidas sejam iguais a 2.

2.2.8 Quadrado de expressões: experiências diversas

Nesta seção vamos apresentar situações que ocorreram ao usarmos o Quadrado de expressões em contextos variados. Nosso foco não será em um determinado nível de ensino e sim nas perguntas que podemos fazer ao usar essa semente em sala de aula. A discussão visa dar suporte aos professores que gostariam de utilizar esta semente.

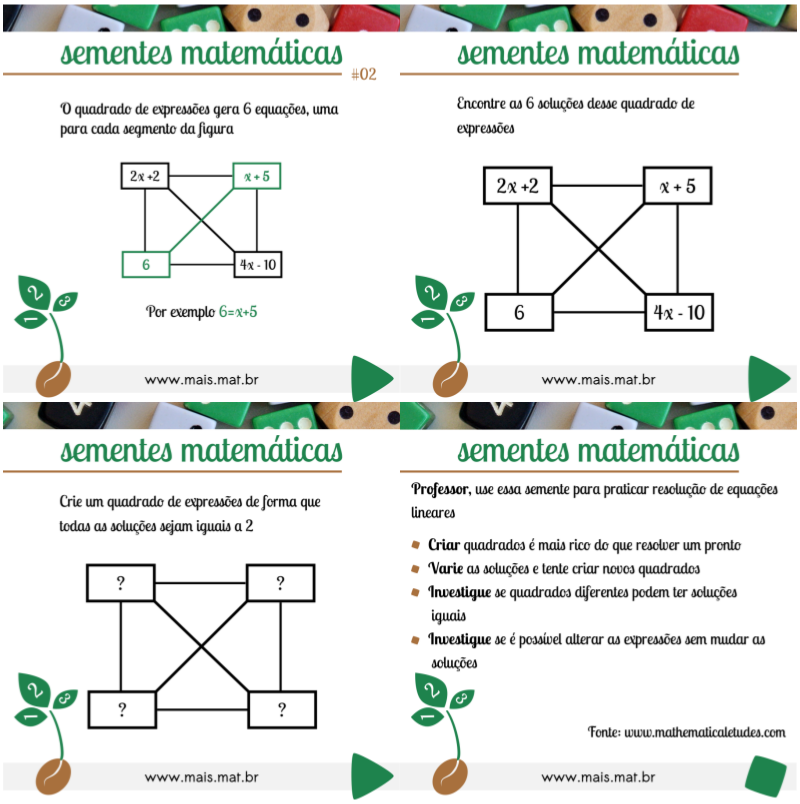


Figura 11: As telas de semente Quadrado de expressões.

Fonte: <www.instagram.com/p/CCodbZmDPX7/?img_index=1>.

Criar um quadrado cujas soluções sejam iguais a dois

Um primeiro erro comum é imaginar que todas as expressões dos vértices sejam iguais nessa situação. Esse deve ser um erro facilmente superado com a verificação de um exemplo (mentalmente ou resolvendo de fato uma equação $x - 2 = x - 2$, por exemplo). Apesar de soar como um erro de um estudante com pouco domínio do conteúdo, discutir sobre a situação de todas as expressões serem idênticas pode ser interessante e gerar conversas esclarecedoras sobre equações: $x - 2 = x - 2$ é verdadeiro para qualquer valor de x.

Depois de encontrar um quadrado que tenha sempre dois como solução, é possível alterar as expressões sem mudar essa solução? Essa pergunta fomenta o entendimento de que, alguns tipos de operações em equações não alteram a sua solução.

Em geral, investigar a obtenção das expressões para um determinado conjunto de soluções faz com que alguns estudantes logo notem que nem sempre foi possível "calcular" as expressões, e algumas foram obtidas após muitas "tentativas e erros". Essa já é uma mensagem interessante por si só, e deixa plantada a ideia de que devemos ter algum tipo de generalização. A próxima pergunta pode ajudar ainda mais a criar essa atmosfera onde as propriedades e a argumentação sobre equações é muito mais rica do que a resolução mecânica de uma lista de equações.

