6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

ATIVIDADES MATEMÁTICAS PRODUTIVAS SOB A LUZ DAS MENTALIDADES MATEMÁTICAS

Eduarda de Jesus Cardoso

Julia Tavares de Carvalho

Diego Soares Monteiro da Silva

Lilian Vitória Amaral de A. Guimarães

Gabriel Henrique Tenório de M. de Oliveira

ANPMat

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

ATIVIDADES MATEMÁTICAS PRODUTIVAS SOB A LUZ DAS MENTALIDADES MATEMÁTICAS

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

ATIVIDADES MATEMÁTICAS PRODUTIVAS SOB A LUZ DAS MENTALIDADES MATEMÁTICAS

Eduarda de Jesus Cardoso

Julia Tavares de Carvalho

Diego Soares Monteiro da Silva

Lilian Vitória Amaral de A. Guimarães

Gabriel Henrique Tenório de M. de Oliveira

1ª edição

2025

Rio de Janeiro

ANPMat

Atividades Matemáticas produtivas sob a luz das Mentalidades Matemáticas

Projeto gráfico: Gabriel Brasil Nepomuceno

Produção editorial: Editora Pi
www.editorapi.com.br | contato@editorapi.com.br | +55 21 97748-7208

Distribuição: Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
www.anpmat.org.br | editoraanpmat@anpmat.org.br

ISBN: 978-65-88013-36-6

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Atividades matemáticas produtivas sob a luz das
mentalidades matemáticas [livro eletrônico] /
Eduarda de Jesus Cardoso...[et al.]. --
Rio de Janeiro : ANPMat, 2025.
PDF

Outros autores: Julia Tavares de Carvalho, Diego Soares Monteiro da Silva, Lilian Vitória Amaral de A. Guimarães, Gabriel Henrique Tenório de M. de Oliveira.
Bibliografia.
ISBN 978-65-88013-36-6

1. Matemática - Estudo e ensino 2. Matemática - Programas de atividades I. Cardoso, Eduarda de Jesus. II. Carvalho, Julia Tavares de. III. Silva, Diego Soares Monteiro da. IV. Guimarães, Lilian Vitória Amaral de A. V. Oliveira, Gabriel Henrique Tenório de M. de.

25-266028 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Sobre os autores

Eduarda de Jesus Cardoso
eduardadjc@gmail.com

Mestre em Ensino de Matemática. Doutoranda em Educação de Matemática pela PUC-SP. Professora de Matemática do Departamento de Matemática e Desenho do Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira - CAp-Uerj, Rio de Janeiro. Atua como professora de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental, Ensino Médio e com disciplinas voltadas para formação de professores no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (Uerj) *campus* Maracanã. Coordena o projeto de extensão POPMAT: preparação para as olimpíadas e faz parceria com o projeto de extensão Matemáticas e mentalidades: comportamento de ensino e aprendizagem ambos do CAp-Uerj.

Mestre em Educação pela UFRJ. Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFRJ. Professora dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental do Departamento de Ensino Fundamental do Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira - CAp-UERJ, Rio de Janeiro. Coordenadora do Projeto de Extensão "Matemáticas e mentalidades: comportamento de ensino e aprendizagem" e faz parceria com o Projeto de Extensão "POPMAT: preparação para as olimpíadas", ambos lotados no CAp-Uerj. Interesse no ensino de matemática e maneiras eficazes de ensino e aprendizagem.

Julia Tavares de Carvalho
juliadecarvalho@gmail.com

Diego Soares Monteiro da Silva
diego_smonteiro@outlook.com

Doutor em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal Fluminense. Professor do departamento de Matemática e Desenho do Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira - CAp-Uerj. Atua como professor de Matemática no Ensino Médio e com a formação de professores em Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro (Uerj) *campus* Maracanã.

Estudante de pedagogia Uerj-RJ, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

Lilian Vitória Amaral de Alcântara Guimarães
contatoliamgs@gmail.com

Gabriel Henrique Tenório de Magalhães de Oliveira
gabrielhenriquetenorio@yahoo.com.br

Professor de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental da Secretaria Municipal de Educação de Petrópolis e professor de Matemática do Ensino Médio da rede privada do Rio de Janeiro. Mestrando do Programa de Pós-Graduação de Ensino em Educação Básica -PPGEB, CAP-Uerj, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Prefácio

As reflexões aqui apresentadas foram desenvolvidas a partir das trocas feitas no grupo de estudos promovido pelos projetos de extensão "POPMAT: Projeto de Preparação para Olimpíadas Matemáticas" e "Matemáticas e mentalidades: comportamento de ensino e aprendizagem", ambos lotados no CAp-Uerj. Nossos estudos e conversas iniciais tiveram como foco as Mentalidades Matemáticas, evidências científicas e práticas de sala de aula. Também reunimos aqui as atividades e reflexões que aconteceram no minicurso ministrado pela nossa equipe no 6° Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática, intitulado "Atividades matemáticas produtivas sob a luz das Mentalidades Matemáticas", que teve como objetivo refletir sobre a importância da implementação de atividades matemáticas criativas, abertas e que estimulassem a flexibilidade numérica dos estudantes do Ensino Fundamental ao Ensino Médio, além de considerar a formação docente inicial e continuada.

O minicurso ocorreu em duas sessões de uma hora e trinta minutos cada. A primeira sessão consistiu na discussão sobre o que se trata de Mentalidades Matemáticas, abordagem feita por Boaler (2015), Boaler (2018), Boaler (2019), exemplificando essas ideias por meio de atividades práticas. Na segunda sessão, os professores foram encorajados a resolverem e adaptar atividades propostas em Boaler (2018) e/ou dos autores baseadas na discussão da sessão anterior. Ao final, convidamos os professores a apresentarem suas resoluções das atividades realizadas em grupo, o que gerou trocas de percepções sobre o processo de resolução das atividades e considerações sobre os impactos que esse tipo de atividade pode proporcionar aos estudantes.

Nossas leituras, análises e esforços para pensar em uma matemática mais democrática, flexível, criativa e colaborativa partem da nossa intenção de investir em diferentes maneiras de ensinar e aprender matemática. Estamos convencidas e convencidos de que a matemática é para todas e todos. Nosso desejo é poder colaborar com a discussão sobre a perspectiva baseada nas Mentalidades Matemáticas, que acredita que todos os estudantes podem aprender matemática em alto nível. Para isso, nós, professoras e professores, precisamos investir e revisitar nossas práticas com vistas a possibilitar que estudantes avancem cada vez mais em seus conhecimentos matemáticos.

O objetivo deste *e-book* é apresentar ideias e atividades alinhadas às Mentalidades Matemáticas, bem como apontar sugestões de práticas pedagógicas a professores e futuros professores, a fim de fortalecer o desenvolvimento de uma mentalidade de crescimento. Defendemos que é possível pensar, desenvolver e aplicar atividades abertas, criativas, visuais e equitativas em qualquer nível de escolaridade.

Rio de Janeiro, março de 2025

Eduarda de Jesus Cardoso
Julia Tavares de Carvalho
Diego Soares Monteiro da Silva
Lilian Vitória Amaral de Alcantara Guimarães
Gabriel Henrique Tenório de Magalhães de Oliveira

Agradecimentos

Agradecemos, com todo carinho, a Francisco e Rael, nossos queridos mini acadêmicos.

Este *e-book* nasceu enquanto vivíamos a intensa e transformadora experiência da licença maternidade. Em meio a mamadas, trocas de fraldas e sonecas, sonhamos, discutimos ideias, escrevemos e demos forma ao minicurso que deu origem a este *e-book*.

Francisco e Rael participaram de cada etapa: estavam conosco nas reuniões, nas leituras, nas escritas e até durante a realização do minicurso. Foram companhia constante e inspiração diária, nos lembrando que é possível construir conhecimento mesmo em meio às exigências do cuidado e da maternidade.

A vocês, nossa gratidão eterna — que cresçam em um mundo onde o ensino de Matemática seja mais equitativo, acolhedor e verdadeiramente para todos.

1

Introdução

Mentalidades Matemáticas referem-se às atitudes, opiniões e formas de pensar que influenciam a maneira como as pessoas abordam e compreendem a matemática, desenvolvida pela professora e pesquisadora Jo Boaler da Universidade de Stanford. São ideias que reúnem referências da neurociência, da psicologia da educação e da educação matemática. Essa metodologia parte da concepção de que qualquer pessoa pode aprender matemática em altos níveis e apaixonar-se pela disciplina. Dessa forma, incentiva-se que as atividades matemáticas sejam pensadas de forma aberta, criativa e visual.

> As novas evidências da neurociência revelam que todas as pessoas, com a mensagem e o ensino adequados, podem ser bem-sucedidas em matemática e todos podem ter altos níveis de aprendizagem na escola. Existem algumas crianças que têm necessidades educacionais muito especiais, as quais dificultam sua aprendizagem em matemática, mas para a maioria das crianças - cerca de 95% - qualquer nível de matemática escolar está ao seu alcance. E o potencial do cérebro para crescer e mudar é igualmente forte em crianças com necessidades especiais. (BOALER, 2018).

A forma de ensinar matemática proposta por Boaler (2015), Boaler (2018), Boaler (2019) indica que os educadores devem abandonar a rigidez do cérebro e a ideia de mentalidade fixa, isto é, que algumas crianças são "lentas", que outras possuem um "dom" para matemática. De acordo com a pesquisadora, aprender matemática em alto nível está diretamente associado ao ensino de alta qualidade e à orientação específica que todas as crianças precisam ter para avançarem em seus conhecimentos. Para isso, é preciso considerar atividades e propostas que desafiem os discentes, além de transmitir mensagens positivas a eles.

Em termos práticos, essa abordagem é composta de estratégias para trabalhar a matemática de maneira conectada, dentro e fora da sala de aula, com incentivo à investigação matemática e suas diferentes possibilidades de resolução, levando em consideração a plasticidade cerebral. A fim de que os educandos obtenham melhores resultados, os professores devem promover um espaço em sala de aula em que os alunos sintam-se seguros e engajados para explorarem e confrontar hipóteses e raciocínios de diversas maneiras. Com aulas e atividades criativas, flexíveis e abertas, além de mensagens adequadas de incentivo, os estudantes serão capazes de avançar em sua aprendizagem, persistindo diante de desafios e erros.

As atividades propostas devem alcançar todos os alunos da sala de aula, independentemente de seus conhecimentos prévios ou dificuldades. Nesse sentido, Boaler (2018) propõe tarefas do tipo "piso baixo, teto alto", que são desafiadoras, mas acessíveis. "Piso baixo" garante que qualquer estudante seja capaz de compreender a ideia do que foi proposto e resolver de alguma maneira, mesmo que em alguns casos seja necessário estudar um caso particular ou fazer uma representação visual. "Teto alto" pressupõe que a resolução pode gerar reflexões mais profundas ou conectar diferentes conceitos. A resolução pode não ser imediata, e os estudantes podem precisar refletir profundamente, discutir, conjecturar, testar hipóteses e então apresentar uma solução.

O objetivo deste *e-book* é discutir e apresentar atividades que sigam as ideias propostas pelas Mentalidades Matemáticas, bem como apontar sugestões de práticas pedagógicas a professores e futuros professores, a fim de fortalecer o desenvolvimento de uma mentalidade de crescimento. Defendemos que é possível pensar, desenvolver e aplicar atividades abertas, criativas, visuais e equitativas em qualquer nível de escolaridade.

