6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

O ENSINO-APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Luiz Otavio Rodrigues Mendes

João Alessandro da Luz

ANPMat

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

O ENSINO-APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

O ENSINO-APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Luiz Otavio Rodrigues Mendes
João Alessandro da Luz

1ª edição

2025

Rio de Janeiro

ANPMat

O Ensino-Aprendizagem de conceitos matemáticos por meio da resolução de problemas

Projeto gráfico: Gabriel Brasil Nepomuceno

Produção editorial: Editora Pi
www.editorapi.com.br | contato@editorapi.com.br | +55 21 97748-7208

Distribuição: Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
www.anpmat.org.br | editoraanpmat@anpmat.org.br

ISBN: 978-65-88013-34-2

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Mendes, Luiz Otavio Rodrigues
O ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos por meio da resolução de problemas [livro eletrônico] : 6° Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Luiz Otavio Rodrigues Mendes, João Alessandro da Luz. -- 1. ed. -- Rio de Janeiro : Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica - ANPMat, 2025.
PDF

Bibliografia.
ISBN 978-65-88013-34-2

1. Aprendizagem - Metodologia 2. Matemática - Congressos 3. Matemática - Estudo e ensino 4. Resolução de problemas I. Luz, João Alessandro da. II. Título.

25-264930 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

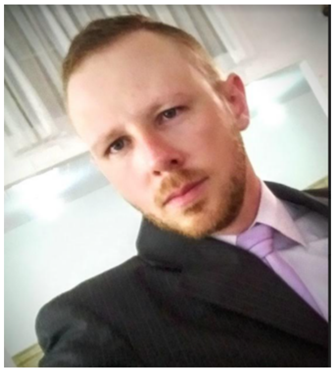
1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

Sobre os autores

João Alessandro da Luz
joaoalessandro.luz@gmail.com
<http://lattes.cnpq.br/1315361025166246>
Dr John - O Canal da Matemática (Youtube)

Graduado em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná - Campus de Campo Mourão (2003), Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá-Pr - UEM (2016) e Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá-Pr - UEM (2023). Atualmente, é professor de Matemática concursado (QPM) no Ensino Básico na Secretária de Educação do Estado do Paraná (Seed-PR). Membro do GERPEM - Grupo de Estudos de Resolução de Problemas na Educação Matemática da UEM. Realiza pesquisas na área de resolução de problemas, formação de professores e sobre tecnologias no ensino da matemática.



Luiz Otavio Rodrigues Mendes
mendesluizotavio@hotmail.com
<http://lattes.cnpq.br/8661805143319375>

Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática (2016) e Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática (2018), ambos realizados na Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). Concluiu o Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática (2023) pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Atualmente, é professor efetivo na Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), Campus Apucarana. Integra o Grupo de Estudos em Resolução de Problemas na Educação Matemática (GERPEM/UEM). Atua como professor no projeto de extensão do Programa de Iniciação Científica Jr. de alunos participantes da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). É revisor de 10 periódicos na área da Educação Matemática. Possui experiência na área de Educação Matemática, com ênfase nos seguintes temas: formação de professores, resolução de problemas, uso de tecnologias no ensino e revisão sistemática.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Prefácio

No contexto do ensino de conceitos matemáticos, é fundamental que os alunos não apenas aprendam Matemática, mas também sejam capazes de aplicá-la em situações cotidianas. No entanto, muitos professores, tanto os formados quanto os em formação, frequentemente enfrentam desafios ao tentar fazê-lo de maneira que não se restrinjam ao método tradicional de ensino (definição - exemplo - exercício).

Neste livro digital, exploramos uma abordagem formativa que visa aprimorar o ensino de conceitos matemáticos por meio da resolução de problemas, do começo ao fim. Essa abordagem contemporânea difere substancialmente do método tradicional de ensino. Baseados nas descobertas de Proença (2021), que têm demonstrado resultados significativos em estudos acadêmicos, desenvolvemos este livro digital com práticas, atividades ilustrativas, teorias discutidas e resolução de problemas. Desta forma, tanto alunos quanto professores de Matemática, assim como interessados no tema, podem envolver-se ativamente, simulando um ambiente de sala de aula prático. Esperamos que isso beneficie outros professores interessados em seguir este caminho.

Para fundamentar este minicurso, nos apoiamos na tese de Luz (2023) sobre o ensino de sistemas de equações. O objetivo principal deste trabalho é capacitar os professores a compreenderem, na prática, o processo de ensino de conceitos matemáticos por meio da resolução de problemas, permitindo-lhes discutir a teoria subjacente. Almejamos, com este estudo, proporcionar uma nova perspectiva sobre o ensino da Matemática e, especificamente, sobre o uso da resolução de problemas. Esperamos que este material auxilie professores, estudantes de licenciatura e outros interessados a integrá-lo em suas práticas educacionais, contribuindo para um ensino mais significativo aos alunos.

Os autores

1

Introdução

A Matemática desempenha um papel fundamental no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, proporcionando habilidades essenciais para o raciocínio lógico, resolução de problemas e tomada de decisões (PASSOLUNGHI; CARGNELUTTI; PELLIZZONI, 2019). No entanto, o ensino tradicional frequentemente enfatiza a memorização de fórmulas e procedimentos, negligenciando a compreensão conceitual e a aplicação prática dos conhecimentos. Essa abordagem contribui para a dificuldade dos alunos em resolver problemas em contextos diversos (OLIVEIRA, 2019).

Tal problemática evidencia-se em avaliações como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa), que, em 2018, revelou um desempenho insatisfatório dos alunos brasileiros em Matemática. Especificamente, 73% dos participantes ficaram abaixo do nível 2, enquanto a média dos países da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) foi de 31% (OCDE, 2022). Entre os diversos fatores relacionados a esse cenário, destaca-se a ausência de uma aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos (RITTLE-JOHNSON; SIEGLER, 2022). Isso ocorre porque, muitas vezes, o ensino prioriza a memorização em detrimento da aplicação prática e contextualizada dos conteúdos (LIU *et al.*, 2019).

Com ênfase, muitos professores encontram dificuldades em ensinar conceitos matemáticos de forma significativa (SERRAZINA, 2014). Para abordar esse desafio, Proença (2018) propôs cinco ações para ensinar Matemática a partir da resolução de problemas: a) escolha do problema; b) introdução do problema; c) suporte durante a resolução; d) discussão das estratégias utilizadas; e) articulação das estratégias. Embora eficaz para iniciar novos conteúdos e fomentar o raciocínio, essa abordagem não se concentra na formação de conceitos matemáticos.

Proença (2021) ampliou essa abordagem, propondo quatro etapas para a aprendizagem de conceitos matemáticos por meio da resolução de problemas: 1) uso do problema como ponto de partida – integrando as cinco ações de Proença (2018); 2) formação do conceito; 3) definição do conteúdo; e 4) aplicação em novos problemas. Essas etapas fornecem uma estrutura mais abrangente, que guia os estudantes desde a introdução de um problema até a consolidação do conceito e sua aplicação.

Este *e-book* tem como objetivo apoiar a formação de professores, promovendo o ensino de conceitos matemáticos a partir da resolução de problemas com base nas quatro etapas propostas por Proença (2021). O material foi desenvolvido a partir da tese de Luz (2023), que abordou o ensino de sistemas lineares.

Na introdução, apresentamos uma discussão sobre as abordagens baseadas na resolução de problemas, destacando estudos que oferecem uma visão geral sobre a metodologia e suas aplicações. Em seguida, exploramos o ensino da álgebra no Brasil e no mundo, enfatizando desafios e estratégias para superá-los, conforme trabalhado em nosso minicurso. Também detalhamos como ocorre o ensino de sistemas lineares, conteúdo central da formação oferecida.

A terceira seção é o núcleo do *e-book*, apresentando as etapas de Proença (2021) aplicadas ao ensino do conceito matemático. Essa parte inclui problemas, exemplos e quadros explicativos sobre as práticas adotadas no minicurso, com orientações para que outros professores possam replicá-las.

Por fim, nas considerações finais, oferecemos uma reflexão crítica sobre o desenvolvimento do minicurso e sua contribuição para a formação de professores. Esperamos que este material seja um recurso valioso para educadores em todo o Brasil, especialmente os ligados à Associação Nacional de Professores de Matemática, ao ensinar conceitos matemáticos, com foco particular em sistemas lineares.

2

Desenvolvimento

Diversos autores têm explorado formas de trabalhar a resolução de problemas em sala de aula. Nesse contexto, destacam-se os estudos de Schroeder e Lester Junior (1989), que identificam três possíveis abordagens.

A primeira abordagem, chamada de "ensinar sobre a resolução de problemas", enfatiza o aprendizado das etapas necessárias para solucionar um problema, como as propostas por (POLYA, 1995). Os estudantes, ao compreenderem essas etapas, aplicam-nas de maneira consciente, monitorando seu progresso durante a resolução. Além disso, essa abordagem incentiva os alunos a dominarem diversas estratégias de solução, como as oito indicadas por Posamentier e Krulik (2009), escolhendo a mais adequada para cada situação. Schroeder e Lester Junior (1989, p. 32) destacam que essa abordagem "[...] sempre envolve muita discussão explícita e ensino sobre como os problemas são resolvidos".

A segunda abordagem, conhecida como "ensinar para a resolução de problemas", é aplicada após a apresentação de conceitos ou conteúdos matemáticos. Nessa perspectiva, a resolução de problemas serve como uma aplicação prática do conhecimento previamente adquirido. O objetivo central é capacitar os alunos a utilizar a matemática em diferentes contextos. Conforme Schroeder e Schroeder e Lester Junior (1989, p. 32), essa abordagem reflete a visão de que "[...] a única razão para aprender matemática é poder usar o conhecimento adquirido para resolver problemas".

Por fim, os autores destacam a terceira abordagem, o "ensino de Matemática via resolução de problemas". Nesta abordagem o problema é o ponto de partida conforme aponta Schroeder e Schroeder e Lester Junior (1989) ao comentarem que:

> [...] os problemas são avaliados não apenas como um objetivo para o aprendizado de matemática, mas também como um meio primário de fazê-lo. O ensino de um tópico matemático começa com uma situação-problema que incorpora aspectos-chave do tópico, e as técnicas matemáticas são desenvolvidas como respostas razoáveis a problemas razoáveis. Um objetivo do aprendizado de matemática é transformar certos problemas não rotineiros em problemas de rotina. A aprendizagem da matemática dessa maneira pode ser vista como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como uma instância do conceito ou da técnica matemática) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos) (SCHROEDER; LESTER JUNIOR, 1989, p. 33, tradução nossa).

Esses autores afirmam que essa abordagem é particularmente adequada porque permite que os professores proporcionem aos alunos a oportunidade de construir seu próprio entendimento sobre os conteúdos que estão aprendendo. Como apontam Schroeder e Schroeder e Lester Junior (1989, p. 41, tradução nossa), "à medida que a compreensão dos alunos sobre a Matemática torna-se mais profunda e mais rica, sua capacidade de usar a Matemática para resolver problemas aumenta".

No Brasil, existem metodologias de ensino que incorporam essa perspectiva. Allevato e Onuchic (2021, p. 21) estruturam o processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas em 10 passos: "(1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observação e incentivo, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas".

