



**6º Simpósio Nacional da
Formação do Professor
de Matemática**

DO DIGITAL AO FÍSICO

conceitos geométricos e impressão 3D

Carmen Vieira Mathias
Andressa Paula Wrzesinski
Quendra Silva Cartier Larangeira
Luísi Emanuely Silveira do Nascimento
Fernando Mariano Bayer



ANPMat
Associação Nacional dos Professores
de Matemática na Educação Básica

DO DIGITAL AO FÍSICO

conceitos geométricos e impressão 3D

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

Presidente:

Marcela Luciano Vilela de Souza

Vice-Presidente:

Sérgio Augusto Amaral Lopes

Diretores:

Ana Luiza de Freitas Kessler

Raquel Bodart

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Sumaia Almeida Ramos

6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Comissão Organizadora:

Ana Luiza de Freitas Kessler

Marcela Luciano Vilela de Souza

Carmen Vieira Mathias

Renata Magarinus

Edson Sidney Figueiredo

Sumaia Almeida Ramos

Karine Faverzani Magnago

Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum

Lidiane Buligon

Comitê Científico:

Ana Luiza de Freitas Kessler

Janice Rachelli

Carmen Vieira Mathias

Marcela Luciano Vilela de Souza

Claudia Candida Pansonato

Renata Magarinus

Comitê Editorial:

Ana Luiza de Freitas Kessler

Marcela Luciano Vilela de Souza

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Mateus Gianni Fonseca

Fábio Simas

Raquel Bodart

Jaqueline Molon

Sérgio Augusto Amaral Lopes

Leonardo Barichello

Sumaia Almeida Ramos

Letícia Rangel

Vitor Amorim



**6º Simpósio Nacional da
Formação do Professor
de Matemática**

DO DIGITAL AO FÍSICO

conceitos geométricos e impressão 3D

Carmen Vieira Mathias

Andressa Paula Wrzesinski

Quendra Silva Cartier Larangeira

Luísi Emanuely Silveira do Nascimento

Fernando Mariano Bayer

1ª edição

2026

Rio de Janeiro

Do digital ao físico: conceitos geométricos e impressão 3D

Copyright © 2026, Carmen Vieira Mathias, Andressa Paula Wrzesinski, Quendra Silva Cartier Larangeira, Luísi Emanuelly Silveira do Nascimento, Fernando Mariano Bayer

Direitos reservados pela Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica. A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Projeto gráfico: Gabriel Brasil Nepomuceno

Produção editorial: Editora Pi

www.editorapi.com.br | contato@editorapi.com.br | +55 21 97577-9947

Distribuição: Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

www.anpmat.org.br | editoraanpmat@anpmat.org.br

ISBN: 978-65-88013-40-3

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Do digital ao físico [livro eletrônico] :
conceitos geométricos e impressão 3D / Carmen
Vieira Mathias...[et al.]. -- 1. ed. -- Rio
de Janeiro : ANPMat, 2026. -- (Simpósio Nacional
da Formação do Professor de Matemática)
PDF

Outros autores: Andressa Paula Wrzesinski,
Quendra Silva Cartier Larangeira, Luísi Emanuelly
Silveira do Nascimento, Fernando Mariano Bayer.
Bibliografia.
ISBN 978-65-88013-40-3

1. Geometria 2. Impressão 3D 3. Matemática -
Estudo e ensino I. Mathias, Carmen Vieira.
II. Wrzesinski, Andressa Paula. III. Larangeira,
Quendra Silva Cartier. IV. Nascimento, Luísi
Emanuelly Silveira do. V. Bayer, Fernando Mariano.
VI. Título. VII. Série.

26-376365.0

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Sobre os autores





Carmen Vieira Mathias

carmen@ufsm.br

Licenciada em Matemática pela UFSM, realizou os cursos de mestrado e doutorado em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul e estágio de pós-doutorado com ênfase em ensino de Matemática na UFN. Atualmente, é professora titular do Departamento de Matemática na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), coordenadora substituta do ProfMat - Nacional e coordenadora dos cursos de Matemática na UFSM. Quanto à pesquisa, tem interesse na realização de investigações sobre o uso de tecnologias digitais e sua importância no processo de visualização de entes geométricos.

Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), atualmente cursa pós-graduação em Inteligência Artificial Aplicada à Educação no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia. É professora de Matemática na rede municipal de ensino de Erebangó (RS). Seus interesses acadêmicos e de pesquisa concentram-se na área de Educação Matemática, especialmente no uso de tecnologias digitais e da inteligência artificial.



**Andressa Paula
Wrzesinski**

andressa.wrzesinski@outlook.com



**Quendra Silva Cartier
Larangeira**

quendrascl@gmail.com

Licenciada em Matemática pela UFSM e mestranda em Educação em Ciências pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências (PPGECI) na mesma instituição. Atualmente, atua como professora na rede municipal de ensino de Restinga Sêca (RS). Seus interesses de pesquisa concentram-se nas áreas de Ensino de Matemática, Educação Matemática e Educação STEM, com foco especial na utilização de materiais concretos e atividades práticas na sala de aula de Matemática.

Acadêmica do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), e licenciada em Matemática pela mesma instituição. Atua como professora da Educação Básica em Santa Maria (RS) e desenvolve pesquisas na área de Ensino, com foco na Análise de Erros aplicada a estudantes do Ensino Médio.



**Luísi Emanuelyly Silveira
do Nascimento**

luisiemanuelyly@gmail.com



Fernando Mariano Bayer

bayer.ctism@gmail.com

Possui graduação em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal de Santa Maria (2000), mestrado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2004) e doutorado em Engenharia Agrícola pela Universidade Federal de Santa Maria (2019). Atualmente, é professor associado da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Tem experiência na área de Engenharia Mecânica, com ênfase em projeto e controle de sistemas de produção, atuando principalmente nos seguintes temas: robótica, automação industrial e manufatura.

Prefácio



As atividades pedagógicas que compõem o ensino e a aprendizagem no ensino básico, de modo geral, visam desenvolver nos alunos uma compreensão mais profunda do ambiente em que vivem. Existem várias oportunidades para os estudantes identificarem padrões e conexões matemáticas em situações do cotidiano, e algumas dessas podem ser simuladas em sala de aula por meio das tecnologias educacionais disponíveis. Essas tecnologias são capazes de proporcionar novas abordagens para o desenvolvimento de atividades no ambiente educacional. Nesse sentido, professores e alunos podem utilizar a impressão 3D para projetar artefatos geométricos tridimensionais.

Dessa forma, o grupo de pesquisa Modelagem Matemática e Impressão 3D (M^23D), por meio de projetos interdisciplinares realizados no âmbito da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), vem produzindo materiais didáticos com auxílio de ferramentas de modelagem 3D, com o intuito de possibilitar a exploração de conceitos matemáticos no Ensino Básico.

Assim, o presente material é o resultado do minicurso “Do digital ao físico: conceitos geométricos e impressão 3D” ministrado no 6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática, em 2023, na Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO). Neste material, será delineado o processo de construção de modelos e materiais impressos em 3D, pensando nas possibilidades de emprego destes materiais por professores de Matemática, em diferentes níveis de escolaridade. Espera-se que o presente *e-book* seja um pequeno guia para professores que atuam na Educação Básica, que possuem ou podem fazer uso de uma impressora 3D e não dispõem de instruções de como realizar o uso da referida tecnologia.

Rio de Janeiro, setembro de 2023

Carmen Vieira Mathias

Andressa Paula Wrzesinski

Quendra Silva Cartier Lorangeira

Luísi Emanuely Silveira do Nascimento

Fernando Mariano Bayer

Sumário



Sobre os autores	ii
1 Introdução	1
2 Processo de Impressão	3
3 Construindo Peças no GeoGebra para Impressão 3D	6
3.1 Sólidos Geométricos	7
3.1.1 Prisma Regular	7
3.1.2 Pirâmide	11
3.2 Corpos Redondos	15
3.2.1 Cone	15
3.2.2 Cilindro	16
3.2.3 Esfera	18
3.3 Poliedros Regulares	21
3.3.1 Tetraedro	21
3.3.2 Cubo	23
3.3.3 Octaedro	25
3.3.4 Dodecaedro	27
3.3.5 Icosaedro	27
3.4 Tetraedro dividido em dois sólidos congruentes	30
3.5 Prisma de base triangular dividido em três pirâmides	35
4 Repositório	44
4.1 Thingiverse	45
5 Considerações finais	48
Referências	52

Lista de Figuras



1	Etapas dos processos de impressão.	4
2	Primeiros passos para a construção do prisma.	8
3	Construção de um polígono.	8
4	Determinado a altura do prisma.	9
5	Construção do Prisma.	9
6	Finalizando o Prisma.	10
7	Baixar em arquivo <i>.stl</i>	10
8	Configurações de download.	11
9	Construção do polígono da base da pirâmide.	11
10	Construção da altura da pirâmide.	12
11	Construção da pirâmide.	12
12	Finalização da pirâmide.	13
13	Configurações do software Cura.	14
14	Fatiamento.	14
15	Pré-visualização.	14
16	Comparativo entre o Prisma construído e impresso.	15
17	Ferramenta “Cone”.	15
18	Construção do cone.	16
19	Ocultar pontos, plano e eixos.	16
20	Janela de visualização 3D.	17
21	Ferramenta “Cilindro”.	17
22	Construção do cilindro.	17
23	Comparativo entre o Cilindro construído e impresso.	18
24	Tamanho do objeto.	19
25	Construção da semi esfera	19
26	Duplicação da semiesfera e posicionamento.	20
27	Semiesferas prontas para a impressão.	20
28	Construção do tetraedro.	21
29	Tetraedro finalizado.	22
30	Baixando o arquivo do tetraedro.	22
31	Ajustes de download.	23
32	Construção do cubo.	23
33	Cubo finalizado.	24
34	Como realizar o download do cubo.	24
35	Configurações de download do cubo.	25
36	Construção do triângulo equilátero.	25
37	Construção do Octaedro.	26
38	Octaedro finalizado.	26
39	Construção do pentágono.	27
40	Construção do dodecaedro.	28
41	Dodecaedro finalizado.	28
42	Construção do triângulo equilátero.	29

43	Construção do icosaedro.	29
44	Comparativo entre o icosaedro construído no GeoGebra e impresso.	30
45	Tetraedro.	30
46	Configurações do tetraedro.	31
47	Alteração da transparência do tetraedro.	31
48	Construção dos pontos médios.	32
49	Plano por três pontos.	32
50	Intersecção entre o plano e o tetraedro.	33
51	Ocultar o plano p	33
52	Posicionamento correto do tetraedro.	34
53	Construção dos polígonos das faces	34
54	Ocultar o tetraedro	35
55	Sólido impresso.	35
56	Construção do polígono base do prisma.	36
57	Construção do prisma.	36
58	Construção das pirâmides.	37
59	Controle deslizante relacionado às pirâmides.	37
60	Criação dos segmentos i e j	38
61	Criação dos pontos H , I e J	38
62	Vincular objeto ao vetor.	39
63	Ocultar pontos e demais informações.	39
64	Pirâmides transladadas.	40
65	Posicionamento das peças.	40
66	Abrir arquivos no Cura 3D.	41
67	Ajuste das peças.	41
68	Visualização das peças.	42
69	Processo de fatiamento.	42
70	Fatiamento.	43
71	Prisma fatiado em 3 pirâmides.	43
72	Interface do Thingiverse.	45
73	Processo de busca no Thingiverse.	46
74	Aba Math, disponível no Thingiverse.	46
75	Exemplos de materiais educacionais da área de Matemática.	47

Introdução



Desde o início do século XXI, observa-se que a tecnologia de impressão 3D tem evoluído e se tornado financeiramente acessível. No mercado, existem impressoras 3D com um bom custo-benefício, colocando-as ao alcance de pessoas interessadas por essa tecnologia e permitindo sua inclusão em espaços escolares. Segundo Gibson *et al.* (2021), esse fato decorre do aumento do uso da impressão 3D e de sua constante evolução, tornando-se cada vez mais acessível e abrangente.

Ademais, essa tecnologia de impressão também é conhecida como Tecnologia de Manufatura Aditiva (TMA) e possui diversas aplicações em várias áreas do conhecimento. É notável sua presença na área de cuidados médicos, nas indústrias aeronáutica e automotiva, na prototipagem de robôs, na arquitetura, na educação e na indústria alimentícia (Shahrubudin; Lee; Ramlan, 2019). A TMA envolve uma série de etapas que vão desde a criação da peça em *softwares* do tipo CAD (*Computer Aided Design*), passando pelo fatiamento em um *software* específico e, finalmente, a impressão da peça física resultante.

O uso da referida tecnologia está crescendo significativamente em diversos setores, como construção, medicina, preservação cultural, design artístico e educação. Pesquisas como Ulbrich *et al.* (2023) afirmam que a impressão 3D é uma ferramenta que pode facilitar o aprendizado, aprimorar habilidades e aumentar o engajamento dos alunos. Isso é especialmente relevante para áreas como a Matemática em que a impressão 3D pode fornecer recursos tangíveis e, combinada com todo o processo de design do modelo, incluindo a modelagem em 3D, pode promover uma compreensão mais profunda e eficaz por parte dos estudantes (Novak; Wisdom, 2018).

Em uma revisão sistemática de literatura realizada em Novak, Brannon *et al.* (2021), foram identificadas 78 publicações sobre o uso de tecnologias de impressão 3D nos processos de ensino e aprendizagem em diversas áreas do conhecimento. As conclusões sugerem que a impressão 3D tem um impacto positivo na aprendizagem dos alunos, engajando-os na resolução de problemas reais e oferecendo potencial para a pesquisa interdisciplinar. Herrera, Pérez e Ordóñez (2019) observaram que o uso de ferramentas 3D, assim como realidade aumentada e ambientes virtuais, têm um efeito positivo no desenvolvimento das habilidades matemáticas espaciais. Ou seja, a integração da fabricação digital, incluindo a impressão 3D, em ambientes escolares enriquece a experiência de aprendizado ao conectar itens concretos a conceitos abstratos.

Dessa forma, pensando nos professores de Matemática e acadêmicos discentes de cursos de Matemática que atuam ou atuarão em diferentes níveis de escolaridade, este trabalho traz propostas de construções que poderão ser impressas em 3D e são passíveis de serem utilizadas em uma sala de aula de Matemática. Também, é delineado o processo de construção dos modelos, utilizando o *software* GeoGebra, pensando nas possibilidades de emprego destes materiais por professores de Matemática em salas de aula da Educação Básica. A escolha pelo referido *software* se deu por ser um aplicativo gratuito, de fácil acesso e manipulação simples, permitindo que sejam construídos artefatos geométricos de forma descomplicada.

A seguir, o Capítulo 2 abordará alguns aspectos do processo de impressão. No Capítulo 3, serão apresentados os protocolos para a construção e impressão de alguns sólidos. O Capítulo 4 discutirá repositórios onde é possível encontrar materiais para impressão, e o último capítulo trará as conclusões.

Processo de Impressão



Conforme Gibson *et al.* (2021) a TMA envolve uma série de etapas que vão desde a criação da peça em alguns *softwares* até a peça física resultante. O grau de complexidade envolvido na fabricação depende do tipo de artefato que se deseja. Mas, em geral, os processos de TMA envolvem sete etapas, conforme ilustra a Figura 1.

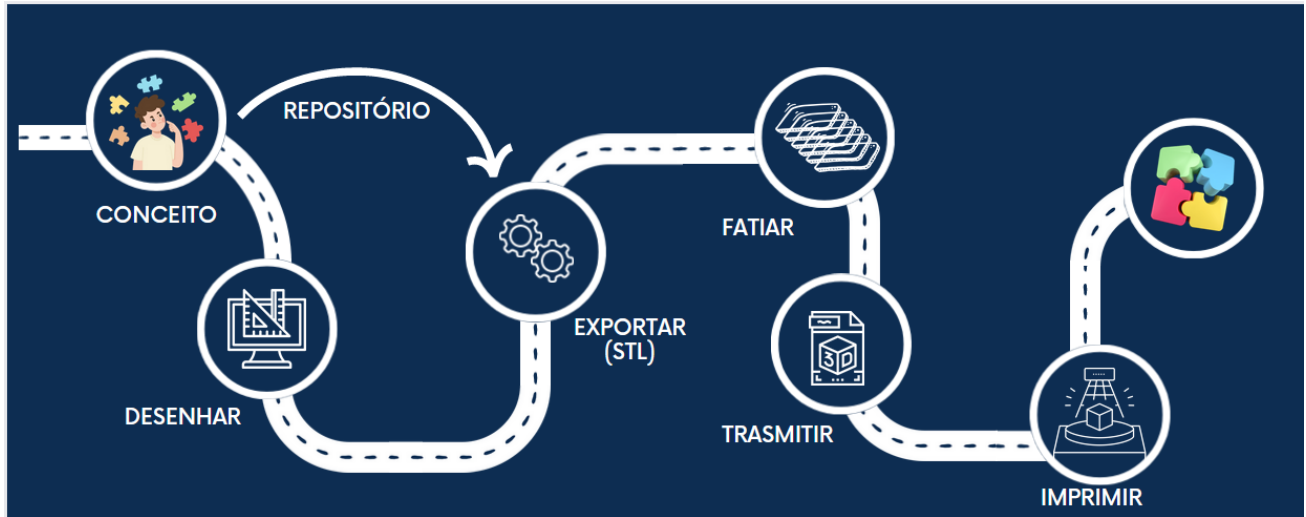


Figura 1: Etapas dos processos de impressão.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

A primeira etapa diz respeito ao desenho do objeto, ou seja, é necessário possuir ou projetar uma versão virtual do artefato que se pretende imprimir. Observa-se que o modelo pode ser proveniente de algum repositório,¹ ou então ser gerado em *softwares*, ou aplicativos de modelagem 3D, como o *SolidWorks* ou *Tinkercad*, por exemplo. Após a construção ou escolha do modelo, esse deve ser exportado para o formato *.stl*,² o qual descreve apenas a geometria da superfície do objeto, não incluindo outras propriedades. Porém, os dados que constam nesse arquivo, permitem a comunicação entre o programa de modelagem 3D e a impressora 3D (Fischer; Lee; Sullivan, 2020).

Para que outras propriedades, como quantidade de material e tempo de impressão sejam informadas, deve-se abrir o arquivo *.stl* em um *software* fatiador (*slicer*). A função do *slicer* é converter o arquivo *.stl* para a linguagem da impressora (*G-code* ou código G) e fatiar o modelo em camadas. O arquivo *G-code* é responsável por dividir o arquivo 3D em uma sequência de seções transversais 2D e a impressora fará a impressão dessas camadas para criar o produto 3D. Segundo Gibson *et al.* (2021) essa etapa é fundamental, pois nela são definidas as propriedades a respeito da impressão.

Na sequência, deve-se transferir o arquivo para a máquina. Existem diferentes formas de realizar esse processo, como transmissão *Wifi*, *Bluetooth* ou diretamente através da porta USB, sendo a mais comum pelo uso de cartões de memória. A próxima fase do processo diz respeito à impressão da peça propriamente dita. Após transferir o arquivo para a máquina, a impressora inicia a preparação para a

¹ Repositório é um espaço designado para o armazenamento de arquivos destinados à impressão 3D.

² A sigla “**STL**” significa *Standard Tessellation Language*, ou estereolitografia. Arquivos com essa extensão são considerados o padrão para impressão 3D, pois são compatíveis com a maioria das impressoras 3D e *softwares* do tipo CAD.

impressão da peça através do aquecimento do material a ser utilizado e do aquecimento da máquina (bico de extrusão e mesa de impressão).

Na quinta etapa, ocorre a impressão propriamente dita, e neste momento, a única demanda é um monitoramento do processo para evitar possíveis erros. A sexta e sétima etapas estão relacionadas, respectivamente, com a remoção da peça da mesa de impressão e com a limpeza dessa, pois algumas construções demandam suportes durante a impressão, e nesse caso, é preciso que se faça a remoção dos mesmos.

Construindo Peças no GeoGebra para Impressão 3D



No minicurso foi abordado como construir peças para impressão 3D utilizando o *software* de Matemática dinâmica GeoGebra, em sua versão *online*. Com ele, é possível produzir sólidos geométricos, os quais podem ser utilizados em salas de aula de Matemática, bem como, montar diferentes figuras exemplificando propriedades geométricas. Com isso, o minicurso foi estruturado em duas partes, focando, primeiramente, nos sólidos geométricos (prismas, pirâmides e corpos redondos) e, posteriormente, na construção de um tetraedro e sua decomposição em outros dois sólidos e de um prisma de base triangular formado por três pirâmides.

Entre um processo de construção dos sólidos, foi apresentada e implementada a etapa de fatiamento, sendo realizada no *software* específico. Nesse caso, utilizou-se o *software Ultimaker Cura*¹ (ou Cura 3D) que é um *software* de fatiamento, usado para converter modelos 3D em instruções específicas para a impressora (arquivos do tipo G-code). Ele foi escolhido por possuir uma interface simples e amigável, o que facilita o processo de configuração das impressões. Além disso é um *software open-source*, gratuito e possui versão em língua portuguesa.

3.1 Sólidos Geométricos

A escolha pela construção dos sólidos geométricos, aqui especificados como prismas, pirâmides, corpos redondos e poliedros regulares, no GeoGebra, se deu em função de muitos professores conhecerem o *software*, mas não trabalharem com a funcionalidade denominada Janela 3D. Nesse sentido, aprender como construir os sólidos para, possivelmente, utilizá-los em sala de aula pode ser de grande utilidade, uma vez que a observação dos objetos pode facilitar as habilidades de visualização e compreensão espacial.

Para realizar as construções, utilizou-se a versão *online* do aplicativo do GeoGebra, pois esta é a única que permite o *download* do objeto criado em formato *.stl*. O acesso ao GeoGebra *online* é feito através do site oficial,² sem necessidade de instalação ou cadastro.

3.1.1 Prisma Regular

Ao abrir o aplicativo, deve-se selecionar a “Barra de menus” à direita da tela, a opção “Exibir” e em seguida “Janela de Visualização 3D”, conforme ilustrado na Figura 2.

Após essa etapa, será possível observar a janela de álgebra, a janela de visualização 2D e a janela de visualização 3D. Assim, deve-se selecionar a janela de visualização 2D, dentre as suas ferramentas, escolher “Polígono regular”. Dessa forma, é possível construir qualquer polígono regular desejado. Ao selecionar a ferramenta, é necessário criar dois pontos *A* e *B* apenas clicando na janela de visualização. Em seguida, uma janela abrirá para que se digite o número de vértices do polígono desejado. No exemplo, o polígono será um hexágono, portanto escreve-se “6”. Ao término da construção, o *software* GeoGebra nomeia o polígono criado, neste caso, a nomenclatura dada foi “pol1”. Essa fase da construção está ilustrada pela Figura 3.

