6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

NOTAS DE AULA PARA ANÁLISE REAL

Uma abordagem integrada

Diogo Sampaio da Silva

Flávia Morgana de Oliveira Jacinto

ANPMat

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

NOTAS DE AULA PARA ANÁLISE REAL

Uma abordagem integrada

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

Presidente:
Marcela Luciano Vilela de Souza

Vice-Presidente:
Sérgio Augusto Amaral Lopes

Diretores:
Ana Luiza de Freitas Kessler
Aroldo Eduardo Athias Rodrigues
Raquel Bodart
Sumaia Almeida Ramos

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Comissão Organizadora:
Ana Luiza de Freitas Kessler
Carmen Vieira Mathias
Edson Sidney Figueiredo
Karine Faverzani Magnago
Lidiane Buligon
Marcela Luciano Vilela de Souza
Renata Magarinus
Sumaia Almeida Ramos
Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum

Comitê Científico:
Ana Luiza de Freitas Kessler
Carmen Vieira Mathias
Claudia Candida Pansonato
Janice Rachelli
Marcela Luciano Vilela de Souza
Renata Magarinus

Comitê Editorial:
Ana Luiza de Freitas Kessler
Aroldo Eduardo Athias Rodrigues
Fábio Simas
Jaqueline Molon
Leonardo Barichello
Letícia Rangel
Marcela Luciano Vilela de Souza
Mateus Gianni Fonseca
Raquel Bodart
Sérgio Augusto Amaral Lopes
Sumaia Almeida Ramos
Vitor Amorim

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

NOTAS DE AULA PARA ANÁLISE REAL

Uma abordagem integrada

Diogo Sampaio da Silva
Flávia Morgana de Oliveira Jacinto

1ª edição

2025

Rio de Janeiro

ANPMat

Notas de aulas para Análise Real: Uma abordagem integrada

Copyright © 2025 Diogo Sampaio da Silva e Flávia Morgana de Oliveira Jacinto

Direitos reservados pela Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica.
A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Projeto gráfico: Gabriel Brasil Nepomuceno

Produção editorial: Editora Pi
www.editorapi.com.br | contato@editorapi.com.br | +55 21 97748-7208

Distribuição: Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
www.anpmat.org.br | editoraanpmat@anpmat.org.br

ISBN: 978-65-88013-32-8

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Silva, Diogo Sampaio da
Notas de aula para Análise Real [livro eletrônico] : uma abordagem integrada / Diogo Sampaio da Silva, Flávia Morgana de Oliveira Jacinto. -- Rio de Janeiro : ANPMat, 2025.
-- (6° Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática)
PDF

ISBN 978-65-88013-32-8

1. Matemática - Estudo e ensino I. Jacinto, Flávia Morgana de Oliveira. II. Título. III. Série.

25-263331 CDD-510.7

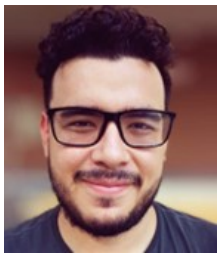
Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415

6° Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Sobre os autores



Diogo Sampaio da Silva
sampaiodiogo.dasilva@gmail.com

Natural de Manaus, Amazonas. Licenciado em Matemática na Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Atualmente foca na área de Matemática Pura, com ênfase em Análise e Topologia e na área de Matemática Aplicada, especialmente Matemática Fuzzy. Atualmente Mestrando no Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGM) da UFAM. Também interessado na produção de materiais didáticos e debates sobre formação de professores.

Flávia Morgana de Oliveira Jacinto
morgana@ufam.edu.br

Nascida em Manaus, capital do Amazonas, cursou Licenciatura, Bacharelado e Mestrado em Matemática na Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Posteriormente, obteve o grau de Doutora em Engenharia de Sistemas e Computação pelo PESC/COPPE da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Atua como professora em dedicação exclusiva no Departamento de Matemática da UFAM em Manaus desde 1992. Ao longo desse tempo tem vivenciado o desenvolvimento da Matemática no estado, e como parte do processo de consolidação, leciona disciplinas e orienta alunos em nível de graduação dos cursos de ciências exatas e áreas afins, bem como em nível de pós-graduação em Matemática nos programas de mestrado e doutorado da UFAM. Atualmente, também se dedica a projetos e ações que promovem uma maior participação feminina nas áreas de STEM.

Sumário

Sobre os autores **ii**

Prefácio **viii**

Agradecimentos **x**

Lista de símbolos **2**

1 Introdução **3**

2 Por que estudar Análise Real de forma integrada: Algumas reflexões **6**
2.1 A Análise Real e suas muitas rotas 7
2.2 Experiência dos autores 11

3 Como estudar Análise Real de forma Integrada: Nossa proposta **14**
3.1 Conjuntos e Funções 15
3.2 Números Naturais 21
3.3 Números Reais 30

4 Considerações Finais **44**

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Lista de Figuras

1 Apresentação padrão dos tópicos de um curso de Análise Real. 7
2 Ementa do curso de Análise Real. 13
3 Resumo ilustrado sobre introdução aos conjuntos e suas operações. 16
4 Resumo ilustrado sobre introdução às funções. 17
5 Os Axiomas de Peano. 23
6 O Princípio de Indução e suas equivalências 27
7 Números naturais e a noção de enumerabilidade. 29
8 A reta real como corpo ordenado completo 31
9 Concepções equivalentes da completeza da reta real 39

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Prefácio

Dentre os muitos tópicos a serem discutidos sobre a formação de professores de Matemática, um que permanece atual há muitos anos é a aparente falta de conexão entre o que se estuda nas universidades e a prática em sala de aula. Como a Análise Real é uma das áreas da Matemática mais emblemáticas do ensino superior, optamos por apresentar em um minicurso nossa visão de sua importância e como propomos inseri-la em cursos de licenciatura.

Nossa proposta consiste em ensinar Análise Real, discutindo em cada assunto suas possíveis conexões com o ensino básico, sua história, e como este assunto ilumina discussões sobre a própria Matemática. Deste modo, propomos desenvolver Análise Real de forma integrada ao ensino da Matemática, bem como a tópicos de sua História e Filosofia.

Assim, nosso trabalho surge de um projeto voluntário dos autores de escrever Notas de Aula baseadas em cursos ministrados de Análise Real, sob essas mesmas diretrizes. Inicialmente, muitos alunos têm dificuldades com a redação matemática formal, além das particularidades do raciocínio axiomático-dedutivo, e com isso em mente, começamos dos objetos fundamentais da Análise Real: Conjuntos Numéricos e Funções. O texto em si é apenas citado neste trabalho, pois assim como no minicurso, o foco não é a nossa produção das notas em si, e sim os motivos que nos levaram a fazê-las e nossa experiência durante o processo.

Diogo Sampaio da Silva
Flávia Morgana de Oliveira Jacinto

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Agradecimentos

Este é um trabalho que deve muito a muitas pessoas. Tudo principia no curso de nivelamento em Análise Real ofertado pela Universidade Federal do Amazonas. A iniciativa de criar notas sobre essa disciplina veio do saudoso Professor Nilomar Vieira de Oliveira.

Dentre os meus colegas deste curso que me auxiliaram com sugestões, correções e discussões sobre tudo que se apresenta aqui, não posso deixar de mencionar Ana Beatriz, Maria Luísa, Clenilton Gomes, Beatriz Albuquerque e especialmente Gleison Stanlley e Julia Braga, que leram e releram atenciosamente as notas, sempre ajudando com suas observações, questões e correções. Essa mesma Julia tem sido uma grande companheira de estudos e, principalmente, uma ótima amiga, com quem partilhei longas discussões não só sobre Análise Real, mas também seu papel em nossas formações como professores de Matemática. Destaco também amigos que auxiliaram na escrita deste texto respondendo minhas várias questões sobre suas experiências como alunos e como futuros professores. Entre esses estão Giovanna Lucena, Hellen Figueiredo, Marcos Paulo, Felipe Guimarães, Julio Camilo e Katrine Silva.

Essa mesma Katrine que, além de ser a melhor amiga que poderia ter e, orgulhosamente, minha companheira de vida sem a qual eu não seria o mesmo, também foi a pessoa que me apresentou História e Filosofia das Ciências. Além de ter sido ela quem me introduziu a jornada, seu orientador, Professor Wanderley Vitorino, acolheu-me e tem me conduzido calorosamente, motivos pelos quais não poderia deixar de ser grato a ele, com quem espero ainda aprender e produzir muito mais.

Agradeço ainda aos meus colegas do PET Matemática da UFAM, especialmente Igor Souza, razão de eu ter feito parte deste programa excelente. Volto a destacar Maria Luísa, Julia e Gleison, que juntamente com Igor proporcionaram-me várias horas de estudo muito proveitosas. Agradeço especialmente ao Professor Roberto Prata, tutor do PET Matemática e meu orientador, praticamente meu pai acadêmico.

Falando em professores, não posso deixar de mencionar o Professor Marcus Marrocos que serve de inspiração em suas aulas, além de sempre ter demonstrado interesse neste trabalho, bem como o Professor Thiago Alves que foi quem me fez apaixonado pela Matemática universitária. Destaco ainda meus professores do ensino médio, Lindomar Rodrigues e Marcos Rabelo, que além de me inspirarem como exemplo e, claramente, me ensinarem muita Matemática, foram ainda figuras próximas que encontrei apoio mesmo fora de sala de aula.

Diogo Sampaio da Silva.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

O presente livro é fruto de um Nivelamento para o curso de Mestrado do Programa de Pós-graduação em Matemática da UFAM, durante o qual motivada tanto pela ementa, quanto pelas riquíssimas observações e contribuições dos alunos da turma, passei a experimentar e registrar juntamente com o Diogo todo o material preparado para cada aula.

Assim, a ideia da produção de Notas de Aulas que serviriam de material para consulta e estudos dirigidos foi se materializando, sempre procurando cobrir o conteúdo do que costuma ser apresentado num curso de Análise, mas com estilo próprio tanto na ordem de apresentação, quanto na fundamentação teórica que levaram à construção de demonstrações de resultados, por vezes até possivelmente "menos elegantes" do que aqueles encontrados na literatura clássica, porém mais naturais e adequados didaticamente aos objetivos do curso.

Cabe dizer que essa ideia de produzir notas de Análise já havia sido plantada pelo saudoso colega de departamento, o caro Professor Nilomar Oliveira, e várias vezes (muitas mesmo) relembrada pela colega Professora Karla Tribuzy, mas para outras disciplinas. Desse modo, externo meus agradecimentos a esses colegas pelo incentivo inicial para a realização deste trabalho, bem como a cada estudante dos cursos de nivelamento que já ministrei por terem ajudado com todas as perguntas feitas e com a participação efetiva nas aulas. Agradeço também a todos e todas que contribuíram na revisão dessas notas, direta ou indiretamente, nas pessoas de Beatriz Albuquerque, Julia Braga e Gleison Stanlley.

Finalmente agradeço a ANPMat pela oportunidade de, por meio desta publicação, serem tais notas úteis a estudantes universitários e a professores de Matemática

Flávia Morgana de Oliveira Jacinto.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Lista de símbolos

- **Conectivos Lógicos**

  $\wedge$: Conjunção entre proposições, lê-se "*e*".

  $\vee$: Disjunção entre proposições, lê-se "ou".

  $\neg$: Negação de uma proposição, lê-se "não".

  $\Rightarrow$: Implicação de proposições, lê-se "implica", ou dizemos que "se (primeira proposição), então (segunda proposição)".

  $\Leftrightarrow$: Equivalência de proposições, lê-se "equivale a", ou "é equivalente a", ou ainda, "se, e somente se".

- **Quantificadores**

  $\forall$: "Para todo" ou "Para cada".

  $\exists$: "Existe" ou "Para algum".

- **Relações da Teoria de Conjuntos**

  $\in$: Pertencimento de um elemento a um conjunto, lê-se "pertence a".

  $\notin$: Negação do pertencimento, lê-se "não pertence a".

  $\subset$: Inclusão de conjuntos, lê-se "é subconjunto de", ou "está contido em".

  $\not\subset$: Negação da inclusão de conjuntos, lê-se "não é subconjunto de", ou "não está contido em".

- **Operações entre Conjuntos**

  $\cup$: União de conjuntos, formada por todos os elementos que pertencem a um dos conjuntos da união.

  $\cap$: Interseção de conjuntos, formada por todos os elementos que pertencem a ambos os conjuntos da união.

  – **ou** $\setminus$: Diferença entre conjuntos, formada por todos os elementos do primeiro conjunto da diferença que não pertencem ao segundo.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

1

Introdução

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

No início do Século XX, o famoso matemático Felix Klein apontou o problema de os conteúdos ensinados na formação dos professores não conversarem com o ensino básico (KLEIN, 2009). Klein refere-se tanto aos conteúdos ministrados na escola não prepararem adequadamente os futuros pesquisadores em ciências da natureza e Matemática para a forma que esses campos do conhecimento tomaram após grandes descobertas e revoluções, quanto ao fato de que aquilo que é ensinado nas universidades não pareça influenciar na prática docente de muitos professores que atuam no ensino básico.

Desse modo, interessa-nos refletir e debater o papel da Análise Real na formação dos futuros professores de Matemática, norteados pelas perguntas *Essa é uma disciplina essencial para a prática docente?* e *Como ela pode ser útil ao professor?*

Vemos como não apenas conhecimentos da Análise Real, como conhecimentos sobre a Análise Real, e consequentemente a própria Matemática podem influenciar a prática dos professores que trabalham nos tópicos mais iniciais do ensino da Matemática.

Henri Poincaré, outro matemático muito influente do século XIX, indagou em sua obra intitulada *O valor da Ciência* (POINCARÉ, 2011), algo muito importante para nossa discussão: como a forma de fazer Matemática, sob a ótica da relação entre rigor e intuição, muda com o tempo.

Em consonância com o que foi apresentado, Klein comenta em sua obra já citada (KLEIN, 2009), o fato de o desenvolvimento da Matemática ser como o de uma árvore: os galhos crescem juntamente com as raízes. Isto é, enquanto novas descobertas são feitas, muitas vezes novos padrões de rigor surgem, e a fundamentação da Matemática é revisitada e reconstruída, de acordo com as necessidades e problemas de cada período.

Um exemplo de processo onde a Matemática desenvolve novos resultados e, simultaneamente, suas bases é o caso da chamada aritmetização da Matemática. Isto é, o estudo de diferentes áreas e conceitos passou a depender cada vez mais de uma definição rigorosa da noção de número, como vemos mais adiante. O que vemos é que tal aritmetização da Matemática traz profundas transformações no conceito de número como concebido pela comunidade matemática, tornando o estudo dos números reais uma figura central na transformação da Matemática para a forma que possui atualmente.

Defendemos que tais reflexões são altamente úteis para que o professor de Matemática possa não apenas ter um amplo conhecimento matemático, como também sobre a Matemática, podendo refletir sobre a natureza desta e possivelmente assim também produzir reflexões em sala de aula.

De modo geral, Alfonso-Goldfarb (ALFONSO-GOLDFARB, 2004) defende que nas ciências, reflexões e discussões sobre como produzir conhecimento surgem naturalmente com as diferentes necessidades e questões de cada momento no decorrer da história, sendo apresentadas e discutidas pelos próprios estudiosos. E tal conhecimento é particularmente útil ao professor que ensinará ciências, ampliando sua compreensão não apenas do conhecimento adquirido, mas de suas origens e do porquê este se faz necessário.

Alinhados com a proposta de Ripoll, Rangel e Giraldo (RIPOLL; GIRALDO; RANGEL, 2016a), pretendemos então atuar remediando as rupturas da formação de professores no ensino básico, mostrando como é possível refletir sobre a apresentação dos conteúdos e sua ordem escolhida. Além disso, esperamos mostrar que os conhecimentos apresentados enriquecem as possibilidades de atuação do professor e ilustrar como podemos concretizar tais debates ainda na formação de professores por meio de materiais didáticos.

Em particular, visamos discutir os conjuntos numéricos, especialmente naturais e inteiros, que fundamentam o estudo na Análise Real. Sendo assim, queremos usar tópicos da história dos números naturais e reais, para discutir seu lugar na formação de professores de Matemática, enquanto ilustramos uma apresentação desses tópicos.