Este livro digital apresenta quatro capítulos que abordam conceitos e atividades discutidos durante o minicurso realizado no VI Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática. O primeiro capítulo explora o conceito de Mentalidades Matemáticas, acompanhado por estratégias sugeridas por Boaler (2015), Boaler (2018), Boaler (2019) para o ensino da matemática em diferentes níveis de escolaridade. O segundo capítulo oferece reflexões sobre a prática pedagógica do professor de matemática, fornecendo orientações para a criação de atividades abertas e produtivas, além de uma lista de referências que contêm atividades similares. O terceiro capítulo detalha uma atividade autoral previamente aplicada em sala de aula, destacando a importância de um planejamento flexível para a implementação de atividades abertas e criativas em um ambiente real de ensino. O quarto capítulo aborda a dinâmica e as atividades do segundo dia de minicurso, seguido por considerações finais sobre as mentalidades matemáticas e os dois dias de evento.

2

Mentalidades Matemáticas

Neste capítulo, abordaremos dois temas centrais dos estudos de Boaler Boaler (2015), Boaler (2018), Boaler (2019): o conceito de Mentalidades Matemáticas e algumas estratégias propostas pela autora, as quais podem levar a uma melhoria no processo de ensino-aprendizagem de matemática.

2.1 O conceito de Mentalidades Matemáticas

Mentalidades Matemáticas referem-se às atitudes, opiniões e formas de pensar que influenciam a maneira como as pessoas abordam e compreendem a matemática desenvolvida pela pesquisadora Jo Boaler, que atua como professora de Educação Matemática na Universidade Stanford e é diretora acadêmica da plataforma virtual YouCubed. A abordagem proposta pela pesquisadora aponta que o professor tem potencial para impactar profundamente a aprendizagem dos estudantes de maneira duradoura e superar a crença de que matemática é um dom. Para tal, estimula-se o pensar matemático, o aluno é encorajado a criar conexões, errar, e pensar em diferentes formas de apresentar o resultado, inclusive de maneiras visuais.

Por mentalidade, compreende-se que seja a crença essencial sobre seu modo de aprender. Boaler (2018) define dois tipos de mentalidades associadas aos estudantes de matemática: Mentalidade Fixa e Mentalidade de Crescimento. Na Mentalidade Fixa, o educando tem a crença de que pode aprender, mas não consegue mudar seu nível básico de inteligência, isto é, os alunos acreditam que são "bons" ou "ruins" em matemática, e este rótulo é permanente. Na Mentalidade de Crescimento, o estudante acredita que a inteligência muda com trabalho árduo, ou seja, com esforço, estímulos corretos e dedicação por parte do aprendiz, este consegue aprender matemática profundamente.

A discussão sobre as mentalidades fixa e de crescimento fundamenta-se nos achados científicos sobre os mecanismos da mente e cérebro que hoje conhecemos como "plasticidade cerebral". Segundo Boaler (2018), esse conceito fala sobre a capacidade de o cérebro crescer e mudar em um período muito curto (ABIOLA; DHINDSA, 2011; MAGUIRE; WOOLLETT; SPIERS. 2006; WOOLLETT; MAGUIRE, 2011, p. 1, *apud* BOALER, 2018).

Boaler (2018) explica que, ao aprendermos uma ideia, uma corrente elétrica dispara em nosso cérebro, passando por sinapses e ligando diferentes áreas do cérebro, formando caminhos. Esses caminhos, quando fortalecidos, indicam que, de fato, houve a aprendizagem. Em contrapartida, ao aprendermos superficialmente, o caminho formado é análogo a um desenho na areia, que rapidamente se apaga. Um fato importante sobre a plasticidade cerebral é que toda vez que cometemos um erro e percebemos esse erro, criamos uma sinapse cerebral. Os erros fazem com que o cérebro tenha mais reação e, consequentemente, se desenvolva e cresça.

Os princípios da mentalidade fixa e de crescimento desempenham um papel central na abordagem e nas pesquisas de Boaler (2018). Em colaboração com a equipe do Programa Internacional de Avaliação do Estudante (PISA) da Organização para Cooperação e Desenvolvimento (OCDE), a autora explorou e analisou dados sobre as crenças em mentalidades e estratégias matemáticas de 13 milhões de estudantes ao redor do mundo. Os resultados revelaram que os discentes que dependiam da estratégia de memorização obtiveram os piores desempenhos, enquanto aqueles que abordaram a matemática por meio da reflexão sobre ideias fundamentais e conexões entre conceitos alcançaram melhores resultados (BOALER, 2018). A crença dos alunos na matemática também influencia significativamente seu desempenho, considerando que aqueles que adotaram uma mentalidade fixa enfrentaram maiores desafios.

Segundo Boaler (2015), o aprendizado de fatos matemáticos atrelado a uma profunda compreensão dos números e das maneiras como eles se relacionam entre si proporcionam uma melhor aprendizagem. Tomemos como exemplo o ensino da tabuada: podemos solicitar ao aluno para simplesmente decorar os valores ou estimulá-lo a entender o significado das contas. Por exemplo, podemos memorizar o resultado de $7 \times 8 = 56$ ou, então, pensar em estratégias para chegar em 56, como: pensar que 7×7 resulta em 49 e, então, acrescentando 7 chegamos em 56, que é 7×8; ou somar dez 7 e subtrair dois 7 $(70 - 14)$; podemos pensar em 7×8 como sendo $5 \times 8 + 2 \times 8$, ou seja, $40 + 16 = 56$. Esses são apenas alguns exemplos aritméticos de como pensar 7×8. Existem outras estratégias que podem ser utilizadas, inclusive representações visuais. O ato de buscar pelo significado das operações e diferentes formas de resolver e representar a solução é apresentado por Boaler (2018) como flexibilidade numérica, termo fruto das pesquisas de Gray e Tall (1994).

2.2 Estratégias para ensinar e aprender matemática

De acordo com a abordagem proposta por Boaler, precisamos repensar as formas de ensinar, e, consequentemente, de os estudantes aprenderem Matemática. Boaler (2015), Boaler (2018), Boaler (2019) sugere algumas estratégias para ensinar e aprender Matemática; são elas:

- Mensagens de Mentalidade de Crescimento

  O professor deve trabalhar para modificar suas próprias preconcepções sobre quem pode ou não ter êxito na disciplina. Defende-se que é importante estimular os alunos a se autodesafiar para que avancem em seus conhecimentos matemáticos, independentemente do seu nível de conhecimento. Nesse sentido, cabe ao educador problematizar rótulos como “bons” ou “ruins” em matemática e desmistificar a crença popular de que as disciplinas de exatas são disciplinas nas quais pessoas do sexo masculino possuem mais facilidade. Em vez disso, promover reflexões e transmitir mensagens que os encorajem a persistir diante dos desafios, sem a preocupação excessiva com a velocidade, resposta correta e memorização de “truques”.

- Conteúdo de alto nível a todos os estudantes

  As tarefas propostas devem ser planejadas para desafiar todos os tipos de alunos presentes na turma. Boaler (2018) sugere que as atividades sejam do tipo “piso baixo, teto alto”, isto é, tarefas abertas que permitam a todos os discentes acessar as ideias e elevá-las a níveis mais altos, sem deixar para trás estudantes que apresentam níveis mais básicos de conhecimento.

- Pensar profundamente

  Para que a disciplina seja mais envolvente e faça sentido para os estudantes, Boaler (2018) sugere que os professores valorizem a profundidade em vez da rapidez para que os alunos percebam as grandes ideias matemáticas e façam conexões entre elas. Na prática, é interessante considerar, por exemplo, que poucas questões sejam exploradas em uma aula, em vez de uma lista extensa de exercícios. Professores podem explorar/ensinar a ideia que envolve aquelas questões, incentivando, em sala de aula, que os estudantes façam uma “orientação investigativa”, de modo que ponderem “sobre a questão cuidadosamente” e que discutam as “perguntas e ideias” que surgirem (BOALER, 2018). Outra estratégia interessante para tornar possível o "pensar profundamente" a matemática, é o professor trazer informações incorretas ao longo da discussão sobre as ideias discutidas para que os estudantes contestem e fundamentem corretamente.

- Trabalhar colaborativamente

  Uma forma de promover discussões e de pensar profundamente é deixar que os alunos realizem as tarefas de forma colaborativa. Trabalhos em grupo são oportunidades para que eles troquem impressões, defendam pontos de vista e se esforcem para argumentar e contra-argumentar. Uma estratégia interessante para promover trabalhos em grupo mais eficazes e profundos é incentivar os estudantes a raciocinar uns com os outros a partir do *"Humphreys's skeptics framework"*: "Convença você mesmo. Convença um amigo. Convença um cético". O nível mais fácil de convencer é convencer-se de algo, o próximo nível é convencer um amigo e o mais difícil é convencer um cético Boaler (2019). Esse exercício pode ser envolvente para a turma.

- Encorajamento adicional

  É importante encorajar as meninas e os estudantes não brancos com frases afirmativas sobre o quanto estes discentes são capazes de aprender matemática. Devemos também tomar cuidado para não estereotiparmos os meninos e alunos asiáticos como indivíduos com facilidade na disciplina. Nesse aspecto, diversas mensagens diretas e indiretas podem ser passadas no dia a dia da sala de aula. Apresentar personalidades femininas e pessoas não brancas como expoentes nas áreas das exatas é um exemplo.

- Atividades autorreflexivas

  Boaler (2018) apresenta uma série de possibilidades para que este tópico seja viável em sala de aula e um aliado para o protagonismo do estudante em relação ao seu próprio processo de aprendizagem. Por exemplo, ao final de uma aula ou tópico, o professor pode pedir que os alunos reflitam sobre o quê e/ou o quanto aprenderam sobre determinado assunto, assim como pontuar tópicos que estão com dificuldade, pedir para que eles falem ou escrevam sobre o que conseguem resolver com facilidade e o que ainda precisam treinar e sanar dúvidas, como ilustra a Figura 1.

Aqui cabe pontuar que Boaler (2018) faz críticas ao dever de casa com intuito de repetição e memorização e oferece uma alternativa para isso: pedir para o estudante listar o que aprendeu na aula do dia, que faça um desenho ou elabore um problema sobre o assunto estudado. Essas estratégias convidam o aluno a refletir sobre o que foi aprendido.

Em suma, a abordagem de Boaler (2018) para ensinar matemática destaca a reformulação dos métodos de ensino para promover uma mentalidade de crescimento, oferecer conteúdo desafiador, incentivar a reflexão profunda, estimular o trabalho colaborativo, fornecer encorajamento a grupos sub-representados e valorizar atividades autorreflexivas em vez da memorização. O minicurso teve como relevância apresentar as contribuições das Mentalidades Matemáticas para futuros professores e docentes atuantes, promovendo um aprendizado mais significativo e envolvente.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

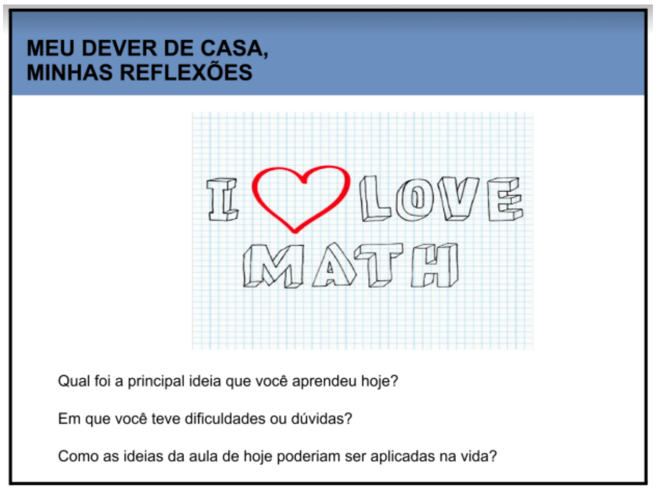


Figura 1: Exemplo de dever de casa autorreflexivo

Fonte: Livro *Mentalidades Matemáticas* (BOALER, 2018)

3

Elaborar atividades produtivas

Neste capítulo, reunimos estratégias e reflexões para elaborar atividades produtivas nos termos das Mentalidades Matemáticas. A partir das orientações propostas por Boaler (2018) e discutidas pelo nosso grupo, apresentamos alguns exemplos que possibilitam a construção do conhecimento matemático em consonância com a discussão que colocamos até o momento. Buscamos considerar, assim, o que o professor deve ter em mente sobre o funcionamento do cérebro humano, além da importância de estimular que estudantes busquem observar padrões e estabelecer conexões entre conhecimentos matemáticos. Ressaltamos ainda o papel da equidade e qualidade promovidas pelas atividades.