Criar um quadrado de expressões que tenha como soluções os valores: 0, 2, 4, 6, 8 e 10

Uma possível solução é: 10 ; $x+10$; $2x+6$; $4x-14$. Exitem diversas (infinitas) outras possibilidades. Um dos efeitos de solicitar que seja obtido um quadrado com essas soluções é que muitos estudantes devem notar que a sequência de soluções é uma progressão aritmética de seis termos e razão 2. Uma pergunta que deve surgir então é: “Posso obter uma forma geral para as expressões de um quadrado quando as soluções estiverem em PA de razão 2?”, “Seria necessário que a razão fosse 2?”, “Essa sequência numérica aparece de alguma forma na estrutura das expressões algébricas?”.

Investigar tais hipóteses torna a atividade extremamente ampla e desafiadora.

Dado um quadrado com um conjunto de soluções, crie um outro quadrado cujas soluções sejam o dobro

Esta questão foi discutida em uma oficina do 5° Simpósio da ANPMat e o relato da experiência, com detalhes sobre a solução, podem ser lidos no livro *“Atividades matemáticas: aspectos catalisadores para reflexão docente”* (GUIMARãES, 2023). Neste outro livro, o nome dado a essa atividade foi “Teia de expressões” e são apresentadas duas estratégias para se obter uma solução que tocam em conteúdos como mudança de variáveis.

Triângulos de expressões

Uma possibilidade para reduzir a quantidade de equações a serem resolvidas é mudar a figura inicial. Essa simplificação pode ser benéfica para que estudantes com alguma defasagem ainda possam acompanhar a atividade e as discussões, sem comprometer o apelo visual e generalizante da proposta, ou ainda para simplificar as conclusões que estejam se desenhando.

Generalização as expressões

Outra possibilidade de investigação é atribuir expressões genéricas aos vértices e buscar ajustar os coeficientes de forma a obter as soluções desejadas. Esse caminho exige o conhecimento de sistema de equações além da observação de que haverá algum grau de liberdade nas soluções.

Outra forma de generalizar é discutir se, dado um conjunto de soluções e vários quadrados diferentes que as satisfazem, é possível transformar um no outro? Ou seja, eles são, de alguma forma, equivalentes? Com esse viés, seria possível buscar transformações lineares que mantém as igualdades e investigar se é possível obter, através delas, os quadrados já obtidos?

Todas essas situações mencionadas ocorreram em discussões que consideravam apenas expressões lineares; ainda seria possível considerar outras expressões algébricas.

E é importante salientar que todas as observações e comentários citados anteriormente surgiram em discussões com estudantes, futuros professores ou professores de matemática, reforçando a riqueza da semente.

2.3 Usos possíveis

A discussão que traremos nesta seção não fez parte de forma consciente do processo de concepção das Sementes Matemáticas, mas emergiu após algumas experiências com outros professores de matemática.

Essa discussão refere-se ao uso em sala de aula que é possível se fazer de cada uma das sementes. Ela não depende exclusivamente das características da atividade em si, mas sim do momento curricular em que o professor decide fazer uso desta.

As possibilidades que vislumbramos são quatro, e cada uma delas será explicada e ilustrada a seguir. Porém, vale salientar que não entendemos que cada semente admita um único uso. Pelo contrário, diferentes usos podem ser promovidos pela forma como o professor propõe e conduz a realização da atividade. A discussão que colocamos aqui visa principalmente sensibilizar o professor para esses diferentes usos tanto para as Sementes Matemáticas quanto para outras atividades.

2.3.1 Motivação inicial

As Sementes Matemáticas podem ser usadas para motivar o estudo de um conteúdo. Nesse cenário, a semente é proposta antes de o conteúdo ser apresentado ao estudante e deve permitir que as questões postas possam ser exploradas a partir do que os estudantes já sabem, e, ao mesmo tempo, abrir caminho ou criar demanda para que o novo conteúdo seja então introduzido.