Assim, começamos discutindo tópicos da literatura de História da Matemática, bem como de História e Filosofia das Ciências de modo geral. Apresentamos os diferentes desenvolvimentos da Matemática, no sentido formal, histórico e no ensino. Comentamos um pouco de nossa experiência em seguida, trazendo cursos de Análise Real sob as diretrizes apresentadas. Em seguida, apresentamos nosso material em desenvolvimento para esses mesmos cursos, mostrando como tais objetivos podem ser alcançados. Por fim, discutimos a prática de confecção de materiais de autoria própria em sala de aula, como o apresentado.

Esperamos então que este texto sirva tanto para abrir espaço para discussões sobre o papel da Análise Real na Licenciatura em Matemática, quanto como exemplo de como o conhecimento de Matemática e sobre Matemática é entrelaçado e pode ser apresentado. Assim como no minicurso, não disponibilizamos aqui as notas em si, mas o que nos influenciou a começar sua produção, as referências que utilizamos, apontadas no decorrer deste texto, as quais podem contribuir para as discussões e sugerir diversas abordagens para as questões apontadas.

Encorajamos que os leitores pensem também em abordagens originais, tanto sobre a exposição dos conteúdos, incluindo a ordem em que são apresentados, quanto os exemplos dados e as possíveis conexões com o trabalho em sala de aula na escola, dentre muitos outros possíveis fatores. Assim, gostaríamos de refletir sobre a importância da produção de materiais didáticos próprios, que possam compor notas de aulas e listas de exercícios adaptados às necessidades e à realidade da tarefa de formar professores para o ensino escolar de Matemática, para enriquecer a literatura da área, explorando as diversas abordagens possíveis para se falar de Matemática.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

2

Por que estudar Análise Real de forma integrada: Algumas reflexões

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Nessa parte, fundamentamos nossa proposta e compartilhamos um pouco das reflexões e nossa experiência na produção de material didático voltado para a disciplina Análise Real, tendo como principal diretriz a integração entre os conhecimentos da própria Matemática dessa área, a história relativa a esses conhecimentos e as possíveis relações com a atividade do professor de Matemática em sala de aula.

2.1 A Análise Real e suas muitas rotas

Segundo o famoso matemático alemão Felix Klein (KLEIN, 2009), atualmente endossado por Ripoll, Rangel e Giraldo (RIPOLL; GIRALDO; RANGEL, 2016a), a organização e apresentação dos conteúdos de Matemática no ensino básico – por exemplo no que se refere aos conjuntos numéricos – seguem diferentes ordens daquelas utilizadas na apresentação teórica formal usadas na formação superior dos cursos de Matemática, as quais, em sua vez, também diferem da própria ordem histórica das suas próprias formalizações.

No entanto, refletir sobre essas diferentes ordens é uma atividade importantíssima para a formação e, consequentemente, o planejamento das atividades do professor de Matemática na escola. Abordamos o interessante caso particular de como conhecer melhor as relações entre os conceitos da Análise Real pode ser útil aos professores de Matemática.

A figura a seguir é um esquema da ordem usualmente adotada para se estudar os conceitos de Análise Real. É baseada principalmente em (LIMA, 2013), mas ainda ilustra outras possíveis abordagens, incluindo algumas adotadas em nossas experiências com a disciplina.

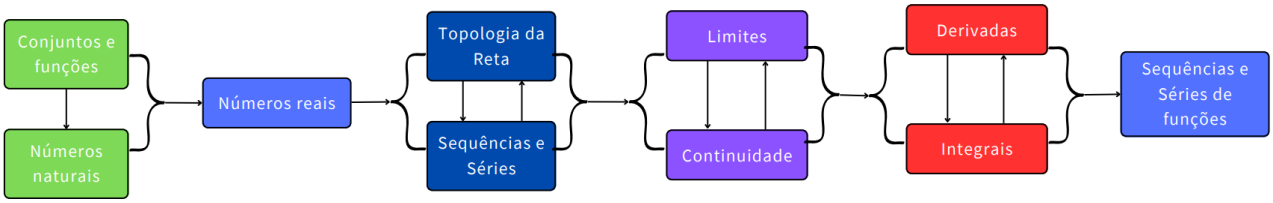


Figura 1: Apresentação padrão dos tópicos de um curso de Análise Real.

Fonte: Os autores.

Nesta apresentação, comumente adotada em muitos cursos de Análise Real, entender conjuntos e funções serve de fundamentação para Análise Real, bem como para praticamente todos os campos da Matemática Contemporânea. Naturalmente, em um curso que busca estudar funções reais de uma variável real, é necessário entender o que são funções, bem como alguns resultados básicos sobre elas, além de números reais. Mas devido ao encadeamento da Matemática, isso exige ainda algum conhecimento de outros conjuntos numéricos, contidos na reta real.

Neste sentido, o conjunto dos números naturais destaca-se por duas razões. Primeira, por ser a estrutura numérica mais simples, o que nos permite introduzir o exercício do raciocínio e da escrita matemática. Segunda, a importância das noções de enumerabilidade e Indução Matemática.

Discutimos adiante a apresentação destes tópicos, bem como detalhamos o que eles tratam. Por ora, assumimos familiaridade ao menos com os conceitos apresentados, para os usarmos como foco de nossa discussão sobre como a Matemática desenvolve-se.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Após ter uma noção sólida do que de fato constitui a reta real, conseguimos passar para as consequências das propriedades mais básicas dessa estrutura. Podemos, com isso, analisar conjuntos de números reais do ponto de vista da Topologia, para elucidar noções como "um número tão próximo quanto se deseje de dado conjunto", o que implica conhecer noções como ponto interior, de aderência, de acumulação e isolado. Tais conceitos encaixam-se no que chamamos de Topologia da Reta.

É possível, no entanto, passar diretamente dos números reais para as sequências numéricas. A verdade é que existem conexões fortes entre esses dois tópicos, de modo que qualquer um pode ser apresentado inicialmente, e, ao conhecer o outro, podemos usar tais conhecimentos. A título de exemplo, é possível definir um ponto aderente a um conjunto através de sequências numéricas ou intervalos abertos (vizinhanças).

Seja a convergência das sequências numéricas, ou a noção de limite de funções de modo geral, há uma relação estreita entre as noções de continuidade e limite de funções. Assim, temos uma relação semelhante entre essas; podemos até mesmo definir uma função contínua através da noção de limite, mas a continuidade pode ser estudada independentemente. Isso elucida a estreita relação entre noções topológicas entre subconjuntos da reta real e o comportamento de funções definidas na reta nela mesma.

Comparando a nossa organização dos tópicos com aquela feita pelo professor Elon Lages Lima (LIMA, 2013), o que fizemos basicamente foi trocar certos tópicos de lugar, apenas invertendo a ordem de algumas "duplas", no sentido que trocamos a ordem nos pares Topologia e sequências, bem como limites e continuidade, mas em uma sequência semelhante, em geral.

Pode-se dizer que essa abordagem é um caso particular da encontrada no livro do professor Robert Bartle (BARTLE, 1964). No entanto, por nossa experiência, conseguimos experimentar ainda outras combinações. Por exemplo, a noção de continuidade tem profundas conexões com a Topologia. Sendo assim, poderíamos passar da Topologia da Reta para a continuidade, e após isso, estudar limites.

Outro caso de ordem de apresentação tradicional de apresentação de tópicos que pode ser desafiada é o par derivada-integral. Do ponto de vista do Cálculo, é mais vantajoso iniciarmos pelas derivadas, que possuem algoritmos mais simples. Mas tanto pela motivação matemática do cálculo de áreas, quanto pela própria história do conceito, talvez seja mais interessante iniciar o estudo a partir das integrais de uma função. O que de fato é possível, pois ambos os conceitos podem ser apresentados formalmente de modo independente um do outro, como de fato eram, antes de Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) (KATZ, 1998).

Tópicos específicos também podem ser abordados de formas equivalentes. Na literatura, temos diferentes definições de completeza do conjunto dos números reais, simbolizado por $\mathbb{R}$ segundo (LIMA, 2013), (BARTLE, 1964) e (HEFEZ, 2014), mas todas equivalentes entre si, como vemos detalhado no capítulo seguinte.

Além disso, em nossas referências, temos outros tópicos com notáveis equivalências entre suas possíveis abordagens. Um exemplo seriam as diferentes formas de se definir conjuntos abertos, fechados e compactos, usando operações com conjuntos, sequências ou mesmo intervalos.

No entanto, além de possíveis abordagens dos conceitos, analisemos outras formas de organizar a Matemática olhando não apenas para sua estrutura formal atual.

Como Otero-Garcia e Baroni apontam (BARONI; OTERO-GARCIA, 2014), apesar de o Cálculo Diferencial e Integral estabelecido por Newton e Leibniz ter sido rapidamente aceito, a busca por novos resultados tornou cada vez mais necessária uma nova formalização dos anteriores.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Por exemplo, de acordo com Otero-garcia e Baroni (BARONI; OTERO-GARCIA, 2014), cuja leitura recomendamos para maiores detalhes do surgimento e desenvolvimento histórico da Análise Real, o estudo das séries trigonométricas levou:

- Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) ao estudo das integrais;
- Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918) ao estudo dos números reais e a criar a Teoria dos Conjuntos;
- Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815 - 1897) ao estudo de continuidade e derivabilidade.

Assim, apesar de conceitos como continuidade, derivada e integral estarem há muito estabelecidos, investigações buscando trazer novos resultados acabaram denunciando a necessidade interna da Matemática ser reconstruída com novos padrões de rigor, e no centro disso estava a necessidade de se entender melhor a noção de número real.

Afinal, como Hairer questiona (HAIRER; WANNER, 2006), podemos dizer que derivadas e integrais são limites, mas o que é um limite senão um número real? Vale lembrar ainda que, curiosamente, a noção do conjunto dos números reais como conhecemos é uma das mais recentes em comparação com as demais concepções modernas estudadas em Análise, sendo ainda novidade na época de Klein (KLEIN, 2009). Particularmente, a maioria das apresentações baseava-se em construções apoiadas na noção de número racional, que foi formalizada posteriormente. A apresentação geralmente escolhida na maioria dos cursos e bibliografias surge com Hilbert, trazendo a axiomatização do conjunto numérico (BARONI; OTERO-GARCIA, 2014). Assim, o curso de desenvolvimento apontado pela História da Matemática é muito diferente daquele adotado atualmente visando clareza e rigor.

Analisemos agora uma lista de observações de como os conteúdos de Cálculo Infinitesimal e Análise relacionam-se com o ensino de Matemática na educação básica, comentando cada item.

1. Os conjuntos numéricos não são apresentados na ordem “naturais, inteiros, racionais e reais”, ou simbolicamente, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Em razão da estrutura formal que a Matemática exige no ensino superior, é tradicional começar apresentando os conjuntos numéricos de forma que cada um contenha seu antecessor, possuindo as mesmas propriedades algébricas, e trocando uma propriedade exclusiva de um por uma propriedade exclusiva de outro.

Dos Naturais aos Inteiros, ganha-se a existência do inverso aditivo, e perde-se a propriedade de todo subconjunto ser inferiormente limitado, necessitando reajustes no enunciado dos Princípios de Indução e de Boa Ordem em $\mathbb{Z}$. Dos Inteiros aos Racionais, ganha-se a existência do inverso multiplicativo, e perde-se a Boa Ordem. Dos Racionais aos reais, ganhamos a completeza, e perdemos a enumerabilidade.

Mas se, por um lado, começamos na escola pelos números naturais, iniciando com a contagem e somente depois aprendendo operações e ordem, o caminho até as últimas estruturas (números reais e até mesmo complexos), é muito diferente. Conhecemos frações antes de números negativos, ainda que apenas em casos muito restritos, como as unitárias positivas, de numerador 1 e denominador positivo. E apresentação de números irracionais é bem mais gradual.

Além disso, pelos diferentes objetivos de estudo em cada caso, temos também diferentes focos de interesse. No estudo formal da Matemática universitária, principiamos com uma abordagem construtiva,

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

demonstrando a existência da estrutura estudada e a validade de suas propriedades com base em uma estrutura anteriormente estabelecida, ou axiomática, assumindo que existe tal estrutura e partindo então para as consequências das propriedades mais básicas que a identificam. No estudo da Matemática do ensino básico, aprendemos como operar com os números dentro de tal estrutura, sendo mais importante entender como tomar essas estruturas para resolver problemas que podem inclusive ser externos a questões matemáticas.

Antes de comentar o próximo item, cabem observações sobre a nomenclatura que empregamos neste texto. Os anos escolares e suas etapas já tiveram diversas nomenclaturas nas últimas décadas, como primário, ginásio e colegial, ensino fundamental I e II e ensino médio, e atualmente ensino fundamental: anos iniciais e anos finais, e ensino médio. A isso somam-se diferentes nomenclaturas para os anos escolares, como "série", posteriormente substituída por "ano". Por isso evitamos termos específicos do momento em que este texto é redigido, evitando a obsolência, de forma semelhante a que fazem os clássicos, como Poincaré e Klein: mencionando apenas vagamente a etapa escolar que interessa, sem usar termos específicos. Optamos então por empregar termos como "anos iniciais". Além disso, os temas aqui tratados não se referem exclusivamente ao ensino escolar brasileiro, muito menos ao momento em que este texto é redigido. Procuramos abarcar em nossas ideias propostas válidas para diferentes modelos de escolas.

2. Os conceitos do Cálculo não são *explicitamente* presentes no ensino básico.

Um dos principais objetivos da atividade matemática é abstrair estruturas com propriedades semelhantes, buscando maior grau de generalidade possível. Como consequência, muitos dos objetos estudados na Matemática universitária generalizam os objetos estudados na Matemática nos anos iniciais. Isso dá um dos maiores argumentos a favor do ensino de Matemática do ponto de vista axiomático na formação de licenciandos em Matemática.

Assim, propriedades de estruturas algébricas abstratas estudadas em cursos de Matemática no ensino superior, como anéis e corpos, englobam as estruturas apresentadas no ensino básico, como os conjuntos numéricos. Do mesmo modo, a noção de integral generaliza o cálculo de áreas de figuras planas. Podemos tomar figuras simples como triângulos, retângulos ou outros polígonos, como delimitadas pelo gráfico de uma função definida em um intervalo fechado e limitado da reta, e a partir daí, calcular sua área através da integral de tal função. A noção de integral (bem como derivada e limite) não é explicitamente tratada, mas a noção de área aparece até mesmo nos anos iniciais da escolarização.

Além de generalizar objetos que o professor de Matemática introduzirá aos seus alunos, o conhecimento de Matemática pelo método dedutivo permite ainda entender a hierarquia de quais propriedades implicam quais, elucidando como sabemos que determinada propriedade é verdadeira. Uma questão que devemos estimular nossos alunos a refletir sobre.

3. Os conceitos da Matemática escolar não são triviais do ponto de vista do método axiomático.

Tão importante quanto o domínio dos conteúdos próprios da Matemática estudada nas universidades é o domínio de seus conteúdos requisitados. Um dos principais argumentos para o ensino de certos conteúdos nos cursos de licenciatura, como o estudo de relações de ordem, é o fato de que eles são uma revisitação dos conteúdos que os futuros professores aprenderam e irão ensinar, apenas sob

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

uma nova perspectiva, mais rigorosa, mas, por isso mesmo, tornando a visão destes conceitos mais completa. Exemplos de conceitos complexos são funções, relação de ordem, infinito e distâncias. Além disso, habilidades importantes como saber traduzir informações em linguagem simbólica para linguagem geométrica são trabalhadas na escolarização.

4. Existem conexões entre a Matemática escolar e a universitária comumente pouco exploradas.

Este tópico é uma mera reiteração e continuação do anterior. O estudo de certos conceitos dentro da Matemática universitária revisita os mesmos conceitos já ensinados na formação básica, apenas sob uma nova perspectiva, advinda de objetivos diferentes. Assim, não apenas o futuro professor pode compreender melhor os objetos estudados que serão ensinados, como refletir sobre essas conexões. Deste modo, ainda que as demonstrações rigorosas encontradas no ensino superior não sejam simplesmente transpostas para o ensino básico, o professor saberá por qual caminho conduzir os alunos que futuramente estudarão a Matemática sob esta perspectiva diferente. Como exemplo, é possível enxergar o critério de igualdade entre frações de inteiros através da ótica de classes de equivalência.

O próprio livro de Felix Klein tem como principal proposta ilustrar como a Matemática dos anos iniciais pode ser melhor compreendida através dos conhecimentos da Matemática universitária (KLEIN, 2009). Além disso, essa abordagem inspirou outras obras, como a de Ripoll, Rangel e Giraldo (RIPOLL; GIRALDO; RANGEL, 2016a).