De maneira semelhante, Proença (2018), em seu livro *Resolução de Problemas: Encaminhamentos para o Ensino e a Aprendizagem de Matemática em Sala de Aula*, apresenta uma sequência de cinco ações para apoiar professores e pesquisadores interessados em implementar o ensino por meio da resolução de problemas. Essa abordagem, chamada de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas, é composta pelas seguintes etapas: a) escolha do problema; b) introdução do problema; c) suporte aos alunos durante a resolução; d) discussão das estratégias adotadas pelos alunos; e) articulação dessas estratégias ao conteúdo trabalhado.

Tanto a metodologia de Allevato e Onuchic (2021) quanto as ações propostas por Proença (2018) concentram-se no trabalho com o problema como ponto de partida, presente na etapa 1 do modelo de Proença (2021). O leitor pode optar por uma dessas abordagens conforme sua necessidade. No entanto, Proença (2021) avança ao incluir a formação de conceitos matemáticos, desenvolvida em três etapas adicionais.

Para este *e-book*, optamos por utilizar as cinco ações de Proença (2018), que compõem a etapa inicial do modelo de quatro etapas de Proença (2021), como base para o desenvolvimento das atividades. Como mostra na Figura 1.

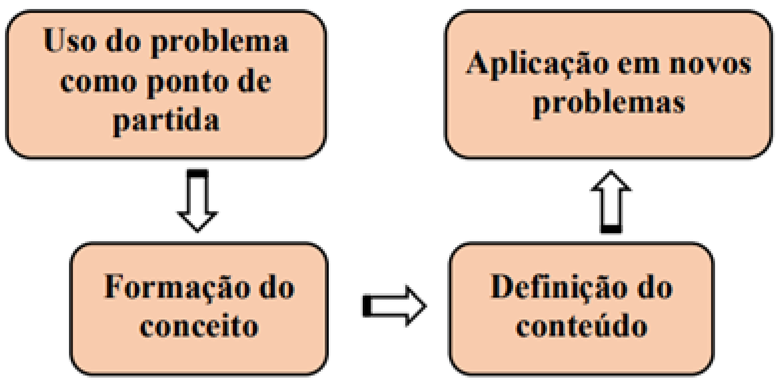


Figura 1: Organização do ensino do conceito segundo Proença (2021).

Assim, a abordagem de Allevato e Onuchic (2021) ou de Proença (2018) seriam desenvolvidas apenas na etapa 1.

2.1 O ensino de Álgebra no Brasil e no Mundo

No minicurso que deu origem a este *e-book*, trabalhamos o ensino conceitual por meio da resolução de problemas no conteúdo algébrico de sistemas lineares. Nesta seção, discutiremos as dificuldades e possibilidades relacionadas ao ensino da álgebra, com base em estudos de diferentes pesquisadores na área da educação matemática.

A construção do Pensamento algébrico entre alunos do Ensino Médio, foco de nossa proposta, é uma preocupação global. No Brasil, os estudantes enfrentam desafios significativos, como dificuldades na representação formal da resolução de problemas (BECHER, 2009). Além disso, há obstáculos na compreensão e atribuição de significados a conceitos e situações matemáticas, assim como na tradução da linguagem escrita para a linguagem algébrica. Estevão e Gonçalves (2021) destaca, ainda, complicações no uso de fórmulas, procedimentos e propriedades algébricas, evidenciando a necessidade de estratégias pedagógicas que abordem essas lacunas.

Em Portugal, os desafios estão relacionados à representação e generalização de diferentes situações matemáticas. Morais (2012) aponta que essas dificuldades exigem práticas pedagógicas que auxiliem na superação de entraves conceituais e promovam uma compreensão mais robusta da álgebra.

Na Turquia, Töman e Gökburun (2022) identificaram equívocos frequentes nos cálculos de expressões algébricas e dificuldades na transição entre aritmética e álgebra. Esses problemas reforçam a importância de métodos que tornem essa transição mais acessível e fluida.

Na Austrália, segundo Chinnappan (2004), os estudantes enfrentam maiores dificuldades ao resolver equações com estruturas mais complexas, o que reflete limitações nos conhecimentos conceituais mais avançados. Isso sugere a necessidade de progressão gradual no ensino, adaptando-o às crescentes demandas de complexidade.

Esses exemplos evidenciam que a construção do Pensamento algébrico é um desafio global, com particularidades em cada contexto educacional. Para enfrentá-lo, é essencial adotar estratégias pedagógicas que promovam uma compreensão mais sólida e significativa da álgebra, diferenciando-se de práticas tradicionais. Diversos estudiosos têm oferecido contribuições relevantes nesse campo.

Borralho e Barbosa (2009) e Becher (2009) ressaltam a importância de estratégias que não apenas preencham lacunas de aprendizagem, mas também reconstruam conceitos, criando conexões mais profundas entre aritmética, geometria e álgebra. Fernandes (2021) defende que a introdução de fundamentos algébricos desde as primeiras etapas escolares é crucial para o desenvolvimento progressivo do Pensamento algébrico.

Já Campos (2019) e Campos e Farias (2020) sugerem a integração de aritmética e álgebra por meio da Resolução de Problemas. Essa abordagem estabelece vínculos entre a linguagem natural e a algébrica, proporcionando um aprendizado mais contextualizado e prático. Com essas práticas, os alunos têm a oportunidade de compreender e aplicar os conceitos algébricos de maneira significativa, fortalecendo sua capacidade de lidar com desafios matemáticos mais complexos ao longo da formação. A Base Nacional Comum Curricular do Brasil (BRASIL, 2018, p. 528) destaca a importância de desenvolver nos estudantes a habilidade de "resolver e elaborar problemas do cotidiano". Esta diretriz enfatiza a necessidade de uma abordagem prática e aplicada no ensino da álgebra, conectando os conceitos estudados com situações do mundo real. Essa contextualização não apenas torna o aprendizado mais envolvente, mas também facilita a transferência de conhecimento para aplicações práticas.

O ensino da matemática está evoluindo para práticas pedagógicas que promovam uma aprendizagem significativa, distanciando-se do método tradicional. A introdução de conceitos fundamentais, a superação de dificuldades e a integração entre aritmética e álgebra por meio de atividades práticas são passos essenciais para capacitar os alunos a enfrentar desafios matemáticos de forma mais eficaz e aplicada.

Considerando tal contexto, especialmente relacionado ao minicurso desenvolvido, é evidente que o pensamento algébrico é uma competência crucial no ensino de Matemática. No entanto, dada a variedade de desafios encontrados em diferentes contextos educacionais, é fundamental destacar o papel do minicurso em promover o ensino desses conteúdos. No Brasil, particularmente, há obstáculos na representação formal da resolução de problemas e na compreensão de conceitos algébricos, áreas em que o minicurso pode contribuir significativamente para a formação dos professores.

Para superar esses desafios, diversas estratégias pedagógicas têm sido propostas, sendo que a abordagem adotada no minicurso tem se mostrado particularmente eficaz. Esta abordagem não apenas reconstrói as dificuldades enfrentadas pelos alunos, mas também estabelece uma base sólida desde as etapas iniciais da aprendizagem e integra a aritmética e a álgebra por meio da resolução de problemas. Além disso, a contextualização dos conceitos estudados com situações do cotidiano, conforme preconizado pela Base Nacional Comum Curricular do Brasil, é crucial para tornar o aprendizado mais significativo e aplicável, sendo essa a abordagem adotada no minicurso.

Portanto, o ensino do pensamento algébrico requer abordagens pedagógicas que reconheçam as necessidades específicas dos alunos em cada contexto educacional. Ao estabelecer uma base sólida, integrar aritmética e álgebra, e contextualizar os conceitos com situações reais, é possível promover uma compreensão mais profunda e uma aplicação mais eficaz dos princípios algébricos, o que torna o minicurso apresentado uma escolha relevante e pertinente.

2.2 O ensino de Sistemas lineares

A abordagem das dificuldades no ensino e aprendizado da álgebra no contexto nacional é tema de diversas pesquisas, evidenciando desafios específicos enfrentados por estudantes e apontando possíveis áreas de melhoria. Entre as constatações, destaca-se o estudo de Ferreira (2013), que caracteriza a produção acadêmica como “breve e superficial”, indicando a necessidade de aprofundamento na análise das dificuldades encontradas pelos alunos no âmbito da álgebra.

Battaglioli (2008) chama a atenção para a priorização de cálculos algébricos em livro digitals didáticos, sugerindo que essa ênfase pode contribuir para as dificuldades dos estudantes. A abordagem excessivamente centrada em procedimentos pode negligenciar a compreensão conceitual e a aplicação prática dos conceitos algébricos.

Negromonte *et al.* (2019) destacam a presença de estudantes com dificuldades de compreensão e uma tendência à rejeição da matéria. Essa resistência pode ser atribuída a abordagens pedagógicas que não conseguem conectar de forma eficaz os conceitos abstratos da álgebra com a realidade dos alunos.

Delazeri (2017) identificou alunos com dificuldades específicas em tópicos envolvendo sistemas lineares (SL), revelando uma compreensão limitada desse conteúdo matemático. Essa lacuna de entendimento pode comprometer o desenvolvimento subsequente dos estudantes em áreas mais avançadas da álgebra.

Finalmente, Jordão (2011) aponta para dificuldades específicas, como a interpretação de enunciados de problemas, a resolução de equações em sistemas lineares e o tratamento aritmético para classificar corretamente um sistema linear. Essas dificuldades sugerem a necessidade de abordagens pedagógicas que enfatizem a compreensão conceitual e a aplicação prática dos conhecimentos algébricos.

À vista disso, as pesquisas nacionais destacam diversas facetas das dificuldades encontradas pelos alunos no estudo da álgebra. A ênfase em procedimentos, a resistência dos estudantes, a compreensão limitada de tópicos específicos e a organização do ensino em sala de aula emergem como pontos críticos, demandando uma abordagem mais holística e contextualizada no ensino da álgebra no contexto brasileiro.

Pesquisas internacionais revelam desafios significativos enfrentados por estudantes em relação ao aprendizado de sistemas lineares (SL), com evidências de dificuldades tanto em países asiáticos quanto latino-americanos.

Dewi *et al.* (2021), também na Indonésia, observaram obstáculos específicos na identificação de conceitos de sistemas lineares, tanto por meio de abordagens geométricas quanto algébricas. Essa dualidade de dificuldades ressalta a complexidade subjacente aos sistemas lineares e a necessidade de métodos de ensino que abordem esses conceitos de maneira integrada.

Em países latino-americanos, como México e Uruguai, Oktaç (2018) identificou desafios semelhantes. Alunos nesses contextos apresentaram obstáculos significativos na identificação de conceitos de sistemas lineares, abrangendo não apenas as abordagens algébricas, mas também as geométricas, além de espaços bidimensionais e tridimensionais. Isso aponta para uma carência generalizada de compreensão desses conceitos fundamentais, independentemente da abordagem utilizada.

Essas pesquisas internacionais indicam que as dificuldades relacionadas aos sistemas lineares não são restritas a uma única região, mas são desafios globais. A compreensão limitada desses conceitos e a dificuldade na escolha de estratégias para resolução revelam a necessidade de abordagens pedagógicas mais abrangentes, que integrem tanto as perspectivas geométricas quanto algébricas, proporcionando aos alunos uma compreensão mais holística e aplicada dos sistemas lineares. Essa abordagem pode contribuir para superar barreiras e promover uma compreensão mais profunda de sistemas lineares em contextos matemáticos diversos.