¹ Disponível em: <https://ultimaker.com/software/ultimaker-cura/>

² Disponível em: <https://www.geogebra.org/>

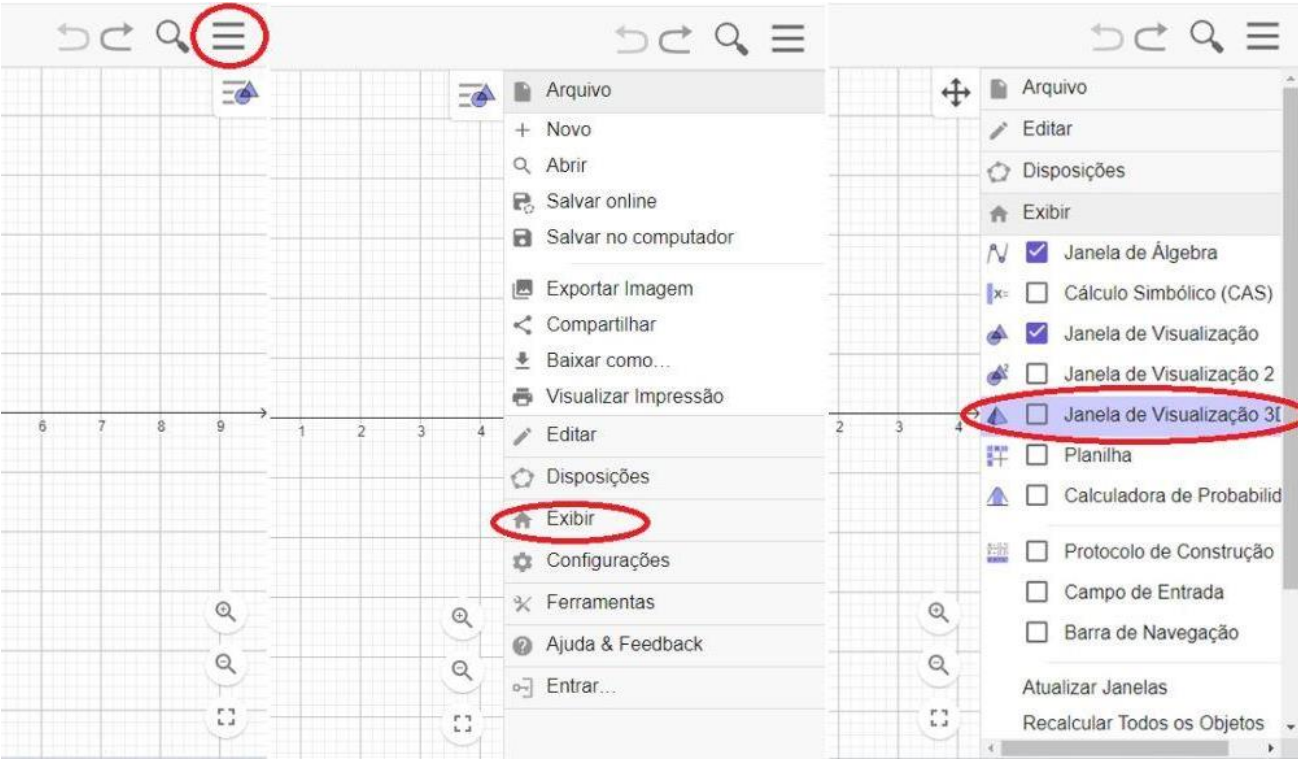


Figura 2: Primeiros passos para a construção do prisma.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

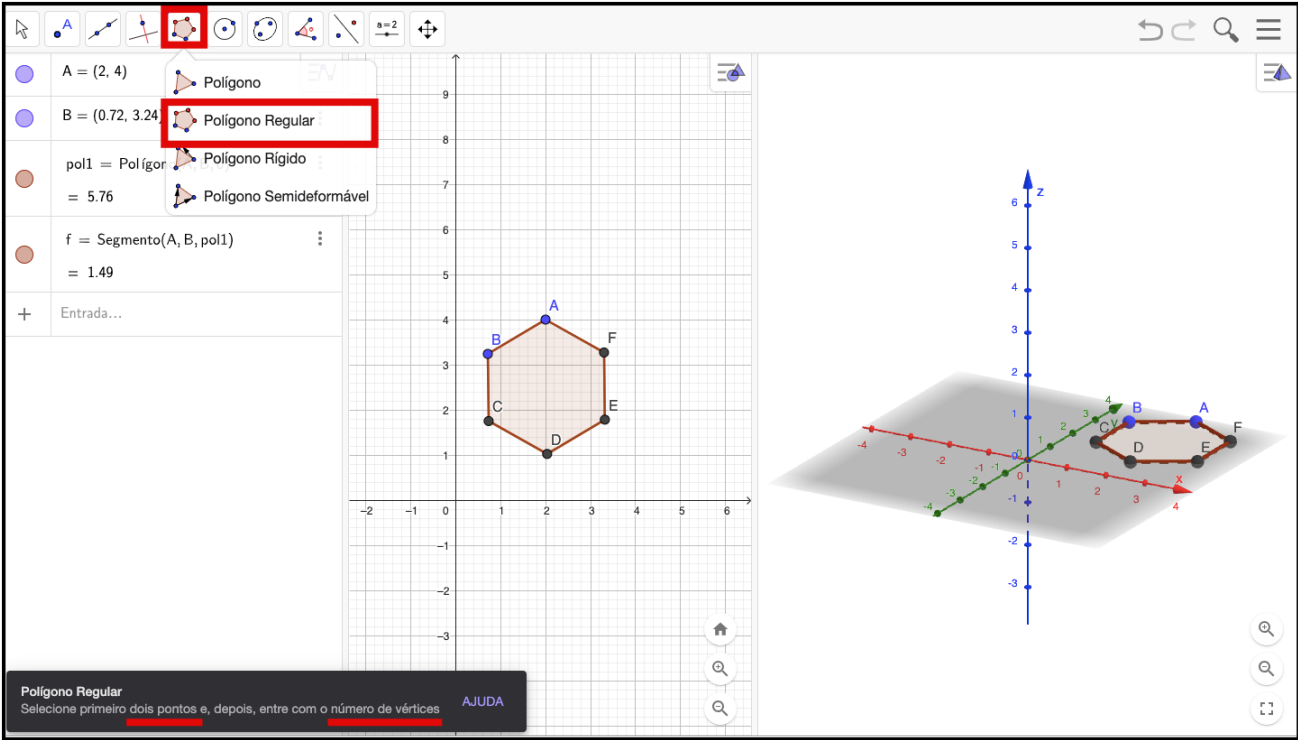


Figura 3: Construção de um polígono.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Após a construção do polígono, será feita a construção da altura do prisma, utilizando uma ferramenta que permita variar esse valor. Assim, utiliza-se o recurso “Controle deslizante”, disponível na aba de ferramentas, denomina-se o controle deslizante por “ h ” e determina-se o intervalo de variação de 0 a 5, que corresponderá ao trecho de variação da altura do prisma, conforme ilustrado na Figura 4.

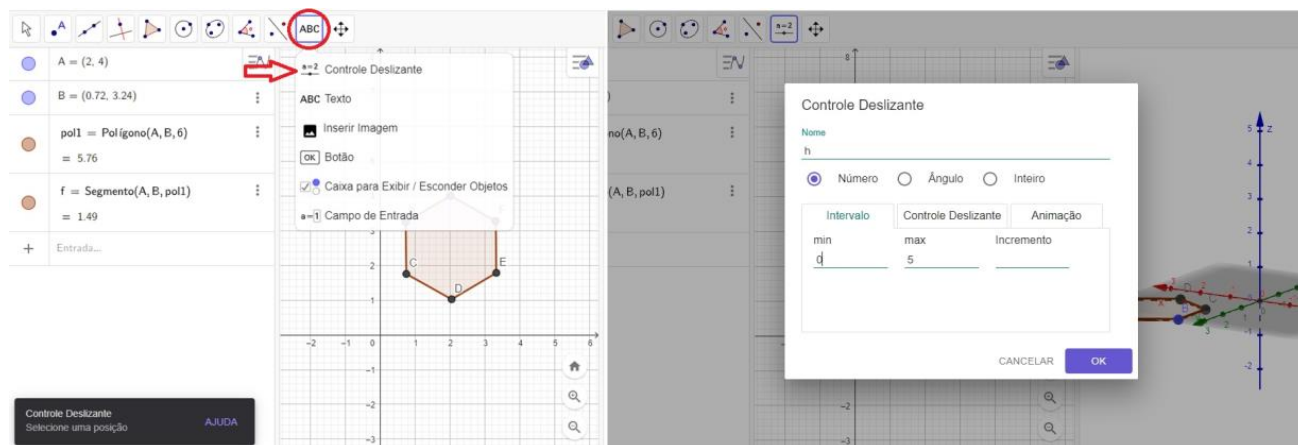


Figura 4: Determinado a altura do prisma.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Para construir o prisma propriamente dito, na caixa de entrada, digita-se “Prisma” e escolhe-se a opção “Prisma (Polígono, Ponto)”. Em seguida, onde se lia “Polígono” digita-se o nome do polígono criado, nesse caso “pol1”, e onde se lia “Ponto” digita-se “ h ”, uma vez que o ponto se refere à altura do objeto. O resultado aparecerá na janela de visualização 3D conforme ilustrado na Figura 5.

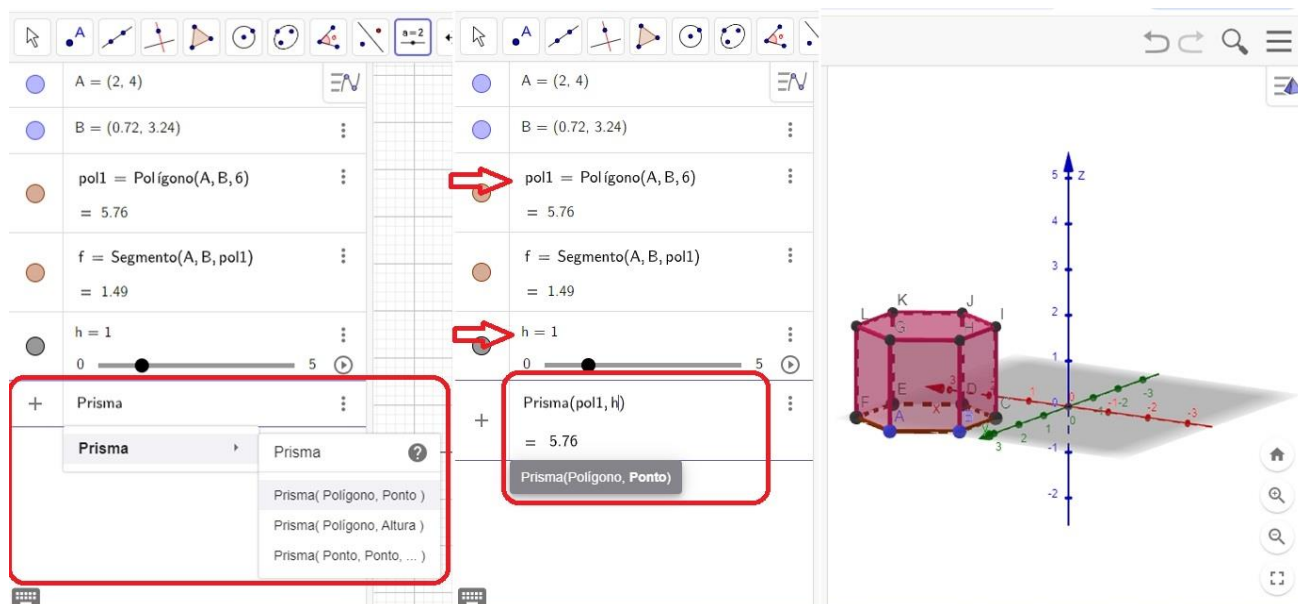


Figura 5: Construção do Prisma.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Com o prisma construído, é possível modificar a sua altura movendo o controle deslizante. Ao fixar uma das alturas possíveis para o objeto, são necessários alguns ajustes para que se possa imprimi-lo.

Inicialmente, é preciso ocultar todos os pontos correspondentes aos vértices clicando com o botão direito do *mouse* em cada ponto e desativando a opção “Exibir Objeto”, conforme ilustra a Figura 6.



Figura 6: Finalizando o Prisma.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Ademais, para uma melhor visualização, também recomenda-se ocultar o plano e os eixos da construção. Para tal, clica-se com o botão direito do *mouse* na janela de visualização 3D e desativa-se as opções “Exibir eixos” e “Exibir plano”.

Dessa maneira, o prisma está finalizado e quase pronto para a importação no formato requerido para a impressão. Assim, é necessário baixar o arquivo da construção no formato *.stl* para, então, realizar as configurações finais e imprimi-lo. Para isso, deve-se clicar na “Barra de menus” localizada à direita da tela, selecionar a opção “Baixar como...” e, finalmente, a opção “Impressão 3D (.stl)” conforme ilustrado na Figura 7.

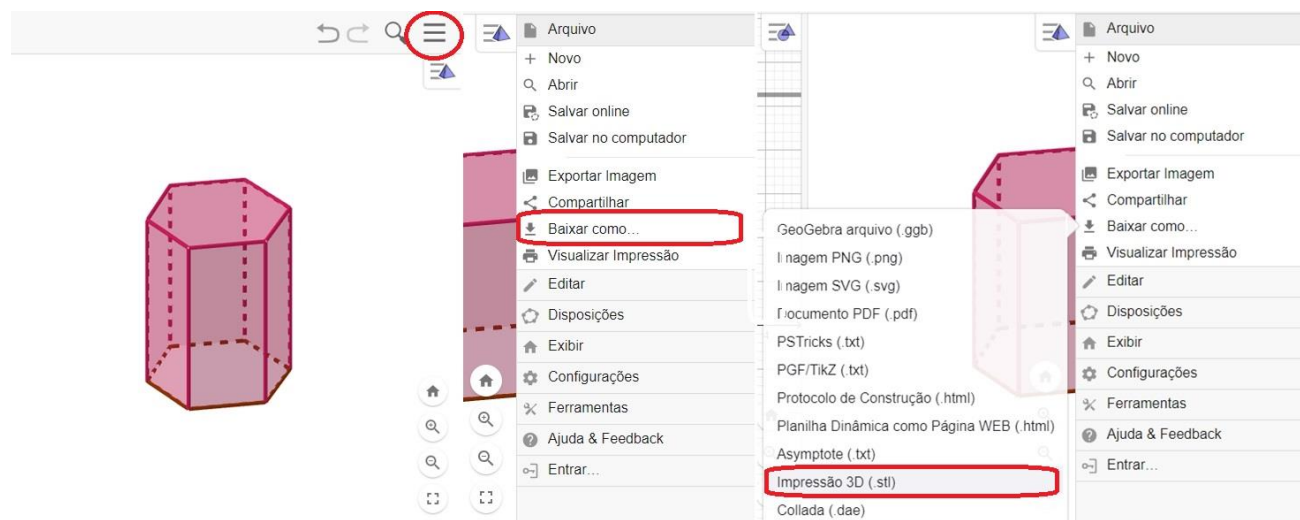


Figura 7: Baixar em arquivo *.stl*.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Depois disso, uma aba será exibida para realizar possíveis configurações de largura, comprimento e altura do objeto construído (Figura 8). É importante observar que é necessário selecionar a opção “Preenchimento Sólido”, pois sem essa configuração ocorrem erros ao imprimir a peça. Por fim, basta clicar em “download” e salvar o arquivo com o nome desejado.



Figura 8: Configurações de download.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

3.1.2 Pirâmide

Analogamente à construção do prisma, deve-se abrir as janelas de visualização 2D e 3D. Logo após, é necessário construir o polígono da base da pirâmide, que pode ser escolhido por cada participante. Como o objetivo não é construir uma pirâmide regular, nessa etapa, deve-se selecionar a ferramenta “Polígono”, disponível na aba de ferramentas, e construir o polígono desejado. Neste exemplo, foi feito um hexágono, conforme ilustra a Figura 9.

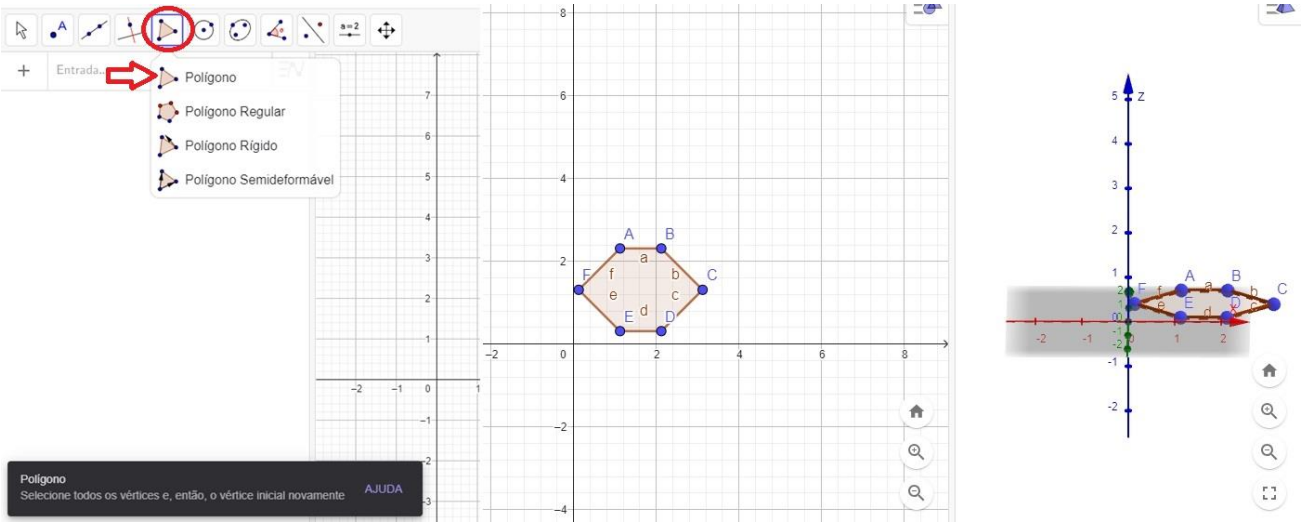


Figura 9: Construção do polígono da base da pirâmide.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Em seguida, deve-se utilizar a ferramenta “Controle deslizante”, situada na aba de ferramentas, para estabelecer a altura da pirâmide. Denomina-se o controle deslizante por “g” e define-se a altura mínima como 0 e a altura máxima como 5. Entretanto, esses valores podem ser ajustados caso seja necessário que a pirâmide tenha uma altura superior à 5. Esta etapa da construção está ilustrada na Figura 10.

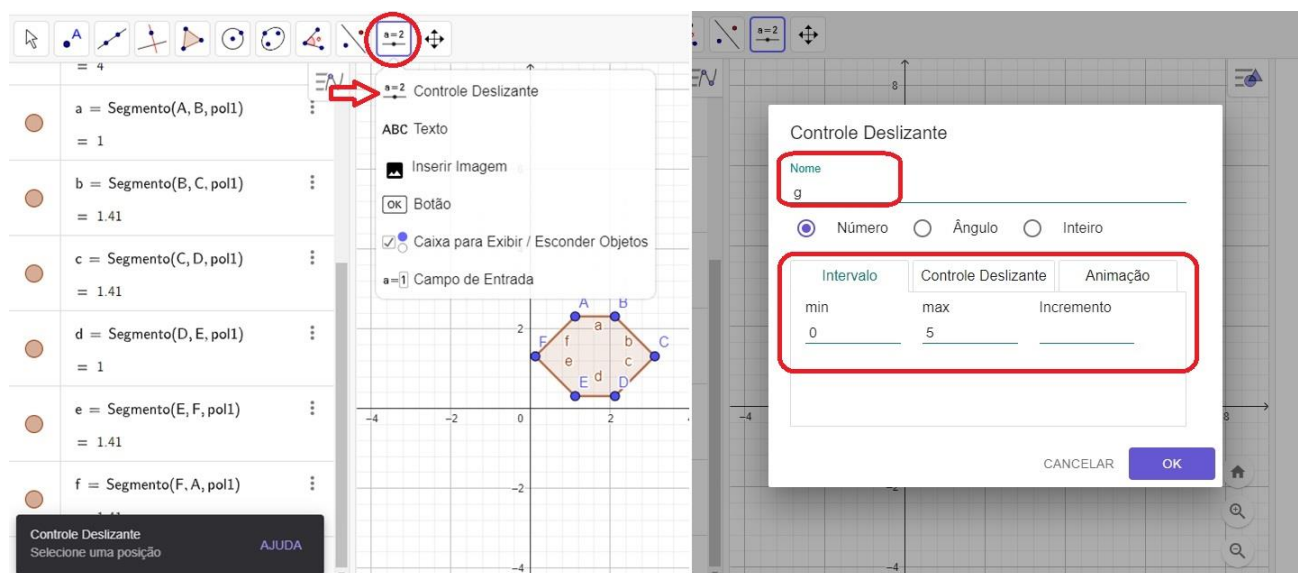


Figura 10: Construção da altura da pirâmide.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Posterior à construção da base e do controle deslizante que representa a altura, será feita a construção da pirâmide, de fato. Para tal, na caixa de entrada, digita-se “pirâmide” e escolhe-se a opção “Pirâmide (polígono, altura)”. Nessa fase da construção, será feito um processo semelhante ao prisma, isto é, onde se lia “polígono”, digita-se o nome do polígono criado, nesse caso “pol1”, e onde lia-se “altura”, digita-se o nome dado ao controle deslizante que corresponde à altura, nesse caso “g”. Assim, a pirâmide será construída e aparecerá na janela de visualização 3D, conforme ilustrado pela Figura 11.

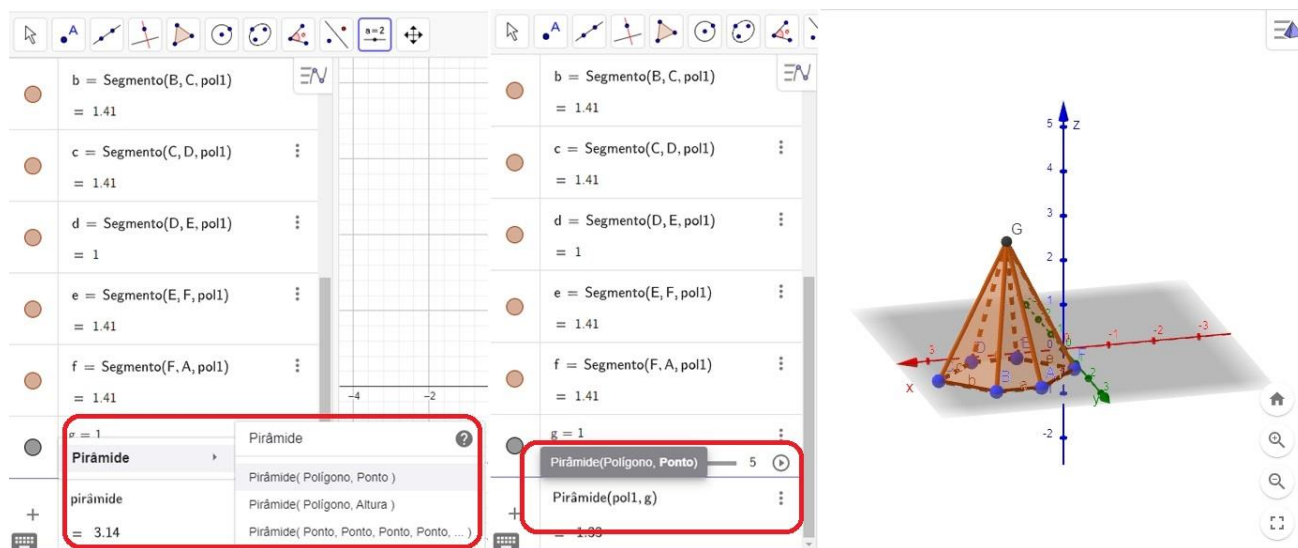


Figura 11: Construção da pirâmide.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Observa-se que a pirâmide construída dessa maneira não é necessariamente regular, mas sempre será uma pirâmide do tipo reta, ou seja, a projeção do vértice é o centro de gravidade do polígono da base. Para imprimir a pirâmide, será necessário ocultar todos os pontos e letras da estrutura. Para isso,

basta clicar com o botão direito do *mouse* em cada ponto e desativar a opção “Exibir objeto”. Também recomenda-se ocultar o plano e os eixos da construção, clicando com o botão direito do *mouse* na janela de visualização 3D e desativando as opções “Exibir eixos” e “Exibir plano”, conforme ilustra a Figura 12.