Um exemplo desse uso é o caso relatado com a semente Incêndio, no qual a atividade foi proposta antes dos conceitos relacionados a sequência numéricas, e gerou discussões que permitiram não apenas a introdução dos conceitos iniciais típicos deste conteúdo como também de conceitos que foram explorados mais adiante no curso.

2.3.2 Fluência

Algumas vezes professores esperam que os estudantes adquiram fluência com alguns procedimentos para que, a partir desses, possam acessar novos conteúdos sem que a sua atenção seja consumida pelos procedimentos. Tipicamente, essa fluência costuma ser buscada pelo professor através de "listas de exercícios", mas ela também pode ser atingida através de atividades ricas que promovam essa repetição como um aspecto secundário enquanto o estudante engaja, em primeiro plano, uma questão mais interessante ou provocativa (FOSTER, 2013).

Algumas sementes podem se prestar a essa função, como o Quadrado de expressões: enquanto investigam uma questão desafiadora (como criar um quadrado que admita um certo conjunto de soluções), os estudantes inevitavelmente precisarão resolver uma quantidade grande de equações.

A mensagem que é passada por esse tipo de estratégia é de que o procedimento de fato ocupa um lugar secundário, servindo como uma ferramenta para responder a questões que realmente interessam, e não como um fim por si só.

Entendemos que essa mensagem é coerente com o papel de uma ferramenta: não aprendemos a usar um martelo simplesmente para sabermos usá-lo, mas sim para construir algo. Enquanto que a lista de exercícios sugere que o objetivo final do estudo é dominar um procedimento com objetivo de utilizá-lo da forma correta e só.

2.3.3 Aplicação de um conteúdo

Neste uso, a semente é usada para introduzir uma aplicação de um conteúdo já estudado. Apesar de o momento curricular em que esse uso ocorre ser o mesmo em que ocorrem questões do tipo "exercícios de aplicação", o uso de uma semente para esse fim garante uma experiência mais rica ao estudante, graças aos princípios norteadores.

Um exemplo de semente que nos parece muito adequada a esse uso é o V numérico 2, uma semente que propõe um problema de contagem envolvendo padrões numérico e paridade.