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

3

O Ensino-Aprendizagem do conceito matemático via Resolução de Problemas na Formação de Professores

O minicurso que originou este *e-book* teve momentos distintos que podem ser vistos na Tabela 1 a seguir:

Tabela 1: Atividades propostas no minicurso e que originaram este *e-book*.

Momento	Atividade Proposta
1° Momento	Apresentação e Discussão acerca do ensino da Matemática e do papel da Resolução de Problemas no processo de Ensino e Aprendizagem.
2° Momento	Discussões sobre: problema e exercício; ensino sobre, via/através e para resolução de problemas.
3° Momento	Apresentação da proposta de organização de ensino de Proença (2021).
4° Momento	Atividade mão na massa: entendendo a Proposta de Proença (2021) por meio do trabalho de Luz (2023).

Fonte: Os autores

Nesse contexto, as discussões do 1° e do 2° momento foram abarcadas seção 2, sendo o 3° e o 4° momentos tratados nessa seção a seguir. Desse modo, buscaremos apresentar aqui as quatro etapas da proposta de Proença (2021), a saber: (i) uso do problema como ponto de partida;(ii) formação do conceito; (iii) definição do conteúdo; e, (iv) aplicação em novos problemas. Objetivando que haja um melhor entendimento da aplicação prática dessas etapas, apresentaremos como a tese de doutorado de Luz (2023) implementou o ensino de sistemas lineares no ensino médio usando a proposta de Proença (2021) buscando contornar entraves do ensino desse conteúdo conforme observamos em nossos referenciais teóricos da seção anterior.

3.1 Etapa 1 - uso do problema como ponto de partida

Nessa etapa o professor fará uso do problema como ponto de partida para a introdução de um conteúdo/assunto/conceito matemático. Para tanto, utilizamos a abordagem de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP), de Proença (2018), a qual é composta por cinco ações: escolha do problema, introdução do problema, auxílio dos alunos durante a resolução do problema, discussão das estratégias dos alunos e **articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo**. Sobre essas ações, apresentaremos brevemente a seguir:

a) Ação de escolha do problema

A primeira ação, a de **escolha do problema**, ocorre quando o professor faz a preparação da aula antes de colocá-la em prática na sala de aula. O docente deve escolher uma situação de matemática[1] que se configure, posteriormente, como um possível problema aos alunos. Segundo Proença (2018), três aspectos são relevantes nesse momento de seleção do problema que o professor deve considerar:

> [...] direcionar os alunos a utilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente [...] levá-los a construir o conteúdo/conceito/assunto a ser introduzido [...] propiciar condições para que os alunos estabeleçam relações entre

[1] Alguns autores como Brito (2006) chamam de situação de matemática, outros como Schoenfeld (1985) nomeiam genericamente de tarefa, sendo que não se sabe se é um problema ao indivíduo. No entanto, como Proença (2018) é o referencial base, consideramos no decorrer da pesquisa o termo situação de matemática.

> os conhecimentos matemáticos utilizados e entre estes e o novo conhecimento (PROENÇA, 2018, p. 46).

É possível observar, em relação a estes três aspectos, a importância que o autor dá ao trabalho com o conhecimento prévio do aluno e a sua relação com o conhecimento que está a ser aprendido. Fica clara essa percepção quando se leva em consideração que, ao se trabalhar nesta perspectiva, o conhecimento de tal conteúdo não deve ser "dado" ou "exemplificado" pelo professor analogamente ao ensino tradicional.

Nesse sentido, Proença (2018, p. 47) considera relevante que o problema possa, se possível, apresentar mais de uma resposta, pois "o objetivo principal é levar os alunos a compreender que resolver um problema não implica uma única resposta". Além disso, é pertinente que o professor tenha conhecimento sobre as possíveis estratégias de resolução de problemas matemáticos para que, assim, possa identificá-las no processo de aprendizagem dos seus alunos. Proença (2018) comenta a respeito disso que:

> A intenção é evitar um trabalho que não leve em consideração o que os alunos fazem pelo fato de o próprio professor desconhecer um conceito ou procedimento empregado como estratégia ou mesmo por não tentar entender o raciocínio utilizado em uma estratégia (de cunho heurístico) que foge à aplicação de uma fórmula matemática (PROENÇA, 2018, p, 47).

Para atender a esses aspectos anteriores, deve-se levar em consideração como será obtida a situação de matemática. Proença (2018) destaca três formas: a primeira refere-se à obtenção na íntegra de uma situação já pronta; a segunda está relacionada ao processo de reelaboração; e, por fim, a última seria o processo de elaboração de uma nova situação de matemática.

Um exemplo de problema reelaborado é abordado por Proença (2018) que será discutido aqui com o desenvolvimento do EAMvRP. A situação de matemática aponta que "Num quintal há 20 animais, entre porcos e galinhas. Sabe-se que há, no todo, 64 pés. Quantos são os porcos e quantas são as galinhas?" (PROENÇA, 2018, p.63). Neste caso, o autor reelaborou a situação de matemática de outro problema que tratava os valores de animais como 36 e um total de 112 pés, pois considerou que os valores eram muito elevados para que os alunos pudessem realizar sua resolução. Este processo de reelaboração consiste em utilizar uma situação de matemática prévia, adaptando-a conforme a necessidade. Para tanto, a resolução desta situação de matemática utilizada como exemplo será explorada no decorrer das outras ações. Considera-se esta primeira ação de fundamental importância, pois a partir dela, desenvolve-se todo o processo. Neste trabalho, para seguir uma linha de raciocínio apresentaremos uma forma de resolver este problema. No entanto, ele pode ser resolvido por meio de uma tabela, por desenhos dos animais e posteriormente seus pés, por meio do raciocínio lógico e por meio de operações algébricas.

b) Ação de introdução do problema

A segunda ação, a de **introdução do problema**, é desenvolvida no ambiente da sala de aula. Após o docente apresentar a situação de matemática, deve orientar os alunos a se dividirem em grupos para que assim iniciem a resolução do problema, da forma que melhor acharem conveniente. De acordo com Proença (2018, p. 51), "é nesse momento de início da tentativa de resolução que a situação pode se configurar como algo difícil ao grupo, isto é, pode se tornar um problema". Esse processo reforça a relevância da escolha apropriada da situação de matemática.

c) Ação de auxílio aos alunos durante a resolução

Nessa ação, enquanto os alunos resolvem em seus grupos o problema proposto, tendo papel ativo no processo de aprendizagem, o professor realiza uma conduta auxiliar configurando-se como " [...] observador, incentivador e direcionador da aprendizagem, apoiando os alunos a desenvolver autonomia frente ao processo de resolução" (PROENÇA, 2018, p.51).

No papel de observador, o professor deve perceber se há possíveis dúvidas ou más interpretações da situação de matemática, verificando a racionalidade das respostas apresentadas pelos alunos. Nesse sentido, ocorre concomitantemente a avaliação do processo de aprendizagem em que o professor deve identificar as possíveis dificuldades dos alunos, referente às etapas e resolução de problemas como, por exemplo, se estão conseguindo propor uma estratégia. Entra em cena o professor no papel de incentivador, em que deve mediar esse processo de auxílio aos alunos, mas sem dar respostas prontas. No entanto, caso haja maiores dificuldades e os alunos não estejam conseguindo avançar na resolução, mesmo após as mediações do professor, deve-se então direcionar os alunos a seguir o caminho das estratégias previamente pensadas na primeira ação, mas sem dar respostas. Conforme destaca Proença (2018), o papel do professor é nesse instante de direcionador.

Em relação ao problema explorado na primeira ação, Proença (2018) sugere como estratégia de sua resolução a utilização de um quadro a partir da estratégia de tentativa e erro conforme a Tabela 2:

Tabela 2: Estratégia de resolução de tentativa e erro utilizando um quadro.

Porcos	Galinhas	Total de animais	Total de pés
10	10	20	$(10 \cdot 4) + (10 \cdot 2) = 60$
9	11	20	$(9 \cdot 4) + (11 \cdot 2) = 58$
8	12	20	$(8 \cdot 4) + (12 \cdot 2) = 56$
11	9	20	$(11 \cdot 4) + (9 \cdot 2) = 62$
12	8	20	$(12 \cdot 4) + (8 \cdot 2) = 64$
13	7	20	$(13 \cdot 4) + (7 \cdot 2) = 66$
Resposta: São 12 porcos e 8 galinhas.			

Fonte: Proença (2018, p. 65).

Com esta estratégia é possível que o aluno vá fazendo tentativas, mesmo sem ter o conhecimento prévio do conteúdo de sistemas de equações do 1° grau. d) Ação de discussão das estratégias dos alunos

Após os grupos finalizarem a resolução dos problemas, o professor propicia um momento de socialização das respostas, sendo assim desenvolvida a quarta ação, a de discussão das estratégias dos alunos. Proença (2018) ressalta que, nessa etapa, o professor pode proceder avaliando os alunos em relação às etapas de resolução. "Assim, o professor deve apontar as dificuldades que tiveram e os equívocos cometidos em uma resolução inadequada" (PROENÇA, 2018, p.52). Outrossim, pode fornecer um certo *feedback* aos alunos, para o desenvolvimento da percepção de aprendizagem consolidada.

A relação do aluno com o problema é um ponto fundamental e, portanto, é importante que o problema seja claro e conciso de forma que isso possa revelar como os alunos o compreendem a partir de sua linguagem materna (conhecimento linguístico) e seu conhecimento sobre a Matemática, em específico, a linguagem matemática (conhecimento semântico). Da mesma maneira, para que se possa identificar

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática / Rio de Janeiro - RJ / set. 2023

como o aluno percebe o esquema necessário para a resolução do problema, ou seja, o conhecimento esquemático refere-se ao aluno entender do que se trata aquele problema; no exemplo, é um problema de sistema de equação. Outros conhecimentos que devem ser averiguados são o conhecimento estratégico, que se refere ao aluno traçar uma estratégia, como por exemplo a da tabela adotada no Quadro 1. Porém, quando de fato ele vai colocar em prática essa estratégia, ou seja, desenvolvê-la, ele utiliza seu conhecimento procedimental. Sobre esses aspectos, “[...] deve-se levar os alunos a perceberem a necessidade de avaliar a racionalidade da resposta encontrada, ou seja, se a resposta está de acordo com a natureza do contexto do problema” (PROENÇA, 2018, p.52). e) Ação de articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo

Após todos os grupos apresentarem suas resoluções, e estas serem discutidas, o professor escolhe uma estratégia utilizada pelos alunos ou, caso isso não seja possível, utiliza a sua estratégia previamente definida para desenvolver a última ação, a de articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo. A ideia é relacionar a estratégia ao conteúdo/conceito/assunto que se quer ensinar aos alunos. Retomando em nosso exemplo, utilizado para ilustrar a situação de matemática, proposta por Proença (2018), bem como a estratégia de tentativa e erro utilizando um quadro, o autor considera que o desenvolvimento desta ação pode ocorrer de forma que:

> [...] o professor pode chamar a atenção dos alunos para que verifiquem que os valores atribuídos na primeira e segunda colunas para se obter o total de 20 animais são casos específicos, mas que podemos tornar isso genérico usando letras. No caso, letras p e g. Com isso, é possível direcionar os alunos na compreensão da equação $p + g = 20$. Em seguida, direcioná-los na obtenção da segunda equação, tendo em vista que porcos têm quatro pés e galinhas dois, valores esses que se mantêm, obtendo-se, assim, a equação de $4\mathfrak{p} + 2\ g = 64$. Desse modo, o professor tem condições de articular essas informações com a forma matemática de resolução via sistemas de equações, conteúdo este a ser introduzido (PROENÇA, 2018, p. 68).