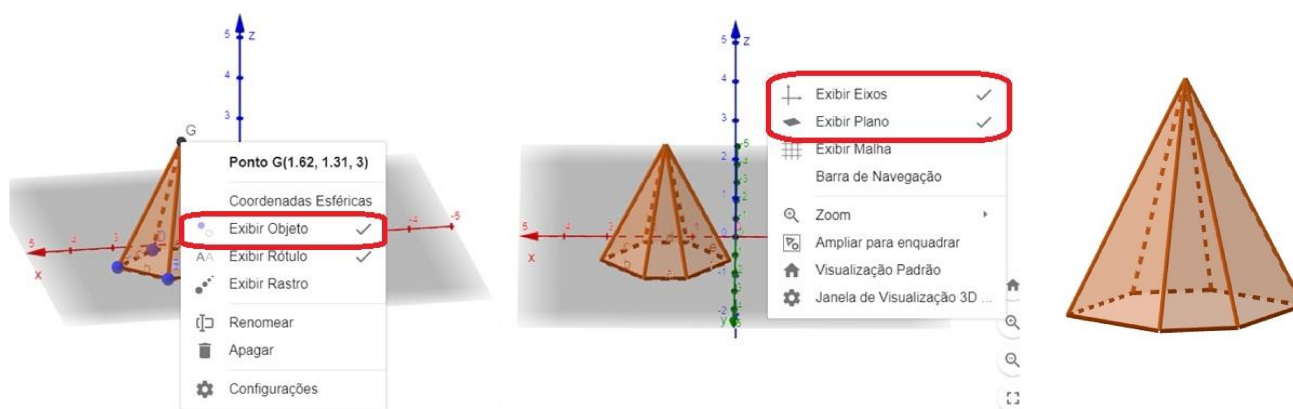


Figura 12: Finalização da pirâmide.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

A pirâmide, analogamente ao prisma, deve ser salva em formato *.stl* para que possa ser, posteriormente, fatiada e impressa. Para isso, realiza-se o “download” utilizando as mesmas configurações apresentadas para o prisma.

Destaca-se que as duas construções anteriores foram selecionadas por permitirem um entendimento inicial acerca da construção de poliedros, possibilitando que os participantes construam diversos outros prismas e pirâmides, apenas alterando o polígono da base e a altura.

Finalizados os sólidos, o próximo passo se constitui como o fatiamento do objeto para posterior impressão. Para efetuar o fatiamento, é preciso abrir o arquivo *.stl* baixado do GeoGebra em um *software* próprio. Nesse minicurso, conforme citado anteriormente, o *software* utilizado foi o Ultimaker Cura.

Após abrir o arquivo *.stl* no *software* de fatiamento, é necessário realizar os ajustes finais na peça, isto é, a posição do objeto na mesa de impressão, o tamanho (largura, comprimento e altura), o número de paredes (o que define a espessura da peça), a necessidade de preenchimento, a temperatura da mesa e do material de impressão, entre outras opções. Essas configurações encontram-se no *software*, conforme ilustra a Figura 13.

Ao concluir os ajustes, clica-se em “Fatiar”, opção localizada no canto inferior direito da tela. Com isso, uma aba surgirá mostrando informações sobre o tempo de impressão e a quantidade de material utilizado, conforme ilustra a Figura 14.

Ao selecionar a opção “Pré-visualização” é possível visualizar quantas camadas a impressora irá criar no processo e qual trajeto ela seguirá, conforme ilustrado na Figura 15.

Finalmente, ao finalizar a construção e realizar os ajustes necessários no *software* de fatiamento, a peça estará pronta para ser impressa. Assim, basta selecionar a opção “Salvar no disco” disponível no canto inferior direito da tela. Assim, o arquivo salvo estará em formato “G-Code”, o qual configura o modelo de leitura da impressora, indicando as coordenadas que ela deve seguir para realizar a impressão do objeto. Após a impressão da peça, é possível compará-la com o seu modelo criado no GeoGebra.

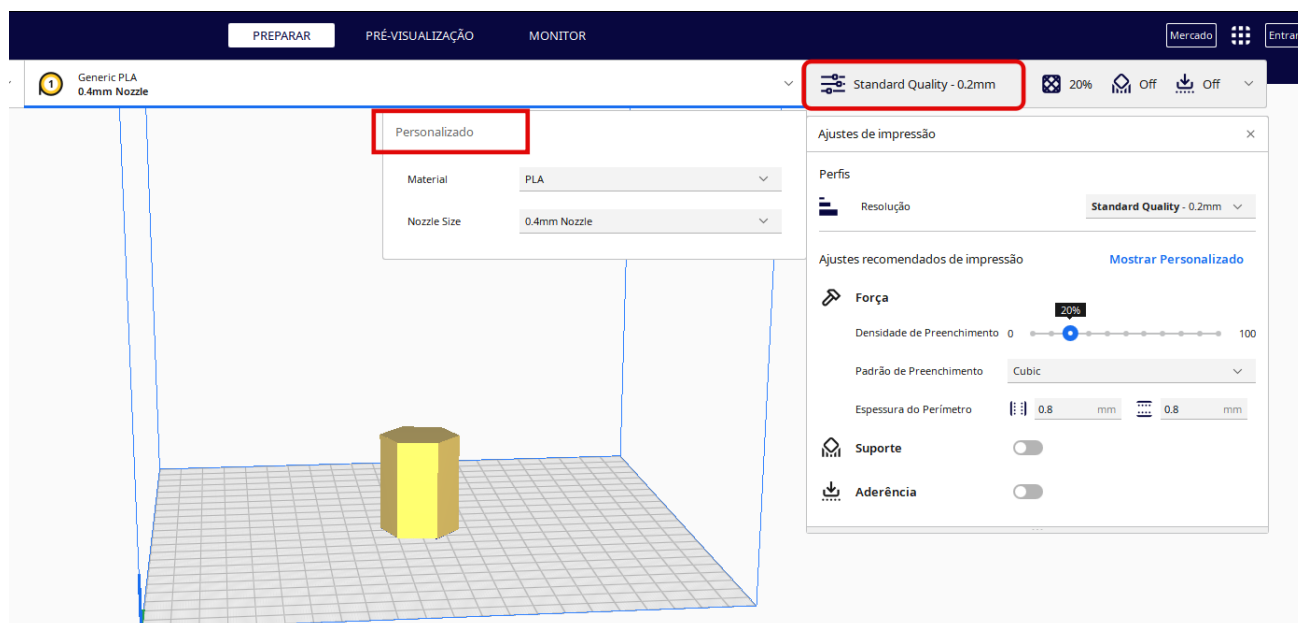


Figura 13: Configurações do software Cura.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

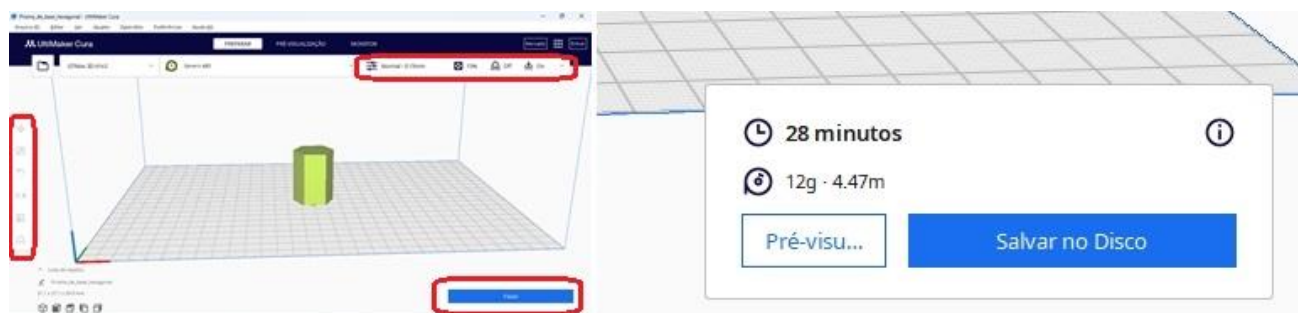


Figura 14: Fatiamento.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

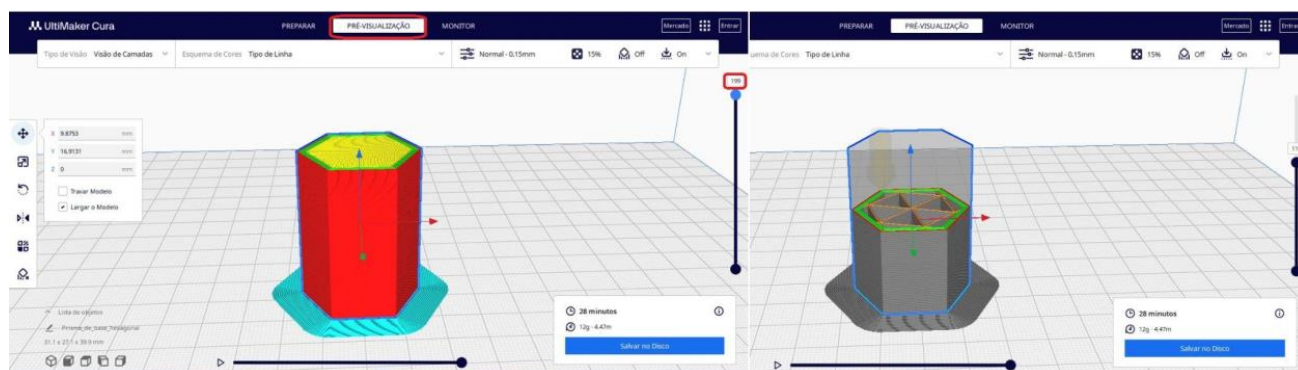


Figura 15: Pré-visualização.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Assim, a Figura 16 ilustra um comparativo entre a referência criada e a impressão propriamente dita, nesse caso, exemplificada por um prisma de base pentagonal regular.

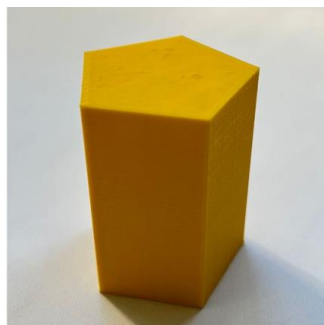
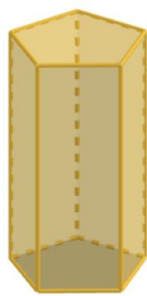


Figura 16: Comparativo entre o Prisma construído e impresso.

Fonte: Acervo do grupo (2023).

3.2 Corpos Redondos

Na continuidade do minicurso foram realizadas construções de três sólidos geométricos classificados como corpos redondos. As construções do cilindro e do cone se deram por meio do uso de ferramentas específicas, deixando os participantes livres para escolherem o raio da base e a altura dos respectivos sólidos. A seguir, os detalhes de cada construção.

3.2.1 Cone

Para a construção do cone, o GeoGebra *online* também disponibiliza uma ferramenta específica. Para iniciar a construção do cone, precisamos exibir a janela de visualização 3D, como fizemos nas construções anteriores. Depois de exibir, basta clicar na janela de visualização 3D, ir até a barra de ferramentas e selecionar a ferramenta “Cone” (Figura 17).

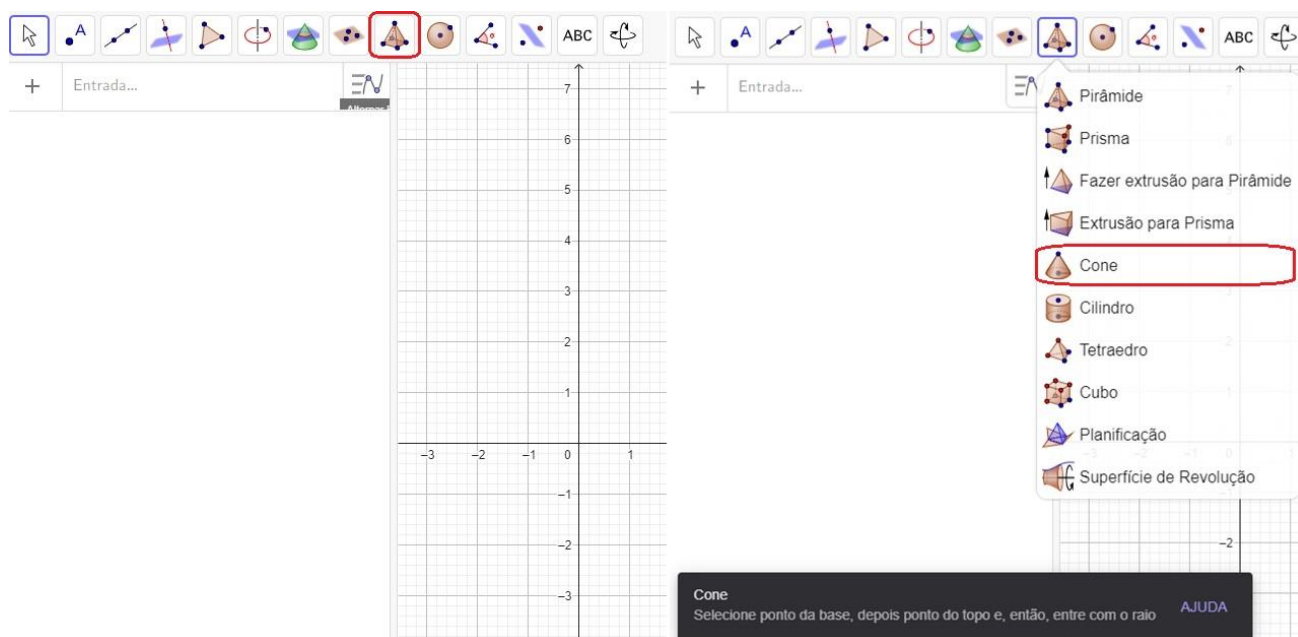


Figura 17: Ferramenta “Cone”.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Agora, é necessário selecionar um ponto que será o centro da base e outro para o vértice, além de determinar o raio da base do cone. Para facilitar, escolhe-se o ponto $(0,0,0)$ como ponto da base e $(0,0,4)$ como ponto do vértice. A seguir, com a ferramenta cone, disponível na janela de visualização 3D, clica-se nos pontos criados e insere-se o raio desejado na janela que se abrirá. Neste exemplo, o raio será 2. Com essas especificações, o cone será construído na janela de visualização 3D (Figura 18).

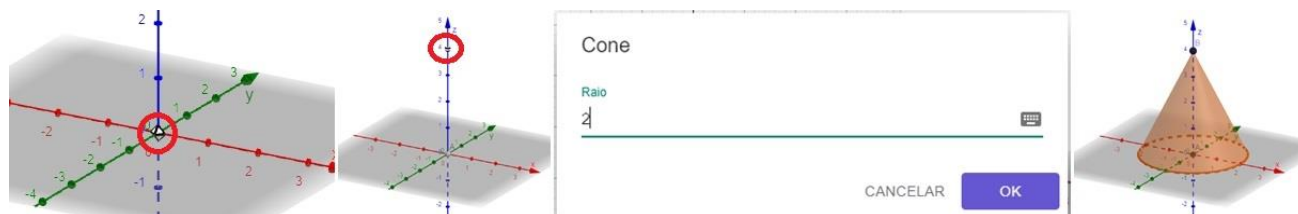


Figura 18: Construção do cone.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Para imprimir em 3D o cone construído, é necessário ocultar os pontos, os eixos e o plano também. Para ocultar os pontos, basta clicar com o botão direito em cima de cada ponto e desmarcar a opção “Exibir objeto”. Para ocultar os eixos e o plano, basta clicar com o botão direito do *mouse* na janela de visualização 3D e desmarcar as opções “Exibir Eixos” e “Exibir Plano” (Figura 19).

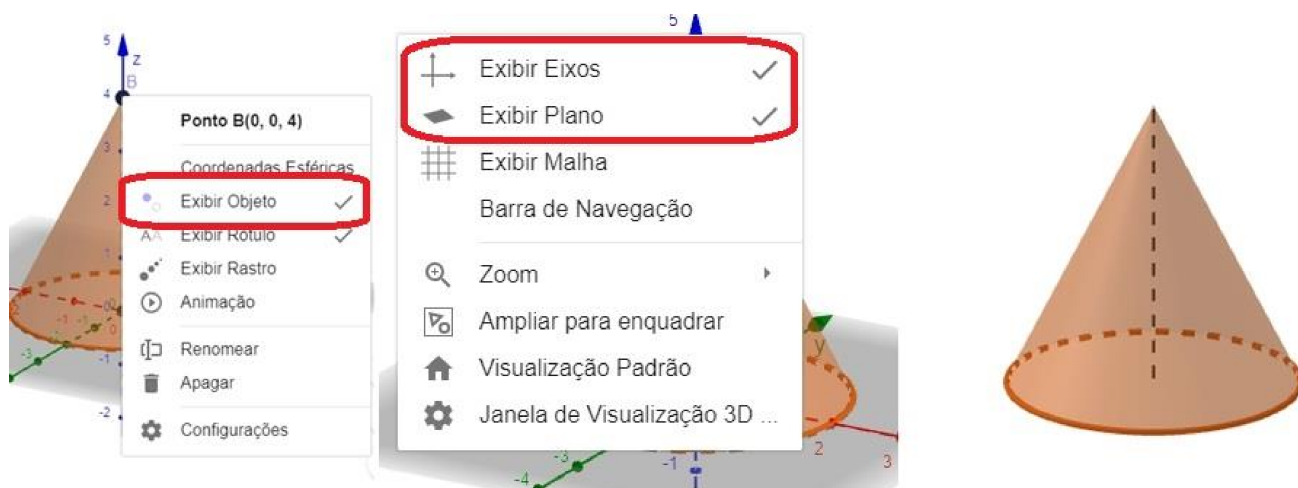


Figura 19: Ocultar pontos, plano e eixos.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

3.2.2 Cilindro

Para construir o cilindro, o GeoGebra *online* oferece uma ferramenta específica. O primeiro passo que deve-se realizar é exibir a janela de visualização 3D. Para isso, basta clicar na “Barra de Menus” à direita da tela, selecionar a guia “Exibir” e escolher a opção “Janela de Visualização 3D” (Figura 20).

Agora, na aba de ferramentas da janela de visualização 3D, seleciona-se a ferramenta “Cilindro”. Após isso, será necessário escolher dois pontos e especificar o raio desejado (Figura 21).

De forma análoga ao cone, o primeiro ponto determina o centro do cilindro, e o segundo sua altura, podendo variar conforme o desejo do participante. Assim, para o primeiro ponto, clica-se no ponto

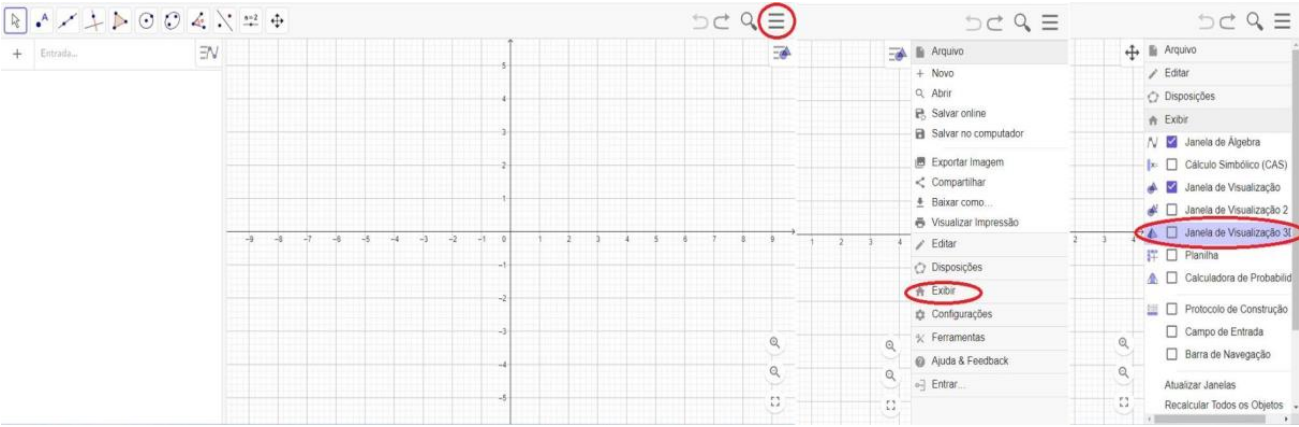


Figura 20: Janela de visualização 3D.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

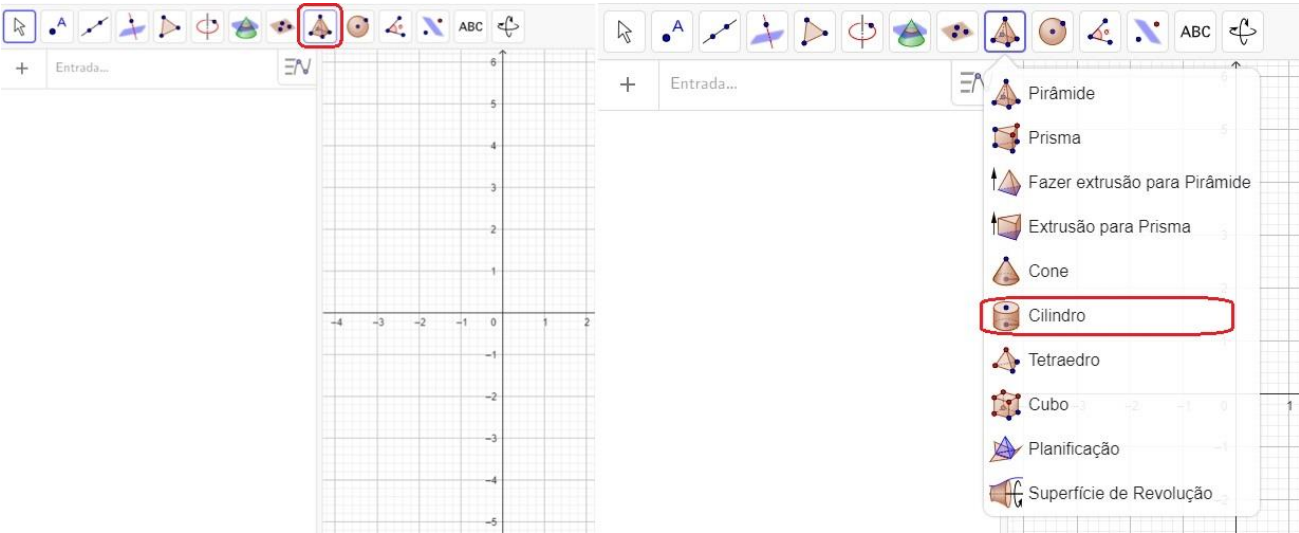


Figura 21: Ferramenta “Cilindro”.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

(0,0,0) e, em seguida, no ponto (0,0,4). Após selecionados estes pontos, uma aba se abre para que seja determinado o raio do cilindro. Neste exemplo, utiliza-se 2 como raio do cilindro. Assim o cilindro será construído na janela de visualização 3D (Figura 22).



Figura 22: Construção do cilindro.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Para imprimir os sólidos, é necessário exportá-los para o formato *.stl* e fatiá-los através do *software* de fatiamento. Para exportar em *.stl*, clica-se na “Barra de menus”, à direita da tela, e seleciona-se a opção “Impressão 3D (*.stl*)” em “Baixar como...” e selecionar a opção “preenchimento sólido”. A seguir, é necessário abrir o arquivo no *software* de fatiamento, realizar os ajustes finais de posição, tamanho, número de paredes e preenchimento da peça, bem como, da temperatura da mesa e do material de impressão. Após todos os ajustes, clica-se em “Fatiar”, no canto inferior direito da tela e, estando satisfeito com as configurações do fatiamento, salva-se a construção para posterior impressão.

A Figura 23 ilustra a comparação entre um cilindro construído com o GeoGebra e um cilindro impresso na impressora 3D.