2.2 Experiência dos autores

Na seção anterior apresentamos, baseados nos autores citados, nossas justificativas teóricas para a necessidade da produção de materiais didáticos que conectem a Matemática ensinada nas escolas e a que se estuda nas universidades. Nesta seção, comentamos nossa experiência que nos trouxe a percepção desta necessidade no caso da Análise Real, gerando o trabalho de produção das notas de aula, e consequentemente o minicurso que resultou neste texto.

Nosso trabalho inicia-se com o curso de Análise Real ofertado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas (PPGM-UFAM), como um curso de nivelamento a quem interessa realizar o exame de seleção para o mestrado acadêmico deste programa. O curso tem sido oferecido semestralmente com a finalidade de atrair um maior número de candidato(a)s e assim mitigar o problema de poucos alunos em cursos de pós-graduação de Matemática localmente, ao mesmo tempo que tenta nivelar a formação do(a)s interessado(a)s nas duas matérias consideradas fundamentais e básicas, para o bom desempenho dentro de qualquer curso de pós-graduação em exatas, a saber Álgebra Linear e Análise Real. Dessa forma o exame de seleção é realizado por meio de prova escrita nessas duas disciplinas.

O maior número de candidato(a)s interessado(a)s em realizar esse exame de seleção são graduandos ou graduados em um curso de Matemática, onde a maioria são oriundo(a)s de algum curso de licenciatura oferecido na capital Manaus ou em outro município do interior do estado do Amazonas. Assim, todas as iniciativas que possam aumentar o ingresso e promover a permanência desses alunos no programa têm sido estimuladas.

A segunda autora é professora do Departamento de Matemática (DM-UFAM) e egressa do PPGM-UFAM, tendo defendido a primeira dissertação de mestrado do programa, antes mesmo do reconheci-

mento pela CAPES em 2002. Possui bastante experiência com o curso de nivelamento, além de ministrar a disciplina Análise Real para os cursos de Matemática da mesma universidade, pelo menos quatro vezes desde 2008.

Por ser o primeiro programa de pós-graduação em Matemática do estado do Amazonas, o PPGM-UFAM tem atuado também na capacitação qualificada de professores para as instituições de ensino locais, como a própria UFAM, a Universidade do Estado do Amazonas (UEA) e o Instituto Federal do Amazonas (IFAM), dentre outras. Assim, ainda que o foco principal do programa seja a formação de pesquisadores em Matemática e Estatística, os egressos em sua maioria atuam como professores de Matemática e, especificamente no estado do Amazonas, grande parte em cursos de licenciaturas.

Destacamos novamente que os alunos do nivelamento são majoritariamente professores de Matemática em formação inicial ou continuada, ou futuros professores universitários que atuarão na formação de professores de Matemática nos vários níveis de ensino. Além disso, tendo em conta que nos cursos de nivelamento do programa começa a formação do egresso, pensamos em outras abordagens dos conteúdos de Análise Real que se relacionem com a prática e os conhecimentos de professores e alunos de Matemática nos vários níveis de ensino. Ao observarmos que não só abordagens, mas que outras organizações do curso diferentes da que está sugerida na ementa (ver Figura 2), ou que são apresentadas na bibliografia clássica eram possíveis, passamos a registrar os roteiros das aulas utilizadas na prática em sala de aula do curso, criando inicialmente notas de estudos.

No entanto, ao discutirmos sobre como melhorar o trabalho, contemplamos a possibilidade de torná-lo um material de apoio para alunos de Matemática, em especial os de licenciatura, e não apenas os interessados nos cursos de nivelamento, apresentando os conteúdos de Análise Real em uma disposição original, inclusive de forma integrada com a história da Análise e consequentes implicações sobre a natureza da Matemática, além de reflexões sobre como o conteúdo abordado pode se relacionar com a prática do professor de Matemática, destacando a importância desta combinação.

Com isso, o nosso trabalho surge de observações tangentes tanto à realidade da atuação profissional dos egressos do PPGM-UFAM, quanto à necessidade de complementar a formação de alunos interessados em ingressar no programa. Sob as diretrizes mencionadas anteriormente, surgem as notas que originaram o minicurso, resultando no presente texto, que esperamos ser útil não somente a alunos interessados em ingressar em cursos de pós-graduação em Matemática, mas também a professores de Matemática em geral.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Poder Executivo
Ministério da Educação
Universidade Federal do Amazonas
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Matemática UFAM

UFAM

EMENTA DE DISCIPLINA

Curso: Mestrado em Matemática Pura e Aplicada

Disciplina: ANÁLISE REAL

Sigla: PGMAT 527

Carga Horária: 60 horas

Créditos: 4

Ementa: Funções contínuas. Funções deriváveis. Funções Integráveis. Seqüências e séries numéricas. Seqüências e séries de funções: convergência simples e uniforme; teste de Weierstrass; continuidade, integrabilidade e derivabilidade do limite uniforme; teorema de Arzelá-Ascoli. Teorema de aproximação de Weierstrass.

Bibliografia: Lima E.L., Curso de Análise, Vol I . IMPA. Rio de Janeiro. Projeto Euclides. 1989. Bartle R. G., Elementos de análise real. Campus. Rio de Janeiro. 1983. Rudin W., Princípios de análise matemática. UnB. Livro Técnico. 1971.

Figura 2: Ementa do curso de Análise Real.

Fonte: Rol de ementas do PPGM/UFAM

3

Como estudar Análise Real de forma Integrada: Nossa proposta

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Comecemos apresentando como as questões levantadas até o momento são abordadas na confecção de notas de aula baseadas em nossas experiências com o curso de Análise Real, ofertado tanto para os cursos de graduação quanto para o Nivelamento do curso de mestrado em Matemática na UFAM. Apresentamos também neste texto nossas inspirações na bibliografia citada para a produção dessas notas. Em termos de organização, planejamos que as notas sigam a seguinte estrutura:

- Capítulo 1: Conjuntos e funções; $\mathbb{N}; \mathbb{R}$.
- Capítulo 2: Topologia da Reta; Sequências; Séries.
- Capítulo 3: Continuidade; Limites.
- Capítulo 4: Integrais.
- Capítulo 5: Derivadas.
- Capítulo 6: Sequências e séries de funções.

Assim como no minicurso, trazemos aqui as discussões e nossas reflexões sobre o conteúdo do primeiro capítulo. Ou seja, apresentamos sugestões de como inserir os conceitos de conjuntos, funções, números naturais e números reais para cursos de formação de professores de Matemática. Pretendemos então propor aproximações na Matemática ensinada no ensino básico e a Matemática estudada na universidade sobre os temas citados.

3.1 Conjuntos e Funções

Comecemos então com os conceitos de conjuntos e funções, que ocupam este lugar de princípio dadas às questões levantadas no capítulo anterior. Como será de praxe ao longo deste trabalho, partimos de um trecho das notas, explicitando quais os conteúdos abordados, com enfoque em como podemos apresentá-los.

" (⋯) o foco principal deste primeiro capítulo é fundamentar rigorosamente a noção de número real. Existem muitas formas de formalizar a chamada reta real, e mais adiante entramos em detalhes sobre quais opções escolhemos e porquê. (⋯)

Começamos então revendo noções básicas de conjuntos, como operações entre conjuntos e funções, mas numa abordagem chamada "ingênua" (adiante vemos por quê). Em seguida, vemos o conjunto dos números naturais, introduzindo mais diretamente o exercício do pensamento dedutivo: apresentamos uma lista de axiomas e demonstramos algumas propriedades a respeito deste conjunto. Esperamos assim, gradualmente inserir um novo olhar sobre a Matemática, de acordo com o já mencionado método axiomático-dedutivo."

Assim, principiamos explicando brevemente nossa abordagem e inserindo noções ingênuas de conjuntos e suas operações, como treino de raciocínio e redação matemática, a saber, enunciamos e provamos as seguintes propriedades das operações apresentadas para A, B e C conjuntos quaisquer:

1. Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$;
2. Associatividade: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

3. Idempotência: $A \cup A = A$, além disso, $A \cap A = A$;

4. Distributividade: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e além disso, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

5. $A \cap \varnothing = \varnothing$ e $A \cup \varnothing = A$;

6. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$, e $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Por fim, introduzimos a noção de famílias de conjuntos visando generalizar as operações definidas entre dois conjuntos para uma quantidade qualquer. Ao final, criamos esquemas resumindo os principais conceitos desses tópicos.

Após estabelecer algumas noções básicas a respeito de conjuntos e suas operações, tratamos de funções, que são, em essência, nosso principal objeto de estudo na Análise Matemática.

Vejamos então outro trecho das nossas notas, seguido de nossa ilustração a respeito deste tema.

"Apesar de, como ocorre com outros conceitos matemáticos, a ideia de função ser apresentada em termos de conjuntos, o conceito de função é considerado ainda mais importante. Ideias centrais na Matemática apresentada desde os anos iniciais da educação, como contagem, operações, simetrias e proporcionalidade, são todas modeladas por funções. Mesmo na Matemática universitária, a noção de função é ainda extremamente fundamental (no sentido de dar fundação): a própria Análise Real pode ser definida como o estudo de funções entre números reais, e a Álgebra é o estudo de estruturas algébricas: conjuntos munidos de operações, que são ainda funções."

Em seguida, definimos e apresentamos exemplos de funções, conjuntos imagem, gráficos de funções, funções injetivas e sobrejetivas, além de funções inversas. Naturalmente, tratamos também de composição de funções. Em seguida, encerramos a seção com alguns exercícios resolvidos.

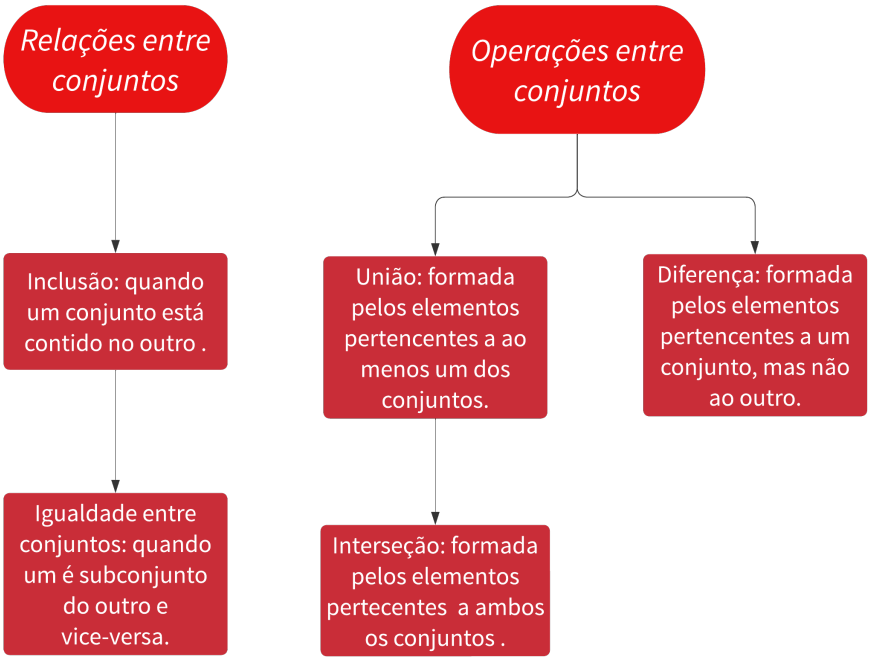


Figura 3: Resumo ilustrado sobre introdução aos conjuntos e suas operações.

Fonte: Os autores.

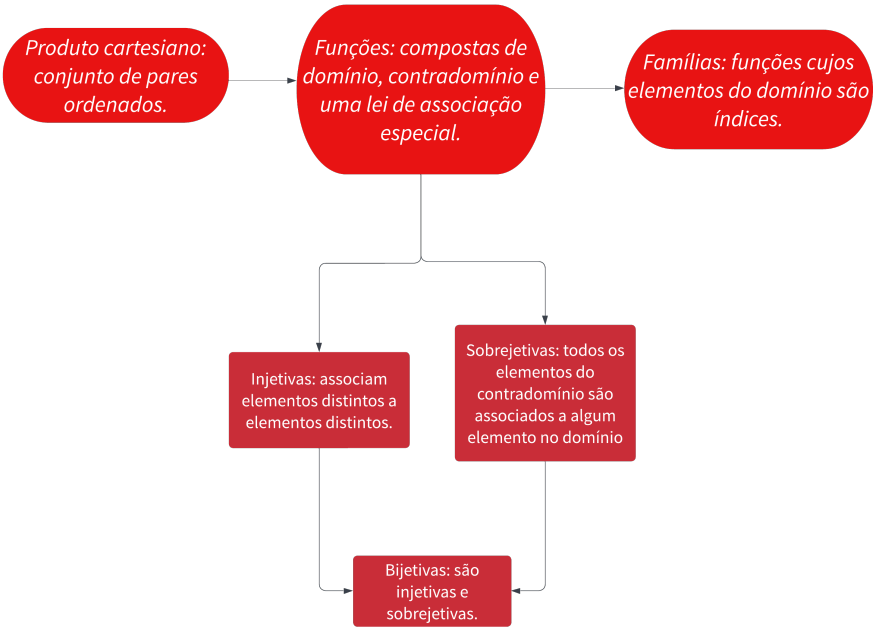


Figura 4: Resumo ilustrado sobre introdução às funções.

Fonte: Os autores.

Uma vez estabelecidas estas noções iniciais de conjuntos e funções, analisemos o lugar desses conceitos na formação de futuros professores de Matemática.

Vale lembrar que o conceito de função é um divisor de águas, marcando a origem da prática matemática moderna, firmada cada vez mais no conceito de dependência entre variáveis (BARONI; OTERO-GARCIA, 2014). Um dos principais fatores que leva ao surgimento da noção de função é o mesmo que dá origem ao Cálculo Infinitesimal: o estudo de curvas.

O nome "função" é atribuído a Leibniz que, posteriormente, trouxe a formalização e simbologia do conceito, junto de Johann Bernoulli. Conceito esse que foi adotado e padronizado por Leonard Euler (BARONI; OTERO-GARCIA, 2014). Posteriormente, Cauchy no seu Curso de Análise (ROQUE; SCHUBRING, 2022) usou tal conceito para então ser protagonizado no que veio a se tornar a Análise Real.

Podemos observar que o conceito surge naturalmente de questões internas à Matemática. Mas, como é comum ocorrer com muitos outros objetos de estudo da Matemática, apesar de sua origem, existe uma infinidade de relações entre a noção de função e situações concretas, tais como:

- **BioMatemática.** É possível modelar o *crescimento populacional* de uma espécie ao longo do tempo usando funções.

- **Ciências Naturais.** Podemos descrever o processo de *decaimento radioativo* com funções. Isto é utilizado em datação de fósseis e materiais arqueológicos, além de ser grande interesse dos físicos.

- **Física.** Movimento Retilíneo Uniforme (MRU): Representar o deslocamento de um objeto em linha reta ao longo do tempo, fundamental em problemas envolvendo velocidade constante, como no caso de veículos em movimento.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

- **Física.** Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV): Descrever o movimento de um objeto sujeito a aceleração constante, essencial para entender fenômenos como lançamento de projéteis.
- **Estudo de Fenômenos Cíclicos.** Funções Trigonométricas em Ondas: Também é possível modelar fenômenos ondulatórios, como o movimento de uma onda no oceano ou a variação de temperatura ao longo do ano.
- **Economia e Finanças:** Utilizam-se funções para representar o crescimento de investimentos ao longo do tempo, calcular juros compostos e entender a dinâmica do mercado financeiro.
- **Animação e Interpolação:** Funções são frequentemente usadas para criar animações suaves e realizar interpolação entre valores ao longo do tempo.
- **Lógica Booleana:** Funções booleanas são fundamentais na programação, especialmente em algoritmos de controle de fluxo e operações de lógica condicional.
- **Processamento de Imagens:** Funções são aplicadas em processamento de imagens para manipular *pixels*, realizar filtragem e ajustar contraste e brilho.
- **Inteligência Artificial e *Machine Learning*:** Algoritmos de *machine learning*, como regressão linear e redes neurais utilizam funções matemáticas para modelar relações entre variáveis e realizar previsões.
- **Algoritmos de Busca e Ordenação:** Aqui, o conceito de função é usado em algoritmos de busca e ordenação para determinar a posição ou o valor de um elemento em uma coleção de dados.
- **Simulações Físicas:** Funções são usadas para modelar leis físicas em simulações, permitindo a criação de ambientes virtuais realistas.
- **Conversões de Unidades:** Funções podem ser utilizadas para realizar conversões entre diferentes unidades de medida, facilitando cálculos em aplicações que envolvem múltiplos sistemas de unidades.