Cabe ressaltar que se não for possível a utilização de uma estratégia específica, pode então ser feita a resolução de forma direta sem utilizar uma das estratégias abordadas pelos alunos. Para compreender todo esse processo das cinco ações, apresentamos na Figura 2 um esquema desenvolvido por Proença (2018).

Dessa forma, entendemos que o EAMvRP é um processo que envolve dedicação, preparo, compreensão, habilidades e conhecimentos matemáticos, dentre outros fatores que influenciam diretamente no processo de ensino em sala de aula. Portanto, o trabalho com essa abordagem, em que o problema é o ponto de partida, configura-se com grande potencial, o que faz jus à sua discussão na formação inicial de professores de Matemática.

3.1.1 Aplicação na prática do uso do problema como ponto de partida

Após discutirmos a teoria, a seguir, apresentamos como Luz (2023) usou o problema como ponto de partida para o ensino do conteúdo de sistemas lineares com estudantes do ensino médio em sua pesquisa na tese de doutorado. O Quadro 1 a seguir mostra as situações 1 e 2 usadas pelo autor como problemas para a introdução desse conteúdo:

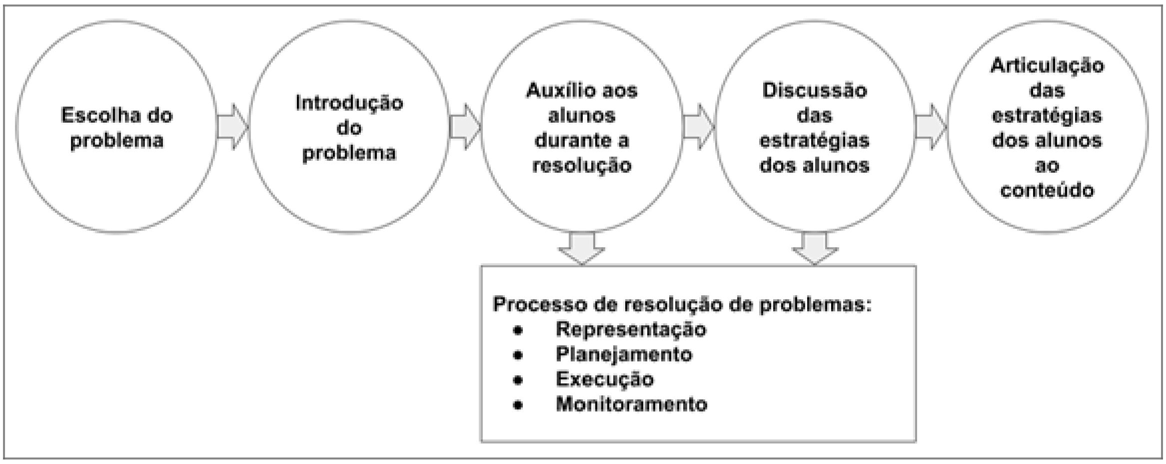


Figura 2: Esquematização da sequência de trabalho das cinco ações pertencentes à etapa 1.

Fonte: Proença (2018, p. 46)

Quadro 1: Problemas como ponto de partida para o conteúdo de sistemas lineares.

Paulo está comprando a lista de material pedido pela escola para seu filho Nicolas. Buscando economizar ele vem fazendo uma pesquisa de preços em 2 livrarias. Veja as situações 1 e 2 com os orçamentos encontrados por Paulo encontrou em cada uma delas e responda as perguntas:

Situação 1: Na Livraria A, Paulo fez dois orçamentos:
Orçamento 1: uma borracha da marca Pitágoras e um lápis da marca Newton. *Total:* R$ 8,00.
Orçamento 2: duas borrachas da marca Pitágoras e quatro lápis da marca Newton. *Total:* R$27,50.
Qual o preço da borracha Pitágoras e do lápis Newton na Livraria A?

Situação 2: Já na Livraria B, Paulo fez mais três orçamentos:
Orçamento 1: uma borracha da marca Pitágoras, dois lápis da marca Newton e uma caneta da marca Leibniz. *Total:* R$ 9,00.
Orçamento 2: dois lápis da marca Newton e duas canetas da marca Leibniz. *Total:* R$11,00.
Orçamento 3: três canetas da marca Leibniz. *Total:* R$10,50.
Qual o preço da borracha Pitágoras, do lápis Newton e da caneta Leibniz na Livraria B?

Fonte: Luz (2023, p. 83).

Em sua pesquisa, Luz (2023) dividiu os alunos em duplas, podendo realizar a resolução dos problemas durante uma aula de 50 minutos. As estratégias de resolução que os grupos participantes poderiam considerar previamente como caminho para se chegar a resposta, são apresentadas abaixo.

a) Estratégias de resolução da situação 1

A situação 1 era um problema equivalente a um sistema linear com duas equações e duas incógnitas. Além da estratégia de tentativa e erro, os alunos poderiam usar estratégias de tabelas, algébrica e combinações de duas ou mais estratégias para a resolução do problema proposto. Nesse sentido, os estudantes podem fazer uso da estratégia de resolução por meio de tabela conforme observamos na Tabela 3 a seguir:

Tabela 3: Estratégia de resolução por tabela da situação 1.

Valores (Borracha; Lápis)	**Equação 1**	**Equação 2**
(B; L)	**B + L = 8**	**2B + 4L = 27,50**
(1; 7)	1 + 7 = 8	$2 \cdot 1 + 4 \cdot 7 = 2 + 28 = 30$
(2; 6)	2 + 6 = 8	$2 \cdot 2 + 4 \cdot 6 = 4 + 24 = 28$
(2,50; 5,50)	2,50 + 5,50 = 8	$2 \cdot 2{,}50 + 4 \cdot 5{,}50 = 5 + 22 = 27$
(2,25; 5,75)	2,25 + 5,75 = 8	$2 \cdot 2{,}25 + 4 \cdot 5{,}75 = 4{,}50 + 23 = 27{,}50$
Resposta: A borracha Pitágoras custa R$2,25 e o lápis Newton custa R$5,75.		

Fonte: Luz (2023, p. 85).

Por fim, os grupos poderiam fazer a utilização da estratégia algébrica do método da adição ou da substituição para a resolução do problema, conforme mostra o Quadro 2:

Portanto, o preço da borracha Pitágoras é R$2,25, e o preço do lápis Newton é R$5,75 na Livraria A. Para a articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo, o professor poderá escolher uma das estratégias adotadas por um dos grupos participantes. Proença (2018) salienta que caso não seja possível tal articulação, pode-se apresentar a resolução do problema de forma direta.

b) Estratégias de resolução da situação 2

A situação 2 é um problema equivalente a um sistema linear escalonado com três equações e três incógnitas. As estratégias utilizadas poderiam ser as mesmas utilizadas na primeira situação. A Figura 3 mostra a estratégia de resolução possível por meio de desenhos.

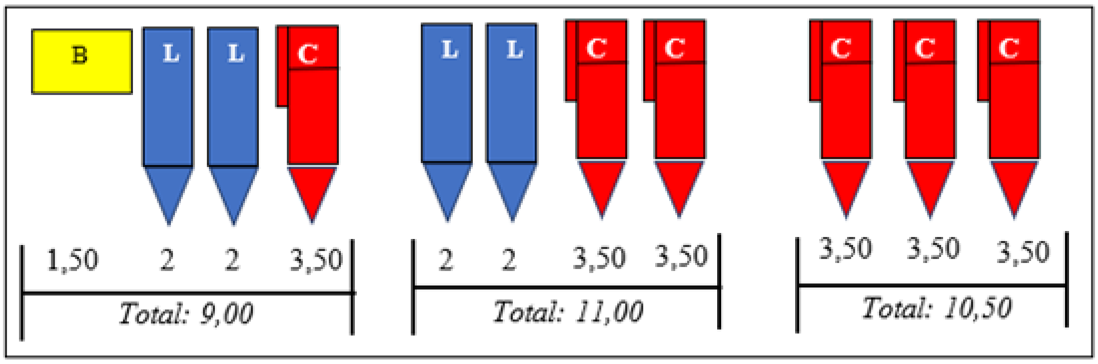


Figura 3: Estratégia de resolução por desenho da situação 2.

Fonte: Luz (2023, p. 88-89).

Quadro 2: Estratégia de resolução algébrica da situação 1.

Sendo B = borracha e L = lápis, temos do enunciado:

$$\begin{cases} B + L = 8 \\ 2B + 4L = 27{,}50 \end{cases}$$

Resolução pelo método da adição:

$$\begin{cases} B + L = 8 \\ 2B + 4L = 27{,}50 \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por -2, temos:

$$\begin{cases} -2B - 2L = -16 \\ \ \ 2B + 4L = 27{,}50 \end{cases}$$

Somando as equações (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} 2L = 11{,}50 \\ 2B + 4L = 27{,}50 \end{cases}$$

Da equação (I), temos que $L = 5{,}75$ e substituindo na equação (II) encontramos $B = 2{,}25$.

Resolução pelo método da substituição:

$$\begin{cases} B + L = 8 \\ 2B + 4L = 27{,}50 \end{cases}$$

Isolando B na equação (I), temos:

$$\begin{cases} B = 8 - L \quad \text{(I)} \\ 2B + 4L = 27{,}50 \end{cases}$$

Substituindo B na equação (II), temos:

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad & 2 \cdot (8 - L) + 4L = 27{,}50 \\ & 16 - 2L + 4L = 27{,}50 \\ & 2L = 11{,}50 \\ & L = 5{,}75 \end{aligned}$$

Substituindo na equação (I) o valor de L encontrado, temos:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & B = 8 - L \\ & B = 8 - 5{,}75 \\ & B = 2{,}25 \end{aligned}$$

Resposta: A borracha Pitágoras custa R$2,25 e o lápis Newton custa R$5,75.

Fonte: Luz (2023, p. 86-87).

A estratégia do uso de tabela para a resolução do problema pode ser vista na Tabela 4.

Tabela 4: Estratégia de resolução por tabela da situação 2.

Valores (Borracha; Lápis)	**Equação 1**	**Equação 2**	**Equação 3**
$(\mathbf{B};\mathbf{L};\mathbf{C})$	$\mathbf{B+2L+C=9}$	$\mathbf{2L+2C=11}$	$\mathbf{3C=10,50}$
$(2;2;3)$	$2+2\cdot2+3=9$	$2\cdot2+2\cdot3=10$	$3\cdot3=9$
$(2;2{,}50;3)$	$2+2\cdot2{,}50+2=9$	$2\cdot2{,}50+2\cdot2=9$	$2\cdot2=4$
$(3;1;3{,}50)$	$3+2\cdot1+3{,}50=8{,}50$	$2\cdot1+2\cdot3{,}50=9$	$3\cdot3{,}50=10{,}50$
$(1{,}50;2;3{,}50)$	$1{,}50+2\cdot2+3{,}50=9$	$2\cdot2+2\cdot3{,}50=11$	$3\cdot3{,}50=10{,}50$
Resposta: A caneta custa $R\$3{,}50$, o lápis $R\$2{,}00e$ a borracha $R\$1{,}50$.			