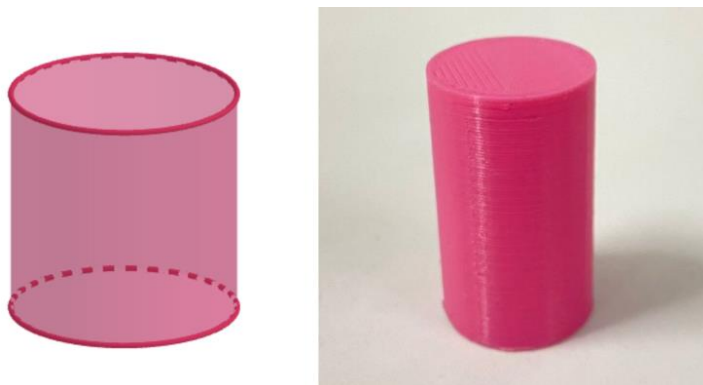


Figura 23: Comparativo entre o Cilindro construído e impresso.

Fonte: Acervo do grupo (2023).

3.2.3 Esfera

Ainda, foi realizada a construção de uma esfera, objeto relativamente simples, uma vez que o *software* a produz automaticamente apenas definindo o centro e o raio, que também foi escolhido de maneira livre. Utilizando a ferramenta “Esfera”, na janela de visualização 3D, seleciona-se a opção “Esfera (Centro e raio)” e clica-se em um ponto qualquer da janela de visualização 3D. A seguir, será aberta uma aba para que se insira o raio desejado, neste caso, 2. Após clicar em “Ok”, a esfera aparecerá na tela.

A impressão da esfera, no entanto, difere um pouco das demais. Inicialmente, deve-se baixar o arquivo *.stl* com a opção “Preenchimento sólido” ativada. Já no *software* de fatiamento, caso a esfera seja impressa inteira, ela ficará “achatada” na parte inferior, que fica em contato com a mesa de impressão. Isso ocorre, pois durante a impressão são necessários suportes nas estruturas da peça, visto que a esfera não possui essa base de sustentação. Para evitar esse tipo de erro, divide-se a esfera em duas partes alterando a altura (eixo *z*) no *software* de fatiamento. Ao abrir o sólido no Ultimaker Cura, deve-se clicar sobre a esfera e, utilizando o menu à esquerda, clica-se em “Escala” para verificar qual a altura do objeto. Neste caso, a altura é de 40 mm e ela será necessária para identificar o raio da esfera (Figura 24).

Após esse passo, pode-se identificar que o raio da esfera corresponde a 20 mm. A seguir, deve-se selecionar a opção “Mover”, utilizando o menu à esquerda, e desativar a opção “Drop Down Model”, responsável por manter a peça inteiramente sobre a mesa e conectada a ela. Assim será possível deslocar metade da esfera para baixo. Para isso, ainda na aba “Mover”, digita-se -20 mm no eixo *z*. Deste modo, teremos uma semiesfera na mesa de impressão. Tais etapas estão ilustradas na Figura 25.

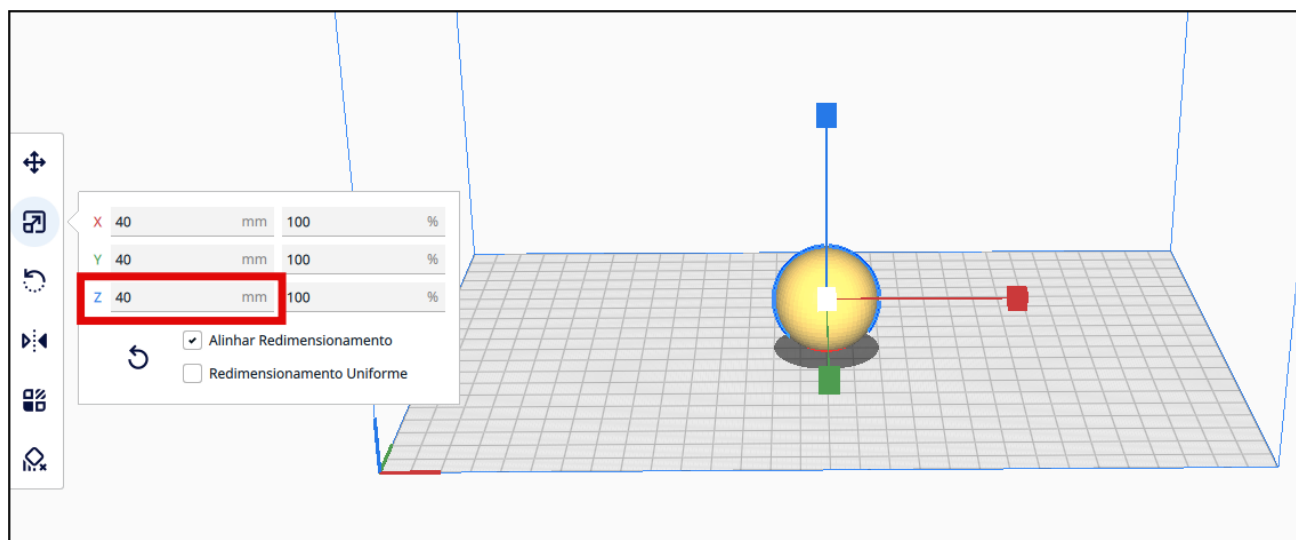


Figura 24: Tamanho do objeto.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

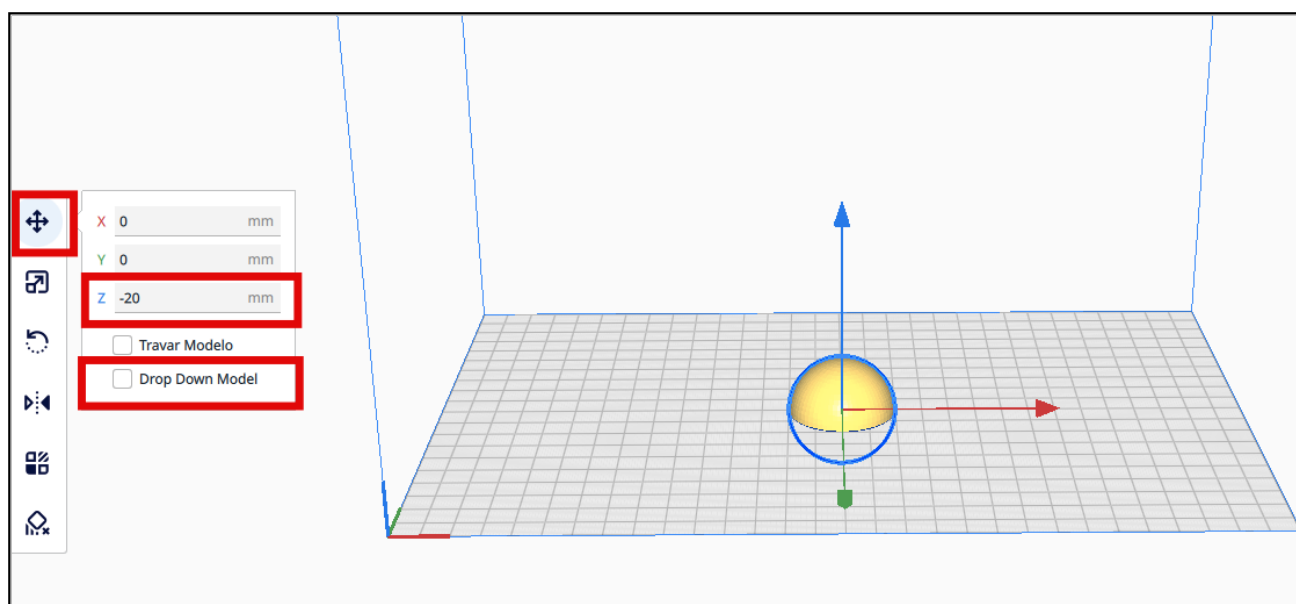


Figura 25: Construção da semi esfera

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Em seguida, clica-se na semiesfera com o botão direito do *mouse* e seleciona-se a opção “Multiplicar selecionados”, opção responsável por criar objetos iguais aos selecionados. Após selecionar essa opção, será aberta uma janela para que seja escolhido o número de objetos que devem ser criados, então, digita-se “1”. A nova semiesfera criada ficará disposta sobre a outra e, para ajustar a posição, clica-se com o botão direito sobre a semiesfera e escolhe-se a opção “Posicionar todos os modelos”. Os comandos utilizados nessa etapa estão ilustrados pela Figura 26.

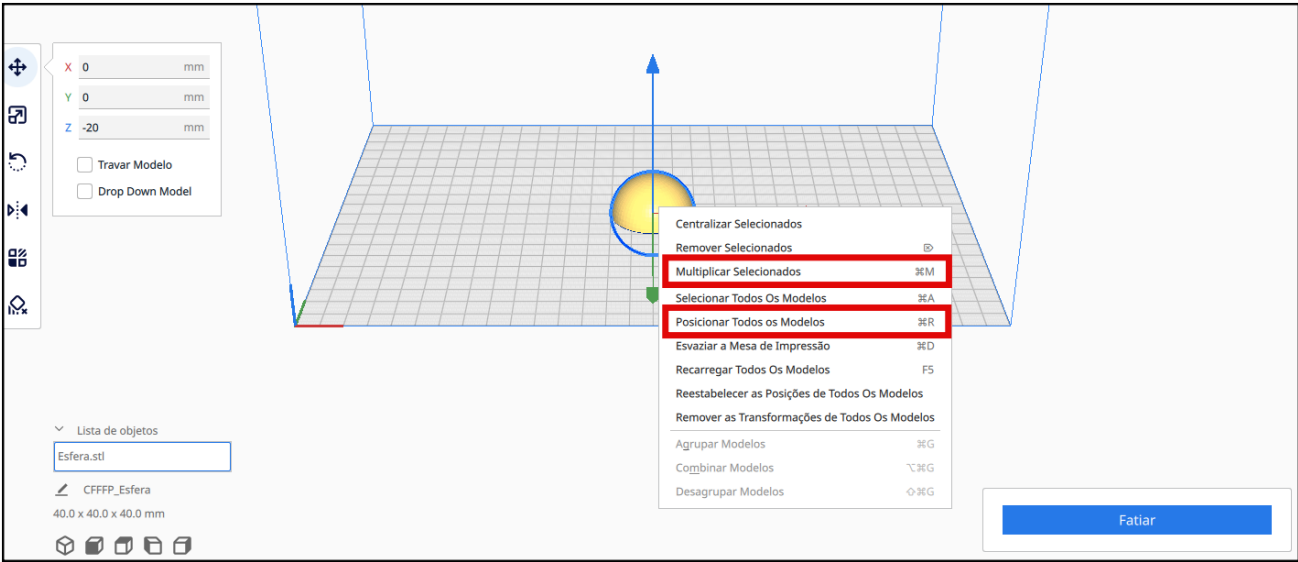


Figura 26: Duplicação da semiesfera e posicionamento.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Feito isso, as duas semiesferas estarão prontas para impressão, basta ajustar configurações relacionadas ao tamanho, preenchimento, temperatura da mesa e do bico de extrusão, entre outras, e fatiar a construção (Figura 27).

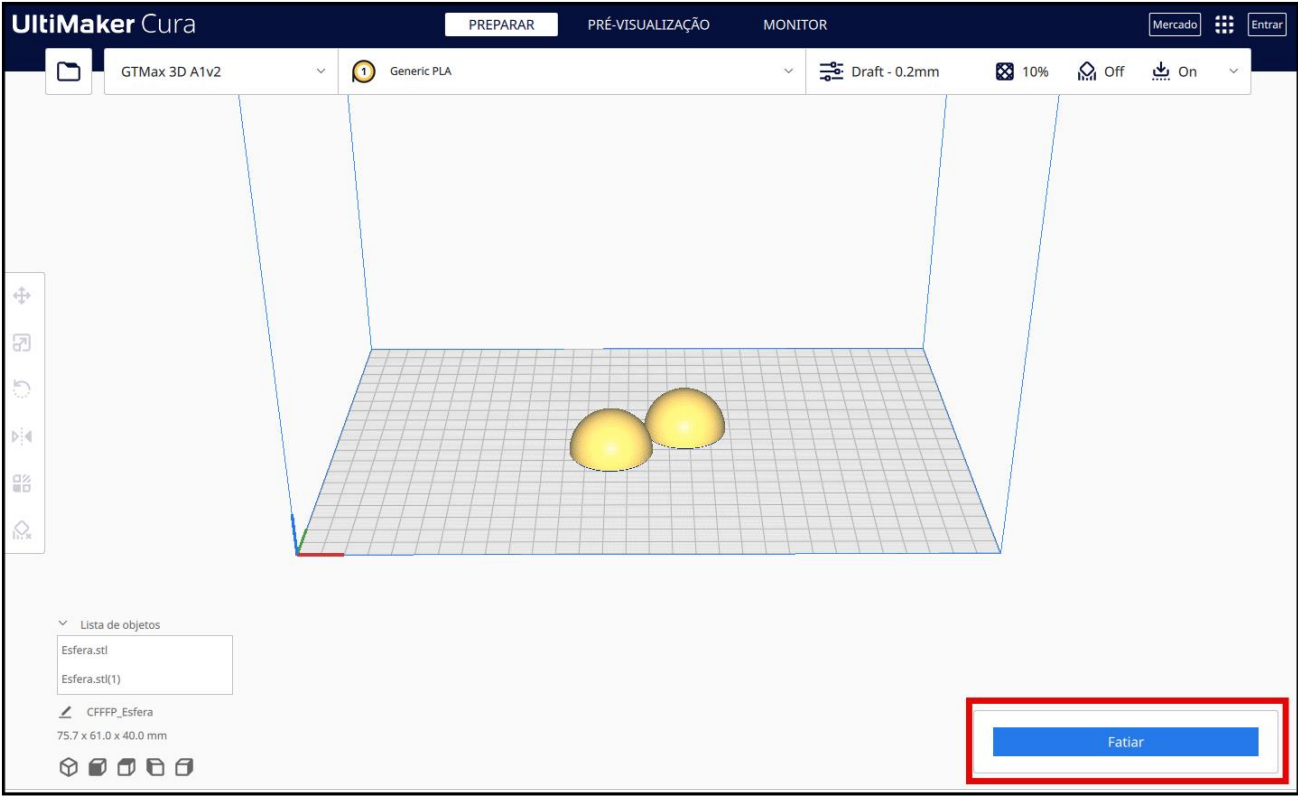


Figura 27: Semiesferas prontas para a impressão.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Finalmente, salva-se a construção e após a impressão, para montar a esfera, basta unir as duas partes impressas, utilizando alguma cola do tipo instantânea.

3.3 Poliedros Regulares

Além da construção de prismas e pirâmides, também foi mostrado aos participantes do minicurso como construir os poliedros regulares. A seguir, serão indicadas as ferramentas necessárias para construir cada um deles, uma vez que cada um dos objetos pode ser montado de maneira diferente. O tetraedro e o hexaedro (cubo) possuem ferramentas próprias para a sua construção, em que basta indicar dois pontos que representam vértices consecutivos de uma face do sólido para que sua construção seja instantânea. Já o octaedro, dodecaedro e icosaedro não possuem uma ferramenta específica, mas podem ser construídos utilizando a caixa de entrada, onde se indica o nome do sólido e um polígono correspondente a sua face, que deve ser construído previamente.

3.3.1 Tetraedro

Para construir um tetraedro, inicialmente, é preciso exibir a janela de visualização 3D, da mesma forma que as demais construções. Em seguida, marcam-se dois pontos quaisquer, A e B , na janela de visualização 2D. A seguir, na aba de ferramentas da janela de visualização 3D, seleciona-se a opção “Tetraedro”. O GeoGebra irá solicitar que sejam selecionados um plano e dois pontos, conforme ilustrado na Figura 28.

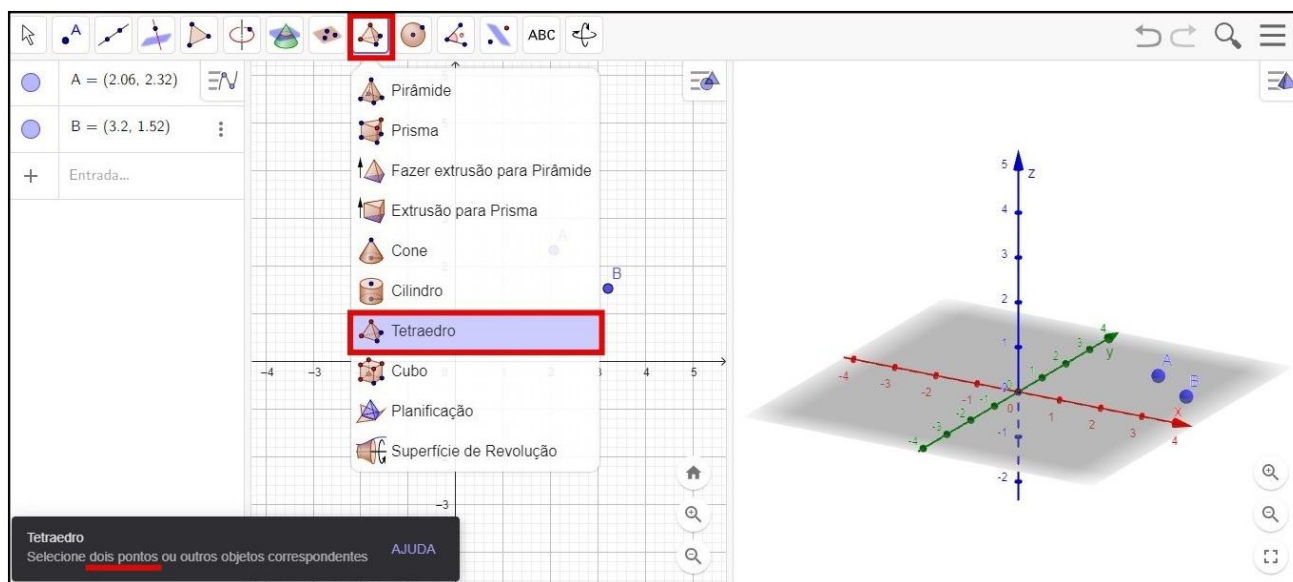


Figura 28: Construção do tetraedro.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Assim, selecionam-se os dois pontos, A e B , na janela de visualização 3D e o *software* irá gerar o tetraedro, conforme mostra a Figura 29. Para modificar o tamanho do sólido, basta movimentar um dos pontos criados.

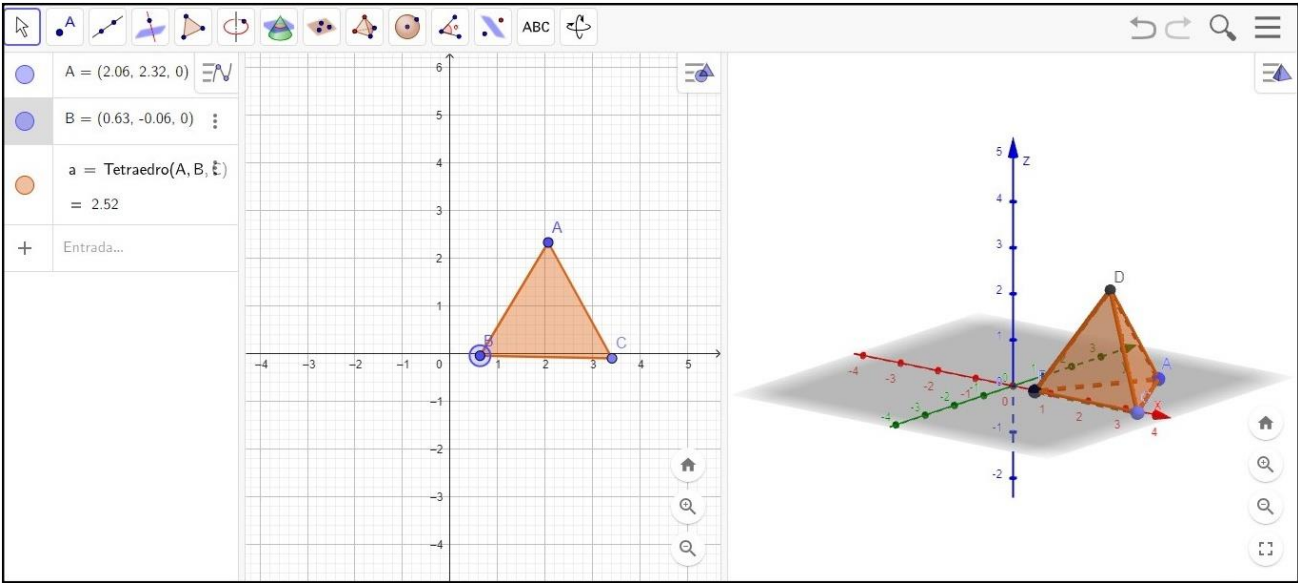


Figura 29: Tetraedro finalizado.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Finalizada a construção, deve-se baixar o arquivo no formato *.stl*. Para isto, na barra de menus à direita da tela, na opção Arquivo seleciona-se a opção “Baixar como...” e, em seguida, “Impressão 3D (*.stl*)”, conforme ilustrado na Figura 30.

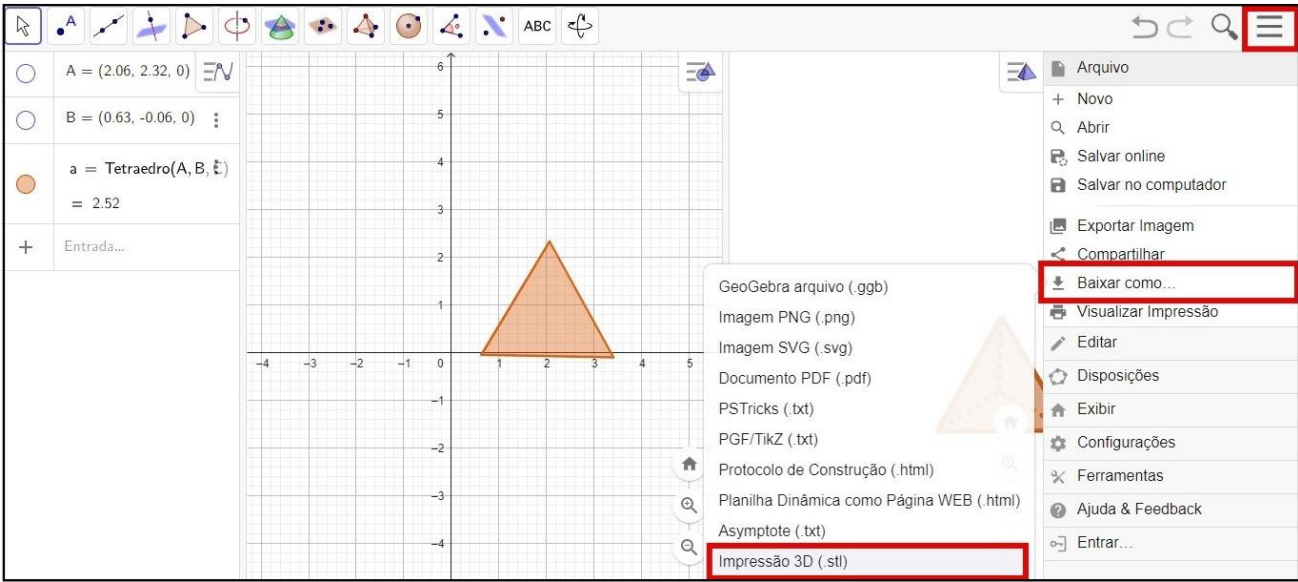


Figura 30: Baixando o arquivo do tetraedro.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Ainda, não se pode esquecer de selecionar a opção “preenchimento sólido”, para que não haja erros durante o fatiamento e impressão do tetraedro. Selecionada essa opção, escolhe-se a nomenclatura do arquivo e realiza-se a exportação, conforme ilustra a Figura 31.