3.1 Pensando em atividades matemáticas produtivas

A abordagem das Mentalidades Matemáticas sugere que o professor reflita sobre suas práticas pedagógicas. Segundo Boaler (2018), existem algumas maneiras de contribuir para tornar as atividades mais envolventes, desafiadoras e produtivas, a partir de certas reflexões, tais como:

1. **É possível explorar a tarefa para encorajar diferentes caminhos, rotas e representações?**

   Por exemplo, ao resolvermos a divisão $1 \div \frac{2}{3}$, podemos explorar alguns conceitos compreendendo a visão que os estudantes têm sobre o tema a partir de alguns questionamentos:

   - O que é uma divisão?
   - O que significa dividir uma fração por outra fração?
   - O algoritmo "repete a primeira fração e multiplica pelo inverso da segunda fração" funciona nesse caso? Como justificar?
   - Qual seria o sentido da solução obtida?
   - Podemos apresentar um argumento/prova visual?

   Perguntas dessa natureza são capazes de transformar uma questão comumente trabalhada nos livros didáticos, e que são de mentalidade fixa, buscando uma resposta exata e correta, em uma questão com foco na mentalidade de crescimento. Habitualmente, prioriza-se muito o método/algoritmo em detrimento da compreensão e profundidade do tema. Entretanto, ao *abrirmos* uma tarefa, transformamos seu potencial de aprendizagem. Tal abertura pode acontecer de muitas formas: acrescentando uma exigência visual; pedindo aos estudantes que encontrem sentido em sua solução; e/ou pedindo que eles expliquem a estratégia usada (BOALER, 2018).

2. **É possível transformá-la em uma tarefa de investigação?**

   Para elevar um pouco o "teto" de um exercício, podemos transformar a questão em uma atividade de investigação que, por exemplo, instigue o aluno a pensar de quantas maneiras pode-se resolver o que foi proposto, como ilustra a Figura 2.

   A questão clássica, presente na Figura 2 acima, torna-se de natureza exploratória investigativa, se, antes de apresentarmos os conceitos de análise combinatória, deixarmos os estudantes livres para sugerirem ideias. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2019), as atividades de investigações

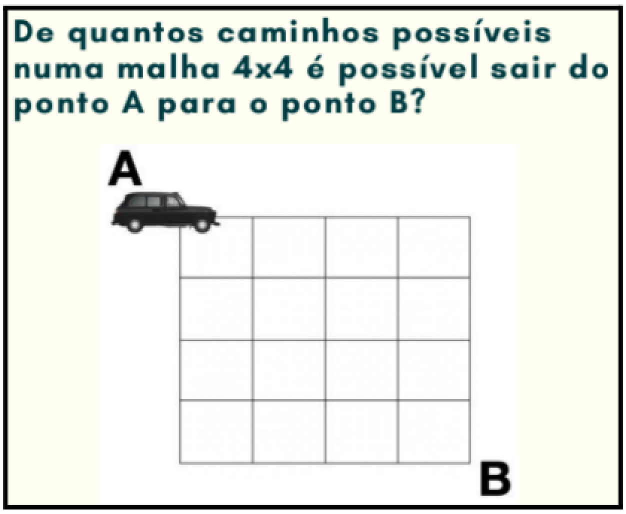


Figura 2: Tarefa exploratória-investigativa

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

matemáticas convergem muito ao que educadores matemáticos consideram, atualmente, como “fazer matemático”.

O fazer matemático significa engajar-se ativamente em uma atividade que promova o desenvolvimento de habilidades e competências a partir da análise e observação de dados e informações, o estabelecimento de conjecturas, a identificação de padrões e regularidades, e a criação de caminhos para se chegar a soluções, tendo como base conceitos e procedimentos matemáticos Ponte, Brocardo e Oliveira (2019).

Também podemos destacar a análise de Boaler, Munson e Williams (2018) sobre as tarefas de investigação:

> Nossas atividades investigativas acrescentam algo muito importante: oferecem aos estudantes oportunidades de dar asas às ideias. Também têm um elemento lúdico, mas a diferença é que propõem questões que os estudantes podem explorar e levar até níveis muito altos. Conforme mencionado anteriormente, todas as tarefas são planejadas para serem o máximo possível de piso baixo e teto alto, pois isso proporciona as melhores condições para engajar todos os estudantes, seja qual for seu conhecimento prévio. Qualquer aluno pode ter acesso a elas, e podem levar as ideias até níveis muito altos. Devemos sempre estar abertos a ser surpreendidos pelo que nossos aprendizes são capazes de fazer, sempre thes proporcionando oportunidades de levar o trabalho até altos níveis e ser desafiados. Boaler, Munson e Williams (2018)

As atividades de investigações são práticas e bastante similares à resolução de problemas. Contudo, permitem que os estudantes apresentem diferentes propostas de resolução. Essas características são cruciais para promover uma aprendizagem efetiva, uma vez que os estudantes estarão ativamente engajados nas atividades relacionadas às investigações matemáticas.

3. **É possível propor o problema antes de ensinar o método?**

Muitas vezes, um determinado método de resolução é mais rápido e, por isso, é visto como a forma mais eficiente de resolver um problema. No entanto, devemos sempre refletir se esse método mais rápido é a única solução. Será que conseguimos resolver um problema de outras formas? Na Figura 3, a seguir, apresentamos um exemplo de atividade que pode ser explorada antes de se ensinar o método de resolução de regra de três simples.

Uma máquina produz 250 rolhas de cortiça em 5 minutos.

a) Quantas rolhas a máquina produz em 10 minutos?

b) E em 12 minutos?

Figura 3: Problema com potencial de exploração antes do método

Fonte: Elaboração própria.

Para um estudante que já conhece a regra de três simples, acreditamos que esta provavelmente será uma das primeiras formas de resolução do problema acima. Entretanto, é possível propor a mesma questão para uma turma que ainda não tenha aprendido esse conteúdo.

Uma estratégia de solução para o item (a) pode considerar o seguinte raciocínio: se eu dobro o tempo de funcionamento da máquina, então produzirei o dobro de rolhas de cortiça, isto é, 500 rolhas. Para resolver o item (b), sugerimos rebaixar o problema para 1 minuto em vez de 12 minutos e, em seguida, resolver para 12 minutos, da seguinte forma:

- Rebaixar o problema e determinar quantas rolhas a máquina produz em um minuto (dividir 250 por 5) em vez de doze minutos e, em seguida, utilizar raciocínio análogo ao da letra (a) e multiplicar por 12.
- Resolver de forma análoga a letra (a) e multiplicar 250 por $\frac{12}{5}$. Por se tratar de um número fracionário, pode não ser intuitivo para alguns estudantes.

4. **É possível acrescentar um componente visual?**

De acordo com a nossa prática em sala de aula, notamos que à medida que o ano de escolaridade progride, estudantes e professores diminuem o componente visual como recurso pedagógico, seja este recurso um desenho, uma diferenciação de cores, entre outros. Isso vai inteiramente contra os achados do campo da neurociência, os quais já demonstraram que cinco áreas no nosso cérebro são ativadas quando nos debruçamos sobre um desafio matemático, sendo três delas visuais Boaler (2018). Portanto, é fundamental que professores incentivem o uso desse tipo de recurso nas resoluções de problemas.

A Figura 4 ilustra um exemplo de abordagem visual para responder uma questão. Ao pedir para o aluno representar os elementos do conjunto imagem da função $f : N \to N$ tal que $f(x) = 2x + 5$, provavelmente pensaremos em uma representação no plano cartesiano, mas é importante questionar os estudantes: "será que essa representação é única?"

É possível observar, na Figura 4, três rotas diferentes para solucionar um mesmo problema matemático. A representação à esquerda trata-se do plano cartesiano. Na parte direita superior,

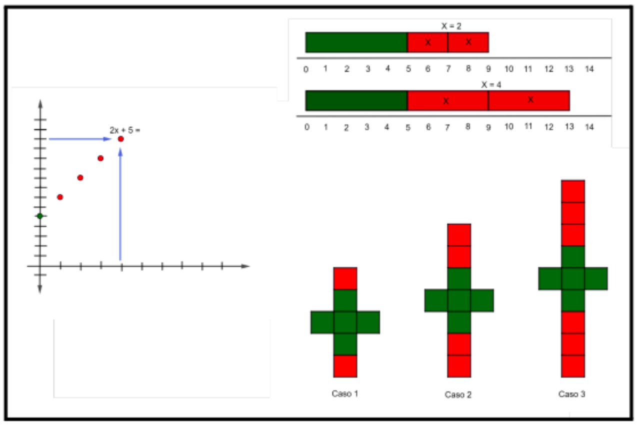


Figura 4: Codificando conexões por cores

Fonte: Boaler, Munson e Williams (2018)

temos uma reta numérica, na qual o retângulo verde de cinco unidades representa a parte fixa da função (o termo independente), enquanto os retângulos vermelhos representam a parte variável. Seu tamanho varia de acordo com o valor numérico de x : se $x = 2$, representamos dois retângulos de tamanho 2 e obtemos a imagem 9; se $x = 4$, representamos dois retângulos de tamanho quatro e obtemos imagem 13. Já na parte direita inferior, temos uma representação em que o caso n representa o valor numérico de x, isto é, o caso 1 representa $x = 1$. Nesta representação, temos cinco quadradinhos verdes representando a parte fixa da função e adicionamos dois quadradinhos vermelhos, pois como $x = 1, 2x = 2 \cdot 1 = 2$. No caso 2, temos a representação para $x = 2$: cinco quadradinhos verdes representando a parte fixa da função mais quatro quadradinhos vermelhos, pois como $x = 2, 2x = 2 \cdot 2 = 4$. Esses tipos de representações visuais podem ser utilizados, inclusive, para estimular o processo de generalização, como a obtenção do i-ésimo caso, em que representamos cinco unidades em verde, além de duas vezes as quantidades de tamanho $x = i$ em vermelho.

Ao acrescentarmos diferentes componentes visuais na solução de um problema, enfatizamos que não devemos limitar o ensino de um conceito à simples apresentação de sua definição; o verdadeiro entendimento emerge das situações enfrentadas pelos estudantes. Cada situação não apenas explora aspectos essenciais do conceito, mas também envolve uma rede complexa de conceitos interligados, contribuindo para a construção completa do conhecimento.

5. **É possível torná-la de "piso baixo e teto alto"?**

Tarefas do tipo "piso baixo e teto alto", em geral, são atividades que possuem diferentes níveis de perguntas para desafiar todos os estudantes da sala de aula. É o tipo de atividade que não exclui alunos por conta de seus níveis de conhecimento, pois elas permitem que todos explorem diferentes maneiras de ver um problema sem a preocupação de errar e com leveza.

A Figura 5 exemplifica um problema de formação de sequência, estabelecendo um aumento progressivo de dificuldade, ou seja, iniciando-se em um nível mais básico e avançando para um mais complexo, conforme proposto pela tarefa de "piso baixo" até o "teto alto".