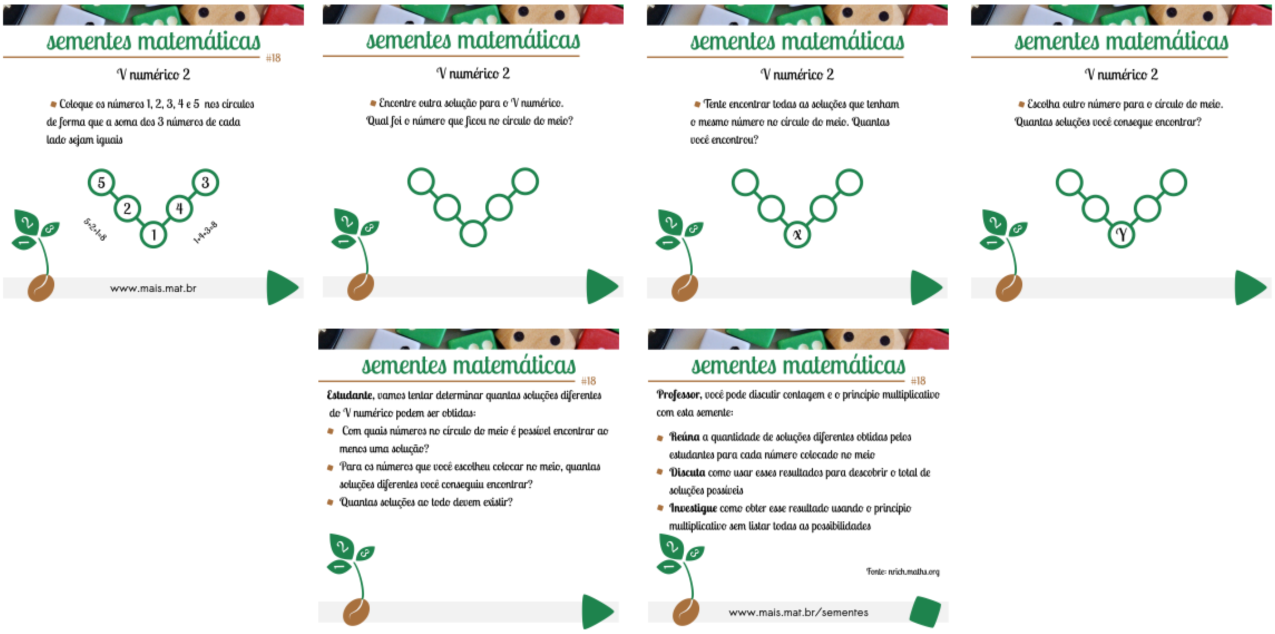


Figura 12: Telas da semente V numérica 2.

Disponível em <www.instagram.com/p/CHJh2ekDVj7>

Não nos parece sensato propor uma atividade como essa para estudantes que ainda não tenham aprendido ao menos as ideias gerais do princípio multiplicativo, uma vez que a sua resolução depende da percepção de uma série de limitações impostas pelo "formato" sugerido. Ao mesmo tempo, não se trata de um "exercício de aplicação" de algum conteúdo que tenha sido estudado, já que a resolução também depende da percepção de propriedades dos números envolvidos (paridade) que não são claras a partir da formulação das perguntas.

Nesse sentido, a semente oferece uma oportunidade para aplicar conceitos estudados sem recair em questões repetitivas.

2.3.4 Investigação

O último uso que vislumbramos para as sementes é o de criar um ambiente mais focado em uma investigação do que em conteúdos específicos. Nesses casos, o professor está buscando um ambiente em que os estudantes possam levantar conjecturas, testá-las, procurar padrões, buscar generalizações, sem se limitarem a conteúdos específicos.

Um bom exemplo de semente que se presta a esse uso é o Zerando quadrados. Embora essa semente possa ser usada para promover fluência com subtrações ou possa ser direcionada para que os estudantes foquem em outros conteúdos como simetrias ou sequências numéricas, a sua formulação sugere e facilita investigações menos previsíveis, como foi relatado na seção em que apresentamos algumas experiências com essa semente.

3

Considerações finais

3.1 Para professores

As Sementes Matemáticas são apenas uma de tantas coleções que buscam oferecer questões que tornem a aprendizagem de matemática mais atraente. Assim, espera-se que esse tipo de abordagem seja capaz de aumentar o engajamento dos estudantes e, consequentemente, melhorar a sua aprendizagem.

Nesse sentido, as atividades que apresentamos e discutimos nesta oficina aproximam-se, tanto em termos da natureza das atividades propostas quanto em termos de princípios norteadores, de outras iniciativas e coleções como:

- as atividades sugeridas pelo projeto Mentalidades Matemáticas <www.mentalidadesmatematicas.org.br>;
- os exemplos oferecidos pelo projeto Mathematical Etudes <www.mathematicaletudes.com>;
- boa parte do amplo acervo do *site* Nrich <www.nrich.maths.org/frontpage>;
- os vídeos oferecidos pelo projeto Math Snacks <www.youtube.com/watch?v=Jk7OERIsGCk&ab_channel=AssocTeachersMaths>, entre outros.

Do ponto de vista da formação de professores, consideramos esse tipo de iniciativa importante para ampliar o acervo de professores de matemática ao buscarem opções para suas aulas, mas não apenas por isso. Consideramos fundamental que sejam discutidos os princípios que fundamentam a elaboração de tais atividades para que os professores tenham clareza sobre as suas potencialidades e possam decidir, de forma autônoma, o que desejam utilizar em suas aulas ou criar suas próprias atividades alinhadas às demandas de suas turmas ou dos currículos que praticam em suas escolas.

3.2 Para formadores de professores

Na formação de professores, apresentar e considerar os princípios (vide seção na página 4) e os usos possíveis (vide seção na página 24) das sementes pode criar oportunidades para que sejam desenvolvidas habilidades essenciais para a profissão. Parece-nos fundamental que futuros professores sejam capazes de considerar atividades que pretendem usar em sala de aula de acordo com seus objetivos e baseados em resultados científicos já comprovados.