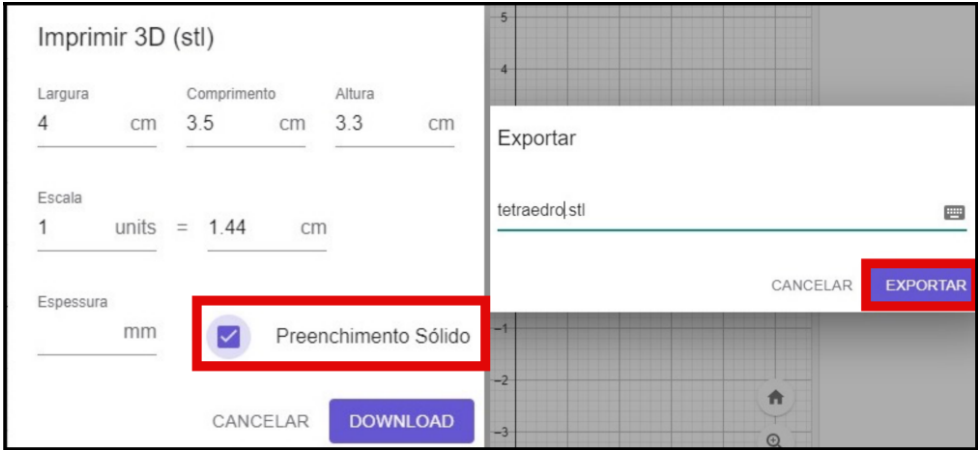


Figura 31: Ajustes de download.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Finalizada a construção do tetraedro, para realizar a impressão, basta seguir os mesmos passos das construções anteriores, isto é, abrir o arquivo *.stl* no *software* de fatiamento, realizar os ajustes necessários da peça, fatiá-la e, finalmente, salvá-la no formato G-Code, para que o tetraedro construído possa ser impresso.

3.3.2 Cubo

Assim como na construção do tetraedro, para construir um cubo o GeoGebra apresenta uma ferramenta específica. Então, para construí-lo, precisa-se, inicialmente, de dois pontos que podem ser inseridos em qualquer uma das janelas de visualização. Em seguida, na aba de ferramentas da janela de visualização 3D, seleciona-se a opção “Cubo” e os dois pontos criados anteriormente, conforme ilustra a Figura 32.

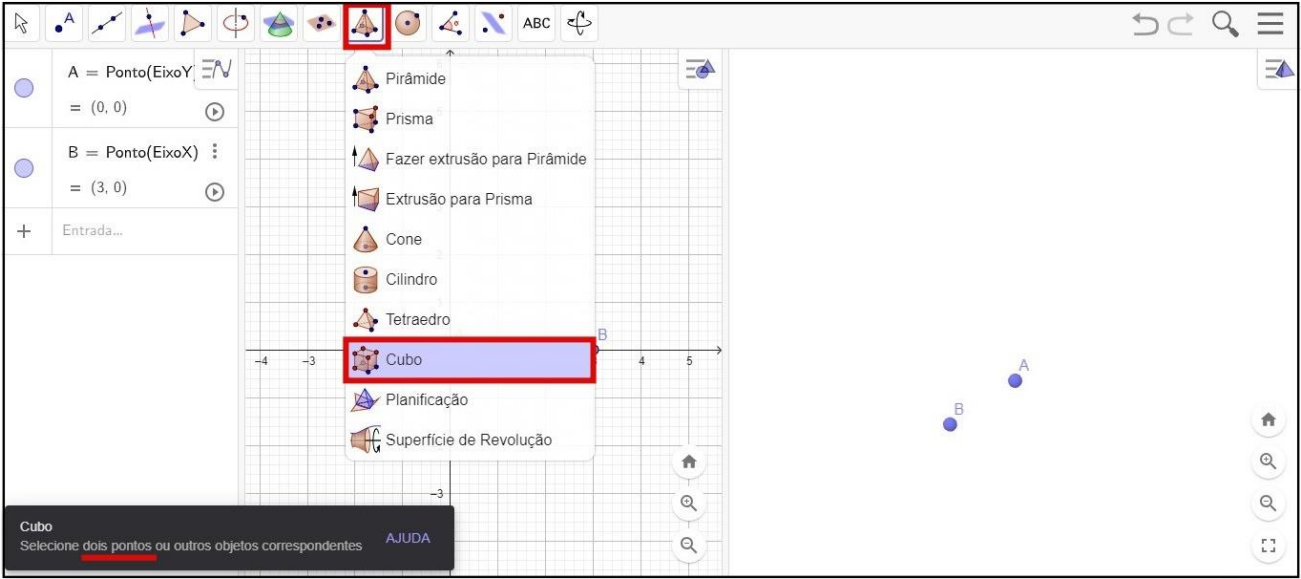


Figura 32: Construção do cubo.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

O GeoGebra irá criar o cubo automaticamente. Além disso, do mesmo modo que no tetraedro, para modificar as dimensões do cubo, basta movimentar um dos pontos criados. O cubo construído está ilustrado na Figura 33.

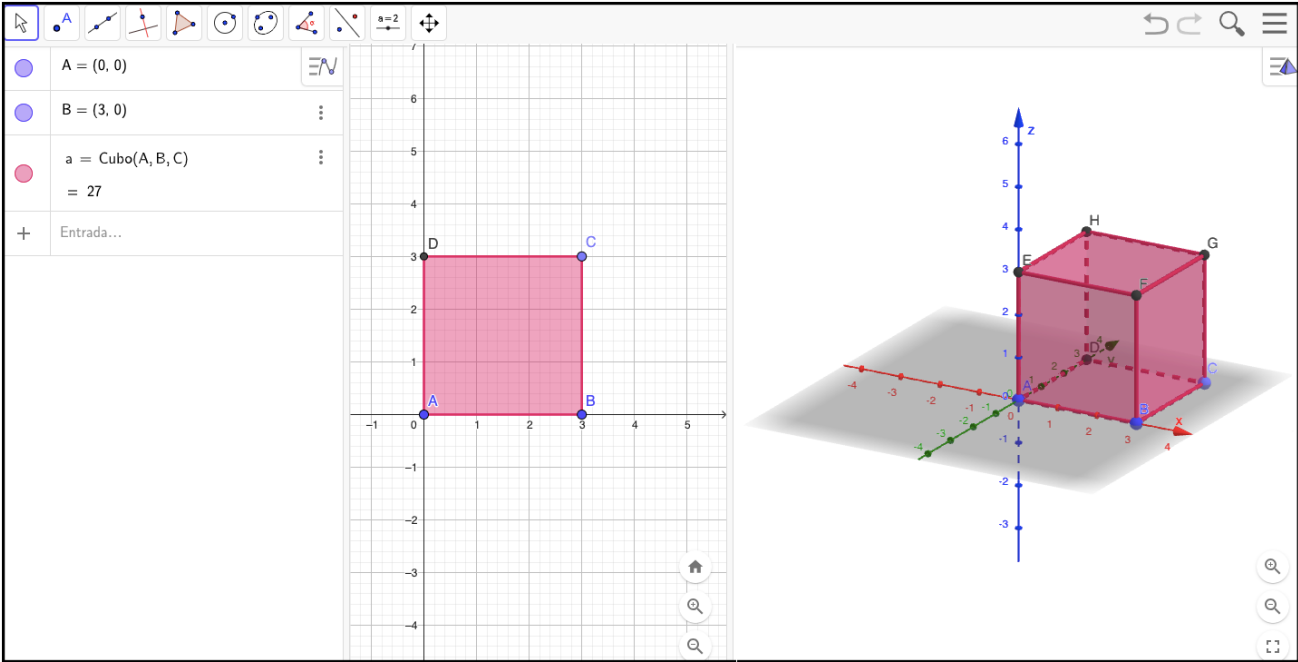


Figura 33: Cubo finalizado.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

O próximo passo é preparar o cubo para impressão. Assim, deve-se fazer o *download* do arquivo no formato *.stl*, selecionando a “Barra de menus”, “Baixar como...” e “impressão 3D (.stl)”, como ilustra a Figura 34.

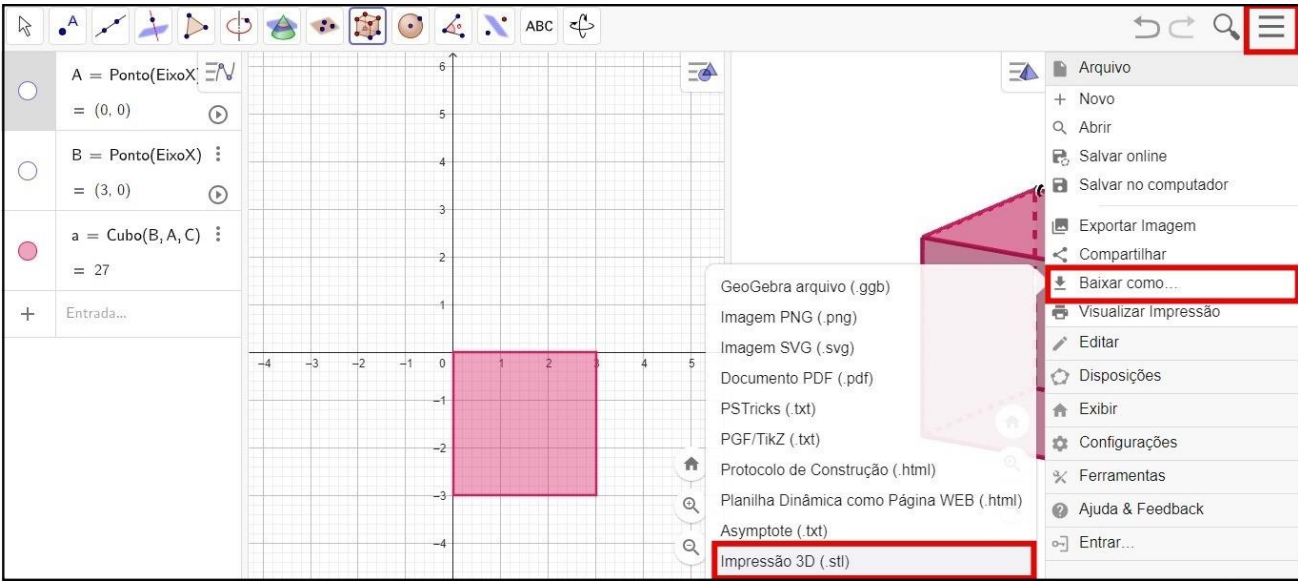


Figura 34: Como realizar o download do cubo.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Mais uma vez, é necessário lembrar de selecionar a opção preenchimento sólido, antes de realizar o *download*. Em seguida, nomeia-se o arquivo *.stl* e exporta-se para o computador. Essa etapa está ilustrada na Figura 35.



Figura 35: Configurações de download do cubo.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

3.3.3 Octaedro

Para construir um octaedro, primeiramente é necessário construir um triângulo equilátero, que corresponde ao polígono de cada face do sólido. O GeoGebra possui uma ferramenta para esta construção, necessitando apenas de dois pontos. Assim, criam-se dois pontos quaisquer em qualquer uma das janelas de visualização e na aba polígono escolhe-se a opção “Polígono regular” (Figura 36). Em seguida, selecionam-se os dois pontos e uma aba abrirá para que seja inserido o número de vértices do polígono, nesse caso três. Com isso, o triângulo equilátero será formado.

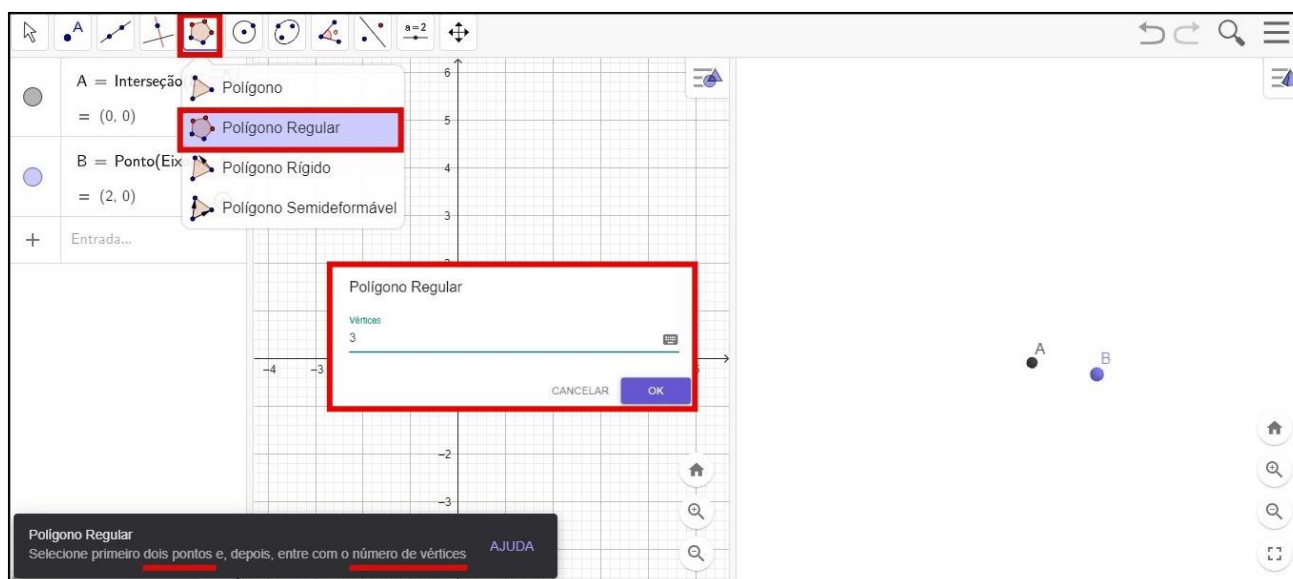


Figura 36: Construção do triângulo equilátero.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Após a construção do triângulo equilátero, na caixa de entrada, à esquerda da tela, deve-se escrever “Octaedro”, selecionar a opção “Octaedro (Triângulo Equilátero)” e digitar o nome do polígono criado, neste caso “pol1” (Figura 37).

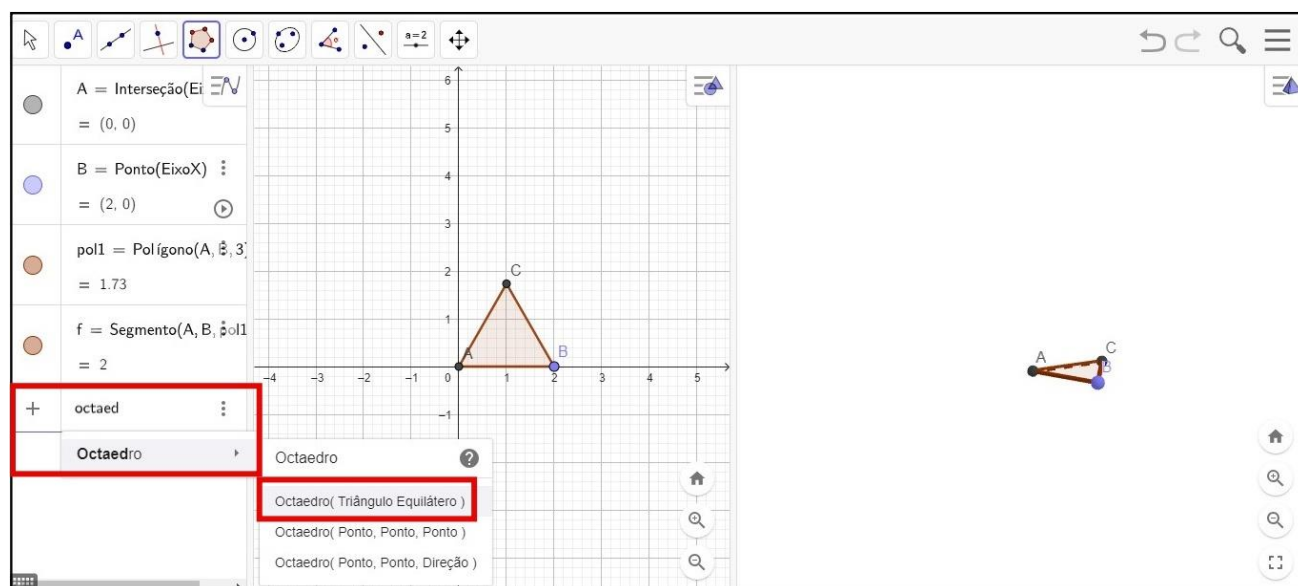


Figura 37: Construção do Octaedro.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Assim, o GeoGebra irá gerar o octaedro, conforme ilustra a Figura 38.

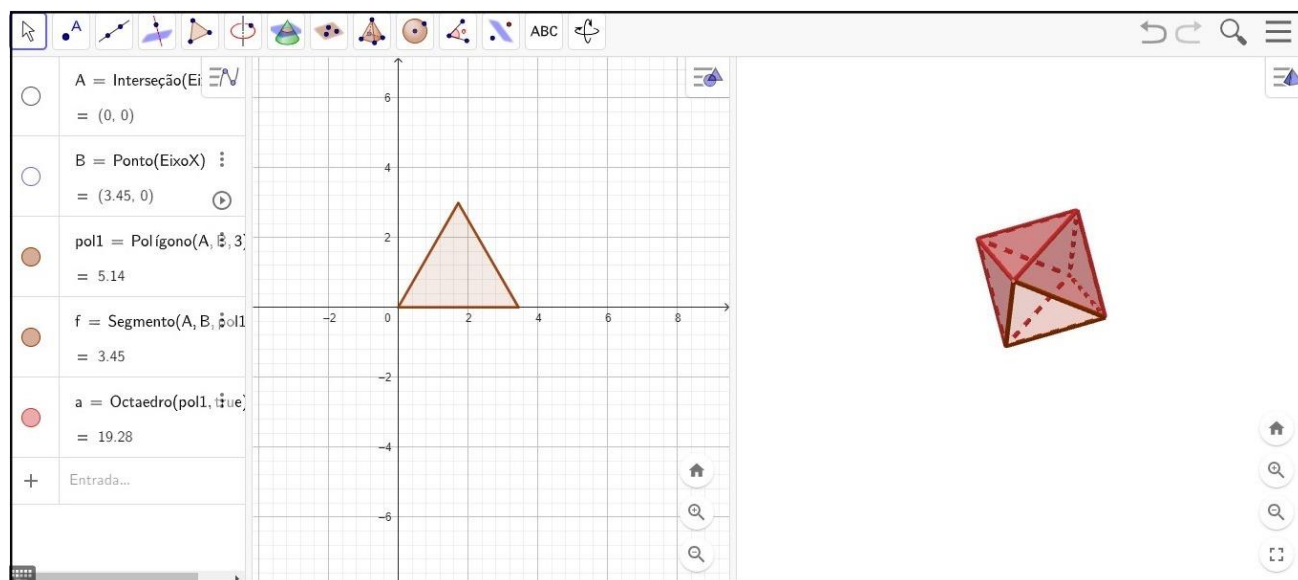


Figura 38: Octaedro finalizado.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Finalizada a construção, é preciso baixá-la no formato *.stl*, com todos os pontos, o plano e os eixos ocultos e a opção “preenchimento sólido” habilitada, da mesma forma que as demais construções. Em seguida, basta abrir a construção no *software* de fatiamento, realizar as últimas configurações de impressão, fatiar o sólido e imprimi-lo.

3.3.4 Dodecaedro

A construção do dodecaedro se dá de forma semelhante ao octaedro, com a diferença de que o polígono regular, correspondente às faces, é um pentágono. Assim, criam-se dois pontos quaisquer em qualquer uma das janelas de visualização e, em seguida, com a ferramenta “Polígono regular”, disponível na aba de ferramentas da janela de visualização 2D, deve-se construir um polígono regular com 5 vértices, ou seja, um pentágono (Figura 39).

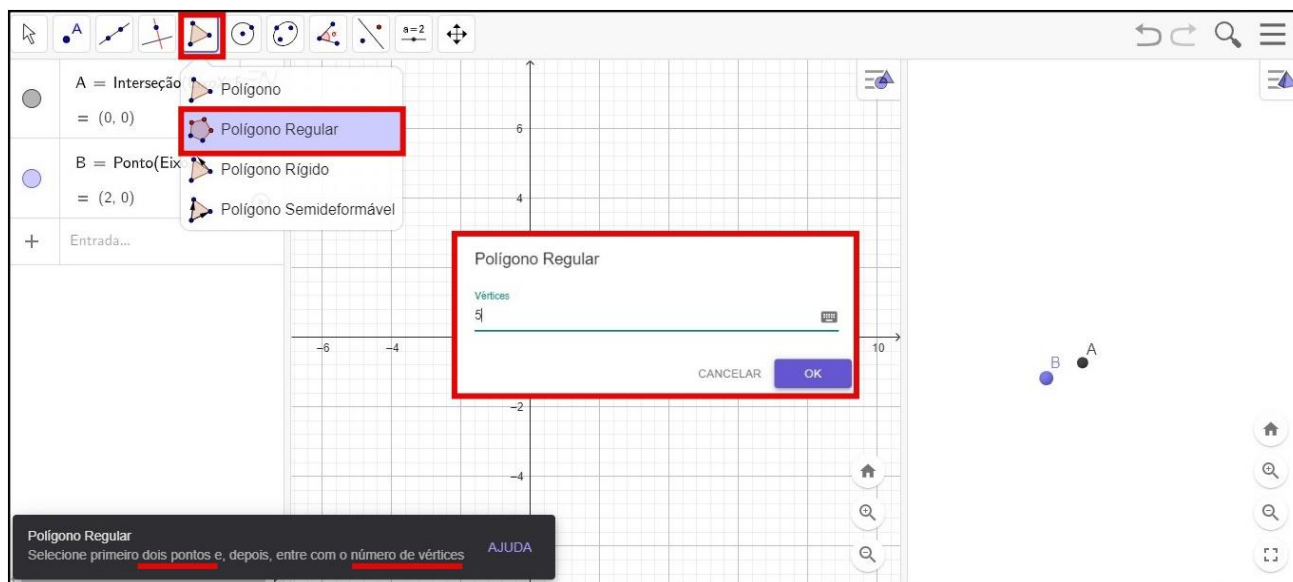


Figura 39: Construção do pentágono.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Na caixa de entrada, digita-se “Dodecaedro” e seleciona-se a opção “Dodecaedro (Pentágono regular)”. Em seguida, onde se lia “Pentágono regular” digita-se o nome do polígono criado, neste caso, “pol1” (Figura 40).

Ao finalizar este processo, o dodecaedro aparecerá na janela de visualização 3D, conforme ilustrado na Figura 41.

Finalizada a construção, é preciso baixá-la no formato *.stl* com a opção “preenchimento sólido” habilitada, a fim de evitar erros durante a impressão. Finalmente, basta abrir a construção no *software* de fatiamento, realizar as últimas configurações de impressão, fatiar o sólido e imprimi-lo.

3.3.5 Icosaedro

Para construção do icosaedro, inicia-se com a construção do polígono da face, que é um triângulo equilátero. Como nos outros sólidos, primeiramente criam-se dois pontos quaisquer em qualquer uma das janelas de visualização e, utiliza-se a ferramenta “Polígono regular”, indicando o número de vértices desejados, neste caso três (Figura 42).

Posteriormente, na caixa de entrada, escreve-se “icosaedro”, seleciona-se a opção “Icosaedro (Triângulo equilátero)” e digita-se o nome do polígono criado, neste caso, “pol1”, conforme ilustrado na Figura 43.