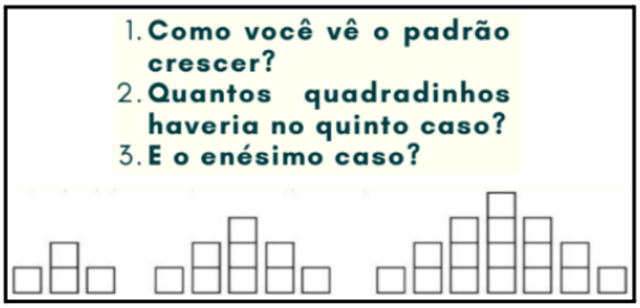


Figura 5: Tarefa de crescimento de sequências

Fonte: Boaler (2018)

A primeira questão, por ser uma pergunta aberta, permite que todos os estudantes envolvam-se na observação e participem ativamente da discussão em grupo, por exemplo. Podem utilizar cores, desenhos e movimentos para explicarem como veem o padrão se formando. A segunda questão apresenta um desafio a mais, que é determinar a quantidade de quadradinhos da quinta figura, mas o aluno pode se sentir confortável em desenhar a próxima sequência, visto que amadureceu essa exploração na primeira questão. Trabalhar em colaboração também pode motivar a sala de aula a ir além. Já a terceira questão pede a generalização do padrão, o que pode ser mais desafiador para alguns estudantes e vai depender do ano de escolaridade que a atividade está sendo trabalhada.

Embora questões dessa natureza permitam o engajamento da turma, é importante destacar que nem sempre a forma como o aluno visualiza o padrão de crescimento da sequência implicará um caminho mais fácil para o processo de generalização, mas, ainda assim, permite que o processo de investigação aconteça.

Segundo Boaler (2018), uma estratégia para tornar a questão de "teto alto" é pedir que os estudantes elaborem uma questão semelhante a esta, porém mais difícil. Em geral, quando convidados a fazer uma pergunta mais difícil, os alunos ficam motivados e totalmente engajados por poderem utilizar sua própria criatividade.

6. **É possível acrescentar a exigência de convencer e argumentar?**

Argumentar é parte fundamental na Matemática. Tal qual explicamos anteriormente, uma forma de conduzir uma atividade que demande essa habilidade é orientar que os estudantes, diante de uma forma de ver o problema, cumpra três etapas: "convença você mesmo. Convença um amigo. Convença um cético" Boaler (2019). Essa dinâmica costuma envolver a turma na atividade e é uma maneira de ilustrar como os matemáticos trabalham: de maneira colaborativa, trocando ideias e percepções, além de dúvidas e hipóteses, como ilustra a Figura 6.

No exemplo acima, o professor pode dar o seguinte comando:

- Convencer-se de que é um quadrado;
- Convencer um amigo de que é um quadrado;
- Convencer um cético de que é um quadrado.

Para convencer o cético, será preciso utilizar as definições matemáticas do que é um quadrado, justificando porque os lados são todos congruentes e todos os ângulos internos são retos.

Dobre uma folha de papel formando um quadrado que não inclua as bordas do papel. Convença um cético de que isso é um quadrado.

Figura 6: Tarefa convencendo um cético

Fonte: adaptada de Boaler (2018)

3.2 Dicas e referências

A fim de ajudá-los com a aplicação de atividades de natureza produtiva, com base nas Mentalidades Matemáticas, listamos abaixo alguns materiais disponíveis na internet para leitura e recursos para *download* ou uso *online*. Alguns materiais contêm exemplos e/ou contribuem para elaboração de atividades matemáticas de forma aberta, criativa, visual e equitativa, conforme descrevemos no Tabela 1 a seguir na próxima página.

Tabela 1: Sugestão de referências e atividades

Material	**Objetivo**	**Endereço Eletrônico**
Site YouCubed	Plataforma internacional que disponibiliza materiais educativos sobre Mentalidades Matemáticas.	youcubed.org
Site Mentalidades Matemáticas Brasil	Plataforma brasileira que disponibiliza informações sobre formação continuada para professores, exemplos de atividades para professores aplicarem em sala de aula e venda de livros sobre Mentalidades Matemáticas.	mentalidadesmatematicas.org.br
Livros sobre Mentalidades Matemáticas	*Link* para *download* e/ou compra de livros sobre abordagem de Mentalidades Matemáticas.	mentalidadesmatematicas.org.br/na-pratica/livros
Plataforma de Atividades Matemáticas	Atividades matemáticas, disponíveis apenas em inglês, estruturadas através de estudos da Neurociência com objetivo de desenvolver/fortalecer conexões no cérebro.	struggly.com
Curso gratuito *online*	Curso gratuito *online* com certificado de 2 horas intitulado: "Conhecendo as Mentalidades Matemáticas".	polo.org.br/autoformativos

Continua na próxima página.

Material	**Objetivo**	**Endereço Eletrônico**
Curso gratuito *online*	Curso gratuito *online* com certificado de 16 horas intitulado: "Mentalidades Matemáticas na sala de aula".	polo.org.br/autoformativos
Curso gratuito *online*	Curso gratuito *online* com certificado de 10 horas intitulado: "Pensando Matematicamente".	polo.org.br/autoformativos
Curso gratuito *online*	Curso gratuito *online* com certificado de 40 horas intitulado: "Tecnologia educacional - Curso de férias Mentalidades Matemáticas".	polo.org.br/autoformativos
Recursos Pedagógicos	Recursos gratuitos da Iniciativa Mentalidades Matemáticas para aplicar em sala de aula.	mentalidadesmatematicas.org.br/na-pratica
Rede Social Mentalidades Matemáticas Brasil	Instagram Mentalidades Matemáticas Brasil.	instagram.com/mentalidadesmatematicas
Rede Social Projeto Mixi	Instagram Projeto Mixi.	instagram.com/projetomixi
Grupo de WhatsApp	Grupo de WhatsApp pelo qual são compartilhadas atividades semanalmente, elaboradas de acordo com os fundamentos de Mentalidades Matemáticas.	airtable.com/shr4JwnkKWPNgAB4u
Guia Interativo Digital	Sugestões de leituras, vídeos e atividades sobre Mentalidades Matemáticas. As sugestões de materiais podem ser acessadas ao longo da leitura.	youcubed.org/Guia-Interativo-Digital

4

Atividade da balança: um exemplo autoral

A seguir, exemplificamos, por meio de uma sequência de atividades sobre equações lineares, atividades elaboradas de acordo com a metodologia das Mentalidades Matemáticas. Observamos que não é necessário aplicar toda fundamentação em uma única aula/atividade, o importante é que o conjunto de aulas, a explicação e o desenvolvimento como um todo sigam a metodologia.

Tema Central: Equações Lineares
Temas Correlatos: Função, Operações com Inteiros e Racionais em representação Decimais
Ano de escolaridade: 7º Ano Ensino Fundamental

Figura 7: Atividade autoral - Informações gerais

Fonte: Elaboração própria.

Aula 1: Construção de uma balança com garrafas pet.

Objetivo: Construir com a turma um modelo de balança de pratos utilizando garrafa pet.

Duração estimada: 50 minutos

Materiais necessários:

- 1 garrafa pet grande, preferencialmente de água mineral;
- 2 potinhos de plásticos idênticos (pode ser copo descartável entre 100 ml e 150 ml , recipiente de iogurte de bandeja, pote pequeno de manteiga etc);
- 1 haste entre 30 e 35 cm (pode ser palito de churrasco, parte inferior de cabide, pedaço de madeira, régua etc);
- Barbante;
- Régua;
- Tesoura;
- 2 jogos de 5 a 10 botões idênticos (jogos diferentes um do outro);
- 2 jogos de 5 a 10 tampinhas de garrafa idênticas (jogos diferentes um do outro);
- Uma balança digital de cozinha.

Orientações:

1° Passo: Corte um retângulo de 2 cm × 5 cm em cada lado da garrafa, a uma mesma altura. Seja cuidadoso, tenha certeza de que os retângulos estão opostos e do mesmo tamanho.

2° Passo: Com uma régua, meça o meio da haste e a amarre o barbante, passe a haste pelos cortes feitos no passo 1 e amarre o barbante na boca da garrafa pet. Ao amarrar o barbante, centralize o meio do corte para que a haste tenha movimento.

3° Passo: Faça furos equidistantes em cada pote e amarre barbantes de mesmo comprimento nos furos. Em seguida, amarre os potes na haste a uma mesma distância para que a balança fique equilibrada, conforme ilustram as Figuras 8 e 9 a seguir.

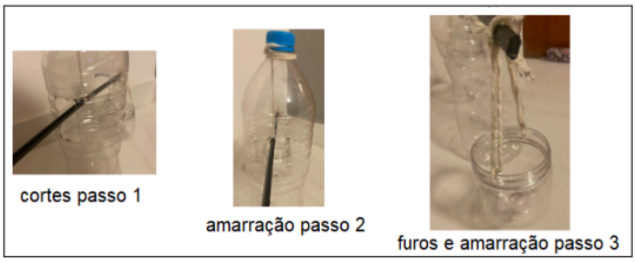


Figura 8: Passo a passo: Balança

Fonte: Arquivo pessoal dos autores.

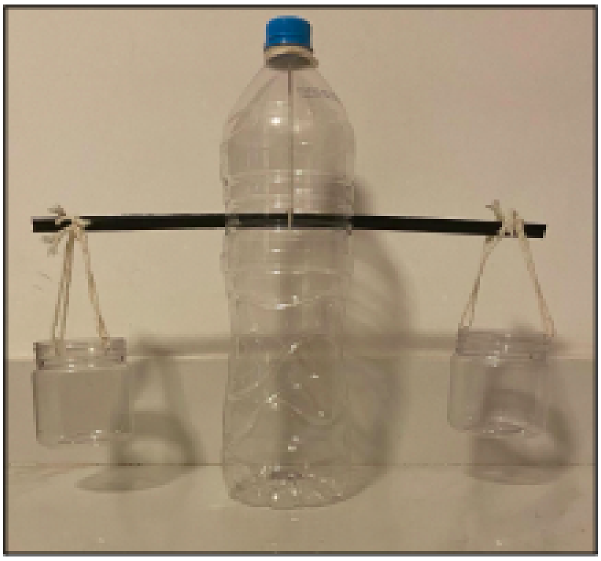


Figura 9: Balança de garrafa pet

Fonte: Arquivo pessoal dos autores.

Aula 2: Explorações com a balança

Objetivo: Explorar objetos que se equilibrem e observar propriedades de balanças como:

- Se uma balança está em equilíbrio, ao invertermos os objetos entre os pratos, a balança permanece em equilíbrio;
- Se uma balança está em equilíbrio, ao adicionarmos objetos de mesmo peso em ambos os pratos pratos, a balança permanece em equilíbrio;
- Se uma balança está em equilíbrio, ao retirarmos objetos de mesmo peso em ambos os pratos pratos, a balança permanece em equilíbrio;

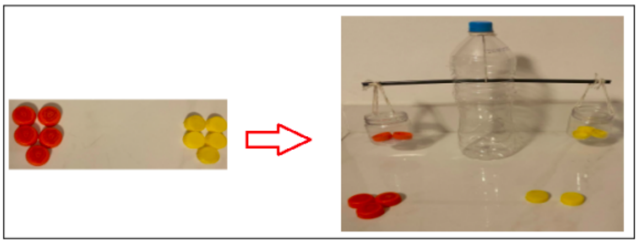


Figura 10: Balança equilibrada

Fonte: Arquivo pessoal dos autores.