Fonte: Luz (2023, p. 90).

E finalmente, a estratégia algébrica escrevendo o sistema linear com três equações e três incógnitas e resolvendo ordenadamente da equação mais simples para a mais complexa é apresentada pelo Quadro 3.

De modo análogo à situação 1, o professor pode escolher qualquer umas das estratégias adotadas pelos alunos para a resolução da situação 2, sendo essa última a aplicação direta do conteúdo de sistemas lineares.

Com base na etapa 1, durante o minicurso sobre resolução de problemas, os participantes destacaram diversos aspectos positivos e reflexivos relacionados à metodologia de EnsinoAprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP), proposta por Proença (2018). Essa abordagem, estruturada em cinco ações sequenciais, foi bem recebida pela sua clareza e aplicabilidade prática no contexto educacional.

Uma das observações frequentes foi a relevância de usar o problema como ponto de partida para a introdução de conceitos matemáticos. Os professores participantes consideraram essa estratégia uma maneira eficaz de engajar os alunos, conectando o conteúdo a situações práticas e despertando maior interesse pelo aprendizado. Muitos relataram que, em suas experiências, essa abordagem facilita a compreensão dos estudantes, pois os ajuda a visualizar a utilidade dos conceitos matemáticos em diferentes contextos.

A etapa de auxílio durante a resolução do problema foi amplamente discutida, com os participantes enfatizando a importância do papel do professor como mediador. Eles observaram que esse momento é crucial para identificar dificuldades dos alunos, orientar estratégias de pensamento e promover o desenvolvimento de autonomia na resolução de problemas. Alguns participantes compartilharam estratégias que utilizam em sala de aula, como fazer perguntas que estimulem o raciocínio crítico, ao invés de oferecer soluções prontas.

No que se refere à discussão das estratégias dos alunos, os participantes valorizaram o potencial dessa etapa para promover uma aprendizagem colaborativa. Muitos mencionaram que incentivar os alunos a compartilharem suas abordagens e refletirem sobre as soluções propostas pelos colegas enriquece o processo de aprendizado e amplia a compreensão do conteúdo. Além disso, destacaram que essa prática contribui para o desenvolvimento de habilidades como comunicação e argumentação.

Já a articulação das estratégias ao conteúdo foi apontada como um ponto desafiador, especialmente para professores menos experientes. Alguns participantes comentaram que, embora reconheçam a im-

Quadro 3: Estratégia de resolução algébrica da situação 2.

Sendo B = borracha, L = lápis e C = caneta, temos do enunciado:

$$\begin{aligned} B + 2\ L + C &= 9(1) \\ 2L + 2C &= 11(2) \\ 3C &= 10{,}50(3) \end{aligned}$$

Resolvendo a equação 3, temos:

$$3C = 10{,}50$$
$$C = \frac{10{,}50}{3}$$
$$C = 3{,}50$$

Substituindo C = 3,50 na equação 2, teremos:

$$2\ L + 2C = 11$$
$$2\ L + 2 \cdot 3{,}50 = 11$$
$$2\ L + 7 = 11$$
$$2\ L = 11 - 7$$
$$2\ L = 4$$
$$L = \frac{4}{2}$$
$$L = 2$$

Substituindo $C = 3{,}50 e L = 2$ na equação 1, encontraremos:

$$B + 2\ L + C = 9$$
$$B + 2 \cdot 2 + 3{,}50 = 9$$
$$B + 4 + 3{,}50 = 9$$
$$B + 7{,}50 = 9$$
$$B = 9 - 7{,}50$$
$$B = 1{,}50$$

Portanto, na livraria B, a borracha custa R\$1,50, o lápis custa R\$2,00 e a caneta custa R\$3,50.

Fonte: Luz (2023, p. 92).

portância de conectar as soluções propostas pelos alunos ao conceito matemático formal, essa etapa requer um planejamento cuidadoso para que a transição seja clara e consistente. A sugestão foi investir em formações continuadas para que os professores possam aprimorar essa habilidade.

Por fim, o momento de escolha do problema foi amplamente elogiado. Os participantes destacaram que selecionar problemas adequados ao nível de conhecimento dos alunos e relacionados ao contexto deles é um aspecto essencial para o sucesso dessa metodologia. Alguns sugeriram o uso de problemas interdisciplinares como uma forma de enriquecer a experiência de aprendizagem e contextualizar ainda mais o ensino da Matemática.

3.2 Etapa 2 - Formação do conceito

Neste momento, após ter se introduzido o conteúdo/assunto que se quer ensinar, passase então a discutir sobre a formação do conceito, conforme mostra a Figura 4.

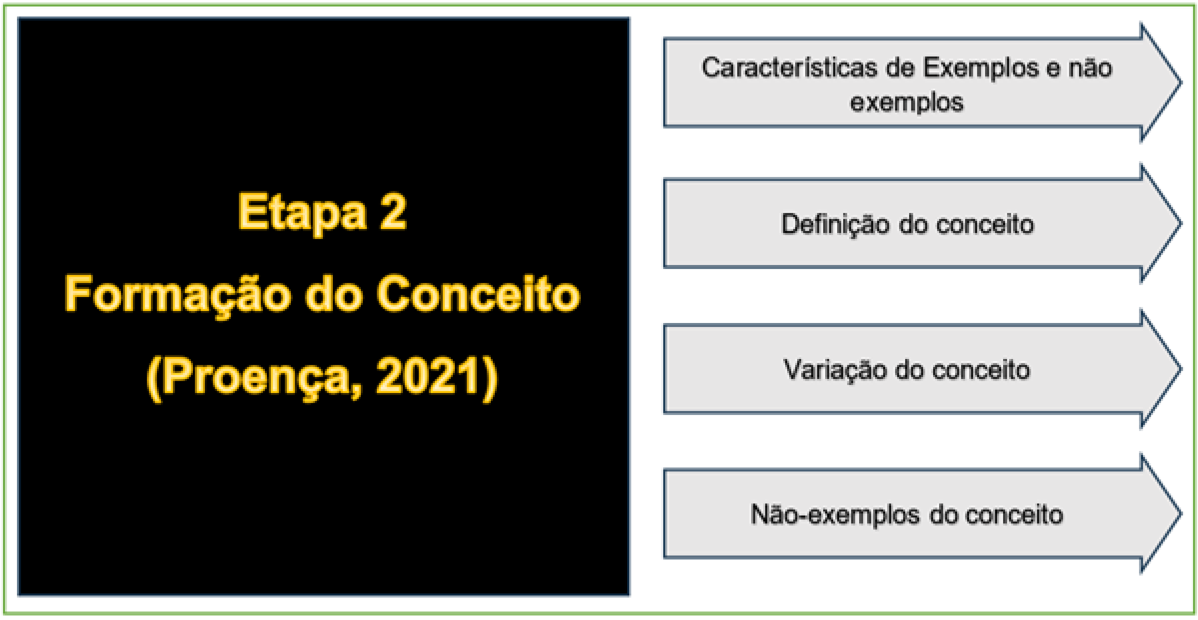


Figura 4: Características da segunda etapa de Proença (2021).

Fonte: Os autores

A respeito da etapa 2 de formação do conceito, Proença (2021, p. 9) aponta que "esta etapa consiste em [...] levar os alunos a formarem o conceito, ou seja, aprenderem e desenvolverem a compreensão sobre o conceito". Para tanto, podem ser abordadas as representações simbólicas matemáticas que constituem o conceito, de forma a diferenciar de outros conceitos matemáticos.

Para tanto, podem ser explorados exemplos e não exemplos de modo a verificar suas características. Como exemplo para o trabalho conceitual de sistemas lineares, Luz (2023) apresentou atividades para que os alunos apontassem as características de uma equação linear e, em seguida, de um sistema linear.

Pelo Quadro 4 podemos ver que com essa atividade, o aluno poderá construir o entendimento e a compreensão das características de uma equação linear e de uma equação que não é linear por meio de exemplos e não exemplos. Como características, esperamos que os alunos apontem que todas as equações lineares têm variáveis do 1° grau, que podemos usar diferentes letras do alfabeto, que as incógnitas são

Quadro 4: Atividade 1 para formação do conceito de equação linear.

Aula 5 - Conceituando Equação Linear
Equação Linear

Antes de aprendermos mais sobre sistemas lineares, faz-se necessário que você entenda o conceito importante de equações lineares. Para isso, faça a atividade a seguir:

Atividade 1:

a) No quadro 1 abaixo, observamos exemplos de equações que podemos chamar de lineares:

QUADRO 1	
I)	$x + 4y = 10$
II)	$a + 2\,b + c = \dfrac{-1}{5}$
III)	$\dfrac{m}{2} - 4n = -2{,}5$
IV)	$\sqrt{3}x - 1{,}15y + \pi z = 7$

Quais características você observa que uma equação linear **PODE** ter?

b) Agora, no quadro 2 temos equações que **NÃO SÃO** lineares:

QUADRO 2	
I)	$x \cdot y \cdot z = 8$
II)	$a^2 + 2\,b^3 + c = -9$
III)	$\dfrac{5}{t} + 10u - v^3 = 0$
IV)	$\sqrt{3}\,d^2 - 9{,}5w + \pi z = 7$

Quais características você observa que uma equação linear **NÃO PODE** ter?

Fonte: Luz (2023, p. 101).

separadas por sinais de adição ou subtração, que as equações têm o sinal de igualdade, entre outras. Para as equações não lineares, a expectativa é que os alunos apontem que as variáveis não são todas do 1° grau, se multiplicam, estão no denominador de uma fração, entre outras. Dando prosseguimento, o Quadro 5 exemplifica como os estudantes podem formar o conceito de sistemas lineares:

Quadro 5: Atividades 2 e 3 para formação do conceito de sistema linear.

Atividade 2:
Vamos retomar os sistemas de equações lineares que vimos nas aulas anteriores:

Sistema linear da Situação 1:

$$\begin{cases} b + l = 8 \\ 2b + 4l = 27{,}50 \end{cases}$$

Sistema linear da Situação 2:

$$b + 2l + c = 9$$
$$2l + 2c = 11$$
$$3c = 10{,}50$$

Responda: Quais características você observa na forma matemática de um sistema linear?

Atividade 3: Dê um exemplo:
a) De um sistema linear com duas equações e duas incógnitas.
b) De um sistema linear com três equações e três incógnitas.

Fonte: Luz (2023, p. 104).

Por meio do Quadro 5, vemos que na atividade 2, é solicitado que os alunos apontem características de um sistema linear. Nesse sentido, espera-se que os discentes apontem que são formados por equações lineares, que são agrupados por uma chave, que as incógnitas repetem-se em cada linha das equações lineares, entre outras. Já a atividade 3 solicita que se escrevam sistemas lineares mostrando o entendimento e a compreensão dos estudantes do conceito abordado.

Os participantes do minicurso fizeram observações relevantes sobre a etapa 2, destacando como as discussões propostas contribuíram para uma compreensão mais clara e fundamentada dos conceitos de equações, preparando o terreno para o entendimento dos sistemas lineares.

Uma das reflexões mais mencionadas foi a importância de esclarecer o que caracteriza uma equação, especialmente em relação à impossibilidade de multiplicação entre variáveis. Alguns participantes, especialmente estudantes de Licenciatura, confessaram não ter um entendimento claro desse aspecto antes do minicurso. Esse aprendizado foi considerado essencial, pois muitos destacaram que conceitos aparentemente simples são frequentemente negligenciados em sua formação inicial.