Mais do que apenas apresentar possíveis aplicações, uma forma de melhorar a prática do ensino de funções seria apresentar esses problemas e ilustrar como a noção de função conduz às suas soluções.

De modo geral, apesar da natureza abstrata da Matemática, muitas vezes o que impulsiona seu desenvolvimento são questões concretas. Isso ilustra bem a dualidade intuição-rigor discutida por Poincaré (POINCARÉ, 2011). Tal relação, tão preciosa para o desenvolvimento da Matemática, deve ser trazida também para seu ensino, naturalmente.

A partir daí surge a questão: como apresentar problemas tão complexos no ensino básico? A resposta dá-se do mesmo modo que se responde o problema de como trazer as noções de Matemática universitária para o ensino básico: com transposições didáticas. Isto é, apresentamos os problemas em versões simplificadas de modo a serem compreensíveis para os alunos.

Muitos desses usos de funções recorrem a noções matemáticas altamente complexas, como Equações Diferenciais. A ideia então seria apresentar uma versão mais simples, de modo a não recorrer a ferramentas que os alunos não possam entender.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Vejamos o exemplo da Biomatemática. Podemos apresentar, em sala de aula, um experimento mental, a respeito de uma população que dobra a cada hora. Dessa forma, os professores podem montar um problema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), de modo que sua solução é a função que modela o crescimento populacional, dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} &= 2P \\ P(0) &= P_0 \end{cases}$$

que resulta em

$$P(t) = P_0 \cdot 2^t$$

onde:

- $P(t)$ é o tamanho da população no tempo t,
- P_0 é o tamanho inicial da população,
- t é o tempo decorrido.

Se desejarmos calcular a população após 3 horas, podemos substituir $t = 3$ na equação, obtendo:

$$P(3) = P_0 \cdot 2^3$$

Na vida real, as funções que modelam as populações são de um grau de complexidade muito maior. Mas aos nossos propósitos de introduzir funções e ilustrar como elas podem ser úteis, essa função com lei de associação simples é o bastante.

Pessoalmente, esse exemplo foi pensado pelo primeiro autor, e só foi possível ser concebido pois este possui algum conhecimento de EDOs. Isso leva-nos a tratar da questão do domínio do professor sobre os conteúdos ministrados.

Soa quase óbvio demais para valer a pena ser comentado dizer que um professor de Matemática deve conhecer profundamente a noção de função. No entanto, vale reiterar que no Brasil temos desempenhos na proficiência matemática de nossos alunos registrados muito aquém do esperado, inclusive muito atrás da maioria dos países desenvolvidos. Vale observar que mesmos os países desenvolvidos encontram dificuldades na educação de seu povo, especialmente na Matemática.

Há gerações, nossa formação básica em Matemática é insuficiente. Isso inclui nossos professores, atuantes e em formação. Assim, a formação de professores deve contemplar estas possíveis fragilidades.

Um resultado de rupturas na formação básica de um professor é a repetição mecânica apenas daquilo que consta na sua área de conforto. Por exemplo, um problema comum relatado na experiência da segunda autora, além de diálogos com alunos da mesma universidade dos dois autores, é a apresentação de funções no ensino básico sem que se defina propriamente o que é uma função. Desse modo, muitos professores apresentam apenas exemplos de funções, ou casos particulares, e mesmo quando definem funções, há erros comuns.

Vejamos um exemplo. Imaginemos uma turma que ao invés de conceituar funções, estuda casos particulares como funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométrica. Por questões externas, a turma não consegue sequer concluir o estudo das funções quadráticas. O conceito de função

6° Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

dos alunos, que já sairia incompleto, torna-se muitíssimo mais limitado. Isso agrava a situação, pois se, por um lado, a noção de função do aluno já é prejudicada caso ela seja apresentada incompleta, por outro lado, caso nem todas as classes de exemplos que o professor gostaria de passar sejam contempladas, a compreensão do assunto torna-se ainda mais deficiente.

Particularmente, nos conceitos iniciais de conjuntos e funções, são famosos os usos dos Diagramas de Venn. E são, de fato, ótimos recursos. Mas vale destacar que mesmo não sendo o foco principal do ensino básico conceituar formal e rigorosamente seus objetos de estudo, equilibrando precisão e generalidade como se costuma fazer na educação universitária, isso não significa que as definições formais devam ser ausentes. Mesmo que neste momento não sejam o foco principal, elas ainda são importantes.

Do mesmo modo, um erro comum é confundir funções com exclusivamente suas leis de associação. Reiteramos que a definição de função pressupõe domínio e contradomínio, que mesmo sendo normalmente fixados no ensino básico, sendo geralmente ambos iguais a $\mathbb{R}$, ainda não dispensa essa ideia fundamental. Afinal, ela será muito útil para aqueles que darão continuidade a seus estudos em campos que necessitam de conhecimentos sólidos de Matemática. Mais importante, faz parte de uma boa formação matemática saber transitar entre o específico e o geral, e treinar o raciocínio de como exemplos são englobados por definições formais é uma ótima forma de tratar essa habilidade.

Inclusive, uma forma de inserir naturalmente essa necessidade de pensar funções com domínio e contradomínio claramente definidos é através de problemas advindos de outras áreas, como a Computação. Neste caso, a função opera como uma transformação, onde temos elementos de entrada, os *inputs*, e elementos de saída, os *outputs*.

Pode-se inclusive usar programação para modelar e simular problemas como os mencionados anteriormente como possíveis aplicações da noção de função. Vejamos um problema como exemplo.

O objetivo deste problema é criar um programa em Python que calcula a média de um conjunto de notas de alunos e determina a situação do aluno com base nessa média.

Aqui está uma solução em Python para o problema:

```
# Função para calcular a média de uma lista de notas
def calcular_media(notas):
    total = sum(notas)
    quantidade = len(notas)
    if quantidade == 0:
        return 0  # Evitar divisão por zero se a lista estiver vazia
    return total / quantidade

# Função para exibir a situação do aluno com base na média
def verificar_situacao(media):
    if media >= 7:
        return "Aprovado"
    elif 5 <= media < 7:
        return "Recuperação"
    else:
        return "Reprovado"

# Função principal
```

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

```
def main():
    # Entrada: solicitar ao usuário que insira as notas
    notas_str = input("Digite as notas dos alunos separadas por espaços: ")

    # Converter as notas de string para uma lista de floats
    notas = [float(nota) for nota in notas_str.split()]

    # Calcular a média
    media = calcular_media(notas)

    # Verificar situação
    situacao = verificar_situacao(media)

    # Exibir resultado
    print(f"A média é: {media:.2f}")
    print(f"Situação do aluno: {situacao}")

# Execução
if __name__ == "__main__":
    main()
```

Podemos inclusive não trabalhar necessariamente construindo o código, mas simplesmente explicando o seu raciocínio, que utiliza, ainda que implicitamente, a noção de função de diferentes maneiras.

Observamos que nossas recomendações tendem a apontar para a solução de problemas, matemáticos ou não, como abordagem em sala de aula para introduzir e trabalhar os conceitos matemáticos. Isto se dá propositalmente, em oposição a um ensino mecânico, que inclusive é notavelmente artificial, até mesmo para os alunos. Vimos um exemplo de como inserir organicamente os conceitos através de problemas.

Alguns podem ainda sugerir que uma Matemática assim apresentada é "aplicada demais", faltando o rigor matemático usual. Mas aí que reside a questão principal. Matemática desenvolve-se por questões externas e internas, e a formação de nossos alunos, claro, deve dar uma base sólida caso estes decidam ser matemáticos. Mas principalmente, deve ensinar o raciocínio matemático para que este seja empregado nas mais diferentes áreas; afinal, essa é uma das principais razões de a Matemática ser tão importante: ela está em todo lugar.

3.2 Números Naturais

Mas voltemos a nossa apresentação de conteúdos. Após tratar brevemente de conjuntos e funções, tratamos de números naturais. Como de costume, utilizamos um trecho de nossas notas para começar.

"A ideia de número natural surge da noção de contagem. Ao compararmos a quantidade de objetos que certo grupo constitui, recorremos aos números, assim, grupos com mesma quantidade de objetos têm o mesmo número associado a eles. A primeira coisa que aprendemos é que sempre começamos do número um ao contar. Em seguida, aprendemos que sempre podemos avançar um número na contagem, pois nosso grupo de objetos pode ser de qualquer tamanho. Naturalmente, aprendemos a comparar os números para, ao comparar também dois grupos de objetos, dizer qual grupo é maior que outro: basta

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

dizer qual número resultante da contagem é maior. Mais adiante, aprendemos a operar com esses números, através das chamadas quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão. Em um estágio mais avançado, investigamos a nossa forma de comparar números, classificando-os em maiores ou menores, como uma relação de ordem com importantes ligações com as operações estabelecidas.

Normalmente, muito do aprendizado dessa fase apoia-se em memorização e manipulação de algoritmos. Para saber qual número sucede o outro, precisamos conhecer as regras do nosso sistema de numeração. Aprendemos como calcular as operações entre números baseados na chamada tabuada, uma lista de resultados entre as operações entre números de 0 a 9, e os algoritmos de cálculo, tais como, somar dois números através do método CDU: separamos os números de acordo com suas ordens, comumente chamadas de casas decimais, e reduzimos o cálculo a uma sequência de somas de números de um dígito apenas.

No entanto, possuímos agora diferentes objetivos em relação ao estudo desses números tão familiares. Queremos entender o que caracteriza essencialmente o conjunto desses números usados para contagem, além de propriedades deste conjunto, de modo a deduzir o máximo possível desse conteúdo. Isso irá exigir um tipo de raciocínio diferente, o que pode causar estranhamento algumas vezes, pois tratamos dos números naturais sob uma perspectiva completamente nova, se comparada ao que conhecemos da escola. Mas isso faz-se necessário por conta de nosso objetivo de fundamentar rigorosamente estes objetos. Números naturais, como vemos mais adiante, podem ser considerados casos particulares de números reais, e algumas propriedades que vemos agora envolvendo o conjunto dos números naturais desempenham um papel indispensável adiante.

Existem diversas formas de se abordar o estudo desse conjunto, de forma ingênua, como no ensino básico, de forma construtiva ou, como abordamos aqui, de forma axiomática. Adotamos tal forma pelos objetivos já mencionados, mas comentamos ainda um pouco sobre sua praticidade.

A forma construtiva de se abordar os estudos dos números naturais consiste basicamente em definição e construção gradual desses números, baseada em um conceito já estabelecido, como o de conjunto, começando do um e avançando para os números sucessivos. No entanto, poderíamos até mesmo optar por começar do número zero (discutimos o porquê imediatamente antes de definir de conjunto finito), e mesmo começando com um, há diferentes modos de se construir esse conjunto. Mas como sabemos que o resultado é o mesmo conjunto de números naturais?

A rigor, podemos obter conjuntos de naturezas diferentes, mas, em Matemática, o que nos interessa é termos as mesmas propriedades; em outras palavras, a mesma estrutura. Isso significa que para qualquer conjunto que identificamos como o conjunto de números naturais, existem operações e relação de ordem definidas de modo que esses conjuntos possuem as mesmas propriedades relativas às suas respectivas operações e ordenações definidas. Além disso, há como comparar os elementos de um para um, o que formalizamos dizendo que existe uma função bijetiva entre tais conjuntos. Tendo as mesmas propriedades em relação a suas operações e ordem, podemos identificar tais objetos como o mesmo.

Assim, o conjunto dos números naturais é identificado através de suas propriedades algébricas (isto é, relativas às operações) e de ordem. No entanto, ao observamos essas propriedades, percebemos que algumas podem ser utilizadas para deduzir outras. Como vemos, podemos demonstrar comutatividade assumindo associatividade como verdadeira. Desse modo, deduzem-se as propriedades mais básicas relativas às operações e relação de ordem entre números naturais através de uma lista de propriedades ainda mais simples do ponto de vista dedutivo, ou seja, que se utilizam para demonstrar mais proposições. Tais

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

propriedades serão assumidas como axiomas e a abordagem construtiva sob essa perspectiva seria apenas para confirmar a existência de objetos que de fato possuam essas propriedades.

Dito isso, a natureza dos elementos de qualquer conjunto que identificamos como o conjunto dos números naturais é irrelevante para nossos objetivos aqui, apesar de um estudo da construção dos conjuntos numéricos ser enriquecedor. Além disso, é mais prático para esses mesmos objetivos apenas sabermos trabalhar com essas propriedades mais básicas.

Assim, aceitamos que existe um conjunto, chamado conjunto dos números naturais, com certas propriedades, que serão também aceitas como axiomas. A partir dessas, demonstramos algumas propriedades básicas e outras mais sofisticadas a fim de usá-las de forma justificada pelo método axiomático, mas acima de tudo, para exercitar o raciocínio matemático."

Introduzimos então o método axiomático através dos Axiomas de Peano, que podem ser enunciados do seguinte modo:

- Todo número natural tem um sucessor, que é também um número natural.
- Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes.
- Existe um número natural que não é sucessor de nenhum outro. O representamos por 1.
- Seja X um conjunto de números naturais. Se $1 \in X$ e se para todo número natural em X, seu sucessor também pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

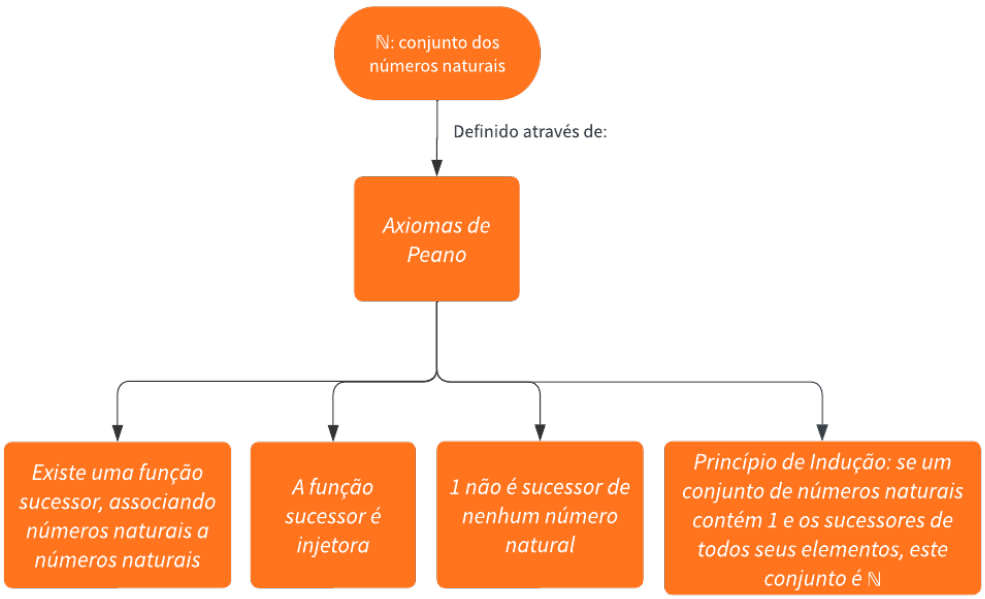


Figura 5: Os Axiomas de Peano.

Fonte: Os autores.

Em 1889, Giuseppe Peano introduziu em *Arithmetices Principia: Nova Methodo Exposita* os axiomas que apresentamos anteriormente. No entanto, o autor escreveu este trabalho de modo a apresentar todo o texto em linguagem simbólica, a fim de evitar que o uso de palavras de uma língua natural interfira na exatidão do conteúdo trabalhado (KLEIN, 2009).

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

No século XIX surgem, em grande força, movimentos buscando reformar a Matemática em bases cada vez mais rigorosas. Peano, por exemplo, juntamente com David Hilbert, reformou a estrutura de axiomas da Geometria Euclidiana, tornando-a adequada aos padrões modernos de rigor matemático. Tal era a busca por novas bases mais sólidas para o conceito de número, que este trabalho de Peano pode ser visto como um aperfeiçoamento de algo que o também matemático Richard Dedekind publicara apenas um ano antes.