Duração estimada: 50 minutos

Orientações: Utilize os materiais (tampinha de garrafa, botão, moeda...) para explorar e equilibrar a balança. Por exemplo: equilibrar tampinhas laranjas com desenho de leão com tampinhas amarelas lisas (duas tampinhas laranjas com desenho de leão equilibram três tampinhas amarelas lisas).

Deixe os estudantes explorarem livremente as balanças e os materiais. Encoraje-os a escrever sentenças que representam o equilíbrio encontrado, como ilustra a Figura 10.

Após equilibrarem alguns materiais e explorarem de forma independente a balança, guie os estudantes para que eles respondam as seguintes perguntas:

- O que acontece quando a balança está equilibrada e eu inverto os objetos entre os potes (pratos da balança)?
- O que acontece quando a balança está equilibrada e eu adiciono (ou retiro) um objeto diferente em apenas um dos potes?
- O que acontece quando a balança está equilibrada e eu adiciono (ou retiro) um objeto diferente nos dois potes?

Aula 3: Operações com a balança

Objetivo: Utilizar as sentenças da aula anterior para escrever equações e determinar o peso de um objeto conhecendo o peso do outro objeto que equilibra a balança.

Duração estimada: 50 minutos

Orientações: Peça aos estudantes para resgatarem as sentenças que contêm o equilíbrio descoberto na aula passada. Com o auxílio da balança digital de cozinha, pese um dos objetos.

Dependendo do peso do objeto, pode ser que os alunos precisem juntar uma determinada quantidade de objetos idênticos para conseguir determinar o peso unitário, como ilustra a Figura 11 a seguir. A balança de precisão não consegue determinar o peso de uma única tampinha laranja com desenho de leão. Por isso, para determinar o peso unitário dessas tampinhas, foi necessário pesar simultaneamente quatro tampinhas idênticas para descobrir o peso de 4 g. Se quatro tampinhas pesam 4 g, então uma tampinha laranja com desenho de leão pesa 1 g.

Figura 11: Pesando tampinhas

Fonte: Arquivo pessoal dos autores.

Na aula anterior, descobrimos que duas tampinhas laranjas com desenho de leão equilibram três tampinhas amarelas lisas, isto é, o peso de três tampinhas amarelas é igual a 2 g. Se três tampinhas amarelas pesam 2 g, então uma tampinha amarela pesa aproximadamente $0,6$ g.

Deixe que os estudantes descubram o peso de um dos objetos utilizando as sentenças que eles criaram na aula passada.

Nas vezes em que aplicamos essa atividade em turmas do 7° ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental observamos que os alunos iniciam a aula escrevendo as sentenças utilizando palavras para descrever as ações e conforme vão avançando nos exemplos, optam por utilizar a linguagem algébrica para indicar o processo.

Aula 4: Operações com a balança (Representação gráfica)

Objetivo: Escrever sentenças matemáticas e resolver equações através da representação gráfica de balanças, utilizando apenas o recurso visual sem utilizar o modelo de balança de garrafa PET.

Duração Estimada: 50 minutos.

Orientações: Nesta aula, continuaremos explorando o equilíbrio das balanças, no entanto, não utilizaremos mais a balança física, mas sim sua representação através de desenhos em papel.

Sugerimos a seguir, exemplos de atividades que podem ser trabalhadas com os alunos utilizando a representação gráfica de balanças, conforme ilustram as Figuras 12, 13 e 14 a seguir.

1. Na Figura 12, a balança está em equilíbrio e as três melancias têm o mesmo peso. Nessas condições, qual o peso (em kg) de cada uma das melancias?

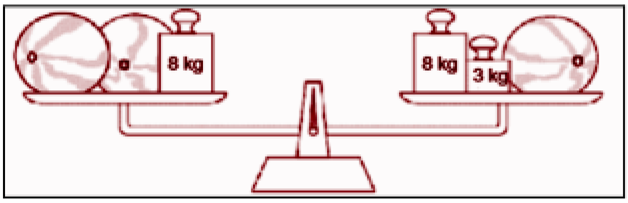


Figura 12: Exercício 1 com balança

Fonte: (MACHADO, 2018).

2. Observe na Figura 13 a seguir as seguintes balanças. Elas estão em equilíbrio.

Figura 13: Exercício 2 com balança

Fonte: (MACHADO, 2018).

   a) É possível tentar descobrir o peso da caixa A antes do peso da caixa B? Por quê?
   b) Descreva uma estratégia para encontrar o peso de cada caixa.
   c) Aplique a estratégia descrita no item anterior e determine o peso das caixas A e B.

3. Em cada item, coloque a quantidade de pesos necessários em cada prato para que a balança fique equilibrada.

Aula 5: Equações, representação algébrica

Objetivo: Escrever e resolver equações utilizando linguagem algébrica.

Duração Estimada: 50 minutos.

Orientações: Nesta aula, os estudantes deverão descrever as situações das balanças em linguagem algébrica. Observe um modelo apresentado na Figura 15 a seguir.

Peça aos estudantes para resgatarem as equações criadas na aula 2 e resolvê-las de forma algébrica.

Por exemplo: se duas tampinhas laranjas com desenho de leão equilibram três tampinhas amarelas lisas; podemos representar as tampinhas laranjas com desenho de leão por L e as tampinhas amarelas lisas por A; assim, temos a equação $2L = 3A$. Como sabemos que uma tampinha laranja com desenho de leão pesa 1 g, temos a equação:

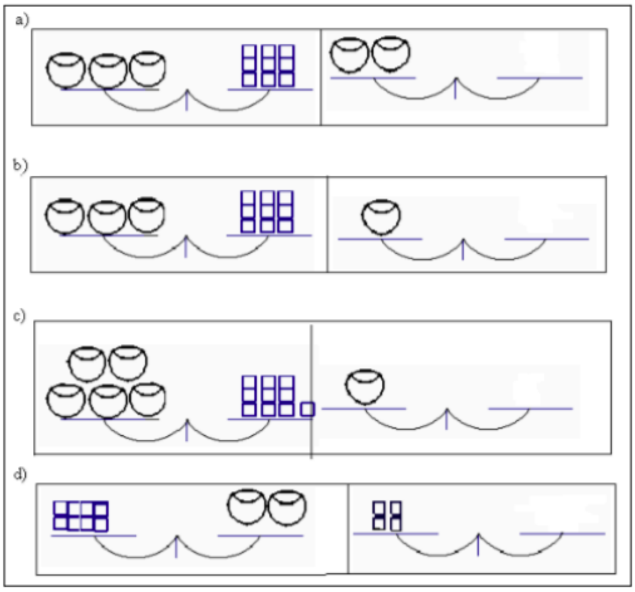


Figura 14: Exercício 3 Balanças equivalentes

Fonte: (MACHADO, 2018).

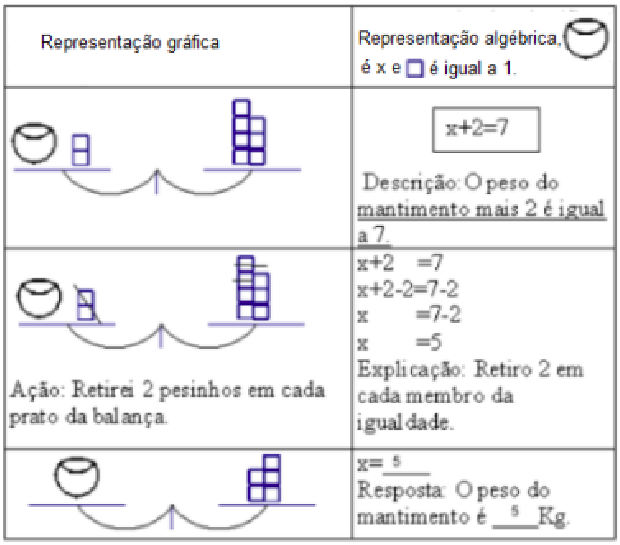


Figura 15: Representação algébrica das balanças

Fonte: (MACHADO, 2018).

$$2L = 3A, \text{ substituindo } L \text{ por } 1$$
$$2 \times 1 = 3A$$
$$2 = 3A$$

Para descobrir o valor de A basta dividir ambos os membros da equação por 3, isto é:

$$\frac{2}{3} = \frac{3A}{3}$$
$$\frac{2}{3} = A$$
$$0,6 = A$$

O peso de uma tampinha amarela lisa é de $0,6$ g.

5

Um mergulho em atividades produtivas: práticas e possibilidades

No segundo dia de minicurso, os cursistas foram encorajados a resolverem, em pequenos grupos, algumas atividades disponíveis no *site* "YouCubed" e Boaler (2018). Foram selecionadas cinco atividades com potencial de estimular curiosidade, estabelecimento de conexões, profundidade e criatividade, além de colaboração.

Iniciamos a sessão orientando a turma a se organizar em quatro grupos. Distribuímos as atividades para que escolhessem qual desejavam resolver e entregamos o roteiro para apresentação que deveria ser feita na sequência didática. Os cursistas resolveram as atividades em grupo; em seguida, refletiram sobre a viabilidade da implementação das mesmas em sala de aula em turmas da educação básica, antecipando questões dos estudantes e mediação docente. Finalizaram, compartilhando com o restante da turma no que consistia a atividade e as reflexões que fizeram, discutindo a relevância, facilidade e dificuldade de tal implementação.

Neste capítulo, apresentaremos as atividades propostas, bem como algumas considerações feitas pelos cursistas durante a resolução e discussão dos resultados. Importante salientar, de antemão, que a variável "tempo" foi uma questão colocada pelos integrantes, tendo em vista que 1h 30 min não foi o suficiente para discutir sobre as soluções, fazer os devidos registros, apresentar para a turma e debater sobre o que foi apresentado. Inclusive, este fator é um dos nossos maiores desafios enquanto professoras e professores da educação básica: lidar com o tempo e um currículo considerado "inchado" por muitos de nós.

5.1 Quadrados em escadas

Essa atividade está disponível no *site* "YouCubed" e foi escolhida por nossa equipe para ser trabalhada com a turma no minicurso pelo potencial de discussão acerca da visualização de padrões, além de ter um caráter de investigação e ser considerada "piso baixo, teto alto". Nosso objetivo com essa proposta era incentivar que os professores desenvolvessem as resoluções levando em conta as discussões e conceitos de Mentalidades Matemáticas.

A atividade "Quadrados em escadas" representada na Figura 16, a seguir, propõe, inicialmente, a observação e análise de padrões visuais a partir de três imagens [1] compostas de quadradinhos que vão crescendo em forma de escada. Esta proposta inicial permite que estudantes de todos os níveis de conhecimento do ano de escolaridade possam se envolver com a proposta, tendo em vista o caráter descritivo da atividade a partir de uma imagem. Esta proposta estimula que os aprendizes façam associações de raciocínio lógico a partir dessas observações iniciais, e avancem nessas inferências quando o comando orienta a desenhar casos 1 e 2 e depois o 6°.

É importante que o professor estimule uma etapa visual através do uso de elementos gráficos e de cor, como setas e quadradinhos coloridos, para que este padrão seja desenvolvido. Essa etapa visual é importante para que a generalização matemática possa acontecer de forma mais "natural" e com sentido para os estudantes.