Houve elogios à abordagem conceitual adotada durante a etapa, que favoreceu uma interpretação mais profunda e fundamentada do conceito de equação. Os professores presentes reconheceram que essa base sólida é indispensável para a construção do conhecimento sobre sistemas lineares, destacando que as atividades propostas foram eficazes para consolidar esses fundamentos entre os participantes.

Alguns participantes também destacaram que o esclarecimento conceitual ajuda a evitar erros comuns ao lidar com equações, tanto no ensino quanto na prática matemática. Eles ressaltaram a importância de abordar essas questões de forma prática e dialogada, como foi feito no minicurso, para garantir que os alunos também possam compreender e aplicar esses conceitos de maneira significativa.

Por fim, os comentários ressaltaram o impacto positivo dessa etapa para a formação dos educadores e sua prática pedagógica futura. Muitos afirmaram que as discussões promovidas foram esclarecedoras e proporcionaram um novo olhar sobre a abordagem de conceitos básicos no ensino, incentivando práticas que priorizem a compreensão conceitual como base para a resolução de problemas.

3.3 Etapa 3 - Definição do conteúdo

A etapa 3 corresponde à definição do conteúdo, de forma que os alunos sejam inseridos na linguagem simbólica-formal. Em específico, Proença (2021, p. 9) aponta que "isso implica abordar tanto a definição do conceito matemático (entidade pública) quanto os procedimentos algorítmicos de resolução". Dessa forma, serão apresentados os conteúdos formais, classificações, definições matemáticas, teoremas, métodos resolutivos etc. Proença (2021) ainda indica que, para esse momento, o docente deve levar os estudantes a relacionar os conceitos aprendidos na etapa anterior com as linguagens matemáticas dessa etapa 3, permitindo uma melhor compreensão e entendimento do conteúdo trabalhado. A Figura 5 sintetiza as ideias propostas por Proença (2021) para essa etapa 3:

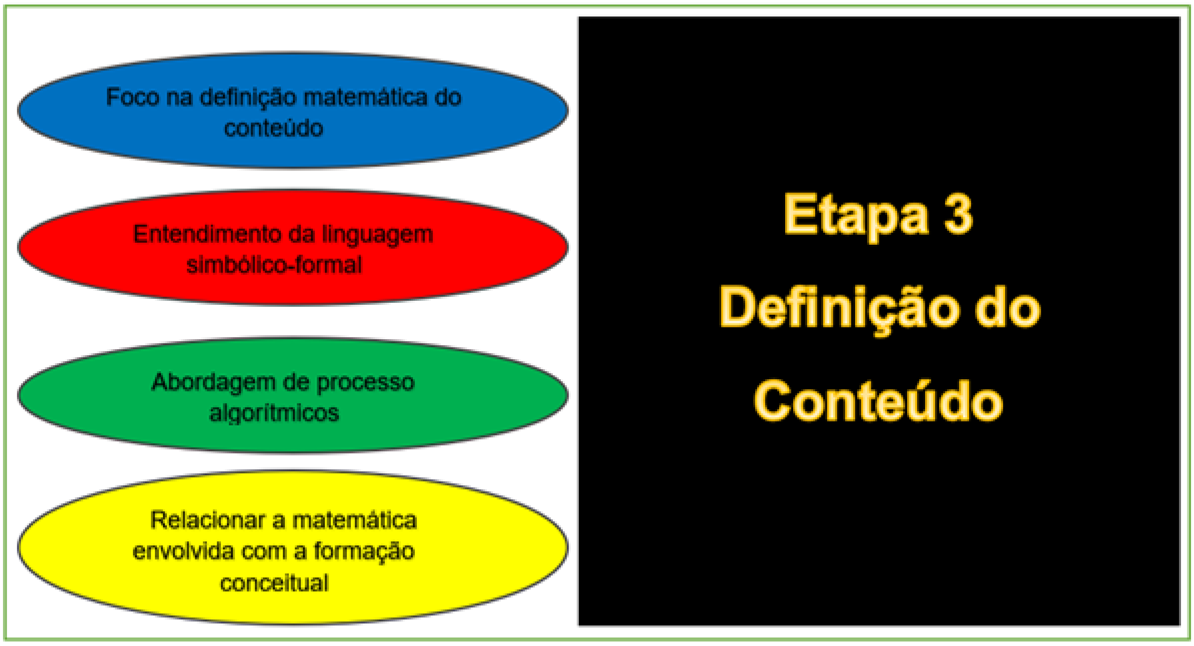


Figura 5: Etapa de definição do conteúdo.

Nesse sentido, para o conteúdo de Sistemas lineares, Luz (2023) explanou sobre as classificações e os métodos resolutivos do Teorema de Cramer e do Escalonamento para essa etapa de definição do conteúdo. O Quadro 6 mostra como o autor apresentou a classificação de sistemas lineares e a definição do Teorema de Cramer para a Resolução de Sistemas lineares 2×2:

Por meio do Quadro 6 observamos que o autor apresentou um quadro com as classificações possíveis de Sistemas lineares, em seguida apresentou a definição formal do Teorema de Cramer para um Sistema Linear do tipo 2×2 fazendo dois exemplos para sua resolução. Por fim, verificamos que o pesquisador apresentou aos estudantes a Atividade 4, de modo que resolvessem um Sistema Linear do tipo $3x3$ por meio do Teorema de Cramer aprendido.

Quadro 6: Apresentação da classificação e do Teorema de Cramer na etapa 3.

Classificação de um Sistema Linear

A tabela a seguir apresenta as classificações, abreviaturas possíveis de um sistema linear em relação a sua solução:

Classificação	Abreviatura	Solução
Sistema Possível e Determinado	SPD	Admite uma única solução
Sistema Possível e Indeterminado	SPI	Admite infinitas soluções
Sistema Impossível	SI	Não admite soluções.

Teorema de Cramer

Nesta aula você irá aprender o teorema de Cramer. Por meio deste teorema, você pode resolver sistemas possíveis e determinados (SPD) fazendo o uso de determinantes. Veja a seguir, segundo Amson, Aguiar Filho e Jamal (2012) o que diz o teorema de Cramer:

Seja o sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Sejam:

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ o determinante da matriz dos coeficientes;

$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ o determinante da matriz de substituição dos termos independentes na 1^a coluna;

$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ o determinante da matriz de substituição dos termos independentes na 2^a coluna.

O teorema de Cramer afirma que, se $D \neq 0$, então: $x = \frac{D_x}{D}$ e $y = \frac{D_y}{D}$ (AMSON; AGUIAR FILHO; JAMAL, 2012, p. 86).

Exemplos: Agora o professor irá lhe apresentar o algoritmo de resolução do Teorema de Cramer. Por meio deste teorema, resolva e classifique os sistemas lineares 2×2 a seguir:

A) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + y = 11 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 5x + y = 6 \\ -x + 2y = 12 \end{cases}$

Atividade 4: Resolva os sistemas lineares abaixo usando o Teorema de Cramer:

A) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 4x + y + 2z = 12 \end{cases}$

B) $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 3x + y = -5 \\ 2y + z = 11 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y + 2z = 9 \\ -x + 3y + z = 7 \end{cases}$

Fonte: Luz (2023, p. 112).

Dando prosseguimento com essa etapa 3, por meio do Quadro 7 vemos que Luz (2023), para trabalhar o conteúdo de Escalonamento de Sistemas, apresenta as definições de sistemas equivalentes e os Teoremas 1 e 2 dos autores (AMSON; AGUIAR FILHO; JAMAL, 2012). Em seguida, o autor apresenta a atividade 5 na qual os alunos deveriam, juntamente com o professor, escalonar e classificar os sistemas lineares com 3 equações e 3 incógnitas proposto:

Quadro 7: Apresentação do escalonamento de sistemas lineares na etapa 3.

Escalonamento de Sistemas
Antes de falarmos de escalonamento de sistemas lineares precisamos aprender o conceito matemático de sistemas equivalentes seguido de 2 teoremas importantes.

Sistemas equivalentes são aqueles que possuem a mesma solução.

Teorema 1. Multiplicando-se os membros de uma equação qualquer de um sistema S, por número $k \neq 0$, o novo sistema S ' será equivalente a S.

Teorema 2. Se substituirmos uma equação de um sistema S, pela soma membro a membro, dela com uma outra multiplicada por um número obteremos um sistema S' equivalente a S.

(AMSON; AGUIAR FILHO; JAMAL, 2012)

Atividade 5: Escalone, classifique e resolva os sistemas lineares abaixo:

A) $\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x + 5y - z = 9 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ x - 3y = 0 \\ 3x - 2y - z = 2 \end{cases}$

C) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x - y + z = 2 \\ 4x + 4y + 4z = 2 \end{cases}$

Fonte: Luz (2023, p. 114-115).

Na etapa 3, os participantes do minicurso puderam retomar as várias formas de resolver os sistemas lineares. Isso ampliou a visão das possibilidades de como trabalhar este conteúdo. Houve bastante discussão sobre como mostrar esses vários caminhos aos estudantes engradece sua aprendizagem Matemática.

Terminada a etapa 3, é o momento de os alunos usarem os conceitos/conteúdos/assuntos matemáticos aprendidos na resolução de novos problemas. No caso do nosso exemplo prático, seria o momento de os alunos usarem o que aprenderam nas etapas 2 (formação do conceito) e 3 (definição do conteúdo) para resolverem novos problemas que serão apresentados. É o que veremos na seção seguinte.

Os participantes do minicurso compartilharam reflexões interessantes sobre a etapa 3 da definição do conteúdo, destacando tanto sua importância quanto os desafios associados a essa fase da metodologia de Proença (2021).

Uma das observações recorrentes foi a relevância de introduzir os alunos na linguagem simbólica-formal de forma gradual e contextualizada. Muitos professores apontaram que essa transição, quando bem conduzida, ajuda os estudantes a consolidarem os conceitos matemáticos e a desenvolverem uma compreensão mais profunda do conteúdo. Porém, também mencionaram que essa etapa exige atenção para não sobrecarregar os alunos com formalismos excessivos que podem desmotivá-los.

Sobre a abordagem de definições, classificações e métodos resolutivos, os participantes comentaram que ela é essencial para estruturar o conhecimento matemático de forma sistemática. Alguns mencionaram que, ao trabalhar com definições formais e teoremas, é importante incentivar os alunos a relacionarem esses aspectos com as experiências práticas vivenciadas nas etapas anteriores, fortalecendo a conexão entre teoria e aplicação.

A necessidade de relacionar os conceitos aprendidos na etapa anterior com a linguagem matemática foi amplamente discutida. Muitos destacaram que essa articulação contribui para uma aprendizagem significativa, pois permite que os alunos compreendam a lógica por trás dos procedimentos algorítmicos e resolutivos. No entanto, alguns participantes relataram dificuldades em encontrar estratégias didáticas eficazes para essa transição e sugeriram o uso de exemplos concretos e atividades interativas para facilitar o processo.

Alguns professores levantaram a questão do tempo necessário para trabalhar essa etapa, indicando que, em contextos com currículos muito extensos, pode ser desafiador dedicar o tempo adequado a cada aspecto da definição formal. Houve sugestões para priorizar conteúdos-chave e trabalhar com atividades que integrem definições formais e resoluções práticas de maneira dinâmica.