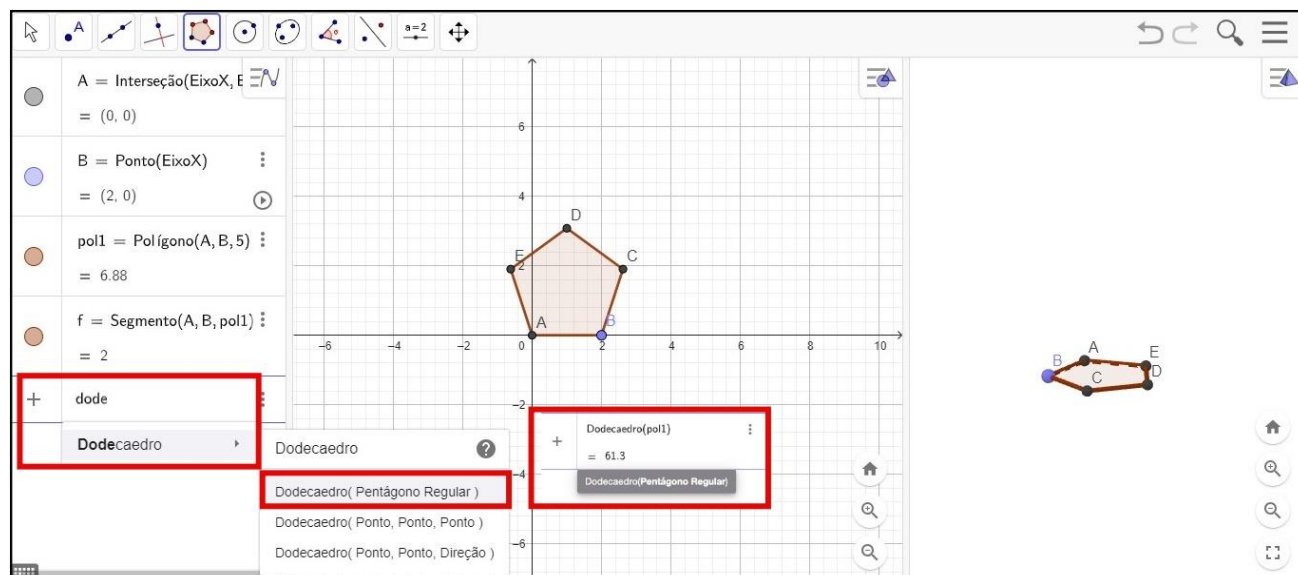


Figura 40: Construção do dodecaedro.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

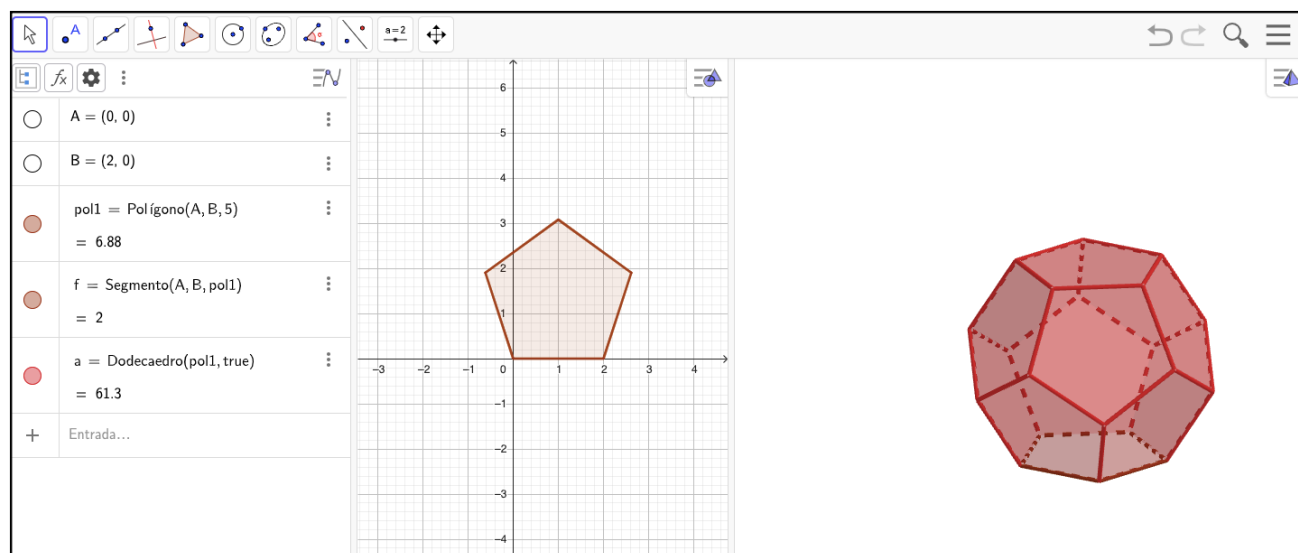


Figura 41: Dodecaedro finalizado.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Ao finalizar este processo, o icosaedro será gerado na janela de visualização 3D. Em seguida, realiza-se o *download* do arquivo *.stl* através da opção “Baixar como...” e “impressão 3D (*.stl*)” disponível na barra de menus. Após selecionar a opção “Preenchimento sólido”, dá-se o nome desejado para a construção e realiza-se o *download*. O passo a passo para a impressão se dá de forma análoga às demais construções, efetuando as configurações do objeto na *software* de fatiamento e posterior impressão.

Apesar de realizar um panorama geral sobre como construir os poliedros regulares, acredita-se que o foco deva ser dado ao icosaedro, pois se trata do sólido regular com a visualização mais difícil, por possuir 20 faces. Nesse sentido, a Figura 44 ilustra o comparativo entre o poliedro construído no GeoGebra e a sua impressão 3D.

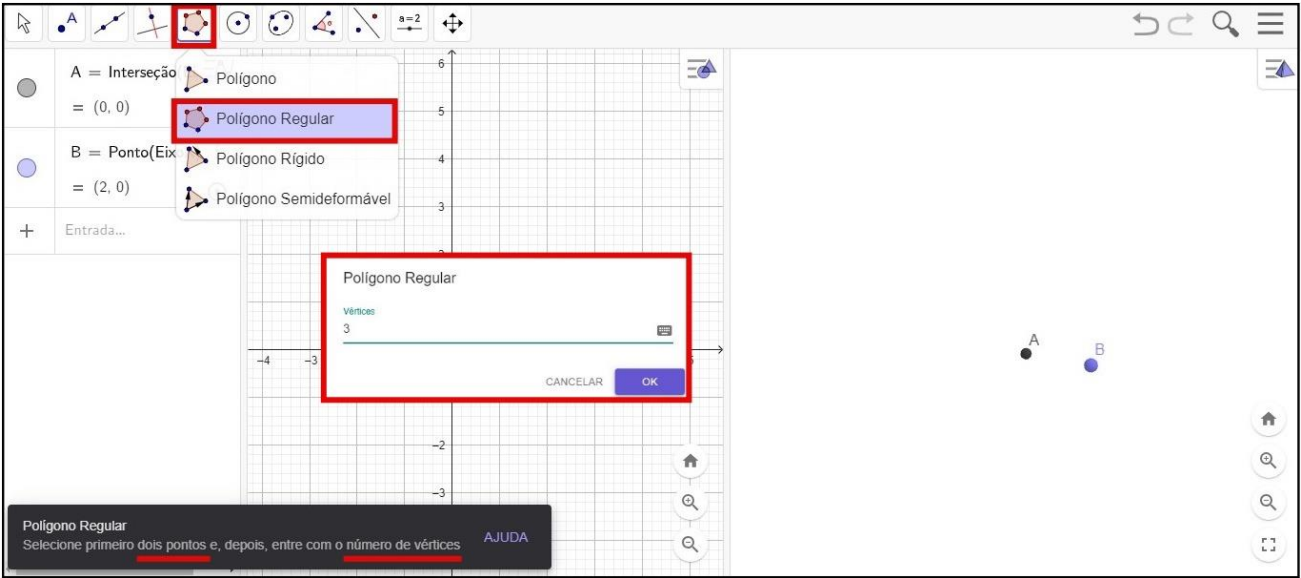


Figura 42: Construção do triângulo equilátero.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

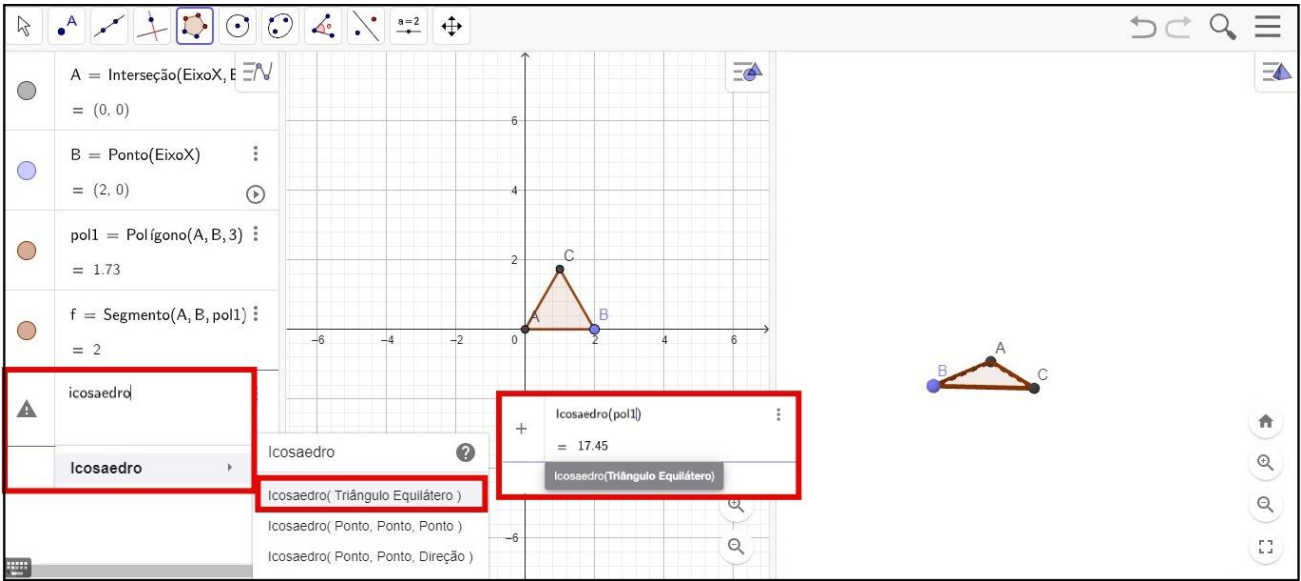


Figura 43: Construção do icosaedro.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Com isso, espera-se que os participantes do minicurso tenham adquirido domínio acerca das construções feitas e consigam reproduzir novamente quando desejarem. Além disso, todos os sólidos produzidos no GeoGebra serviram como base para o reconhecimento da interface 3D do *software* e suas possibilidades, preparando o público para a próxima construção do minicurso e para se aventurar na produção de figuras e objetos matemáticos tridimensionais.

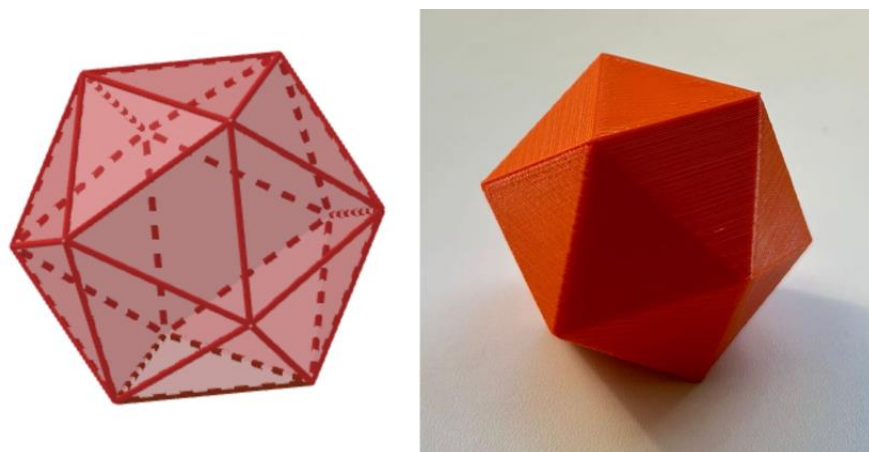


Figura 44: Comparativo entre o icosaedro construído no GeoGebra e impresso.

Fonte: Fonte: Acervo do grupo (2023).

3.4 Tetraedro dividido em dois sólidos congruentes

Esta peça foi escolhida por ser considerada um desafio geométrico que estimula as habilidades de visualização espacial. O desafio consiste em montar um tetraedro regular com os dois poliedros disponíveis. Para sua construção no GeoGebra, assim como nos outros exemplos, é preciso que se abra a janela de visualização 3D e recomenda-se ocultar os eixos e malhas das janelas de visualização para melhor enxergar as construções.

Na janela de visualização 2D, seleciona-se a opção “Polígono regular” e constroi-se um triângulo equilátero, o qual o *software* irá denominar como “pol1”. Para construir o tetraedro, utiliza-se a janela de álgebra, digitando “Tetraedro”, selecionando “Tetraedro (Triângulo equilátero)” e escrevendo “pol1” onde se lia “Triângulo equilátero”, para que o tetraedro tenha como base o triângulo equilátero criado (Figura 45).

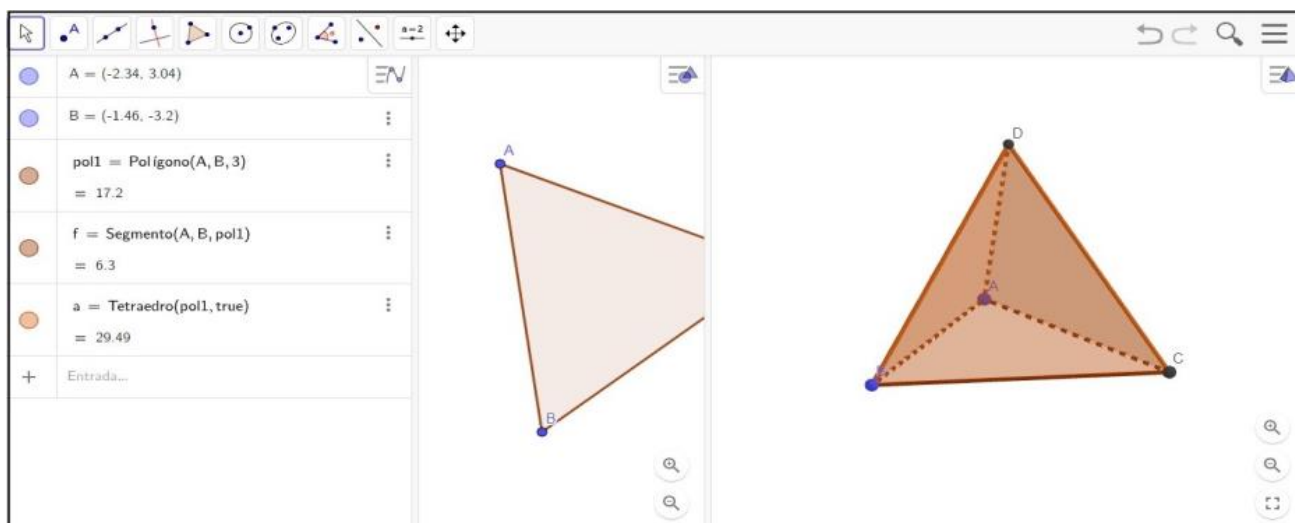


Figura 45: Tetraedro.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Para facilitar os passos futuros, recomenda-se deixar o tetraedro com transparência zero. Para isso, seleciona-se o tetraedro na janela de álgebra, e nos três pontos à direita, clica-se em configurações (Figura 46).

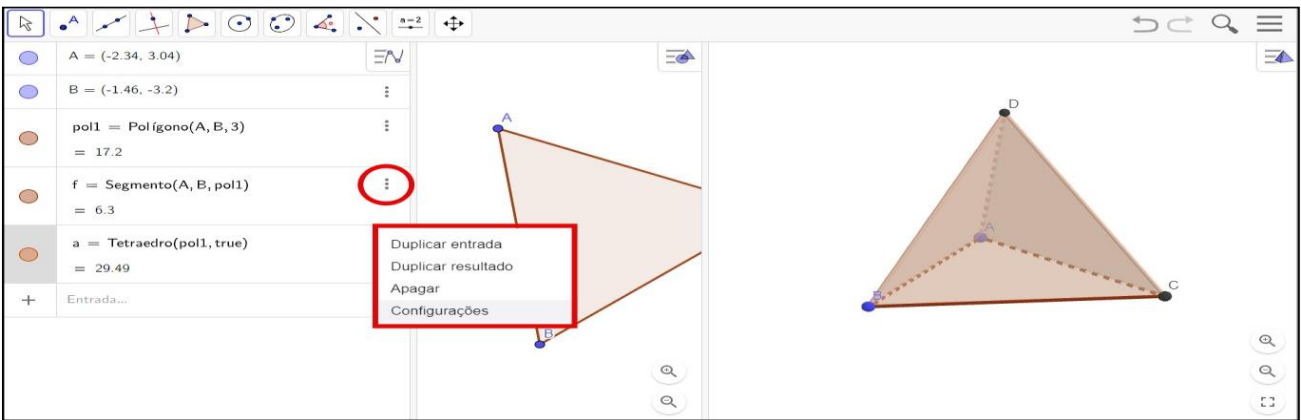


Figura 46: Configurações do tetraedro.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Uma aba na direita da tela abrirá, e nesta janela seleciona-se “Cor”, onde será arrastado o controle deslizante “Transparência” até o 0. Para prosseguir, basta fechar esta janela (Figura 47).

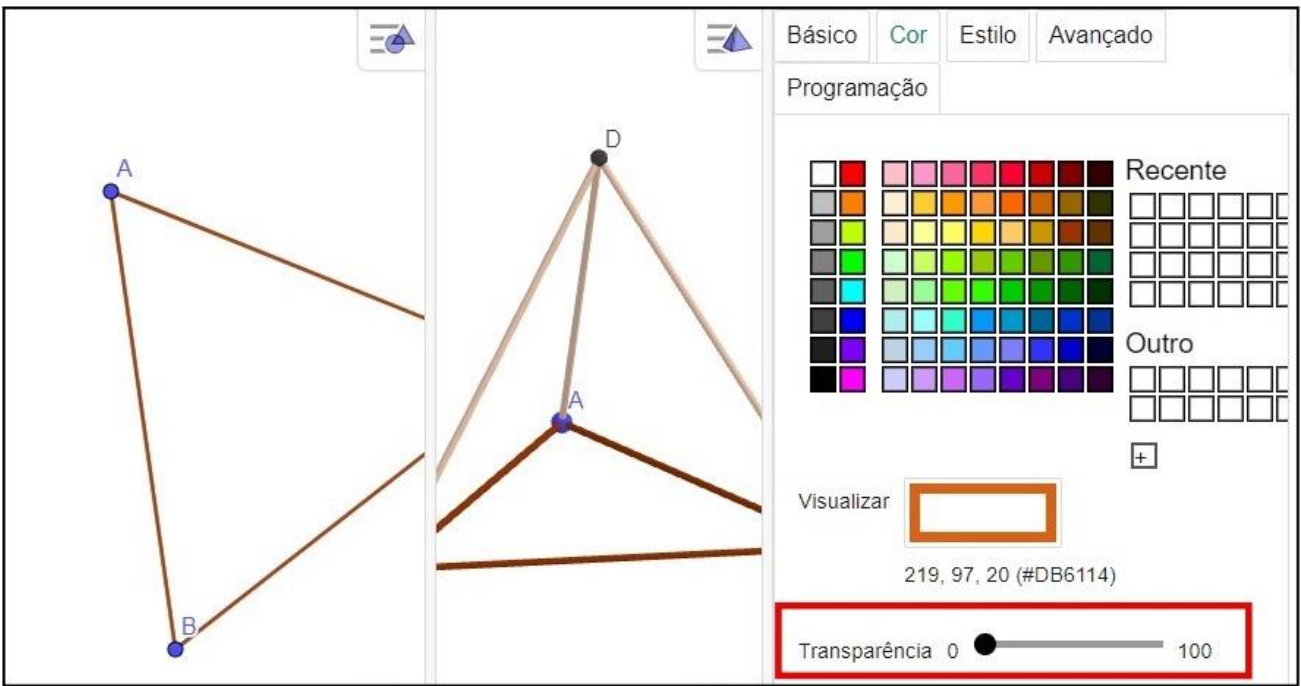


Figura 47: Alteração da transparência do tetraedro.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Agora, deve-se construir um plano que corta o tetraedro nos pontos médios de suas arestas. Como um plano é definido por 3 pontos, deve-se marcar tais pontos. Com a ferramenta “Ponto médio”, criam-se os pontos médios E , F e G de AD , BD e AC , respectivamente (Figura 48).

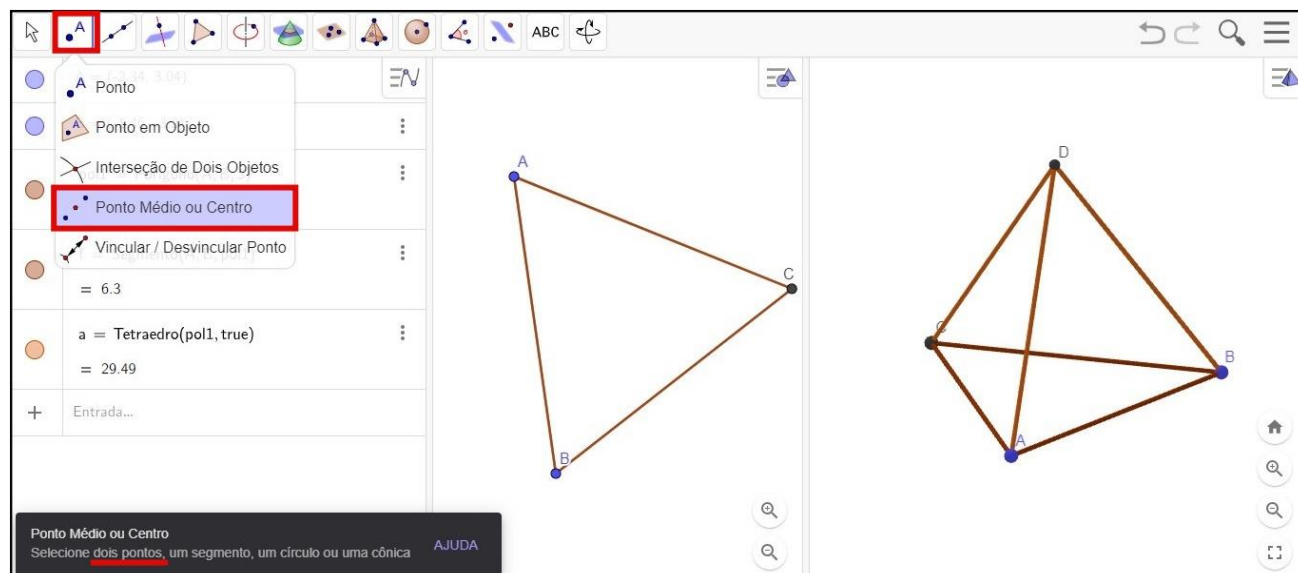


Figura 48: Construção dos pontos médios.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Em seguida, com a ferramenta “Plano por três pontos”, selecionam-se os pontos criados e será gerado o plano p . Este plano divide o tetraedro em dois sólidos congruentes, conforme a Figura 49.