A discussão e reflexão do professor sobre a sala de aula e o conteúdo são ações que podem promover o desenvolvimento e aprendizagem docente e devem ser incentivados (CLARKE, 1994; BORKO, 2004; SMITH; WILLIAMS; SMITH, 2005; JAWORSKI, 2008). Em especial, durante a formação inicial, criar tais momentos em um ambiente seguro e guiado por uma pessoa experiente pode contribuir para o desenvolvimento de tais habilidades.

Guimarães (2023) apresenta um exemplo de como foi possível promover tais discussões em disciplinas de um curso de licenciatura em *matemática. O livro, Atividades matemáticas: aspectos catalisadores para reflexão docente*, apresenta fundamentação teórica de oito aspectos que dialogam com os princípios e os usos apresentados neste texto e, na sequência, relata como isso foi incluído em duas disciplinas de graduação da licenciatura em matemática da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp).

Finalizamos este texto apontando que a discussão das Sementes Matemáticas por professores ou futuros professores de matemática tem grande potencial, por conta dos princípios norteadores, de promover tanto o conhecimento profundo de matemática elementar, como proposto por Ma (1999), sem que seja necessário conhecimento de conceitos, ferramentas e procedimentos avançados. Tal característica alinha-se ao que autores apontam como conclusões que deveriam ser tidas como definitivas dentro da área de formação de professores: ensinar para futuros professores de matemática conteúdos que não estejam diretamente ligados à sala de aula é um erro (HOOVER *et al.*, 2016).

Referências Bibliográficas

BARICHELLO, L. *An Investigation into How Low Achieving Secondary Students Learn Fractions through Visual Representations*. Tese (Doutorado) — University of Nottingham, Nottingham, 2019. 4

BOALER, J. *Mentalidades Matemáticas: Estimulando o Potencial dos Estudantes por Meio da Matemática Criativa, das Mensagens Inspiradoras e do Ensino Inovador*. Porto Alegre: Penso, 2018. 4

BORKO, H. Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational Researcher*, v. 33, n. 8, p. 3–15, nov 2004. 23

CLARKE, D. Ten key principles from research for the professional development of mathematics teachers. In: AICHELE, D. B.; COXFORDS, A. F. (Ed.). *Professional Development for Teachers of Mathematics*. Reston, Va: NCTM, 1994. p. 37–48. 23

FOSTER, C. Mathematical Études: Embedding opportunities for developing procedural fluency within rich mathematical contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, n. March, p. 1–9, 2013. 5, 20

GUIMARãES, R. S. *Atividades Matemáticas: Aspectos Catalisadores para Reflexão Docente*. Rio de Janeiro, RJ: ANPMat, 2023. 19, 23

HOOVER, M. *et al.* Making progress on mathematical knowledge for teaching. *The Mathematics Enthusiast*, v. 13, n. 1, 2016. 24

JAWORSKI, B. Building and sustaining inquiry communities in mathematics teaching development: Teachers and didacticians in collaboration. In: WOOD, T.; KRAINER, K. (Ed.). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education Volume 3*. Rotterdam: Sense Publishers, 2008. p. 309–330. 23

MA, L. *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1999. 24

MASON, J.; JOHNSTON-WILDER, S. *Designing and Using Mathematical Tasks*. Londres: Tarquin, 2006. 4

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Ed.). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: UNESP, 1999. 2, 4

SILVA, E. F. S. E.; PORTO, J. F. B. *As Cinco Práticas de Mentalidades Matemáticas*. 1. ed. Belém: Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica, 2021. 4

SMITH, S.; WILLIAMS, S.; SMITH, M. A process model for change in elementary mathematics teachers' beliefs and practices. In: LLOYD, G. M. e. a. (Ed.). *Proceedings of 27th PME-NA*. Roanoke: [s.n.], 2005. Em: Psychology of Mathematics Education. 23

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Realização e Organização

ANPMat

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

Distribuição

Editora ANPMat