Gregorutti (2016) indica que muitos estudantes têm uma relação de ansiedade e aversão em relação à matemática, o que eventualmente pode afetar seu desempenho e sua atitude em relação à disciplina. A abordagem sobre Mentalidades Matemáticas refere-se também a essa postura de estímulo e encora-

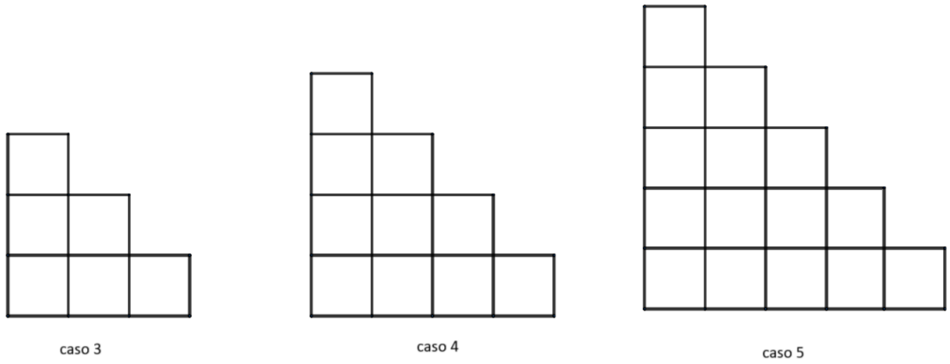
[1] Fonte: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2020/08/Quadrados-em-Escada-3-5.pdf>

Minicurso (dia 2):
"Atividades matemáticas produtivas sob a luz das mentalidades matemáticas"

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Atividade 1
QUADRADOS EM ESCADAS

Observe a sequência abaixo em seguida responda as perguntas:



a) Desenhe os casos 1 e 2;

b) Desenhe o caso 6;

c) Como você vê o padrão crescer?

d) Quantos quadradinhos haveria no centésimo caso?

e) E quanto ao enésimo caso?

f) Você conseguiria obter os mesmos resultados dos itens 2 e 3 por um caminho diferente do já realizado?

g) Formule uma questão semelhante a esta, porém mais difícil.

Fonte: https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2020/08/Quadrados-em-Escada-3-5.pdf

Figura 16: Atividade 1: Quadrados em escadas

Fonte: Adaptação do *site* YouCubed disponível em: <https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/quadrados-em-escada/>

jamento do estudante, conduzindo-os à realização de conexões entre conceitos matemáticos e situações do cotidiano. Mesmo que nem sempre seja possível estabelecer relações entre todos os conteúdos matemáticos com a vida cotidiana, é importante que o professor busque introduzir alguns processos a partir de exemplos visuais e práticos, como sugere Boaler (2018).

A atividade apresentada na Figura 16 reúne comandos de diferentes níveis para ser considerada de “piso baixo, teto alto”. As últimas duas questões, inclusive, podem permitir que estudantes avancem ainda mais em suas análises. Há casos de alunos desmotivados com as aulas de matemática por acharem muito fáceis. Diante da grande heterogeneidade de algumas turmas, muitas vezes, o professor precisa fazer escolhas pedagógicas e “nivelar por baixo” para garantir que todos os estudantes aprendam o mínimo esperado para determinado conteúdo ou habilidade. Atividades dessa natureza podem permitir que discentes que têm condições de avançar mais, de fato, avancem em seus conhecimentos.

Apresentamos, na Figura 17, a solução proposta pelos cursistas. O grupo que escolheu essa atividade dedicou-se aos registros enquanto refletiam sobre as respostas, cuidando da apresentação visual e utilização de cores. Como anunciamos anteriormente, a questão do tempo foi mencionada pelo grupo, assim como a integração que os estudantes precisam ter para que o trabalho em grupo aconteça de maneira eficaz.

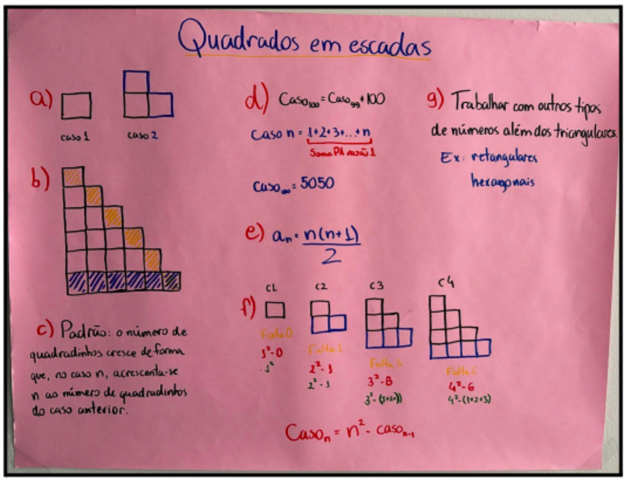


Figura 17: Solução proposta pelo grupo que escolheu a Atividade 1

Fonte: Elaboração própria dos participantes do minicurso “Atividades matemáticas produtivas sob a luz das Mentalidades Matemáticas”.

De fato, Cohen e Lotan (2017) fazem orientações importantes para que um trabalho em grupo promova uma aprendizagem cooperativa com vistas a salas de aula equitativas. As autoras pontuam que, na hora de montar os grupos heterogêneos, é importante incluir “alunos capacitados a servirem como recurso acadêmico e linguístico uns aos outros” Cohen e Lotan (2017). Explicam ainda:

> Esse formato permite que o professor desafie todos intelectualmente, em vez de “ensinar para a média” ou para o que é normalmente chamado de “menor denominador comum”. Se cada membro do grupo for requisitado a que demonstre sua compreensão e, para isso, possa usar os recursos do próprio grupo, o aluno que ainda não domina todas as habilidades acadêmicas requisitadas não será excluído, ele irá avançar com o grupo. Se a atividade é interessante e desafiadora, ele estará ativamente envolvido e solicitará

> ajuda e explicação. Para alunos que dominam habilidades acadêmicas avançadas, o ato de explicar aos outros representa uma das maneiras mais efetivas de solidificar seu próprio conhecimento. (WEBB, 1983, *apud* COHEN; LOTAN, 2017).

5.2 Bolo codificado em cores

Essa atividade foi adaptada de uma proposta disponível em Boaler (2018) e foi escolhida por nossa equipe para ser trabalhada com a turma no minicurso pelo seu potencial de investigação e ser considerada "piso baixo, teto alto". Nosso objetivo com essa proposta era incentivar que os professores desenvolvessem os conceitos de frações e equivalência de frações, levando em conta as discussões e conceitos de Mentalidades Matemáticas.

A atividade "Bolo Codificado em Cores" propõe, inicialmente, a observação e análise de padrões visuais a partir de um bolo, que deve ser dividido entre Sam e mais cinco amigos, isto é, deve ser dividido entre seis pessoas, podendo a divisão ser em partes iguais ou não. Esta proposta inicial permite que estudantes de todos os níveis de conhecimento do ano de escolaridade possam se envolver com a proposta, uma vez que a atividade inicia-se com uma divisão relativamente simples: $24 \div 6$. A Figura 18, na próxima página, apresenta a proposta realizada aos cursistas: pensar em diferentes formas de dividir o bolo.

O papel do professor durante essa atividade é de estimular os alunos a pensarem em diferentes tipos de representação para os pedaços de bolo, guiando o desenvolvimento com perguntas como:

- Será possível utilizar uma outra figura geométrica que não seja retangular para cortar o bolo?
- Se usarmos moldes redondos para cortar o bolo, conseguimos dividir sem desperdício?
- Os resultados obtidos nos itens (b) e (e) são equivalentes? Qual item apresenta como resposta um maior número?

Assim como os integrantes que resolveram a atividade 1, os cursistas comentaram que o tempo de resolução e discussão não foi suficiente para que pudessem expor todas as ideias e soluções pensadas. O grupo discutiu o problema e buscou estratégias de resolução antes de formalizar as respostas, dessa forma, não conseguiram registrar todas as respostas na cartolina, mas apresentaram os resultados das discussões de forma oral durante a exposição dos resultados.

Durante a resolução da atividade, os participantes do curso relataram que o uso de cores ajudou a organizar a resolução, uma vez que seu uso facilitou identificar a parte do bolo que cabia a Sam e a cada amigo. Em outras palavras, o uso de cores facilita na percepção de que cada amigo recebeu $\frac{1}{6}$ do bolo.

No item (c), um dos integrantes do curso comentou que seu "cérebro era muito cartesiano" e que estava com dificuldade em pensar em formas não retangulares para dividir o bolo. A partir do trabalho colaborativo, o grupo conseguiu pensar em triângulos retângulos como uma segunda forma de representação. O grupo dedicou bastante tempo para pensar em formas não retangulares e concluíram que poderiam usar trapézios, embora não tenham conseguido, infelizmente, desenhar a solução.

Quando o grupo chegou no item (e), utilizou a representação do item (d) e coloriu a parte que cabia a Sam e a cada um de seus amigos. Para representar a divisão do bolo em pedaços iguais, Sam e cada um

Minicurso (dia 2):
"Atividades matemáticas produtivas sob a luz das mentalidades matemáticas"

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Atividade 2
BOLO CODIFICADO EM CORES

Sam fez um bolo retangular e quer **reparti-lo igualmente** com mais cinco amigos.

a) Divida a forma do bolo em **24 pedaços de mesmo tamanho**.

b) Utilize a divisão da letra (a) e represente utilizando cores, quantos pedaços Sam e seus amigos vão receber de modo que:
(i) não sobre nenhum pedaço de bolo no tabuleiro;
(ii) possa sobrar bolo no tabuleiro

c) Você consegue pensar, em uma forma diferente da representação do item (a), para dividir o bolo em 24 pedaços de mesmo tamanho?

d) Divida a forma do bolo em **20 pedaços de mesmo tamanho.**

e) Utilize a divisão da letra (d) e represente utilizando cores, quantos pedaços Sam e seus amigos vão receber de modo que:
(i) não sobre nenhum pedaço de bolo no tabuleiro;
(ii) possa sobrar bolo no tabuleiro

f) Em qual situação Sam e seus amigos receberam uma porção maior de bolo, no item (b) (i) ou no item (d) (i)? Justifique sua resposta.

g) Existe alguma forma de dividir o bolo em pedaços de mesmo tamanho que ao reparti-lo igualitariamente entre Sam e seus amigos a porção de bolo recebida seja maior que a porção recebida no item (b) (i)?

Atividade adaptada do Livro "Mentalidades Matemáticas: Estimulando o Potencial dos Estudantes por Meio da Matemática Criativa, das Mensagens Inspiradoras e do Ensino Inovador"

Figura 18: Atividade 2: Bolo codificado em cores

Fonte: Elaboração própria dos autores a partir de Boaler (2018)

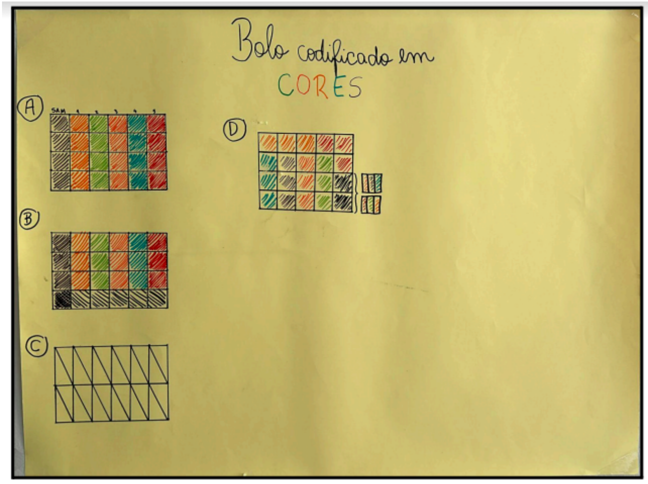


Figura 19: Solução proposta pelo grupo que escolheu a Atividade 2

Fonte: Elaboração própria dos participantes do minicurso "Atividades matemáticas produtivas sob a luz das Mentalidades Matemáticas".

de seus amigos receberam três pedaços inteiros, mas sobrariam dois pedaços que foram representados em preto. Esses dois pedaços restantes foram subdivididos em três pedaços cada, dessa forma, cada amigo recebeu três pedaços mais $\frac{1}{3}$ de um pedaço, isto é: $\frac{3}{20} + \frac{1}{3}$ de $\frac{1}{20} = \frac{3}{20} + \frac{1}{60} = \frac{9}{60} + \frac{1}{60} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$.