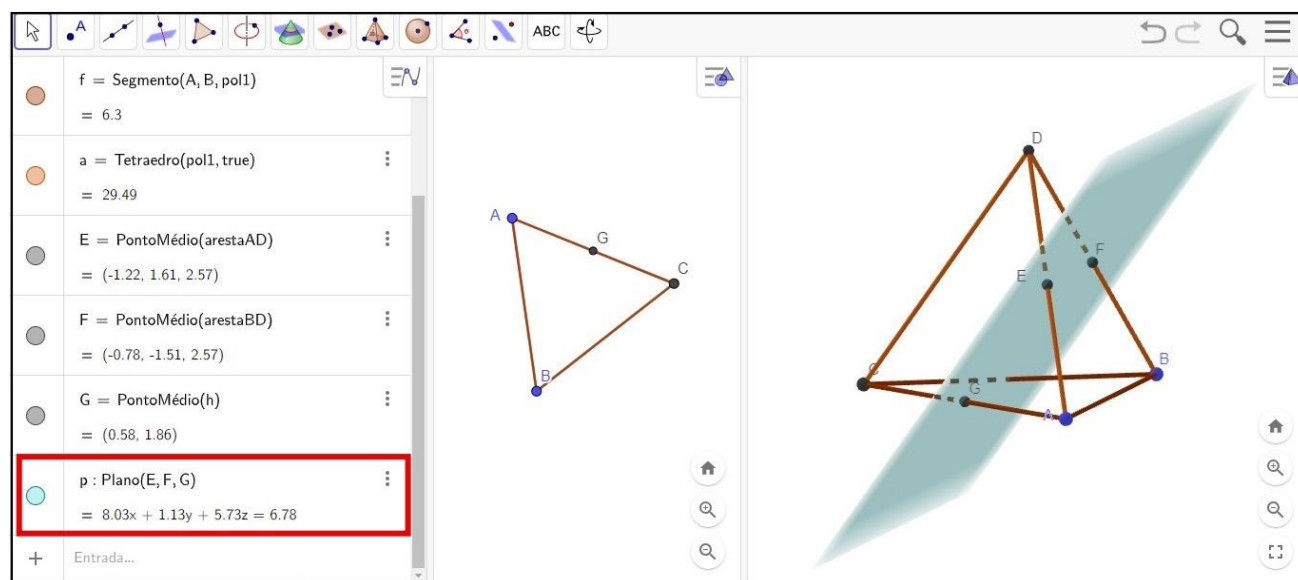


Figura 49: Plano por três pontos.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Para construir os sólidos congruentes, precisamos da intersecção do plano p com o tetraedro. Na caixa de entrada, digita-se “Intersecção” e seleciona-se “Intersecção (objeto, objeto)”. Os objetos a serem inseridos são o tetraedro, denominado pelo GeoGebra como a e o plano p (Figura 50).

Após isto, para melhor visualização, oculta-se o plano p clicando sobre ele com o botão direito do *mouse* e desmarcando a opção “Exibir objeto”, conforme a Figura 51.

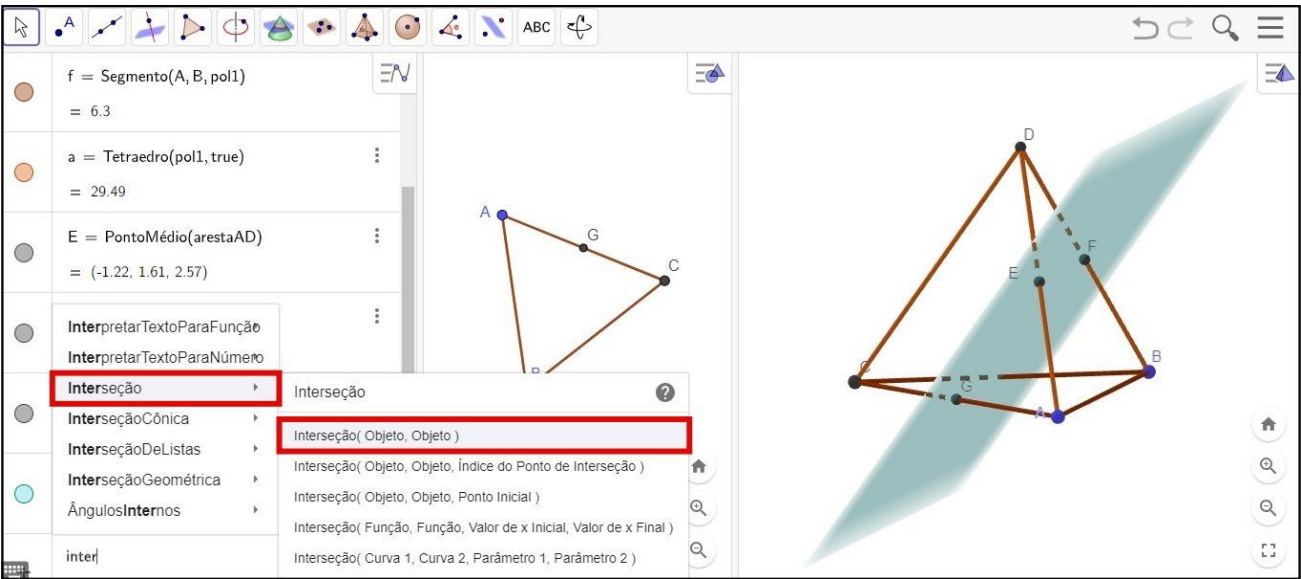


Figura 50: Intersecção entre o plano e o tetraedro.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

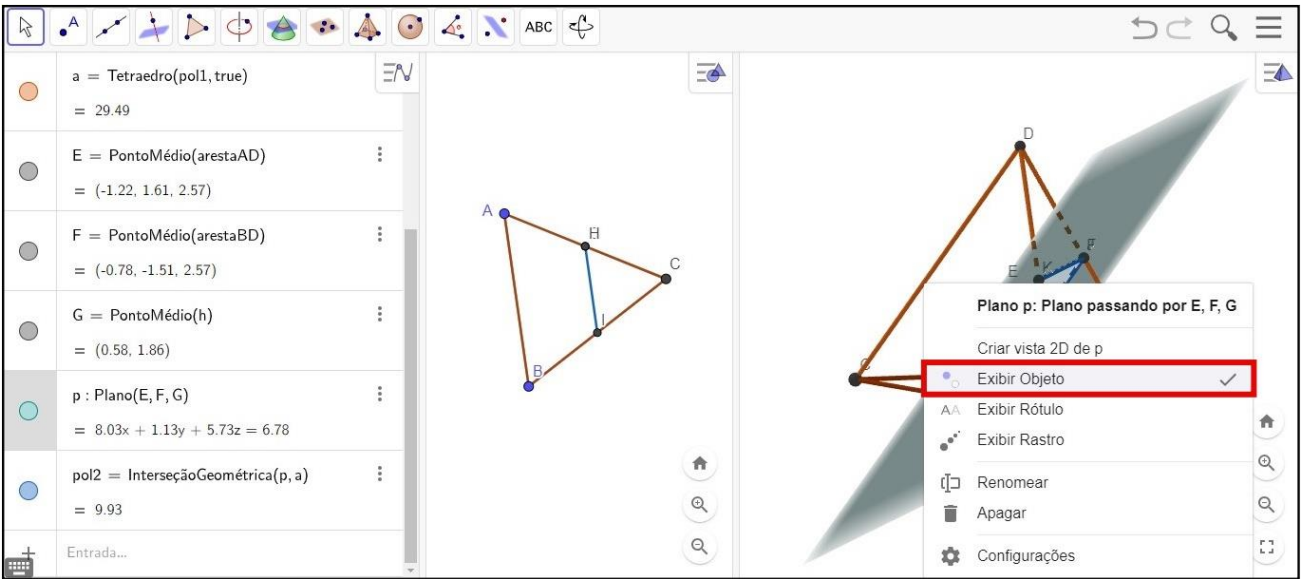


Figura 51: Ocultar o plano p .

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Como os dois sólidos são congruentes, trabalha-se com apenas um deles, ficando a critério do participante escolher com qual dos dois irá trabalhar. Neste caso, iremos trabalhar com a face ABD para frente, como na Figura 52.

O que se necessita para formar o sólido é montá-lo através de suas faces. Então, constroem-se os polígonos das faces com a ferramenta “Polígono”. Os polígonos que devem ser construídos são aqueles formados pelos vértices KAH , JBH , $KABJ$ e $KHIJ$, que em conjunto com o “ $pol2$ ” (polígono da intersecção do plano com o tetraedro) formarão o sólido desejado (Figura 53).

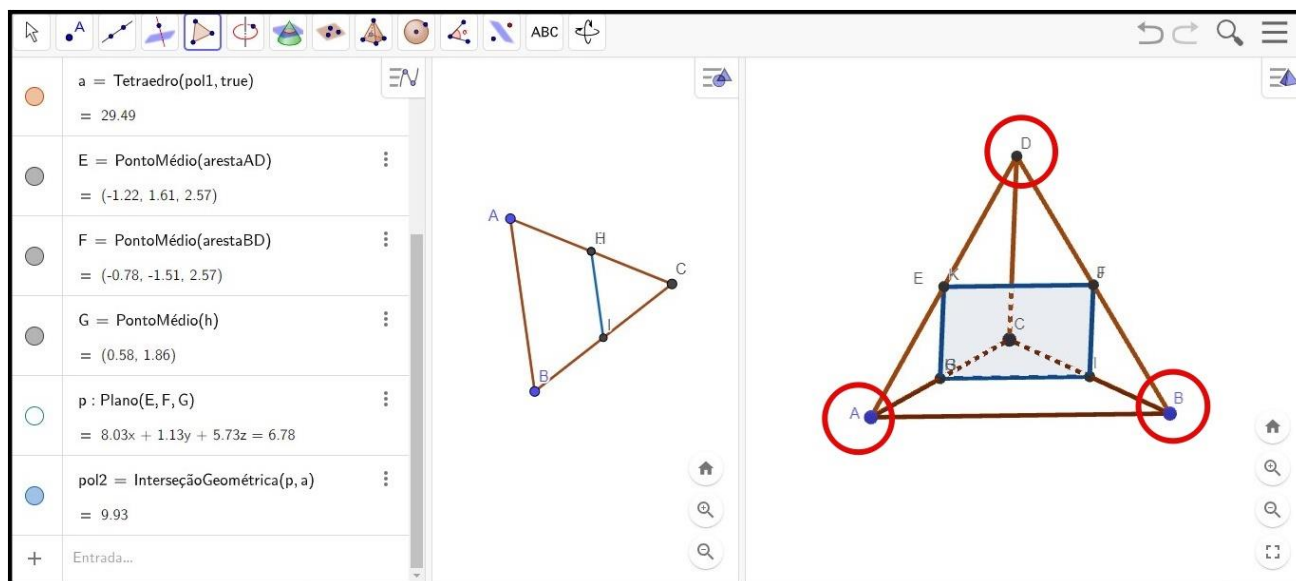


Figura 52: Posicionamento correto do tetraedro.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

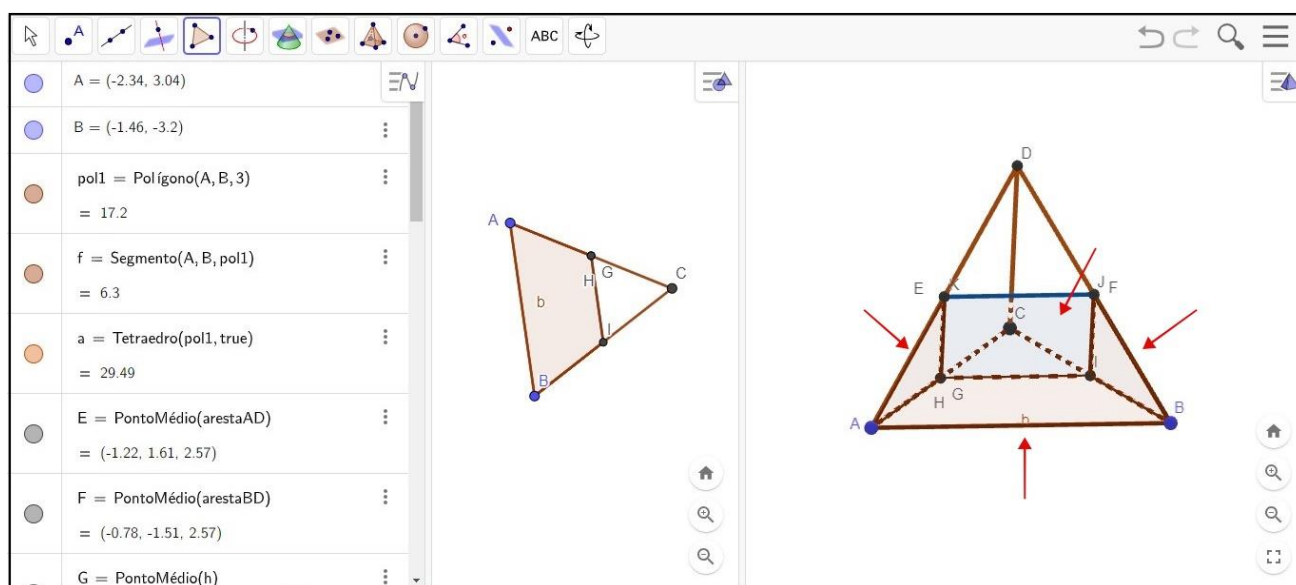


Figura 53: Construção dos polígonos das faces

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Após todos os polígonos serem construídos, recomenda-se ocultar o tetraedro para visualizar apenas a peça desejada. Para isso, basta clicar no círculo colorido correspondente ao tetraedro na caixa de entrada (Figura 54).

Finalmente, para baixar o objeto, basta clicar à direita da tela, nas três barras, seleciona-se a opção “Impressão 3D (.stl)” na aba “Baixar como...”. Após selecionar a opção “Preenchimento sólido” e nomear o projeto como desejado, basta clicar no botão “Exportar”. O sólido construído está ilustrado na Figura 55.

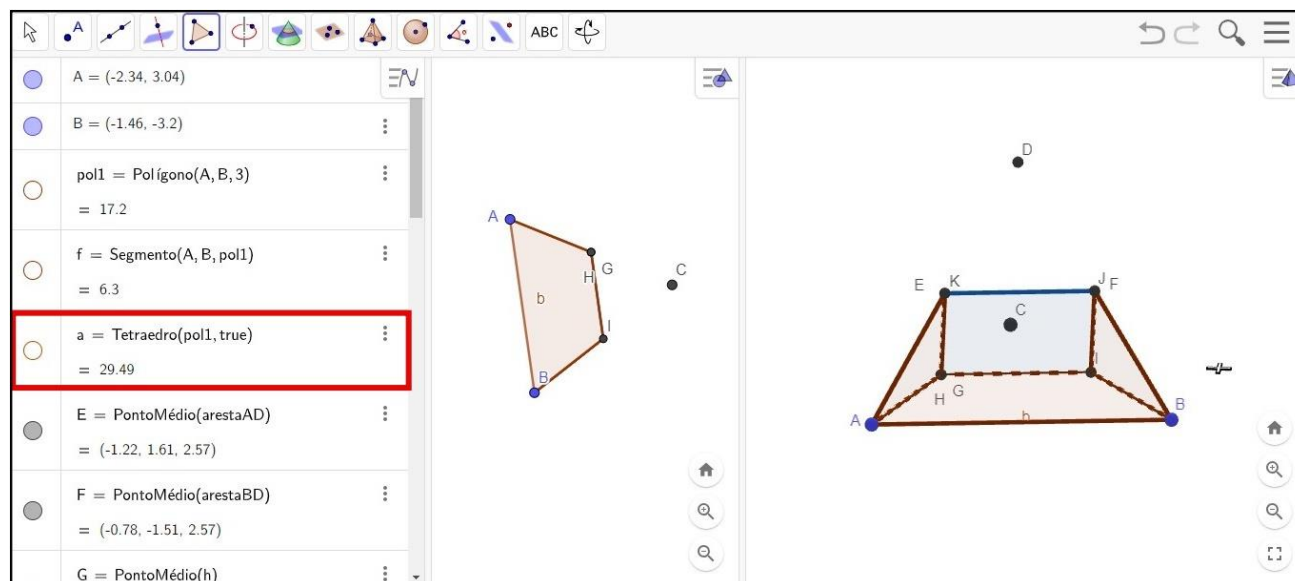


Figura 54: Ocultar o tetraedro

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).



Figura 55: Sólido impresso.

Fonte: Acervo do grupo (2023).

3.5 Prisma de base triangular dividido em três pirâmides

O prisma de base triangular dividido em três pirâmides foi a peça escolhida para protagonizar o minicurso por possuir uma aplicabilidade na sala de aula de Matemática, em geral no Ensino Médio, quando o professor mostra para os alunos que o volume de uma pirâmide é um terço do volume do prisma.

Para sua construção no GeoGebra, utiliza-se a janela de visualização 3D, onde o prisma de base triangular será construído primeiramente e, posteriormente, será dividido em três pirâmides. Inicialmente, cria-se um triângulo ABC com a ferramenta polígono, disponível na janela de visualização 2D. O *software* irá automaticamente denominar este triângulo de “t1” (Figura 56).

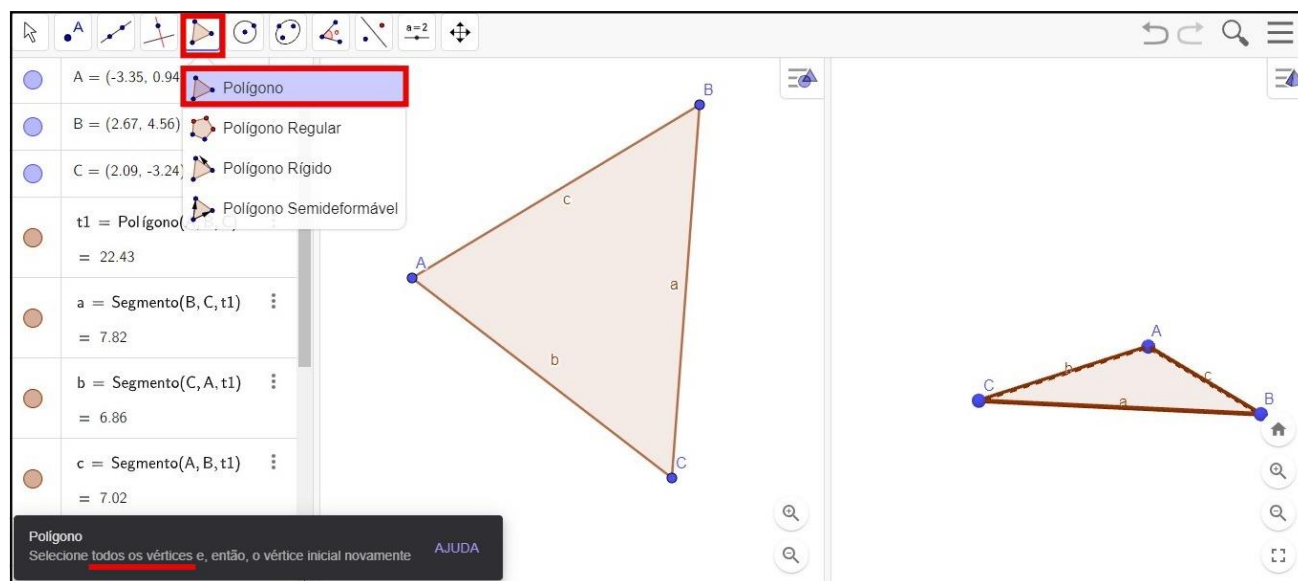


Figura 56: Construção do polígono base do prisma.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

A seguir, cria-se um controle deslizante denominado h , com variação de 0 a 5. Este irá determinar a altura do prisma, portanto pode variar conforme o desejado. Na caixa de entrada, digita-se prisma e seleciona-se a opção “Prisma (polígono, altura)”, digitando “ $t1$ ” em polígono e “ h ” em altura, conforme a Figura 57.

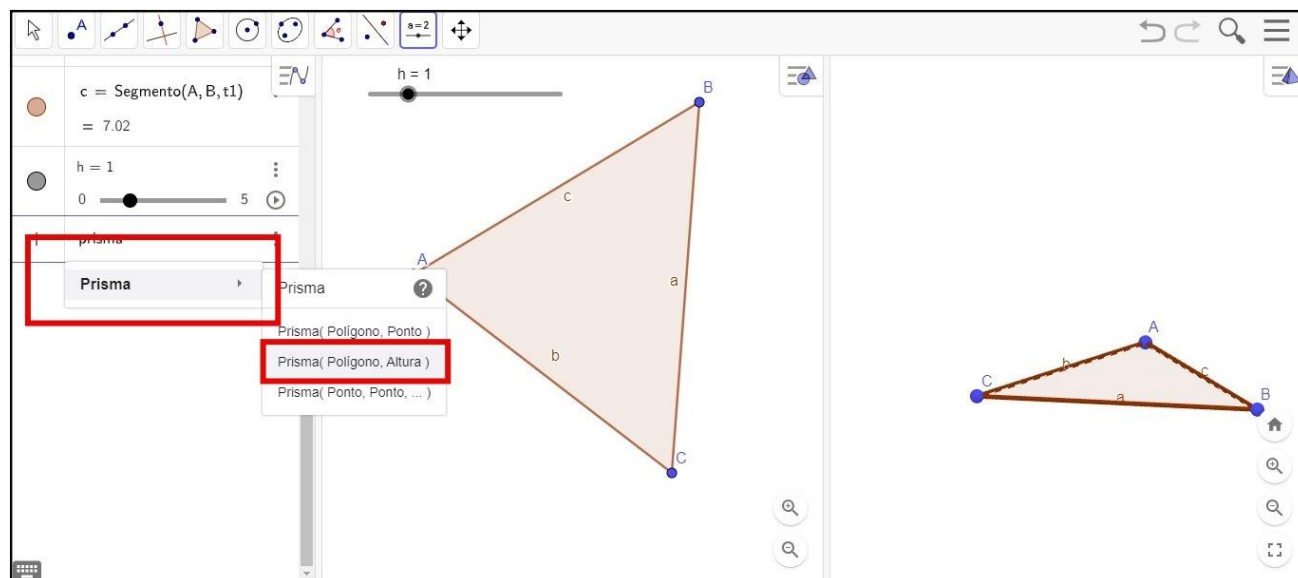


Figura 57: Construção do prisma.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

O próximo passo é criar as pirâmides que seccionam o prisma. Na caixa de entrada, digita-se pirâmide e seleciona-se a opção “Pirâmide (ponto, ponto, ponto, ...)”. Criaremos três pirâmides que o *software* irá denominar de e , f e g , respectivamente (Figura 58).

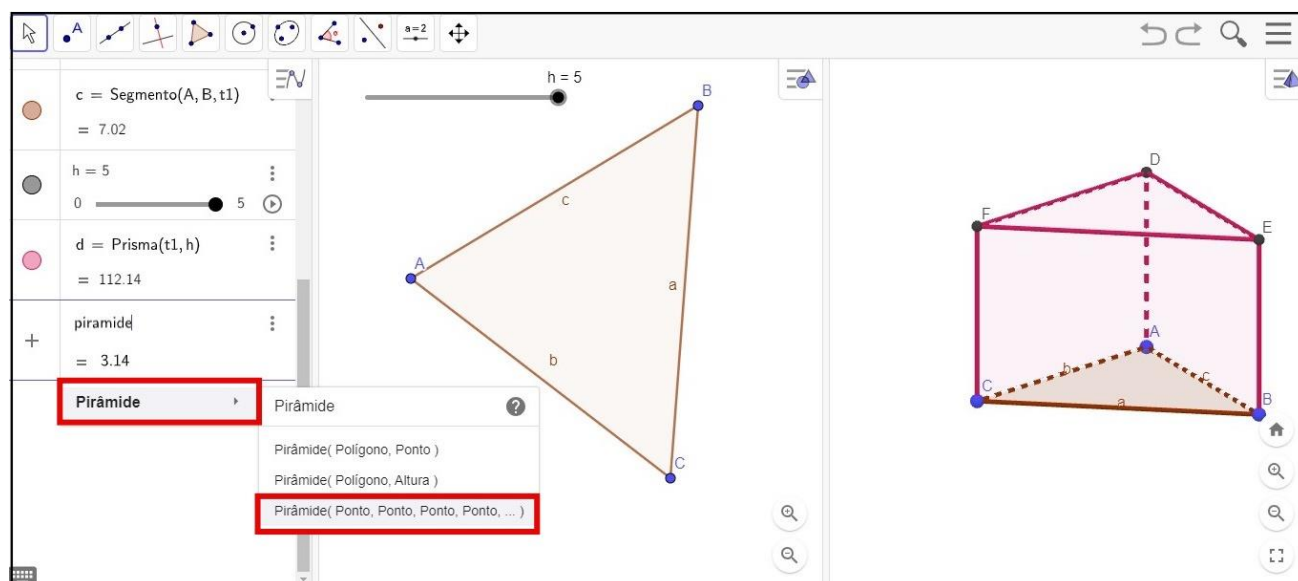


Figura 58: Construção das pirâmides.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Para separar as pirâmides do prisma, cria-se outro controle deslizante, denominado “t”, variando de 0 a 1, que será responsável por transladar as pirâmides posteriormente (Figura 59).