Por fim, os participantes valorizaram a ideia de Proença (2021) de tratar o conteúdo formal como uma "entidade pública", envolvendo não apenas definições, mas também a aplicação prática por meio de métodos resolutivos. Eles reconheceram que essa abordagem ajuda a criar uma visão mais ampla e interconectada do aprendizado matemático, promovendo um ensino mais completo e efetivo.

3.4 Etapa 4 - Aplicação em novos problemas

A etapa 4 foca então na aplicação de novos problemas, sendo as aulas abordadas com a utilização de novas situações aos alunos. Proença (2021) destaca que essas situações devem ser contextualizadas, envolvendo a história da Matemática e outras áreas, como química, biologia, entre outros. Com ênfase, também devem ser utilizadas situações incompletas e supérfluas para que os estudantes saibam como distinguir esse processo. O professor deve ficar atento às dificuldades dos alunos nesse processo. A Figura 6 traz a síntese da proposta de Proença (2021) para essa etapa:

Nesse panorama, um exemplo de problemas a serem abordados pode ser visto no Quadro 8 a seguir, no qual Luz (2023) apresenta cinco problemas adaptados de questões de vestibulares e de Enem para a aplicação em novos problemas equivalentes ao conteúdo de sistemas lineares.

Observamos no Quadro 8 que os problemas propostos abarcam uma gama de situações do cotidiano e de diferentes áreas do conhecimento, sendo todos problemas equivalentes a sistemas lineares, os quais os estudantes podem resolver usando os conceitos e conteúdos aprendidos nas etapas anteriores da organização de ensino. Sobre esse momento, Proença (2021) observa que o professor deve estar atento para

> a) as dificuldades dos alunos no processo de resolução de problemas (representação, planejamento, execução, monitoramento); b) suas dificuldades na relação entre os contextos das situações e a identificação e representação do conceito matemático, quando

Quadro 8: Atividade 6 para aplicação em novos problemas equivalentes a sistemas lineares.

Problemas envolvendo sistemas lineares
Após aprender os conceitos e conteúdos que permeiam sistemas lineares, nesta aula vamos resolver alguns problemas de vestibulares e de Enem que envolvem este conteúdo. As alternativas das questões foram suprimidas de maneira a alcançar melhor os objetivos previstos para essa aula.

Atividade 6: Transforme os enunciados das questões a seguir em um sistema linear (naqueles que ainda não têm). Em seguida, resolva os sistemas usando o teorema de Cramer ou a técnica algébrica de escalonamento que você aprendeu nas aulas anteriores.

A) (ENEM/2015 - Adaptada) Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R$20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R$ 10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R100,00. Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?

B) (FUVEST/1992 - Adaptada)
Carlos e sua irmã Andreia foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito, que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Assim, eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

- Carlos e o cão pesam juntos 87 kg;
- Carlos e Andreia pesam 123 kg;
- Andreia e Bidu pesam 66 kg.

Determine o peso de cada um deles.

C) (UFMS/2018 - Adaptada) O sistema a seguir foi construído com base nas vendas mensais de três vendedores (A, Be e), em que os valores de x, yez são as quantidades vendidas por cada vendedor.

$$\{A : x + 2y + 3z = 14 \quad B : 2x - 3y + 2z = 2 \quad C : -2x + y - 5z = -15$$

Determine, o produto das vendas dos três vendedores.

D) (ENEM/2020-Adaptada) Em um país, as infrações de trânsito são classificadas de acordo com sua gravidade. Infrações dos tipos leves e médias acrescentam, respectivamente, 3 e 4 pontos na carteira de habilitação do infrator, além de multas a serem pagas. Um motorista cometeu 5 infrações de trânsito. Em consequência teve 17 pontos acrescentados em sua carteira de habilitação. Qual é a razão entre o número de infrações do tipo leve e o número de infrações do tipo média cometidas por esse motorista?

E) (UFRN/2001- Adaptada) Três amigos, denominados X, Y e Z, utilizam o computador todas as noites. Em relação ao tempo em horas que cada um usa o computador, por noite, sabe-se que:

- O tempo de X mais o tempo de Z excede o de Y em 2;
- O tempo de X mais o quádruplo do tempo de Z é igual a 3 mais o dobro do tempo de Y;
- O tempo de X mais 9 vezes o tempo de Z excede em 10 o tempo de Y.

Determine a soma do número de horas de utilização do computador, pelos três amigos, em cada noite.

Fonte: Luz (2023, p. 116).

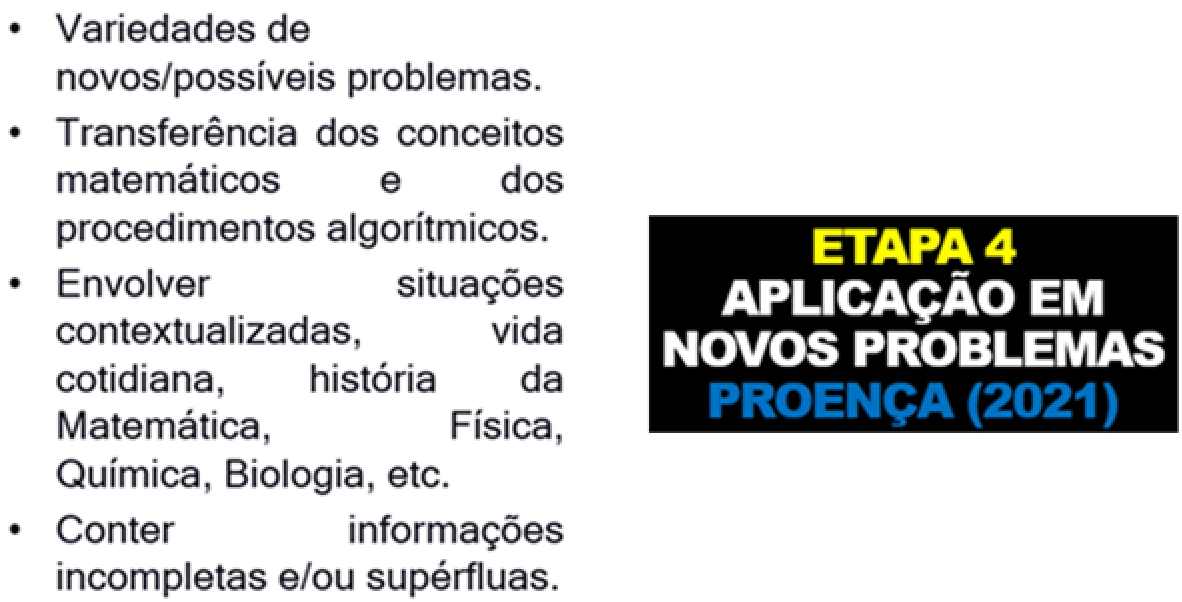


Figura 6: Etapa 4 de aplicação em novos problemas.

Fonte: Os autores.

> realizam a compreensão do problema (representação do problema). Trata-se, assim, de levar os alunos a realizar a ressignificação do conceito matemático em meio às situações contextualizadas que são trazidas para o ensino em sala de aula. (PROENÇA, 2021, p. 10-11).

Na etapa 4, os participantes do minicurso puderam ter a visão total de como formar o conceito de sistema linear para os estudantes. Vários comentaram que nunca haviam visto esta forma de trabalhar e que gostariam de colocar em prática em suas aulas. Nesse sentido, consideramos que o objetivo do minicurso foi concluído com êxito, uma vez que pudemos contribuir com "mais um tijolinho" na formação de professores que ensinam matemática.

Dessa forma, descrevemos e exemplificamos as quatro etapas propostas por Proença (2021), cuja síntese pode ser vista na Figura 7 abaixo:

Na proposta de Proença (2021) acima, vemos que a etapa 1 de Uso do Problema como Ponto de Partida abarca as cinco ações (escolha do problema, introdução do problema, auxílio aos alunos durante a resolução, discussão das estratégias dos alunos, articulação das estratégias dos alunos) de Proença (2018). A partir dessas ações é que chegamos à etapa 2 de Formação do Conceito, passando pela etapa 3 de Definição do Conteúdo e chegando até a última etapa de Aplicação em Novos Problemas.

Proença (2021) salienta que sua proposta de organização de ensino traz contribuições no sentido de promover reflexões do trabalho do professor no cotidiano da sala de aula, buscando que o aluno aprenda e ressignifique os conceitos matemáticos que aprende. Nesse sentido, Proença (2021, p. 12) infere que "esse trabalho propicia um *continuum* que envolve o ato de não apenas resolver problemas para aprender Matemática, mas ainda o ato de aprender a resolver problemas".

Conforme explorado na seção de revisão da literatura, foram observadas algumas dificuldades no ensino de sistemas lineares, a saber: a ênfase excessiva em procedimentos, a falta da compreensão conceitual, a aplicação prática dos conceitos algébricos, a desconexão entre os conceitos abstratos e a

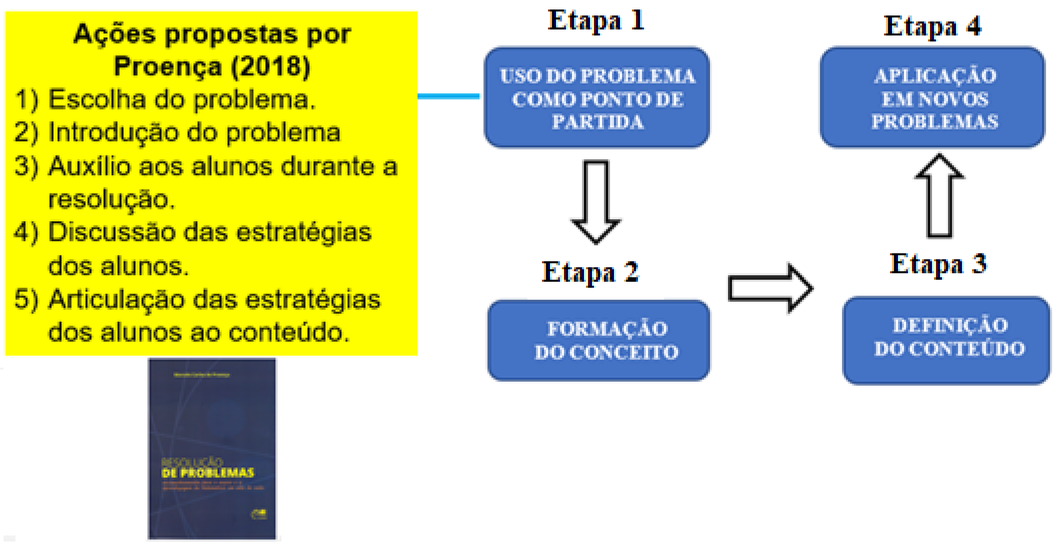


Figura 7: Proposta de organização de ensino de Proença (2021).

Fonte: Os autores.

realidade dos alunos, a interpretação de problemas, a resolução de equações e o tratamento aritmético dos sistemas lineares. Dessa forma, como explorado neste *e-book*, compreendemos que o trabalho com as 4 etapas de Proença (2021) visa minimizar tais dificuldades, uma vez que começa a partir de conhecimentos prévios dos alunos e vai até a formação do conceito, o que diminui a ênfase em procedimentos.