Os conjuntos numéricos são estruturas identificadas por suas propriedades algébricas, de ordem, e no caso da reta, de completeza. Comecemos então apresentando as propriedades algébricas de $\mathbb{N}$. Ou seja, estudamos as propriedades de $\mathbb{N}$ em relação a suas operações.

Para isso, definimos o que é uma operação, conceito altamente importante para as estruturas matemáticas. Vale apresentar sua definição aqui e comentar brevemente.

Definição 3.1

Uma operação em um conjunto X é uma função

$$\bigcirc : X \times X \to X.$$

Assim, uma operação é uma forma de associar, através de dois elementos de um conjunto, um único elemento do mesmo conjunto. Mais especificamente, essas seriam chamadas operações *binárias*, justamente por utilizarem dois elementos. Mas, referimo-nos a elas apenas como operações, por simplicidade.

Vale observar que ensinamos as quatro operações, sem de fato explicar o que é uma operação. Tal conceito permeia a grande maioria das estruturas estudadas na Matemática universitária: Grupos, Anéis, Corpos, Espaços Vetoriais, dos quais os conjuntos numéricos e até as funções definidas entre esses são casos particulares. Mas, intuitivamente, sabemos que operar com números é tomar dois números e associar a outro, como resultado. Isso induz naturalmente aos conceitos de função e par ordenado.

O primeiro Axioma de Peano informa que existe uma função sucessor $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que a cada número natural n associa $s(n)$. É possível mostrar usando o Princípio de Indução Matemática que $n \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma vez que já conhecemos o que é uma operação, definimos as operações em $\mathbb{N}$ recursivamente.

Definição 3.2

A operação de adição em $\mathbb{N}$ é dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) &\mapsto m + n \\ \begin{cases} m + 1 & = s(m) \\ m + s(n) & = s(m + n) \end{cases} & \end{aligned}$$

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Definição 3.3

A operação de multiplicação em $\mathbb{N}$ é dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) &\mapsto m \cdot n \end{aligned}$$

$$\begin{cases} m \cdot 1 & = m \\ m \cdot s(n) & = m + (m \cdot n) \end{cases}$$

Uma vez introduzidas operações em um conjunto, uma pergunta natural e importantíssima que surge é *quais propriedades esta operação possui?*. As respostas a perguntas dessa natureza são apresentadas nas notas em forma de teoremas com suas demonstrações, enquanto que neste trabalho são somente enunciados para priorizar nossos debates.

Teorema 3.4

As seguintes propriedades são válidas para as duas operações de adição e multiplicação em $\mathbb{N}$*, ou seja, valem* $\forall m, n, p \in \mathbb{N}$*:*

- *Associatividade.* $m + (n + p) = (m + n) + p$ *e* $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$.
- *Comutatividade.* $m + n = n + m$ *e* $m \cdot n = n \cdot m$.
- *Lei do cancelamento.* $m + n = m + p \Rightarrow n = p$ *e* $m \cdot n = m \cdot p \Rightarrow n = p$.
- *Elemento Neutro.* $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \cdot n = n$.
- *Unicidade do elemento neutro.* $\exists! 1 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, 1 \cdot n = n \cdot 1 = n$.
- *Distributividade.* $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, (m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$.
- *Produto unitário.* $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \cdot n = 1 \Rightarrow m = n = 1$.

A demonstração de cada propriedade segue do uso do Princípio de Indução.

Pode-se estranhar o fato de que apenas definimos e analisamos as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{N}$. Isso dá-se porque a familiaridade com a aritmética escolar sugere que os resultados de cálculos como $2 - 3$ e $4 \div 5$ não são números naturais. Assim, tratamos apenas da adição e da multiplicação de números naturais, pois, a rigor, apenas essas são operações em $\mathbb{N}$.

Vejamos agora a relação de ordem em $\mathbb{N}$. Em termos simples, queremos formalizar a forma que comparamos números naturais, dizendo qual é maior ou menor.

Definição 3.5

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Dizemos que m é menor do que n quando tivermos $\exists k \in \mathbb{N}; n = m + k$ e representamos isso por $m < n$.

Em termos simples, o próximo teorema nos diz que tal relação é uma relação de ordem estrita.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Teorema 3.6

Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. Valem então as seguintes propriedades:

- $\nexists n \in \mathbb{N}; n < n$.
- *$n < m$ e $m < p$ implica $n < p$.*

Definição 3.7

Dados n e m em $\mathbb{N}$, dizemos que $n \leq m$ quando $n < m$ ou $n = m$.

Basicamente, o próximo teorema garante-nos que esta relação é de ordem.

Teorema 3.8

Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. Valem então as seguintes propriedades:

- $n \leq n$.
- *$n \leq m$ e $m \leq n$ implica $n = m$.*
- *$n \leq m$ e $m \leq p$ implica $n \leq p$.*

A partir dessa definição, uma propriedade interessante dos números naturais é a chamada *Tricotomia*, que definimos agora.

Teorema 3.9

Sejam m e n números naturais. Ocorre uma e somente uma das seguintes possibilidades:

- $n < m$.
- $n = m$.
- $m < n$.

Corolário 3.10

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, temos sempre ao menos um dos dois como verdade: $n \leq m$ ou $m \leq n$.

Finalmente, conectamos a relação de ordem dada com as operações definidas, algo muito importante para as chamadas *inequações*, isto é, relações entre números não iguais, mas ainda "comparáveis" pela relação de ordem. Boa parte da importância da relação de ordem segue justamente da sua compatibilidade com as operações estudadas.

Teorema 3.11

Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. Se $n \leq m$, as seguintes propriedades são válidas:

- $n + p \leq m + p$.

- $n \cdot p \leq m \cdot p$.

As propriedades dos teoremas anteriores são o que caracterizam essencialmente a estrutura dos números naturais. Sendo os Axiomas de Peano as condições suficientes para esses teoremas, os assumimos como verdade.

Uma vez bem entendidas as noções de Ordem em $\mathbb{N}$, podemos enunciar duas proposições equivalentes ao Princípio de Indução: O segundo Princípio de Indução e o Princípio de Boa Ordenação, que apresentamos através do resumo ilustrado a seguir.

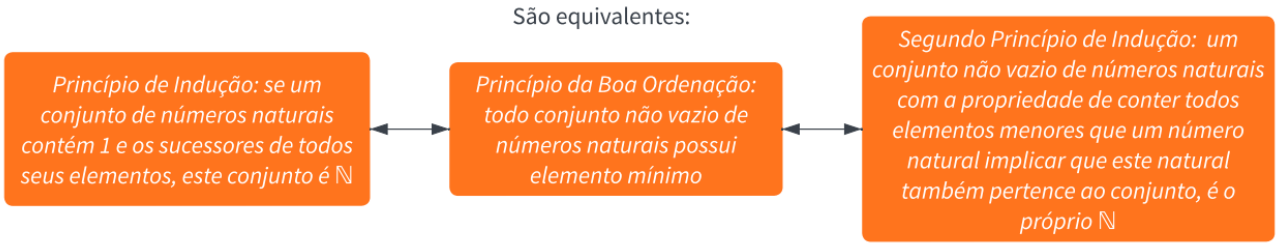


Figura 6: O Princípio de Indução e suas equivalências

Fonte: Os autores.

Outro conceito muito importante é o de enumerabilidade. Este é um momento interessante para discutir a noção de infinito, o que pode trazer discussões igualmente interessantes sobre a Teoria dos Conjuntos.

Primeiro, começamos definindo o que se entende por finitude. Informalmente, um grupo de objetos é finito quando podemos contar todos os objetos e essa contagem termina em algum número fixo, o número de objetos em questão. Mas como formalizar isso? Aproveitamos agora o fato de o conjunto dos números naturais ser intimamente conectado à noção de contagem.

Antes de fazer a conexão entre contagem e finitude, apresentamos duas concepções de contagem, que resultam em duas concepções do conjunto dos números naturais. A primeira é a ordinal, adotada usualmente em textos de Análise como o nosso, e os do Professor Elon (LIMA, 2013). Isso significa que, nesta concepção, os números naturais servem para *indexar* elementos de um conjunto: associamos 1 ao *primeiro* elemento, 2 ao *segundo* elemento, assim por diante. Desse modo cada número natural corresponde à posição de uma coleção *ordenada* de elementos. Já a concepção cardinal diz que os números naturais são aqueles que respondem perguntas do tipo "Quantos elementos têm este conjunto?", o que naturalmente inclui o zero, dada a existência do conjunto vazio. Ambas as concepções são apresentadas, inclusive, no contexto do ensino escolar de Matemática em "A Matemática do ensino médio" (LIMA *et al.*, 1997).

Definição 3.12
Um conjunto A é dito finito quando existe uma bijeção entre A e o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dos números naturais de 1 a n, denotado por I_n.

Assim, esta bijeção seria uma abstração da ideia intuitiva de contagem: associar a cada elemento de um conjunto um único número, de modo que não haja repetições ou elementos que não sejam

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

contados. Isso se traduz respectivamente para as noções mais formais de função – função injetiva e função sobrejetiva –, sendo por isso exigida uma função bijetiva entre os elementos de um conjunto e os números de elementos.

Desse modo, um conjunto *infinito* é aquele que não é finito.

Mas dentre os conjuntos infinitos, curiosamente, há diferentes classificações, e mais curioso ainda é o fato de podermos considerar infinitos de tamanhos distintos. Na nossa teoria, dois conjuntos são "do mesmo tamanho" quando podemos apresentar uma função bijetiva entre eles. A ideia é que podemos comparar os elementos do domínio e do contradomínio um a um: sem sobrar elementos de um lado e sem contar elementos repetidas vezes.

Uma pergunta natural seria "mas o que essas informações dizem a respeito dos números naturais?", e a resposta vem do fato interessantíssimo de $\mathbb{N}$ ser o menor conjunto infinito. Em outras palavras: existe uma função injetiva de $\mathbb{N}$ para qualquer conjunto infinito. No entanto, a recíproca é falsa.

Para os casos em que vale a recíproca, temos então funções bijetivas entre $\mathbb{N}$ e algum conjunto infinito. Para esses conjuntos infinitos especiais há a denominação enumerável. Ou seja:

Definição 3.13
Um conjunto é enumerável se é finito ou possui bijeção com $\mathbb{N}$.

Por fim, fechamos esta seção explicitando a "posição especial" de $\mathbb{N}$ entre os conjuntos infinitos: a saber, $\mathbb{N}$ é o menor conjunto infinito, no sentido do teorema a seguir.

Teorema 3.14
Existe uma função injetiva de $\mathbb{N}$ *em qualquer conjunto infinito.*

Pode para alguns estudantes este teorema soar natural, pois a intuição pode nos levar a pensar que todos os conjuntos infinitos possuem o mesmo tamanho. Então vem a informação polêmica: na Teoria dos Conjuntos, fundada por Cantor, existem infinitos de tamanhos distintos!

Podemos indicar "tamanho" entre conjuntos através de funções. Se existe uma função injetiva de um conjunto A em um conjunto B, dizemos que a *cardinalidade* de A é menor do que ou igual a a cardinalidade de B. E caso tenhamos uma função bijetiva de A em B, dizemos que tais conjuntos possuem a mesma cardinalidade.

O que veremos então é que apesar de existir uma função injetiva de $\mathbb{N}$ em qualquer conjunto infinito, a recíproca é falsa.

Nossos exemplos de conjuntos infinitos mais familiares são os conjuntos numéricos apresentados na escola, respectivamente $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Apesar de a ordem de apresentação inicialmente não ser essa, estamos familiarizados com ela.

Naturalmente, estendemos $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$ buscando tornar a subtração uma operação de fato, isto é, em $\mathbb{Z}$ a subtração é uma operação, mas $\mathbb{N}$, não. Assim, introduzimos os inversos aditivos, que introduzem a noção de orientação na reta numérica.

Coisa similar ocorre com a extensão de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$: procuramos tornar a divisão uma operação, introduzindo os inversos multiplicativos, assim introduzindo a ideia de submúltiplos, podendo repartir qualquer quantidade quantas vezes quanto necessário.

Já a extensão de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ não é de natureza algébrica, e justamente a natureza distinta dos números reais torna este conjunto nosso principal exemplo de conjunto com cardinalidade distinta daquela dos números naturais. Novamente, encerramos a discussão com exercícios resolvidos.

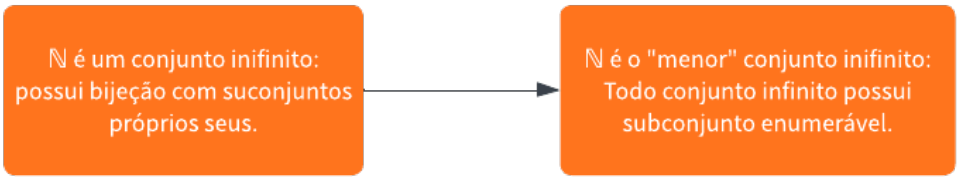


Figura 7: Números naturais e a noção de enumerabilidade.

Fonte: Os autores.

Consideramos que as principais relações entre o estudo formal de números naturais e a formação de professores de Matemática que ensinarão números naturais no ensino básico são apresentadas em (RIPOLL; GIRALDO; RANGEL, 2016a; KLEIN, 2009). Por isso, tratamos apenas brevemente desse tópico.

Primeiro, reiteramos as diferentes apresentações da Matemática nesses diferentes níveis. Na escola, aprendemos a calcular com números naturais através das chamadas quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão. A rigor, subtração e divisão não são operações em $\mathbb{N}$, pois nem sempre a diferença entre dois números naturais é um número natural, e o mesmo vale para o quociente de naturais. No entanto, ao questionarmos sobre o que de fato é a identidade essencial de $\mathbb{N}$, deparamo-nos com as propriedades deste conjunto com relação às operações de adição e multiplicação. Como tais propriedades seguem diretamente dos Axiomas de Peano, principiamos os estudos por eles, que claramente não são apresentados no ensino básico.

Percebemos então que a diferença entre o ensino básico e o universitário, até quando contemplam o mesmo objeto de estudo, é que o primeiro preocupa-se em como proceder em problemas envolvendo determinados conceitos, e o segundo com questões a respeito da identificação e propriedades desses mesmos conceitos. Assim, o estudo formal de números naturais que apresentamos aqui, baseado nas notas produzidas, esclarece ao professor exatamente o que são operações, como identificamos os números naturais e como $\mathbb{N}$ diferencia-se de outros conjuntos numéricos. A saber: uma operação é um tipo de função, os naturais caracterizam-se pelos axiomas de Peano, que implicam propriedades algébricas e de ordem da estrutura que identifica o conjunto $\mathbb{N}$, incluindo por exemplo associatividade e comutatividade na adição e na multiplicação, mas sem elementos inversos em qualquer uma das duas operações.

Além disso, esse estudo formal explicita as relações entre essas propriedades características dos números naturais. Por exemplo, a associatividade precede a comutatividade, no sentido de que a primeira implica a segunda, como se vê nas demonstrações dos teoremas comentados, tanto em nosso trabalho quanto em nossas referências.

Mas para demonstrar todas essas propriedades, o Princípio de Indução é imprescindível, e é um tópico que pode ser trabalhado em sala de aula para turmas avançadas, sendo até mesmo presente em problemas de olimpíadas de Matemática. É particularmente útil para problemas que envolvem demonstrar que uma igualdade sempre vale para números naturais quaisquer.

Como curiosidade e exemplo, vejamos como podemos interpretar as operações definidas até aqui.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

A soma de $m, n \in \mathbb{N}$ é dada da seguinte forma: Para $n = 1$, temos $m + n = m + 1 = s(m)$, ou seja, o número "uma vez após m", o resultado da função sucessor aplicada uma vez no número m. Para $n + 1$, supondo que $m + n$ seja o número "n vezes após m", ou seja, o resultado de n aplicações da função sucessor em m, obtemos $m + (n + 1) = (m + n) + 1$, que seria o sucessor do número "n vezes após m", isto é, o número "$n + 1$ vezes após m" ou ainda, o resultado de $n + 1$ aplicações da função sucessor em m.

O produto de $m, n \in \mathbb{N}$ é dado da seguinte forma: Para $n = 1$, temos $m \cdot n = m \cdot 1 = m$, ou seja, "uma vez o número m". Para $n + 1$, supondo que $m \cdot n$ é a soma de n parcelas iguais a m, ou seja, o resultado do somatório $\sum_{i=1}^{n} m$, obtemos $m \cdot (n + 1) = (m \cdot n) + m$, que é a soma de $n + 1$ parcelas iguais a m, ou ainda, o resultado do somatório $\sum_{i=1}^{n+1} m$.