Ao concluírem o item (e) os cursistas perceberam que o objetivo do exercício era determinar diferentes formas de representar $\frac{1}{6}$. Desse modo, mesmo que escolhessem formas diferentes, tanto Sam como seus amigos sempre receberiam $\frac{1}{6}$ do bolo quando este fosse totalmente repartido entre os amigos.

5.3 Leo, o coelho

Essa atividade está disponível no *site* "YouCubed" e foi escolhida por nossa equipe para ser trabalhada com a turma no minicurso pelo seu potencial de discussão acerca de combinação, além de ter um caráter de investigação e ser considerada "piso baixo, teto alto". Nosso objetivo com esta proposta era incentivar que os professores desenvolvessem as resoluções, levando em conta as discussões e conceitos de Mentalidades Matemáticas.

Inicialmente, o grupo achou que só teriam duas possibilidades para Leo subir as escadas sendo elas:

- subir todos os degraus um por um (10 pulos);
- subir em pulos de dois em dois degraus (5 pulos);

Em seguida, perceberam que Leo poderia alternar pulos de dois degraus com pulos de um degrau, desde que fizesse uma quantidade par de pulos de um degrau.

Após perceberem que o coelhinho poderia intercalar pulos de um degrau com pulos de dois degraus, os cursistas debruçaram-se em listar de que formas essas combinações seriam possíveis, concluindo que poderiam ter de 1 até 4 pulos de dois degraus intercalados com pulos de um degrau.

Em seguida, dividiram o problema em quatro subproblemas, sendo eles:

[1]Fonte:<https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/leo-o-coelho/>

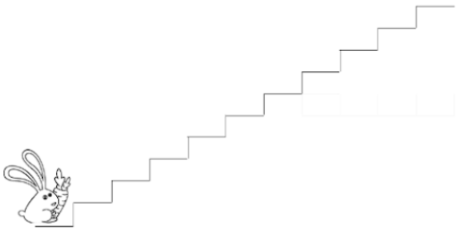
Minicurso (dia 2):
"Atividades matemáticas produtivas sob a luz das mentalidades matemáticas"

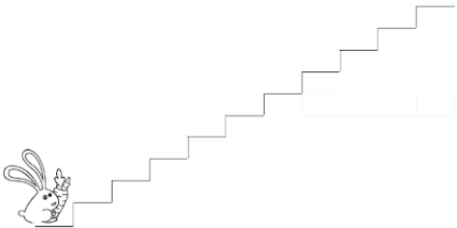
6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

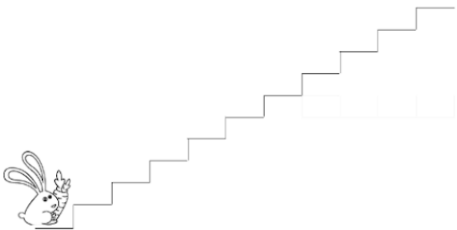
Atividade 3
LEO, O COELHO

Leo, o Coelho, está subindo uma escada de 10 degraus. Leo só pode subir 1 ou 2 passos cada vez que ele pula. Ele nunca pula para baixo, apenas para cima.

a) Represente, de três formas diferentes, como Leo pode subir essa escada.





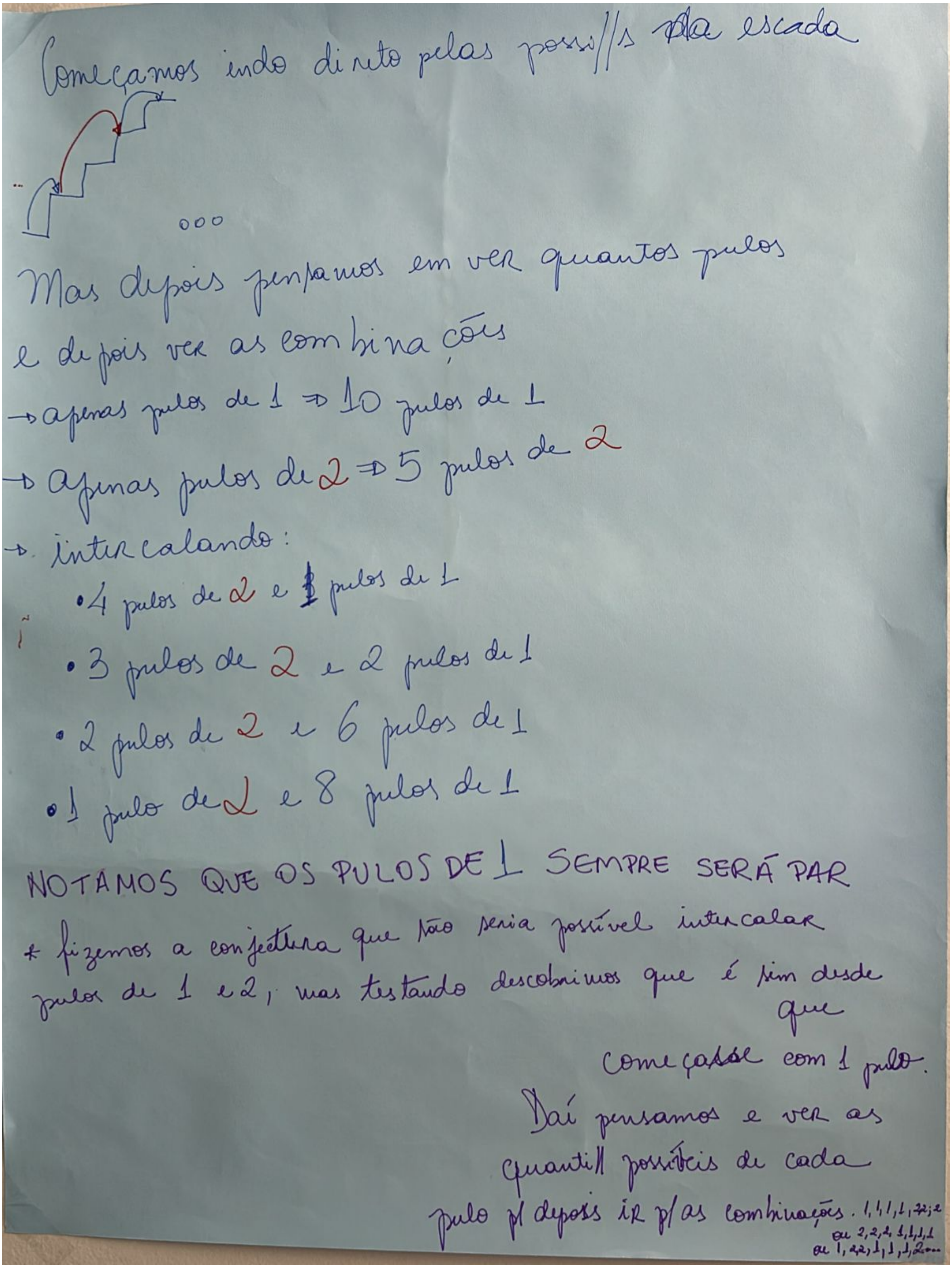


b) De quantas maneiras diferentes Leo pode subir a escada de 10 degraus? Forneça evidências para justificar seu pensamento.

Fonte: https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/leo-o-coelho/

Figura 20: Atividade 3: Leo, o coelho

Fonte: Elaboração própria dos autores a partir de <https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/leo-o-coelho/>


Começamos indo direto pelas possib/s da escada

...

ooo

Mas depois pensamos em ver quantos pulos
e depois ver as combinações
→ apenas pulos de 1 ⇒ 10 pulos de 1
→ apenas pulos de 2 ⇒ 5 pulos de 2
→ intercalando:
• 4 pulos de 2 e 2 pulos de 1
• 3 pulos de 2 e 4 pulos de 1
• 2 pulos de 2 e 6 pulos de 1
• 1 pulo de 2 e 8 pulos de 1

NOTAMOS QUE OS PULOS DE 1 SEMPRE SERÁ PAR

* fizemos a conjectura que não seria possível intercalar pulos de 1 e 2, mas testando descobrimos que é sim desde que começasse com 1 pulo.

Daí pensamos e ver as quantid possíveis de cada pulo p/ depois ir p/ as combinações. 1,1,1,1,2,2,2
ou 2,2,2, 1,1,1,1
ou 1, 2,2, 1, 1, 1, 2...

Figura 21: Solução do grupo que escolheu a Atividade 3

Fonte: Elaboração própria dos participantes do minicurso "Atividades matemáticas produtivas sob a luz das Mentalidades Matemáticas".

- De quantas formas diferentes Leo pode subir as escadas dando exatamente um pulo de dois degraus e oito pulos de um degrau?

- De quantas maneiras o coelhinho pode subir uma escada com 10 degraus dando dois pulos de dois degraus e seis pulos de um degrau?

- De maneiras distintas, Leo, o coelho, pode subir uma escada com 10 degraus dando três pulos de dois degraus e quatro pulos de um degrau?

- De quantas formas diferentes o coelho pode subir uma escada com 10 degraus de modo que dê exatamente quatro pulos de dois degraus e dois pulos de um degrau?

Uma vez resolvido cada um dos quatro questionamentos anteriores, seria necessário apenas somar todas as soluções para determinar a solução geral da questão. A estratégia escolhida pelo grupo foi de "rebaixar" o piso, uma vez que buscaram dividir a situação inicial em miniproblemas mais fáceis, para em seguida resolver o que foi proposto.

5.4 Números visuais

Esta atividade está disponível no *site* "YouCubed" e foi escolhida por nossa equipe para ser trabalhada com a turma no minicurso pelo seu potencial de discussão acerca de diversos conteúdos matemáticos, além de ter um caráter de investigação e ser considerada "piso baixo, teto alto". É importante salientar que essa atividade pode ser trabalhada desde os Anos Inicias do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. O que vai definir sua profundidade ou abordagem é o nível de conhecimento da turma, bem como a condução do professor, além das observações e conexões feitas pelos estudantes.

Na Figura 22, apresentamos as perguntas que nossa equipe apresentou aos cursistas e que podem ser trabalhadas com os estudantes em sala de aula:

O grupo logo percebeu que, se rotacionasse a folha, encontraria um padrão visual de representação dos números, sendo a quantidade de bolinhas numericamente igual ao valor absoluto do número que estava sendo representado. Diferente do que os autores observaram com estudantes da educação básica, os professores cursistas não fizeram anotações na folha (Figura 23), tampouco coloriram. Esse é um movimento comum entre os estudantes, que o fazem com animação. Inclusive, é a partir disso que costumam iniciar observações mais profundas sobre os números, estabelecendo conexões e levantando questionamentos.