Outrossim, no problema trabalhado, verificamos a relação com a realidade, uma vez que é uma situação cotidiana. Os estudantes também puderam praticar quando resolver problemas de vestibular na 4ª etapa, o que favorece, também a interpretação dos problemas e aplicação mais avançada dos conceitos de sistema linear. À vista disso, esta abordagem de ensino tem se saído profícua na formação de conceitos matemáticos.

Os participantes do minicurso fizeram observações relevantes sobre a etapa 2, destacando como as discussões propostas contribuíram para uma compreensão mais clara e fundamentada dos conceitos de equações, preparando o terreno para o entendimento dos sistemas lineares.

Uma das reflexões mais mencionadas foi a importância de esclarecer o que caracteriza uma equação, especialmente em relação à impossibilidade de multiplicação entre variáveis. Alguns participantes, especialmente estudantes de Licenciatura, confessaram não ter um entendimento claro desse aspecto antes do minicurso. Esse aprendizado foi considerado essencial, pois muitos destacaram que conceitos aparentemente simples são frequentemente negligenciados em sua formação inicial.

Houve elogios à abordagem conceitual adotada durante a etapa, que favoreceu uma interpretação mais profunda e fundamentada do conceito de equação. Os professores presentes reconheceram que essa base sólida é indispensável para a construção do conhecimento sobre sistemas lineares, destacando que as atividades propostas foram eficazes para consolidar esses fundamentos entre os participantes.

Alguns participantes também destacaram que o esclarecimento conceitual ajuda a evitar erros comuns ao lidar com equações, tanto no ensino quanto na prática matemática. Eles ressaltaram a importância de abordar essas questões de forma prática e dialogada, como foi feito no minicurso, para garantir que os alunos também possam compreender e aplicar esses conceitos de maneira significativa.

Por fim, os comentários ressaltaram o impacto positivo dessa etapa para a formação dos educadores e sua prática pedagógica futura. Muitos afirmaram que as discussões promovidas foram esclarecedoras e proporcionaram um novo olhar sobre a abordagem de conceitos básicos no ensino, incentivando práticas que priorizem a compreensão conceitual como base para a resolução de problemas.

4

Considerações finais

O ensino de conceitos matemáticos é uma dimensão fundamental na formação dos alunos, pois possibilita a compreensão e aplicação da Matemática em diversos contextos, incluindo situações do cotidiano. Contudo, muitos professores enfrentam dificuldades ao buscar alternativas ao modelo tradicional de ensino, caracterizado pela repetição mecânica de definições, exemplos e exercícios.

A abordagem discutida neste trabalho, amplamente debatida na literatura desde 2021 e respaldada por resultados significativos em estudos recentes, oferece uma perspectiva diferenciada em relação ao ensino tradicional. Nesse sentido, este estudo propõe práticas inovadoras que incluem atividades ilustrativas, discussões teóricas e a resolução de problemas, incentivando os participantes a assumir um papel ativo, simulando as dinâmicas de sala de aula. O objetivo principal foi proporcionar uma compreensão prática do ensino por meio da resolução de problemas, promovendo reflexões fundamentadas sobre os princípios que sustentam essa metodologia.

De uma perspectiva crítica, reconhecemos que o desenvolvimento das quatro etapas propostas por Proença (2021) pode demandar mais tempo em comparação às práticas tradicionais. No entanto, argumentamos que esse tempo adicional deve ser compreendido como um investimento na qualidade do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Quando os estudantes compreendem efetivamente os conceitos matemáticos, tornam-se mais capazes de aplicar esses conhecimentos em diferentes contextos, incluindo a resolução de problemas reais de sua vivência cotidiana. Essa abordagem atende ao propósito da Educação Básica, que é formar cidadãos aptos a utilizar o conhecimento como ferramenta para transformar o mundo.

A utilização da resolução de problemas no minicurso proporciona uma abordagem pedagógica ativa, permitindo que os participantes não apenas adquiram conhecimento, mas também desenvolvam habilidades de pensamento crítico. Ao resolver problemas de forma prática, os alunos são levados a refletir sobre os conceitos, testar hipóteses e buscar soluções de maneira autônoma. Isso fomenta uma compreensão mais profunda da Matemática, promovendo a habilidade de aplicar os conhecimentos em situações do cotidiano, além de estimular a criatividade na resolução de desafios complexos.

O minicurso foi eficaz ao conectar teoria e prática, pois não se limitou a apresentar conceitos abstratos, mas os contextualizou por meio da resolução de problemas concretos. Isso possibilita que os participantes percebam a aplicabilidade dos conceitos matemáticos no mundo real e, assim, tornem-se mais motivados e engajados com a disciplina. Além disso, ao trabalhar com problemas práticos, os participantes conseguem vivenciar o processo de ensinoaprendizagem de forma mais eficaz, facilitando a internalização de conceitos matemáticos complexos.

O minicurso também se destacou pelo seu foco na capacitação pedagógica, oferecendo aos participantes estratégias para implementar a resolução de problemas em suas próprias práticas docentes. A abordagem proposta no curso permite que os educadores adotem práticas mais dinâmicas e significativas em sala de aula, atendendo às necessidades dos alunos de forma mais eficaz. Essa formação proporciona aos professores ferramentas valiosas para promover um ensino mais interativo e envolvente, potencializando o aprendizado dos alunos e tornando a Matemática mais acessível e interessante.

Esperamos que este *e-book* contribua para um novo olhar sobre o ensino de Matemática, especialmente por meio da resolução de problemas. Almejamos que ele favoreça a formação de professores, licenciandos e outros interessados na área, capacitando-os a implementar práticas pedagógicas mais significativas e eficazes em suas salas de aula. Acreditamos que, ao promover um ensino mais relevante e contextualizado para os alunos, será possível contribuir para um aprendizado matemático mais efetivo, bem como para o desenvolvimento de habilidades duradouras e aplicáveis.

Referências Bibliográficas

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. R. *et al.* (Ed.). *Resolução de Problemas: teoria e prática*. 2. ed. [S.l.]: Paco, 2021. p. 40–62. 4, 5

AMSON, G. A. J.; AGUIAR FILHO, R. B.; JAMAL, R. M. *Matemática 2a Série*. [S.l.]: Anglo, 2012. 23, 24

BATTAGLIOLI, C. S. M. *Sistemas lineares na segunda série do EM: um olhar sobre os livros digitais didáticos*. Dissertação de Mestrado, 2008. 7

BECHER, E. L. *Características do pensamento algébrico de estudantes do 1º ano do Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado, 2009. 5, 6

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. Exploração de padrões e pensamento algébrico. In: *Patterns: multiple perspectives and contexts in mathematics education (Projeto Padrões)*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 59–68. 6

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC): educação é a base*. [S.l.]: MEC, 2018. 6

CAMPOS, M. A. *Uma sequência didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano do ensino fundamental*. Tese de Doutorado, 2019. 6

CAMPOS, M. A.; FARIAS, L. M. S. A educação matemática e o ensino de álgebra na perspectiva de desenvolvimento do pensamento algébrico. *Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo entre as ciências*, v. 9, n. 1, p. 167–188, 2020. 6

CHINNAPPAN, M. Relational knowledge and successful problem solving in algebra. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, v. 27, n. 2, p. 112–134, 2004. 6

DELAZERI, G. R. *A competência de resolução de problemas que envolvem o pensamento algébrico: um experimento no 9º ano do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado, 2017. 7

DEWI, I. L. K. *et al.* Identification of mathematics prospective teachers' conceptual understanding in determining solutions of linear equation systems. *European Journal of Educational Research*, v. 10, n. 3, p. 1157–1170, 2021. 8

ESTEVãO, E. J. O.; GONçALVES, T. M. N. Uma proposta de atividades para minimizar as dificuldades na aprendizagem de álgebra. *Brazilian Journal of Development*, v. 7, n. 1, p. 10849–10863, 2021. 5

FERNANDES, A. dos S. *Resolução de problemas olímpicos envolvendo análise combinatória e probabilidade através da Metodologia de Polya*. Dissertação (Mestrado), 2021. 223f. 6

FERREIRA, A. E. G. *A importância dos sistemas lineares no EM e a contribuição para a matemática e suas aplicações*. Dissertação de Mestrado, 2013. 7

JORDãO, A. L. I. *Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no 2º ano do ensino médio*. Dissertação de Mestrado, 2011. 7

LIU, Q. *et al. The role of memorization in students' self-reported mathematics learning: a large-scale study of Chinese eighth-grade students*. [S.l.: s.n.], 2019. v. 20. 361–374 p. 2

LUZ, J. A. *Contribuições de uma proposta de ensino por meio da resolução de problemas para a aprendizagem de sistemas lineares no ensino médio*. Tese de Doutorado, 2023. x, 2, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

MORAIS, A. M. L. *A exploração de sequências e regularidades como suporte para o desenvolvimento do pensamento algébrico*. Tese (Tese (Doutorado em Educação)), Lisboa, 2012. 235f. 6

NEGROMONTE, M. A. O. *et al.* Construção do pensamento algébrico no ensino fundamental: dificuldades. *Brazilian Journal of Development*, v. 5, n. 10, p. 20597–20610, 2019. 7

OCDE. *PISA 2022 technical report*. 2022. 2

OKTAç, A. Conceptions about system of linear equations and solution. In: *Challenges and strategies in teaching linear algebra*. [S.l.: s.n.], 2018. p. 71–101. 8

OLIVEIRA, M. S. Uma reflexão sobre a ideia de superação do ensino tradicional na educação matemática: a dicotomia entre a abordagem clássica e abordagens inovadoras em foco. *Revista BOEM*, v. 7, n. 14, p. 79–93, 2019. 2

PASSOLUNGHI, M. C.; CARGNELUTTI, E.; PELLIZZONI, S. The relation between cognitive and emotional factors and arithmetic problem-solving. *Educational Studies in Mathematics*, v. 100, p. 271–290, 2019. 2

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo enfoque do método matemático*. [S.l.]: Interciência, 1995. 4

POSAMENTIER, A. S.; KRULIK, S. *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions, grades 6-12: a resource for the mathematics teacher*. [S.l.]: Corwin Press, 2009. 4

PROENÇA, M. C. *Resolução de problemas: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de matemática em sala de aula*. 1. ed. [S.l.]: EdUEM, 2018. 2, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 27

PROENÇA, M. C. Resolução de problemas: uma proposta de organização do ensino para a aprendizagem de conceitos matemáticos. *Revista de Educação Matemática*, v. 18, p. e021008–e021008, 2021. vi, x, 2, 5, 10, 19, 22, 24, 25, 27, 28, 31

RITTLE-JOHNSON, B.; SIEGLER, R. S. The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In: *The development of mathematical skills*. [S.l.: s.n.], 2022. p. 75–110. 2

SCHOENFELD, A. H. *Mathematical problem solving*. [S.l.]: Academic Press, 1985. 10

SCHROEDER, T. L.; LESTER JUNIOR, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). *New directions for elementary school mathematics*. [S.l.]: NCTM, 1989. 4

SERRAZINA, M. L. O professor que ensina matemática e a sua formação: uma experiência em portugal. *Educação & Realidade*, v. 39, p. 1051–1069, 2014. 2

TöMAN, U.; GöKBURUN, What was and is algebraic thinking skills at different education levels? *World Journal of Education*, v. 12, n. 4, p. 8–20, 2022. 6

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Realização e Organização

ANPMat

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

Distribuição

Editora ANPMat