O fato que basicamente todos os teoremas apresentados usam o Princípio de Indução também permite que o estudo formal de $\mathbb{N}$ seja um ótimo exercício de raciocínio e escrita matemática formais.

Discutir o que de fato constitui uma operação, bem como o que são relações de ordem e, particularmente, relações de ordem compatíveis com as operações de um conjunto são oportunidades riquíssimas, que esclarecem não apenas o entendimento sobre os números naturais, mas sobre todos os conjuntos numéricos e muitas outras estruturas matemáticas. O mesmo vale para discussões a respeito da noção formal de infinito, que possui uma história riquíssima.

Voltando às diferentes possíveis apresentações, destacamos o fato de que tanto a apresentação de $\mathbb{N}$ a partir dos Axiomas de Peano quanto a noção de enumerabilidade são jovens do ponto de vista da História da Matemática, ainda mais jovens que a formalização da reta real que vemos a seguir. Particularmente, as noções de infinito e enumerabilidade modernas ainda enfrentaram certa resistência quanto a sua aceitação na comunidade acadêmica. Isso se dá justamente porque nos deparamos com resultados que podem ser contraintuitivos para muitos, mostrando então uma quebra de paradigmas matemáticos.

Por fim, vale lembrar que identificamos esta estrutura através das suas propriedades algébricas e de ordem, sem necessariamente tratar da natureza de seus elementos, abrindo portas para muitas interpretações sobre o que de fato é um número natural. O estudo matemático formal permite-nos saber como identificar estruturas que possam ter diferentes naturezas como equivalentes, sem favorecer alguma em particular. Existem diferentes construções de $\mathbb{N}$, mas como todas resultam em um conjunto com operações e ordem com as mesmas propriedades, matematicamente consideramos tais estruturas como indistinguíveis. Questões como essa acabam sendo de interesse maior da Filosofia da Matemática do que da Matemática em si, mas isto não quer dizer que não valham a pena serem discutidas. É importante que o professor conheça os números naturais a ponto de, inclusive, saber quais são as fronteiras de seu conhecimento, e até mesmo da própria Matemática.

3.3 Números Reais

Em seguida, passamos a discutir os números reais. Novamente, seguimos o método axiomático. Começamos então apresentando a reta como corpo ordenado completo.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

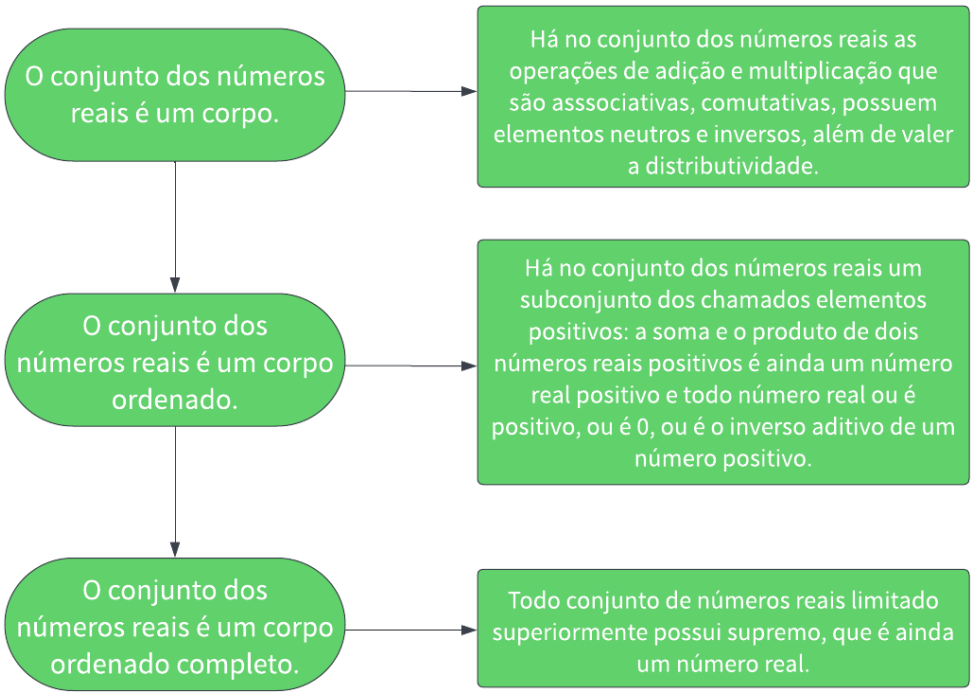


Figura 8: A reta real como corpo ordenado completo

Fonte: Os autores.

A primeira observação que cabe aqui é a de que, diferentemente da apresentação axiomática dos naturais, a dos reais parte diretamente das propriedades algébricas e de ordem, além da completeza, que é de natureza muito diferente.

Pode-se estranhar ainda o fato de termos pulado diretamente dos naturais para os reais, sendo que a abordagem usual é passar antes por inteiros e racionais. No entanto, uma vez conhecida a estrutura da reta, ou como vemos adiante, de um corpo ordenado qualquer, podemos considerar os racionais, e consequentemente os demais conjuntos numéricos como contidos em tal estrutura.

Como de costume, destacamos a diferença entre essa abordagem, e a do ensino básico, que geralmente peca por falta de precisão. Costumam-se ouvir em sala de aula explicações como "os números reais são o conjunto de todos os números", "os números reais são os racionais e irracionais juntos" e "os números reais são aqueles que preenchem a reta". A primeira afirmação precisa de uma definição do que viria a ser número, mas mesmo que se defina número como exatamente sendo número real, o que dizer dos números complexos? A segunda e a terceira precisam de mais informações.

As alternativas mais viáveis seriam introduzir os números reais através de sua representação decimal ou fazer a identificação entre números reais e pontos de uma reta orientada, mas de forma mais detalhada.

Vale lembrar novamente que, ainda assim, essas apresentações diferem da ordem em que surgiram tais conceitos historicamente. Mas há algo em comum entre a abordagem escolar e a abordagem que aqui optamos, embasada na Matemática universitária: os números inteiros são introduzidos após os números naturais. Como já comentamos, normalmente a estrutura em que são apresentados os conjuntos numéricos é a seguinte: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Há inclusive famosas representações em Diagramas de Venn, muito utilizadas para ilustrar a relação de inclusão (estrita) entre esses conjuntos.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

No entanto, não apenas na escola conhecemos um pouco de frações (positivas) antes de serem introduzidos os números inteiros negativos, como historicamente temos algo semelhante. Ou seja, na escola a ideia de fração precede a própria noção de número negativo, introduzindo as ideias de oposto de uma operação, de orientação na reta numérica, e expandindo a noção de subtração, além de consequentemente trazer as famosas regras de sinais. E, historicamente, a ideia de número inteiro como concebemos atualmente é ainda muito recente.

O próprio Cauchy, uma das principais figuras no surgimento da Análise como área separada do Cálculo e um dos principais precursores do rigor matemático moderno, em seu Curso de Análise ainda considerava número apenas o que se entende atualmente como número real positivo. O termo *quantidade* era empregado para representar números orientados, isto é, positivos ou negativos, e também o zero, coincidindo com a noção de número real atual. Essa diferença de tratamento com os números negativos ameaçava ainda mais os números complexos, que não eram considerados números também, mas meras expressões úteis apenas como ferramentas.

Voltemos, no entanto, para, a partir da noção de corpo ordenado, ilustrar nossa apresentação dos conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

Suponha que tenhamos um corpo qualquer K. Uma importante informação é que, em qualquer corpo ordenado, 1 é positivo.

Sabendo isso, podemos de certa forma "construir $\mathbb{N}$ dentro de K". Tomamos assim o conjunto $\{1, 1+1, 1+1+1, \ldots\}$. Observamos ainda que $1 < 1+1$, assim como $1+1 < 1+1+1$ e assim por diante. Esse conjunto, com a função sucessor sendo representada da forma que já conhecemos, $s(k) = k+1$, possui as mesmas propriedades que estudamos sobre $\mathbb{N}$.

E conhecendo $\mathbb{N}$, podemos simplesmente tomar $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$, sendo $-\mathbb{N}$ o conjunto dos inversos aditivos de $\mathbb{N}$. Daí seguem as características usuais do conjunto dos números naturais.

Por fim, por considerarmos $\mathbb{Z} \subset K$, podemos tomar $\mathbb{Q} = \left\{m \cdot n^{-1}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Assim, $\mathbb{Q} \subset K$ sempre. Com as operações e relação de ordem de K, teremos $\mathbb{Q}$ sendo um corpo ordenado ainda. Então, sendo $\mathbb{Q}$ um corpo ordenado temos que este é o menor dos corpos ordenados, no sentido de estar contido nos demais. Um texto mais rigoroso diria ainda que há um isomorfismo entre as cópias de $\mathbb{Q}$ em cada corpo da forma que indicamos.

Vale notar ainda que, surpreendentemente, o conjunto dos números inteiros é enumerável. Podemos, por exemplo, associar todos os ímpares com os inteiros negativos e os pares com os inteiros positivos, desde que se tenha uma exceção e um número também seja associado ao 0 .

Observemos agora fatos sobre os números racionais, em particular aqueles que podem ser analisados sob a ótica das frações, sustentada pela visão de $\mathbb{Q}$ como corpo de frações de $\mathbb{Z}$. Em termos simples, usando a construção dada, $\mathbb{Q}$ é o menor corpo que contém $\mathbb{Z}$. Mais rigorosamente: dado qualquer corpo que contenha os inteiros, existe um subcorpo seu, identificado como uma cópia dos racionais.

Assim, a ideia da passagem de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$ nada mais é que adicionar o mínimo de elementos possível para que obtenhamos um corpo. Ou seja, introduzimos os inversos multiplicativos de $\mathbb{Z}$, mas para mantermos as propriedades de corpo, obtemos outros números racionais: aqueles entre dois números inteiros.

Observamos então que $\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}$, como os próprios símbolos sugerem, ou seja, e esta é uma observação importante: todo número racional é o produto de um número inteiro pelo inverso multiplicativo de outro número inteiro (não nulo). Podemos ainda ver os números racionais como a soma de inteiro

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

com uma fração unitária (isto é, de numerador 1, e portanto, o inverso multiplicativo de outro inteiro). Por exemplo $\frac{3}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$. Isto fica particularmente claro quando utilizamos a notação decimal para os números racionais.

Mas analisemos os racionais sobre sua representação fracionária, característica herdada de sua perspectiva como corpo de frações dos inteiros. Esta representação é particularmente útil para demonstrar fatos a respeito dessa estrutura.

No entanto, lidar com frações é um tópico com o qual muitos alunos encontram dificuldades, seja por questões relativas ao raciocínio algébrico, a representação de incógnitas por letras, ou a própria aritmética dos inteiros. Parte desses problemas se agravam por questões internas dos alunos, mas justamente cabe aos professores lidar com tais questões. Façamos uma análise de como entender $\mathbb{Q}$ como corpo de frações e como corpo ordenado pode elucidar ao professor alguns destes problemas.

Começamos analisando a simples questão de dizer quando duas frações são iguais. A explicação remete ao conceito de relação de equivalência. Em termos simples, as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{9}$ são compostas por diferentes numeradores e denominadores, então por que dizemos que são iguais? Geralmente a resposta surge através de exemplos práticos, como ilustrações e casos particulares, especialmente exemplos com repartições de comida. Um caso famoso seria dizer que tomar três fatias de uma *pizza* cortada em nove pedaços iguais equivale a ter um terço da *pizza*.

Mas como podemos ter um critério geral para saber dizer quando duas frações quaisquer são iguais? São estes problemas que preocupam a Matemática universitária. O critério comumente encontrado nos livros é que dadas frações $\frac{p}{q}, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, dizer $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ equivale a termos a igualdade $p \cdot n = q \cdot m$.

Observe que, da forma que imergimos os racionais dentro de um corpo ordenado e identificamos a fração $\frac{p}{q}$ com o produto de um inteiro com o inverso multiplicativo de um inteiro não nulo $p \cdot q^{-1}$, segue a seguinte cadeia de equivalências:

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} = \frac{m}{n} &\Leftrightarrow p \cdot q^{-1} = m \cdot n^{-1} \\
&\Leftrightarrow \left(p \cdot q^{-1}\right) \cdot q = \left(m \cdot n^{-1}\right) \cdot q \\
&\Leftrightarrow p \cdot n = \left[\left(m \cdot n^{-1}\right) \cdot q\right] \cdot n \\
&\Leftrightarrow p \cdot n = m \cdot q.
\end{aligned}$$

Normalmente, o critério usado em sala de aula vem de "multiplicar ou dividir em cima e embaixo", isto é, dada uma fração $\frac{p}{q}$, se multiplicarmos ou dividirmos numerador e denominador pelo mesmo número, obtemos uma fração equivalente.

Mas, para ver a relação entre esses dois critérios de igualdade, basta observarmos as seguintes equivalências:

$$\frac{p}{q} = \frac{k \cdot p}{k \cdot q} \Leftrightarrow p \cdot (k \cdot q) = q \cdot (k \cdot p).$$

Assim, é demonstrado o critério de igualdade utilizado em sala de aula. A última igualdade é verdadeira em razão das propriedades associativa e comutativa da multiplicação de números inteiros. Comentamos em breve sobre esse tipo de demonstração, mas, antes, falemos brevemente dos inteiros.

Novamente, em razão de já termos ótimos tratados sobre números inteiros e a prática em sala de aula (KLEIN, 2009; RIPOLL; GIRALDO; RANGEL, 2016b), comentamos sobre este conjunto numérico apenas de forma breve. Além disso, dentro da Análise Real os conjuntos numéricos de maior interesse

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

são $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$. Para uma abordagem axiomática, ilustrando como se entendem os números inteiros do ponto de vista da Matemática universitária, recomendamos (HEFEZ, 2014; GONçALVES, 1979) e para sua construção a partir dos naturais, (BEZERRA, 2018; MILIES; COELHO, 2001).

Ao olhar a abordagem construtiva, formalizamos a noção de podermos representar o mesmo número por diferentes diferenças através da noção de classes de equivalência, que depende da noção de relação de equivalência. Ou seja, uma relação com as mesmas propriedades que a relação de igualdade, a saber: reflexividade, que significa todo elemento dessa relação é relacionado consigo mesmo; simetria, que quer dizer se um elemento é relacionado com outro, vale a recíproca; e transitividade, onde se um elemento é relacionado com outro e este último é relacionado com um terceiro, então o primeiro é relacionado com o terceiro. Vejamos o que tem isso a dizer sobre os inteiros.

Sabemos que $1 - 2 = 3 - 4 = 6 - 7$, pois todas essas subtrações resultam em -1. Do ponto de vista da apresentação de números inteiros como construídos a partir dos naturais, isso se segue do fato de que na verdade essas diferenças são representadas pelos pares ordenados dos números operados e relacionadas entre si por uma relação de equivalência, o que por sua vez explica o porquê diferentes subtrações resultam no mesmo inteiro: são apenas representações da mesma classe de equivalência, isto é, pares ordenados que estão relacionados entre si, representando o mesmo objeto, neste caso, o mesmo número inteiro.

A partir daí definem-se as operações com os inteiros e sua relação de ordem, compatível com as mesmas operações. Agora, temos uma estrutura onde a operação de subtração é de fato uma operação, isto é, a diferença de dois inteiros quaisquer é sempre um inteiro. Mas, nem sempre a divisão de inteiros resulta em um inteiro. No caso especial que resulta, surge o conceito de número múltiplo de outro. A partir daí surgem conceitos interessantíssimos como M.M.C. (mínimo múltiplo comum), M.D.C. (máximo divisor comum), Divisão Euclidiana, etc.

O caso especial de comparar pares de inteiros e analisar seus múltiplos, determinando seus M.M.C. e M.D.C. é muito útil para entender os racionais, especialmente ao estudarmos frações redutíveis, coisa que podemos definir baseados no critério de igualdade comentado anteriormente. Dizemos que um número racional $\frac{p}{q}$ é redutível quando ele pode ser escrito como produto de um número inteiro k por outro número racional $\frac{m}{n}$; quando isso não é possível, dizemos que $\frac{p}{q}$ é irredutível. Demonstra-se que $\frac{p}{q}$ é irredutível se, e somente se, p e q são primos entre si, ou seja, $M.D.C.\ (p, q) = 1$. Um caso em que isso é utilizado fortemente é o das operações entre frações, que logo abordamos.