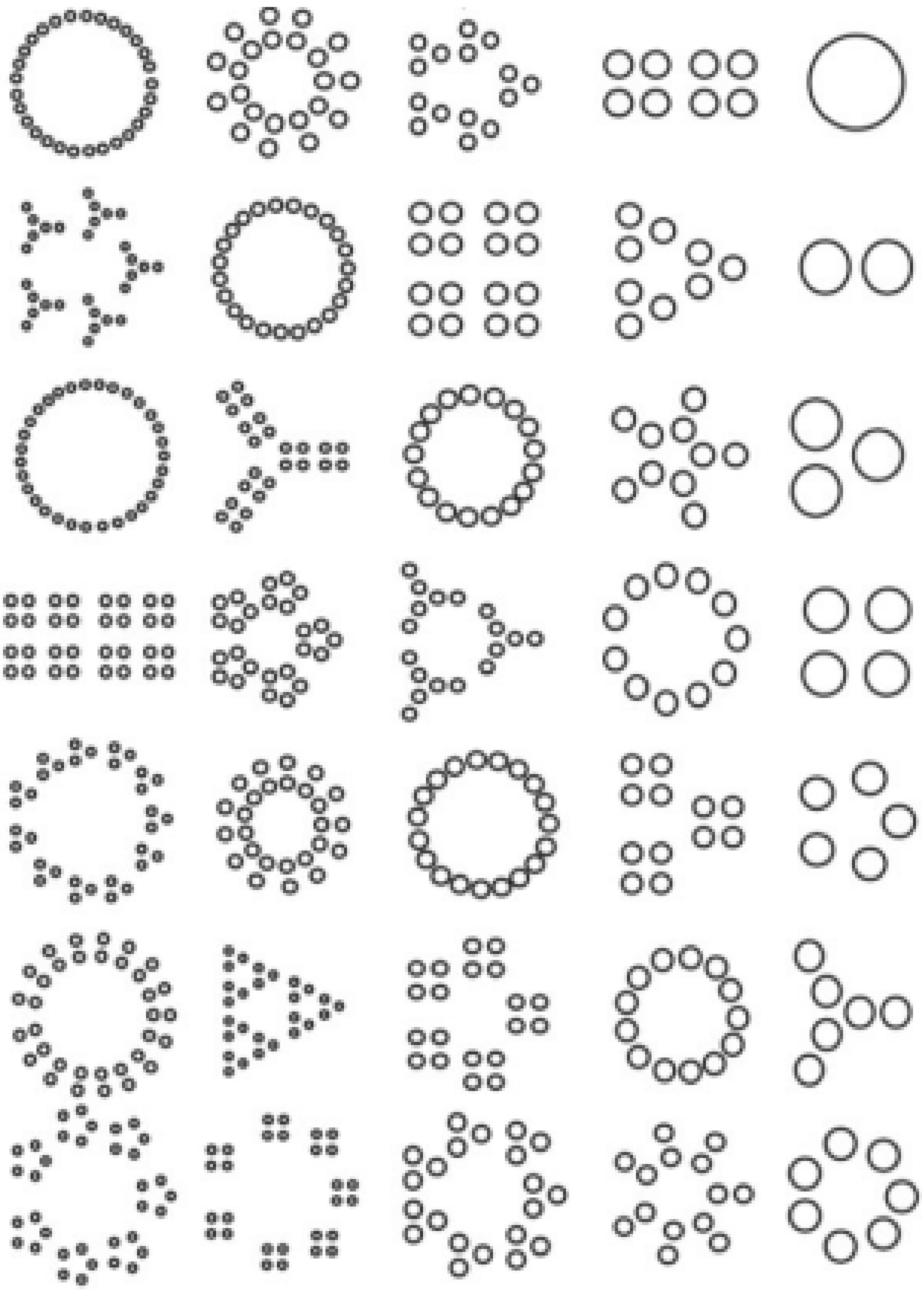
Os cursistas, depois de analisarem coletivamente a imagem das bolinhas, optaram por registrar suas observações gerais apenas com textos, como é possível ver na Figura 24. Ressaltamos que, em sala de aula com os estudantes, podemos incentivar que utilizem exemplos visuais para exemplificar essas observações. Por exemplo, no caso de "apresenta alguns padrões de simetria", seria interessante desenhar e apontar essa simetria no cartaz (ou na própria folha). Isso pode ajudar na visualização para aqueles que não tinham observado isso inicialmente. No último comando da atividade, o grupo conseguiu explorar o visual em suas respostas, utilizando cores e formas. As diferentes possibilidades encontradas pelo grupo poderiam ser ricamente discutidas com a turma, ressaltando conceitos e conteúdos matemáticos, como fatores, múltiplos e números primos.

[1]Fonte: <https://www.youcubed.org/pt-br/resources/numeros-visuais-ef-em/>

Minicurso (dia 2):
"Atividades matemáticas produtivas sob a luz das mentalidades matemáticas"

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Atividade 5
NÚMEROS VISUAIS



Fonte: https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2020/04/N%C3%BAmeros-visuais-6%C2%BA-3EM.pdf

Figura 22: Atividade 4: Números visuais

Fonte: *Site* do YouClubed
<https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2020/04/N%C3%BAmeros-visuais-3-5-anos.docx.pdf>

Atividade 4

a) Escreva o número que cada imagem representa em sua ficha de números visuais. O que você vê nesses números visuais?
b) Percebe algo interessante sobre a forma como os números são mostrados? Mostre suas descobertas a membros do grupo e discutam-nas juntos.
c) Procure padrões interessantes. Será útil usar cores para destacá-los. Descreva algumas das suas descobertas e as compartilhe com membros do grupo.
d) Desenhe os números 36 e 37.

Figura 23: Enunciados para a Atividade 4: números visuais

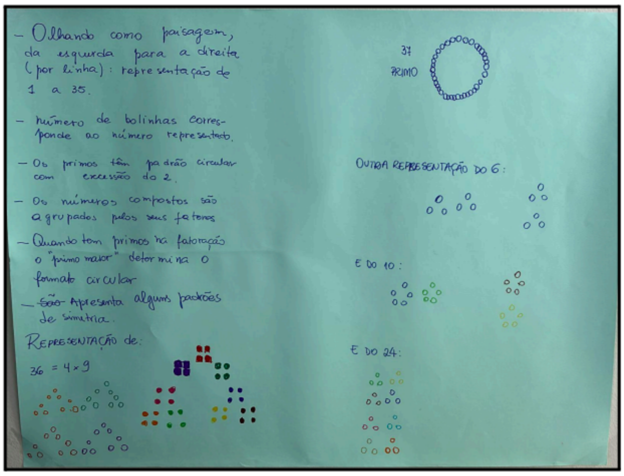


Figura 24: Solução do grupo que escolheu a Atividade 4

Fonte: Elaboração própria dos participantes do minicurso "Atividades matemáticas produtivas sob a luz das Mentalidades Matemáticas".

Considerando essa proposta em sala de aula com estudantes, ela poderia ser usada em diferentes anos de escolaridade e com diferentes objetivos, mas também dentro de um mesmo ano de escolaridade mais de uma vez ao ano. Por exemplo, essa atividade poderia ser proposta no início do 4° ano do ensino fundamental, quando estão consolidando o conceito de multiplicação. O professor poderia apresentar novamente a atividade no final do 4° ano (ou início do 5° ano) e observar quais outras relações os estudantes conseguem fazer depois de terem aprofundado seus conhecimentos ao longo do ano. Em suma, os cursistas concluíram que se trata de uma atividade muito rica para professores e estudantes, envolvente, e que pode ser aprofundada e revisitar diferentes conceitos.

6

Considerações Finais

Neste *e-book*, após breves considerações, destacamos um dos múltiplos obstáculos enfrentados pelos professores de matemática nas salas de aula: a concepção comum de que algumas pessoas possuem habilidades inatas para aprender matemática, enquanto outras não. Boaler (2018), ao apresentar a abordagem de Mentalidades Matemáticas, propõe a necessidade de mudar essa perspectiva e, para tanto, aponta diversas sugestões de práticas no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Encontramos, em pesquisas no campo da neurociência e ensino da matemática (HUBBARD *et al.*, 2005; KUCIAN *et al.*, 2011; BOALER, 2018), um esforço para desmistificar a crença de que Matemática não pode ser aprendida por qualquer pessoa. Os resultados de diversos estudos mostram o poder que a mentalidade fixa e a mentalidade de crescimento têm sobre o processo de aprendizagem das pessoas, inclusive na matemática. Acreditar que se é capaz de aprender o que quiser, desde que persista nos desafios e encare o erro como oportunidade, é um divisor de águas para avançar e aprofundar em qualquer conhecimento.

Os estudos sobre as Mentalidades Matemáticas de Boaler (2015), Boaler (2018), Boaler (2019) ressaltam que uma nova abordagem no processo de ensino e aprendizagem matemática na educação básica, tem o potencial de grande transformação. Encorajar que os estudantes estabeleçam conexões entre os conteúdos e apresentem soluções e respostas visuais, por exemplo, garante que o cérebro acione diferentes partes e, portanto, consolide a aprendizagem.

Boaler (2018) também nos dá orientações importantes sobre o valor e a grande relevância que o professor tem nesse processo educacional. Desde o planejamento de aulas e atividades abertas, criativas e flexíveis, a mensagens de encorajamento ao longo das aulas, é fundamental que comecemos a repensar as nossas práticas pedagógicas. Além disso, devemos estar atentos às habilidades fundamentais exigidas pelo mundo contemporâneo, tais como colaboração e capacidade de escuta atenta.

Com o minicurso e o *e-book*, esperamos ter colaborado, ainda que de maneira incipiente, com a apresentação de diferentes estratégias pedagógicas para ensinar e aprender matemática. É nosso compromisso, enquanto educadoras e educadores, promover discussões e reflexões que pautam uma educação de qualidade para todas e todos os estudantes. Esperamos que, com as duas sessões da nossa oficina, os professores participantes tenham saído motivados a conhecer mais profundamente esta abordagem e que considerem incluir atividades abertas, criativas, visuais e com potencial de colaboração entre estudantes em suas salas de aula.

Referências Bibliográficas

BOALER, J. *Fluência Sem Medo: Pesquisas Mostram as Melhores Formas de Aprender Fatos Matemáticos*. YouCubed, 2015. Acesso em: 03 jul. 2022. Disponível em: <https://youcubed2.wpenginepowered.com/wp-content/uploads/2017/03/COD5_Fluence_With_Fear_PORTUGUESE-.pdf>. xi, 2, 3, 5, 6, 38

BOALER, J. *Mentalidades matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador*. Porto Alegre: Penso, 2018. xi, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 28, 29, 30, 38

BOALER, J. Prove it to me! *Mathematics Teaching in the Middle School*, NCTM, Reston, Virgínia, EUA, v. 24, n. 7, p. 422–428, 2019. xi, 2, 3, 5, 6, 7, 14, 38

BOALER, J.; MUNSON, J.; WILLIAMS, C. *Mentalidades matemáticas na sala de aula: ensino fundamental*. Porto Alegre: Penso Editora Ltda, 2018. 11, 13

COHEN, E.; LOTAN, R. *Planejando o trabalho em grupo: estratégias para salas de aula heterogêneas*. Porto Alegre: Penso, 2017. 28, 29

GRAY, E.; TALL, D. Duality, ambiguity, and flexibility: a "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 25, n. 2, p. 116–140, 1994. 6

GREGORUTTI, G. S. *Performance matemática digital e imagem pública da matemática: viagem poética na formação inicial de professores*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2016. 26

HUBBARD, E. M. *et al.* Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience*, v. 6, n. 6, p. 435–448, 2005. 38

KUCIAN, K. *et al.* Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage*, v. 57, n. 3, p. 782–795, 2011. Acesso em: 03 jul. 2022. Disponível em: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/21295145>. 38

MACHADO, L. *Apostila de Matemática CAp-UERJ* 8° *ano 2018 - Projeto Matemática Viva*. 2018. Acesso em: 20 mai. 2022. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1GiL-XUUcO4TqOUV3sC_wGFD4fSX7_1Ti/view?usp=share_link>. 22, 23

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na sala de aula*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. 10, 11

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Realização e Organização

ANPMat

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

Distribuição

Editora ANPMat