Vale também destacar que nossa definição de igualdade entre números racionais também surge da noção de classes de equivalência, relacionadas pela multiplicação entre inteiros como já vimos. Mas, no caso dos racionais, essa relação é mais evidente, pois na representação fracionária, ficam explícitos quais pares de inteiros estamos usando para representar o número racional: seu numerador e denominador, respectivamente.

De forma análoga ao critério de igualdade, definimos as operações entre números racionais. A adição de números racionais $\frac{p}{q}$ e $\frac{m}{n}$ é dada por

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{p \cdot n + m \cdot q}{q \cdot n}.$$

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Novamente, vejamos a razão disso baseados em nossa concepção de $\mathbb{Q}$ como corpo ordenado.

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q}+\frac{m}{n} &= \left(p\cdot q^{-1}\right)+\left(m\cdot n^{-1}\right)\\
&= \left(\left(p\cdot q^{-1}\right)+\left(m\cdot n^{-1}\right)\right)\cdot 1\\
&= \left(\left(p\cdot q^{-1}\right)+\left(m\cdot n^{-1}\right)\right)\cdot\left((q\cdot n)\cdot(q\cdot n)^{-1}\right)\\
&= \left(\left(p\cdot q^{-1}\right)\right)\cdot\left((q\cdot n)\cdot(q\cdot n)^{-1}\right)+\left(\left(m\cdot n^{-1}\right)\right)\cdot\left((q\cdot n)\cdot(q\cdot n)^{-1}\right)\\
&= \left(\left(p\cdot q^{-1}\right)\right)\cdot\left((q\cdot n)\cdot(q\cdot n)^{-1}\right)+\left(\left(m\cdot n^{-1}\right)\right)\cdot\left((n\cdot q)\cdot(q\cdot n)^{-1}\right)\\
&= \left((p\cdot n)\cdot(q\cdot n)^{-1}\right)+\left((m\cdot q)\cdot(q\cdot n)^{-1}\right)\\
&= \left((p\cdot n)+(m\cdot q)\right)\cdot\left((q\cdot n)^{-1}\right)\\
&= \frac{(p\cdot n)+(m\cdot q)}{q\cdot n}
\end{aligned}$$

Observe que usamos as propriedades de corpo, como elemento neutro multiplicativo, inverso multiplicativo e distributividade.

No entanto, analisemos como esta forma de somar dois números racionais quaisquer relaciona-se com redução de frações. A soma usual de números racionais na escola é:

Dadas duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, onde $b \neq 0$ e $d \neq 0$, a soma dessas frações para obter uma fração irredutível é realizada da seguinte forma:

1. Determine o mínimo múltiplo comum (M.M.C.) dos denominadores b e d, denotado por M.M.C. (b, d).

2. Reescreva ambas as frações de modo que seus denominadores tornem-se M.M.C.(b, d). Isso é feito multiplicando o numerador e o denominador de cada fração pelo fator necessário.

3. Some os numeradores resultantes para obter um numerador $(a\cdot$ M.M.C. $(b, d))+ (c\cdot$ M.M.C. $(b, d))$ e mantenha o denominador como M.M.C. (b, d).

4. Simplifique a fração resultante, se necessário, para garantir que esteja na forma irredutível, ou seja, o numerador e o denominador não têm fatores primos em comum, exceto 1.

Ora, este método nada mais é do que tornar as frações como frações de denominador comum multiplicando numerador e denominador de cada fração por um mesmo número, o que segue do critério de igualdade que vimos. Além disso, podemos somar frações de mesmo denominador repetindo este e somando os numeradores pois

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a\cdot b+c\cdot b}{b\cdot b}=\frac{(a+c)\cdot b}{b\cdot b}=\frac{a+c}{b}$$

Portanto, o método usualmente empregado nas escolas, segue do que justificamos usando ideias da Matemática universitária.

Ideia semelhante vale para a multiplicação de números racionais. De fato, a regra usual escolar é bem simples e até coincide com aquela usualmente empregada nas universidades. Dados números racionais $\frac{p}{q}$ e $\frac{m}{n}$, seu produto é definido do seguinte modo $\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}=\frac{p\cdot m}{q\cdot n}$.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

De fato,

$$\begin{aligned}\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n} &= \left(p\cdot q^{-1}\right)\cdot\left(m\cdot n^{-1}\right)\\ &= (p\cdot m)\cdot\left(q^{-1}\cdot n^{-1}\right)\\ &= (p\cdot m)\cdot(q\cdot n)^{-1}\\ &= \frac{p\cdot m}{q\cdot n}\end{aligned}$$

Observamos que usamos a propriedade de corpos na qual o produto de inversos multiplicativos de dois elementos é o inverso multiplicativo desses dois elementos.

Aqui cabe mencionar que frações, razões, quocientes e proporções estão sendo trabalhadas sobre o contexto de números inteiros, resultando no que conhecemos como os números racionais. Mas esses conceitos nem sempre se limitam a frações de inteiros, podemos encontrar mais adiante razões entre outros entes matemáticos, como polinômios. No entanto, estendendo o raciocínio até aqui empregado, conseguimos dizer coisas para estruturas semelhantes.

Ao analisar a nossa definição de igualdade entre números racionais, vemos que $\frac{p}{q} = \frac{m}{n} \Rightarrow p\cdot n = m\cdot q$; isolando algum desses termos, por exemplo, p, obtemos $p = \frac{m\cdot q}{n}$. Este raciocínio é o mesmo utilizado na solução de problemas com a famosa regra de três, que trabalhamos adiante mais detalhadamente.

É natural então questionar: O que podemos dizer sobre a relação de ordem dos racionais? Observe que em nossa definição de corpo ordenado, não citamos uma relação de ordem, como quando tratamos dos números naturais. Isto se dá através do subconjunto dos elementos positivos de um corpo ordenado, pois a partir deste construímos relações de ordem compatíveis com as operações do corpo dado.

O conjunto dos números racionais positivos é aquele formado pelas frações cujos denominadores e numeradores são inteiros positivos. Em símbolos: $\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}; p, q \in \mathbb{N}\right\}$. De fato, a soma de racionais positivos é fechada, pois dados $\frac{p}{q}, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$, sua soma é dada por $\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{p\cdot n + m\cdot q}{q\cdot n}$, sendo que $pn + mq, q\cdot n \in \mathbb{N}$. Do mesmo modo, $\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n} = \frac{p\cdot m}{q\cdot n}$, e temos $p\cdot m, q\cdot n \in \mathbb{N}$.

Ora, dado um número racional qualquer, podemos fixar seu denominador como positivo sem perda de generalidade e analisamos o seu numerador: se for um inteiro positivo, este número racional será positivo, se for 0, então este número racional é 0, se for um número inteiro negativo, então este número racional é o inverso aditivo de um número racional positivo. Como todas essas condições são mutuamente excludentes, ocorre uma, e apenas uma delas.

A partir de um subconjunto de elementos positivos de um corpo K qualquer, denotado por K^+, enunciamos as seguintes definições e proposições, além de as demonstrar em nossas notas.

Definição 3.15

Diz-se que x *é menor do que* y e escreve-se $x < y$ quando $y - x \in K^+$. Neste caso, escreve-se também $y > x$ e diz-se que y *é maior do que* x. Por fim, caso $x < y$ ou $x = y$, denotamos $x \leq y$, ou ainda $y \geq x$.

Vejamos como podemos relacionar esta ordem com a noção de números positivos.

Teorema 3.16

As seguintes equivalências valem para qualquer $x \in K$ *:*

- $0 < x \iff x \in K^+$;
- $x < 0 \iff -x \in K^+$.

Demonstração. De fato, temos $0 < x \iff x - 0 = x + 0 = x \in K^+$e analogamente, $x < 0 \iff 0 - x = 0 + (-x) = -x \in K^+$.

Agora vemos que de fato temos uma relação de ordem em K dada por $\leq$. ■

Teorema 3.17

Sejam $x, y, z \in K$. Temos:

- $x \leq x$.
- $x \leq y$ *e* $y \leq x$ *implica* $x = y$.
- $x \leq y$ *e* $y \leq z$ *implica* $x \leq z$.

Vejamos mais algumas propriedades de corpos ordenados, as que de fato tornam K um corpo ordenado no sentido mais intuitivo:

Teorema 3.18

Sejam $x, y, z \in K$. Temos:

- *Tricotomia: Ocorre exatamente um dos seguintes casos:* $x < y, y < x$ *ou* $x = y$.
- *Compatibilidade com a adição:* $x \leq y$ *implica* $x + z \leq y + z$.
- *Compatibilidade com a multiplicação:* $x \leq y$ *e* $z > 0$ *implica* $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Agora vemos ainda algumas das propriedades que são consequências importantes da definição de corpo ordenado.

Teorema 3.19

Sejam $a, b, c, d \in K$. Temos:

i. $a \leq b$ *e* $c \leq d$ *implica* $a + c \leq b + d$.

ii. $a \leq b$ *e* $c < 0$ *implica* $b \cdot c \leq a \cdot c$.

iii. $0 < 1$, *isto é,* $1 \in K^+$.

iv. $a > 0$ *implica* $a^{-1} > 0$.

v. $a < 0$ *implica* $a^{-1} < 0$.

Observe que, em nossa construção geral, economizamos o trabalho de repetir o mesmo processo feito em $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$, pois trabalhamos em um corpo ordenado K qualquer, o que inclui esses conjuntos numéricos.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Vejamos ainda outros resultados importantes e até suas demonstrações a respeito das propriedades de corpos ordenados.

Teorema 3.20 (Identidades Algébricas)
Sejam $a, b \in K$. Temos as seguintes igualdades, conhecidas como produtos notáveis:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$.
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2$.
3. $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$.

Demonstração. Estas propriedades seguem diretamente das propriedades das operações de corpo e da definição de segunda potência.

1. $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = [a \cdot (a+b)] + [b \cdot (a+b)] = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$.
2. $(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = [a \cdot (a-b)] - [b \cdot (a-b)] = a^2 - a \cdot b - a \cdot b + b^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2$.
3. $(a+b)(a-b) = a^2 + a \cdot b - a \cdot b - b^2 = a^2 - b^2$. ■

Teorema 3.21 (Equivalência entre razões)
Sejam $a, b, c, d \in K$, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$. Temos $a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1} \iff ad = cb$.

Demonstração. Observamos as equivalências:

$$\begin{aligned} a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1} &\iff \left(a \cdot b^{-1}\right) \cdot b = \left(c \cdot d^{-1}\right) \cdot b \\ &\iff a = \left(c \cdot d^{-1}\right) \cdot b \\ &\iff a \cdot d = \left(c \cdot d^{-1}\right) \cdot b \cdot d \\ &\iff a \cdot d = c \cdot b \end{aligned}$$

■

No caso particular em que a, b, c e d são inteiros, temos a igualdade entre números racionais. Mas, se tomarmos a, b, c e d reais, temos a base para a chamada *regra de três.*

Em seguida, voltamos a analisar as equivalentes concepções de corpo ordenado completo.

Analisemos agora os números racionais em sua representação geométrica como pontos em uma reta orientada, e na representação decimal como sequência de dígitos, para compreender melhor o que a noção de completeza da reta tem a nos revelar sobre a diferença entre os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

A reta em sua construção geométrica é muito bem apresentada, inclusive de modo acessível ao ensino médio, em (LIMA, 2016). O mesmo vale para sua representação decimal, dada em (NETO, 2013). Vejamos de forma resumida tais apresentações para ilustrar as diferenças entre os conjuntos dos números racionais e reais, como consequência da completeza da reta.

A necessidade de interpretar os números reais como uma reta surge da necessidade de ordenar e comparar medidas de forma consistente. A reta real é uma representação geométrica poderosa que permite visualizar a relação de ordem entre os números reais e facilita a compreensão das propriedades das grandezas que estão sendo medidas.

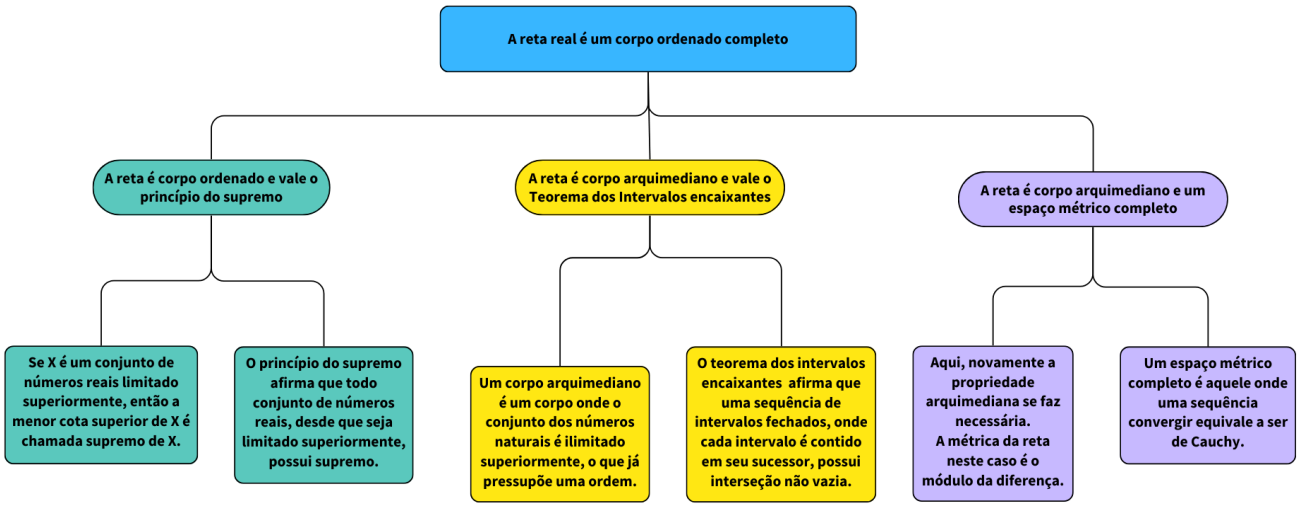


Figura 9: Concepções equivalentes da completeza da reta real

Fonte: Os autores.

Seja AB um segmento de reta. Para que seja possível medi-lo, utilizamos um dado segmento fixo u, chamado segmento unitário. Neste sentido, *medir* significa determinar quantas vezes a unidade u "cabe" em AB.

No caso em que u cabe uma quantidade *inteira* de vezes em AB, a comparação de grandezas é expressa por um número natural n tal que $AB = n \cdot u$, onde n é a medida do segmento AB. E no caso em que não é possível expressar um número natural n, então a medida de AB não será um número natural.

Portanto, a nova estratégia para obter a comparação entre grandezas é buscar um outro segmento, u', que caiba n vezes no segmento unitário u e m vezes em AB. Ou seja, m e u são múltiplos de uma unidade comum u'. Encontrado u', caracterizamos então AB e u como segmentos *comensuráveis*.

Desta forma, surge do caso particular de grandezas comensuráveis o conceito de número racional positivo, pois a medida de u' será a fração $\frac{1}{n}$ e a medida de AB, por conseguinte, será m vezes $\frac{1}{n}$, isto é, igual a $\frac{m}{n}$.

No entanto, desde a Grécia Antiga os matemáticos gregos deparavam-se com medidas que não podiam ser expressas como uma comparação de grandezas comuns. Essas medidas são chamadas de *incomensuráveis*. Um exemplo clássico de incomensurabilidade é a relação entre o lado e a diagonal de um quadrado. Analisemos isto no caso da diagonal de lado unitário.

Exemplo 3.22
Ainda que $2, \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, temos $2^{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{Q}$, isto é, $\sqrt{2}$ não é um número racional.

De fato, se tivéssemos $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}; \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, podemos assumir sem perda de generalidade que temos $\frac{p}{q}$ de forma irredutível, ou seja, com p e q primos entre si. Assim, teríamos que p^2 deve ser um número par, pois é dobro de q^2. E p deve ser par também, pois o quadrado de um número ímpar é ímpar, o que não é o caso. Sendo p um número par e, p é o dobro de algum número inteiro, digamos a. Logo, $p^2 = (2a)^2 = (2a)(2a) = 2q^2$, de onde podemos concluir que $(2a)a = q^2$, porém teríamos p e q sendo ambos pares, o que contradiz a hipótese de serem primos entre si. Absurdo!

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Assim, como $\sqrt{2}$ não pode ser escrita como razão entre inteiros, este número não é racional, mas é uma medida de um segmento de reta, sendo tal segmento dito incomensurável com a unidade fixada.

A existência de segmentos incomensuráveis implica que devemos expandir o conceito de números utilizados para medir, introduzindo os chamados *números irracionais*. Isto significa dizer que qualquer segmento de reta tem uma medida numérica. Assim, quando o segmento é comensurável com a unidade designada, sua medida é um número racional, caso contrário, é um número irracional.

Em termos simples, do ponto de vista geométrico, o corpo ordenado dos racionais não é completo pois não "preenche toda a reta".

A ideia geométrica dos números reais advém das noções de números racionais e irracionais no sentido de que ao tentarmos situar ambos os conjuntos, imaginamos uma reta. Assim, fixando um ponto O, chamado de origem, e um ponto A, diferente de O, temos o que chamamos de *reta real*.

Falemos agora sobre reais e racionais do ponto de vista de suas representações decimais, ferramenta muito utilizada no ensino escolar.

A representação decimal consiste basicamente em escrever um número na forma $a_0, a_1a_2 \ldots a_m \ldots$, onde a_0 é um número inteiro e $a_1a_2 \ldots a_m \ldots$ são seus *dígitos*, isto é, inteiros entre 0 e 9.

A representação decimal dos números reais é fundamental para compreender a estrutura matemática subjacente. Ao considerarmos a expansão decimal de um número real, podemos classificá-lo como racional ou irracional, revelando propriedades distintas entre essas duas categorias.

Os números racionais, expressos na forma $a_0, a_1a_2 \ldots a_m \ldots$, apresentam uma representação decimal que é finita ou periódica. Isso implica que, ao escrever um número racional em sua forma decimal, a sequência de dígitos eventualmente se estabiliza e se repete indefinidamente. Um exemplo claro é $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$, onde a repetição do dígito "3" denota a natureza periódica da expansão decimal.

Por outro lado, os números irracionais, como $\sqrt{2}$, desafiam essa regularidade. Sua representação decimal é infinita e não repetitiva, não importando o quão longe se prossiga na expansão. Enquanto os racionais exibem uma clara periodicidade na representação decimal, os irracionais revelam a peculiaridade de uma expansão infinita e não repetitiva.

Esta distinção na representação decimal oferece outra visão das propriedades matemáticas dos números reais, abrindo caminho para uma compreensão mais aprofundada das características singulares dos racionais e irracionais no contexto da teoria dos números reais.

Reiteramos que a grande procura por novos padrões de rigor na Matemática Moderna tem como marco inicial uma revisão sobre um teorema hoje atribuído à Análise Real: O Teorema do Valor Intermediário (BARONI; OTERO-GARCIA, 2014).

Em termos simples, se uma função contínua definida em um intervalo fechado e limitado da reta passa por um ponto menor que um valor c e depois por outro ponto maior que c, então em algum momento, seu valor é exatamente c.

Tal fato pode ser considerado intuitivamente óbvio e assim o era, sendo por isso tomado como axioma ou demonstrado de forma menos rigorosa que nos padrões atuais.

No entanto, Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano $(1781 - 1848)$ apresentou uma prova puramente analítica em contraposição à demonstração mais informal apresentada pelo famoso matemático Johann Carl Friedrich Gauss $(1777 - 1855)$ em 1817, apenas analisando o conceito de continuidade, de modo semelhante à Análise moderna com seus épsilons e deltas.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

Isto fez posteriormente com que os matemáticos refletissem sobre quais proposições poderiam ser consideradas axiomas e quais poderiam de fato ser demonstradas, levando a famosos episódios da história matemática, como o surgimento do formalismo matemático, a noção de Geometrias não euclidianas, e o que mais nos interessa: a aritmetização da Análise Real (LINNEBO, 2017; BARONI; OTERO-GARCIA, 2014). Como comentamos, esse processo foi a reorganização de definições e demonstrações antes aceitas prontamente do Cálculo Diferencial e Integral, cada vez mais apoiadas nas noções de funções e de número real.

Ainda de acordo com Baroni e Otero-Garcia, no século XIX, matemáticos reexploraram o conceito de números reais apresentando abordagens diversas para sua definição e para o conceito de função real. Três concepções principais emergiram: a tradicional, associada à ideia intuitiva ou lógica de quantidade contínua; a alternativa, propondo uma construção estritamente aritmética dos números reais a partir de números naturais ou racionais; e a abordagem formal, que buscava estruturar os fundamentos da Análise de maneira puramente formal, evitando questões filosóficas. Destacam-se no segundo grupo, Dedekind, Weierstrass e Cantor-Heine, do terceiro grupo, Hilbert. Apesar de definirem os reais a partir de outros conjuntos numéricos, as motivações subjacentes resultaram em teorias conceitualmente distintas entre esses matemáticos, embora as estruturas obtidas sejam mutuamente isomorfas, o que na concepção contemporânea significa que todas são corpos ordenados completos.

Façamos então algumas observações sobre a reta como corpo ordenado completo e a prática em sala de aula dos professores do ensino básico.

Observar que a estrutura de corpo é a mesma para números racionais, reais e complexos, indica que possuem não apenas as propriedades básicas de corpo em comum, mas também as propriedades que seguem como teoremas e com as mesmas demonstrações.

Na prática, alunos com dificuldades em raciocinar sobre a álgebra dos racionais, prosseguem com as mesmas dificuldades com a álgebra dos reais e dos complexos.

Observar que a estrutura de corpo ordenado é a mesma para números racionais e reais, mas não mais para complexos, novamente aponta que racionais e reais possuem todas as mesmas propriedades básicas e teoremas relativos à ordenação, incluindo as mesmas demonstrações.

Já discutimos as concepções equivalentes da completeza da reta real. Novamente, atentamos que não apenas isto, como também os teoremas resultantes, são o que caracterizam a estrutura da reta. Por exemplo, saber que o conjunto dos números racionais é denso na reta é o que explica o fato de podermos sempre ter uma aproximação racional, tão próxima quanto for necessário, de qualquer número real.

Como já mencionado, apesar de conceitos como continuidade, derivada e integral estarem há muito estabelecidos, investigações buscando trazer novos resultados acabaram denunciando a necessidade interna da Matemática de ser reconstruída com novos padrões de rigor, e no centro disso estava a necessidade de se entender melhor a noção de número real. Vejamos um pouco sobre isso, através de outro trecho de nossas notas de aula.

"Esta concepção de o conjunto dos números reais ser fruto de um conjunto de axiomas é ainda muito jovem, surgindo com David Hilbert, como parte de seu programa em transformar toda a Matemática em deduções lógicas e todas as verdades matemáticas em consequências de demonstrações rigorosas. Afinal, a Matemática da época tinha bases muito mais apoiadas na intuição, tornando a ideia de se livrar de toda a intuição muito tentadora, parecendo tornar tudo perfeitamente claro e exato.

Além disso, fruto da necessidade da própria Matemática em fundamentar firmemente a noção de número real, para poder fundamentar firmemente os conceitos que dependem dos números reais, como os do Cálculo Diferencial e Integral, foram surgindo construções do conjunto dos números reais, tomando como conceito estabelecido a noção de número racional. Assim, surgiram as construções da reta real, que apontaram para a necessidade de fundamentar a noção de número racional também."

Façamos então algumas reflexões sobre as consequências das noções históricas a respeito dos números reais para o ensino de Matemática.

Primeiro, observamos que a Matemática, enquanto conhecimento, é construída por seres humanos, influenciados por fatores como local, tempo, cultura, condição social etc. Sendo construída socialmente, a Matemática é comprometida com os membros dos conjuntos que a desenvolveram, sendo relacionada a esses conjuntos de modo que, ao ser separada desses contextos, perde-se parte dos vínculos que levaram ao seu desenvolvimento, dificultando sua compreensão (CAFEZEIRO; KUBRUSLY; CAFEZEIRO, 2016).

Agora, defendemos que Matemática é uma ciência. Faz parte do senso comum (inclusive de muitos cientistas!), que ciência caracteriza-se por observação imparcial, conjecturação e experimentação como um método científico unificado. Esta ideia é amplamente debatida e derrubada por Chalmers (CHALMERS; FIKER, 1993)). Assim como Poincaré, vemos que as ciências caracterizam-se através da busca pela verdade, o que inclui a Matemática (POINCARÉ, 2011).

Prosseguindo nossa reflexão sobre o que apresentamos e sua possível influência para professores de Matemática, discutimos agora alguns tópicos apresentados por Breno Arsioli (MOURA, 2014), como aspectos sobre a construção do conhecimento científico que a maioria dos pesquisadores concorda acerca do tema.

- **Não existe um método científico universal.** Como vimos, apesar de as verdades matemáticas permanecerem verdadeiras em diferentes tempos e lugares, a forma de se fazer Matemática, de se apresentar Matemática, de falar sobre Matemática, muda, novos padrões de rigor surgem, novos problemas tomam foco. Apesar de a comutatividade da soma de números reais ser válida em qualquer lugar e momento, a forma de se entender isso ou mesmo se convencer disso, muda de acordo com a cultura e o momento, por exemplo.

- **A Ciência é influenciada pelo contexto social, cultural, político etc., no qual ela é construída.** Justamente o entendimento desses contextos é o que torna a História da Matemática útil ao professor.

- **Os cientistas utilizam imaginação, crenças pessoais, influências externas, entre outros para fazer Ciência.** Os próprios matemáticos sabem que, muitas vezes, a "inspiração" que resulta em um novo teorema ou conceito, vem de influências externas à Matemática.

Ao discutir sobre formação de professores de Matemática, muito se fala em uma formação sólida em Matemática para os futuros professores, muitas vezes sem explicitar o que efetivamente constituiria essa tal solidez, como apontam Moreira e Ferreira (MOREIRA; FERREIRA, 2013).

Retomando as ideias de Cafezeiro, Kubrusly e Cafezeiro (CAFEZEIRO; KUBRUSLY; CAFEZEIRO, 2016), defendemos que o ensino de Matemática, deve contemplar a construção da própria Matemática, para que esta não se torne afastada dos alunos.

Como Ripoll, Rangel e Giraldo fazem (RIPOLL; GIRALDO; RANGEL, 2016a), defendemos que o professor, em seu planejamento, não apenas tenha amplo conhecimento em Matemática, mas saiba refletir sobre o papel desta Matemática, sob diferentes pontos de vista, em sua formação e atuação profissional, bem como na vida escolar de seus alunos.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

4

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos uma proposta de apresentação para os tópicos iniciais de um curso de Análise Real que procura conectar os conhecimentos de e sobre Análise Real com a experiência dos professores de Matemática, como uma das formas de tentar atacar o problema da dupla descontinuidade na formação dos professores de Matemática, conhecido e percebido pela academia em geral, já citado e tratado por Felix Klein (KLEIN, 2009). Limitamo-nos a apresentar tópicos que comumente são estudados no princípio do curso. Ainda que do ponto de vista do método axiomático serem mais simples, estes são justamente os que possuem maior interseção com o que se vê nas salas de aula do ensino básico, e por isso mesmo, os que mais pesam na formação de futuros professores de Matemática.

Essa forma de apresentação inclui a construção de material próprio, que leva em conta uma ordem de apresentação diferente da usual aplicada na literatura clássica, além de utilizar episódios históricos como ponto de partida para refletir e debater a compreensão a respeito da própria natureza da Matemática como ciência e suas mudanças ocorridas ao longo do tempo.

Por exemplo, uma preocupação de grandes matemáticos como Henri Poincaré (POINCARÉ, 2011) sempre foi a relação entre a intuição e o rigor, em que se indaga a essencialidade desses ingredientes em todo o desenvolvimento histórico desta ciência. Além disso, naturalmente ao revisitar os resultados já amplamente aceitos do Cálculo Diferencial e Integral, surgem e evoluem noções como função, e, posteriormente, conjuntos mudam as percepções sobre o que é um axioma e o quão rigorosa uma demonstração matemática deve ser.

Portanto, os aspectos históricos passam a integrar essencialmente a compreensão da natureza da Análise e da Matemática no material proposto. Por último, de acordo com a proposta de Ripoll e outros (RIPOLL; GIRALDO; RANGEL, 2016a)(RIPOLL; GIRALDO; RANGEL, 2016b), finalizamos refletindo sobre como a ordem e o modo de apresentação dos conteúdos e a produção de materiais didáticos podem enriquecer o conhecimento do professor e criar conexões com sua prática no ensino da Matemática, especialmente olhando através do ponto de vista da História e Filosofia das Ciências.

Esperamos que nossa abordagem não apenas inspire a produção de materiais didáticos autorais para professores do ensino básico e universitário, como também investigações sobre as relações entre Matemática, sua história, suas questões filosóficas e seu ensino, dentro e fora da Análise.

Referências Bibliográficas

ALFONSO-GOLDFARB, A. M. *O que é História da Ciência*. [S.l.]: Editora Brasiliense, 2004. 4

BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. *Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue*. [S.l.]: Cultura Acadêmica, 2014. (Coleção PROPG Digital (UNESP)). 8, 9, 17, 40, 41

BARTLE, R. G. *The elements of real analysis*. [S.l.]: Wiley, 1964. v. 2. 8

BEZERRA, M. d. N. C. *Teoria dos Números: um curso introdutório*. [S.l.]: AEDI/UFPA, 2018. ISBN 978-85-65054-57-7. 34

CAFEZEIRO, I.; KUBRUSLY, R.; CAFEZEIRO, E. Os números dos mundos. *Revista Brasileira de História da Ciência*, v. 9, n. 1, p. 97–112, 2016. 42

CHALMERS, A. F.; FIKER, R. *O que é ciência afinal?* [S.l.]: Brasiliense, 1993. 42

GONçALVES, A. *Introdução à álgebra*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. v. 7. 34

HAIRER, E.; WANNER, G. *Analysis by its History*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 2. 9

HEFEZ, A. *Curso de Álgebra (volume I)*. 5. ed. [S.l.]: IMPA, 2014. 8, 34

KATZ, V. J. *A history of mathematics: An introduction*. [S.l.]: Pearson, 1998. 8

KLEIN, F. *Matemática elementar de um ponto de vista superior. volume i, parte i: Aritmética*. [S.l.]: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009. 4, 7, 9, 11, 23, 29, 33, 45

LIMA, E. L. *Curso de análise vol. 1*. 14. ed. [S.l.]: Projeto Euclides, IMPA, 2013. 7, 8, 27

LIMA, E. L. *A Matemática do Ensino Médio*. 11. ed. [S.l.]: SBM, 2016. v. 1. 260 p. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1, v. 1). ISBN 9788583370727. 38

LIMA, E. L. *et al. A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM, 1997. v. 1. 27

LINNEBO, Ø. *Philosophy of mathematics*. [S.l.]: Princeton University Press, 2017. 41

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. *Números: uma introdução à matemática*. [S.l.]: Edusp, 2001. 34

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, A. C. O lugar da matemática na licenciatura em matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, SciELO Brasil, v. 27, p. 981–1005, 2013. 42

MOURA, B. A. O que é natureza da ciência e qual sua relação com a história e filosofia da ciência? *Revista Brasileira de História da Ciência*, v. 7, n. 1, p. 32–46, 2014. 42

NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar: números reais*. 2. ed. [S.l.]: SBM, 2013. 235 p. (Coleção Professor de Matemática, 24). ISBN 978-85-85818-80-7. 38

POINCARÉ, H. *O valor da ciência*. 1. ed. [S.l.]: Contraponto, 2011. ISBN 9788585910020, 858591002X, 9788578660611. 4, 18, 42, 45

RIPOLL, C.; GIRALDO, V.; RANGEL, L. *Livro do Professor de Matemática da Educação Básica - Volume 1 - Números Naturais*. 1. ed. [S.l.]: SBM, 2016. 204 p. (Coleção Matemática para o ensino). ISBN 9788583370727. 4, 7, 11, 29, 43, 45

RIPOLL, C.; GIRALDO, V.; RANGEL, L. *Livro do Professor de Matemática da Educação Básica - Volume 2 - Números Inteiros*. 1. ed. [S.l.]: SBM, 2016. 120 p. (Coleção Matemática para o ensino). ISBN 9788583370888. 33, 45

ROQUE, T. M.; SCHUBRING, G. F. *Curso de Análise de Cauchy: uma edição comentada*. 2. ed. [S.l.]: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2022. 460 p. ISBN 9788583371830. 17

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Realização e Organização

ANPMat

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

Distribuição

Editora ANPMat