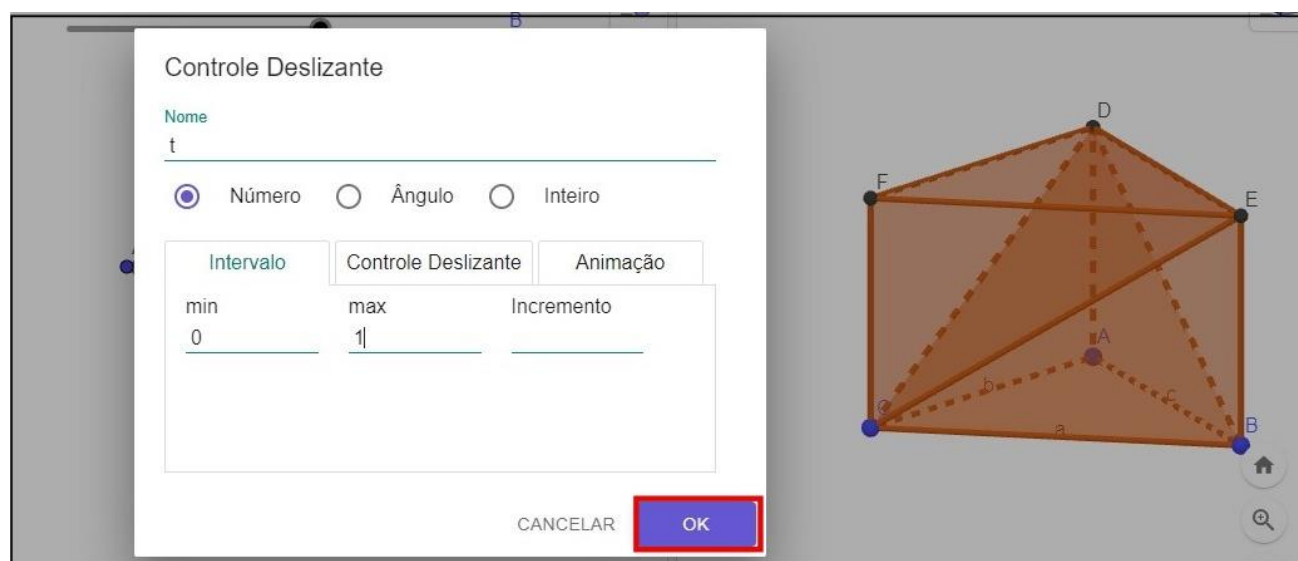


Figura 59: Controle deslizante relacionado às pirâmides.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Agora, para que esta translação ocorra, precisa-se de vetores. Para isso, criam-se os pontos que irão compor estes vetores. Sobre o segmento BC , cria-se um ponto G com a ferramenta “Ponto”, e em seguida, com a ferramenta “Segmento”, cria-se o segmento i , ligando os pontos A e G . Em seguida, cria-se um segmento j unindo os pontos A e C (Figura 60).

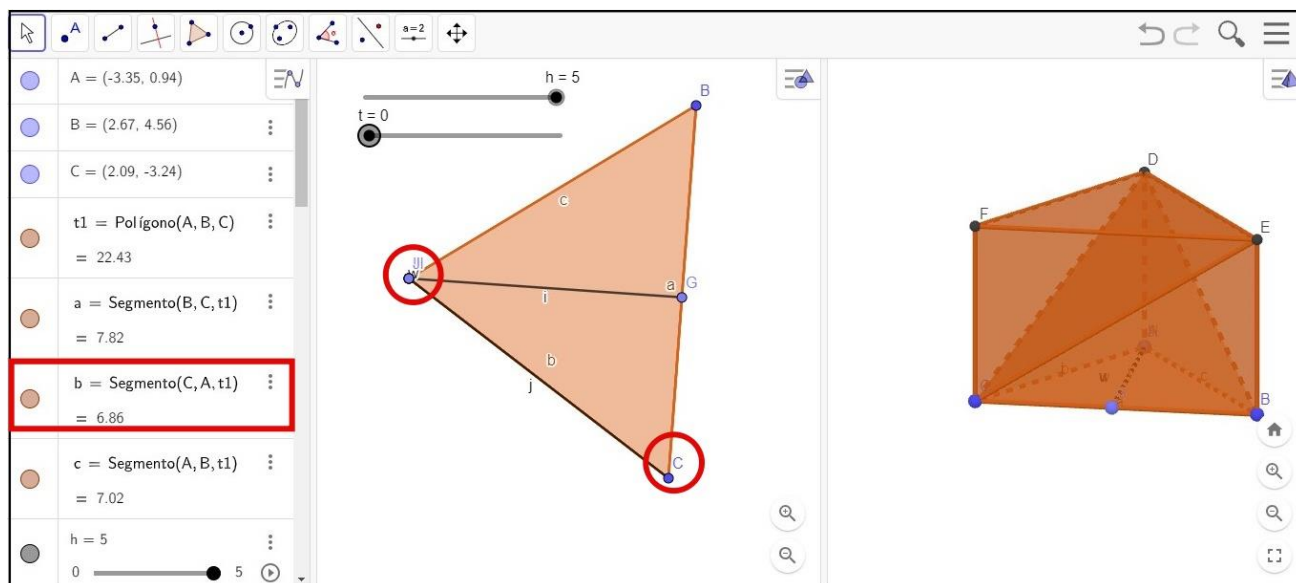


Figura 60: Criação dos segmentos i e j .

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Na caixa de entrada, digita-se ponto e seleciona-se a opção “Ponto (objeto, parâmetro)”. Iremos criar os pontos H , I e J , digitando “ponto (c, t)”, “ponto (i, t)” e “ponto (j, t)”, respectivamente (Figura 61).

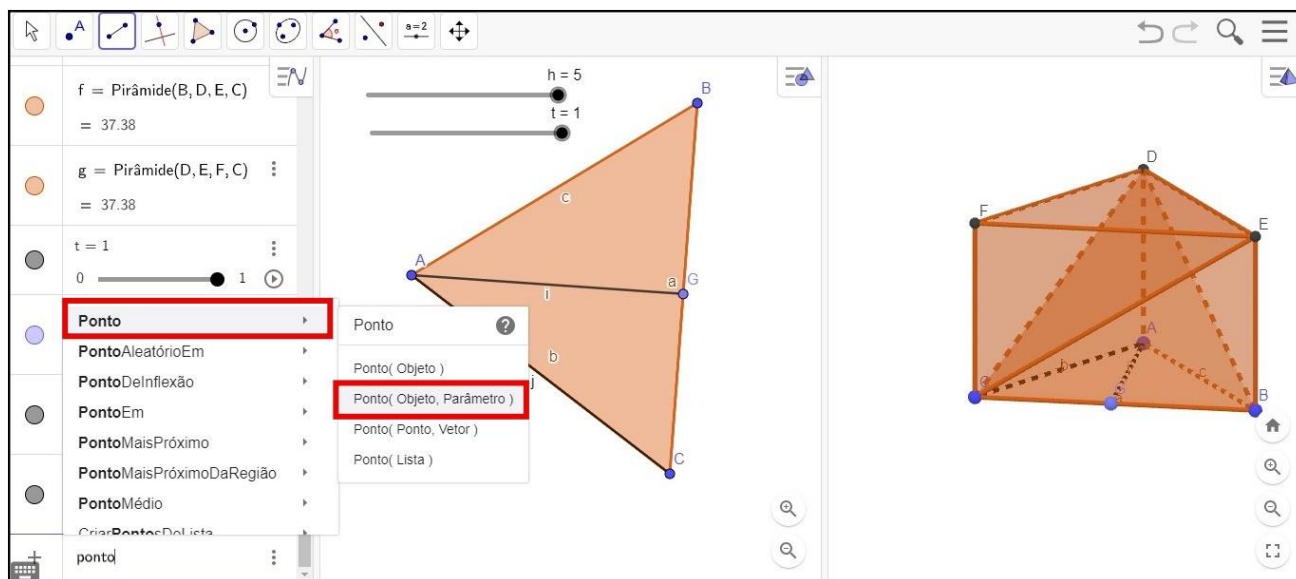


Figura 61: Criação dos pontos H , I e J .

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Para criar os vetores, na caixa de entrada digita-se “Vetor” e seleciona-se a opção “Vetor (ponto inicial, ponto final)”. Serão três vetores: $u = (I, A)$, $v = (A, H)$ e $w = (A, J)$. Por fim, basta que sejam transladadas as pirâmides, o que acontece quando se vinculam as pirâmides aos vetores. Então, na caixa de entrada, digita-se “Transladar” e seleciona-se a opção “Transladar (objeto, vetor)”. Vincula-se a pirâmide e ao vetor u digitando “Transladar (e, u)”. Da mesma forma, vinculam-se as pirâmides f e g aos vetores v e w , respectivamente, conforme ilustrado na Figura 62.

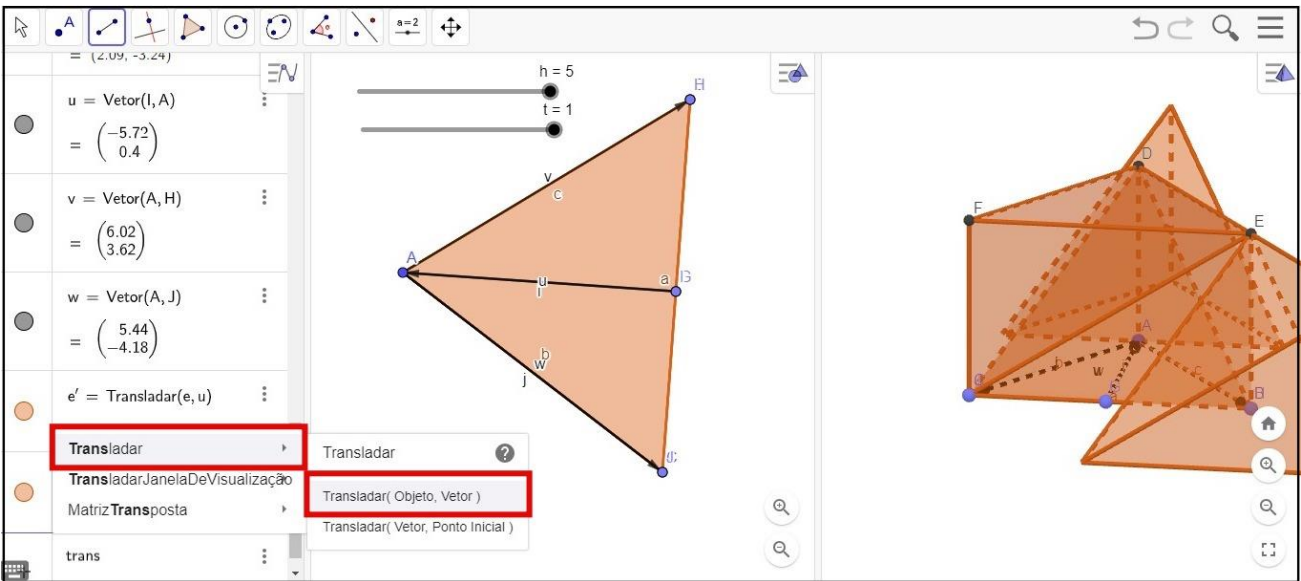


Figura 62: Vincular objeto ao vetor.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Agora, deve-se ocultar os eixos, todos os pontos, polígonos e o prisma, pois iremos imprimir apenas as pirâmides decompostas. Pode-se ocultar tais objetos na janela de álgebra, clicando no círculo à esquerda de cada objeto, ou clicando com o botão direito do *mouse* sobre cada um dos objetos construídos e desativando a opção “Exibir objeto”, conforme ilustra a Figura 63.

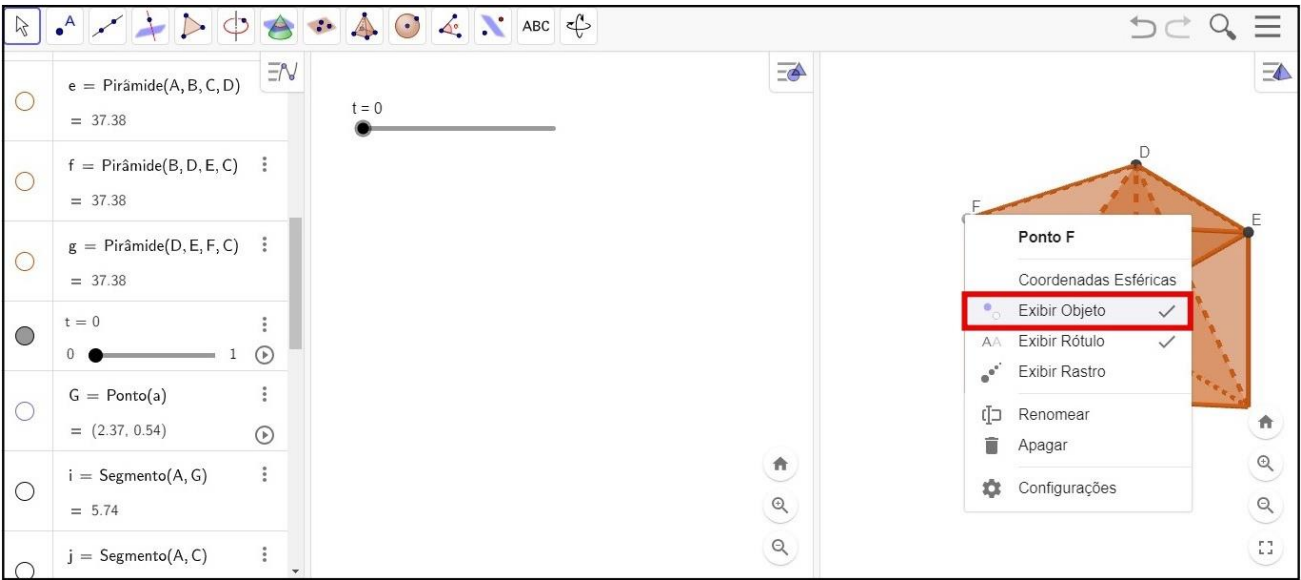


Figura 63: Ocultar pontos e demais informações.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Para visualizar a decomposição do prisma, basta variar o controle deslizante, denominado t (Figura 64).

Ao salvar o arquivo *.stl*, é importante manter o controle deslizante t em 1, para que as pirâmides não se encostem e não haja erros de impressão. Para efetuar o *download* da construção, clica-se nas

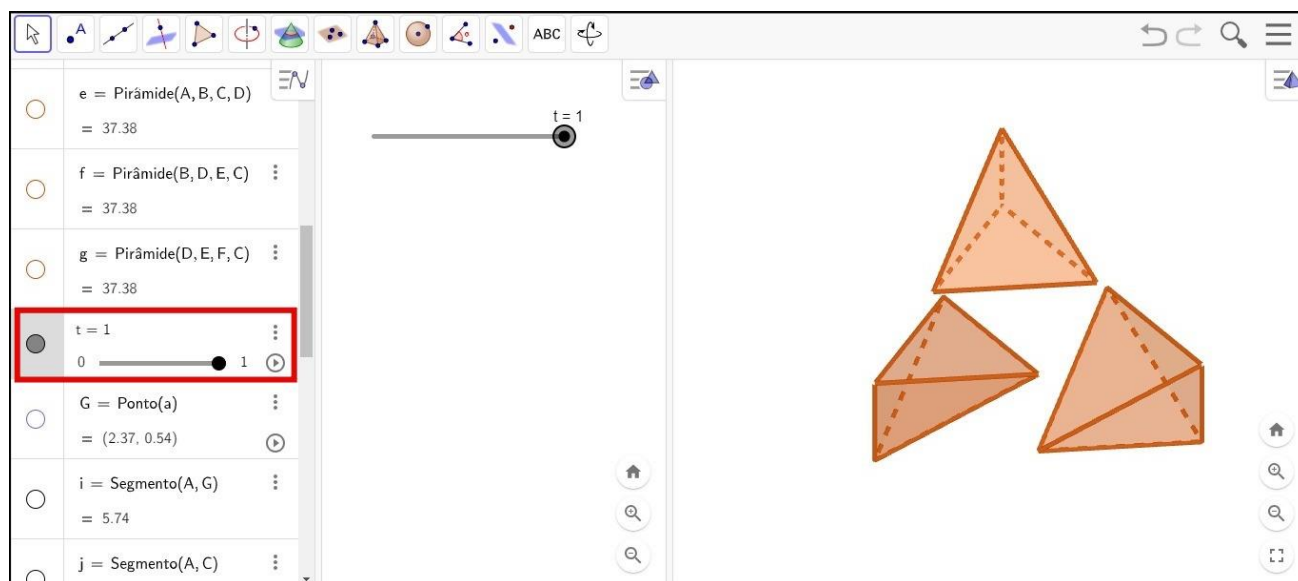


Figura 64: Pirâmides transladadas.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

três barras horizontais à direita da tela e seleciona-se a opção “Impressão 3D (.stl)” na aba “Baixar como...”, sem se esquecer de selecionar a opção “Preenchimento sólido”. Após, basta nomear o projeto como desejado e realizar o *download*.

Após abrir o arquivo .stl no *software* de fatiamento, existe a necessidade de observar qual a posição mais adequada das peças, para que a impressão ocorra da melhor forma possível. No caso da construção realizada como exemplo, pode-se observar que uma das peças está com a parte mais fina apoiada a mesa (Figura 65).

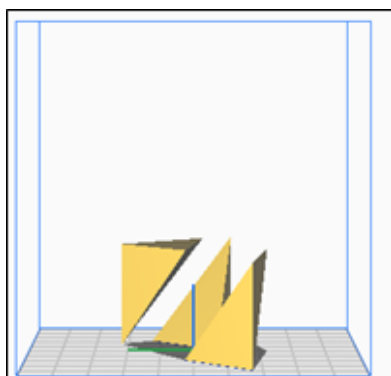


Figura 65: Posicionamento das peças.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

O posicionamento das peças pode representar um desafio durante o processo de impressão, uma vez que podem ser necessários suportes e isso pode afetar a qualidade da peça. Por isso, é importante separar as diferentes partes para facilitar o manuseio e garantir melhores resultados. No entanto, o *software* Cura não reconhece que o arquivo contém três componentes distintos, o que torna difícil a manipulação individual de cada uma delas.

Para separar as peças, é necessário retornar ao *software* GeoGebra e salvar cada pirâmide como arquivos separados no formato *.stl*, conforme explicado anteriormente. Isso oferece duas opções: é possível imprimir as três peças simultaneamente ou imprimir uma peça de cada vez. Se a decisão for imprimir todas as peças ao mesmo tempo, é preciso abrir o aplicativo Cura 3D, acessar a pasta localizada na parte superior esquerda, selecionar os arquivos desejados e clicar em “Abrir”, conforme mostrado na Figura 66.

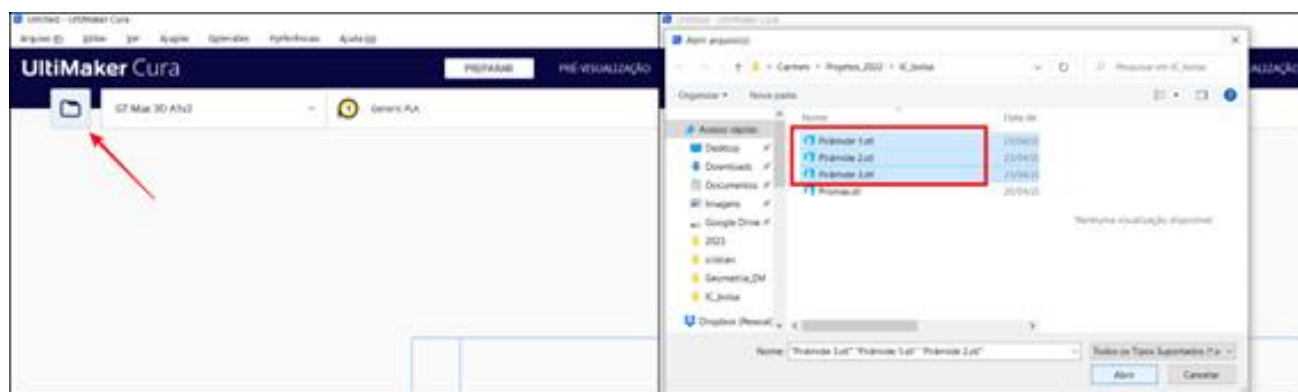


Figura 66: Abrir arquivos no Cura 3D.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Dessa forma, torna-se viável manipular individualmente cada uma das pirâmides. É crucial garantir que todas as peças estejam na mesma escala, o que pode ser ajustado tanto no *software* Cura 3D quanto no GeoGebra. Além disso, é necessário que todas as peças estejam adequadamente apoiadas na mesa de impressão, o que nesse caso implicou em mover e rotacionar as peças, como ilustra a Figura 67.

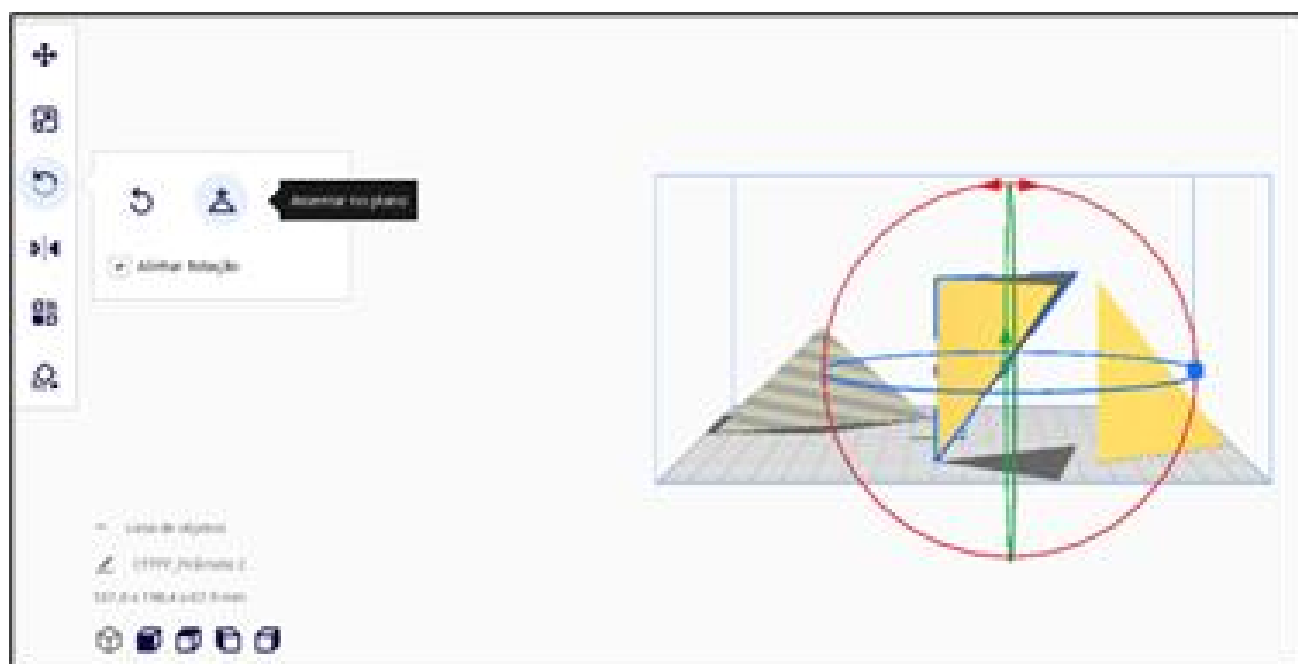


Figura 67: Ajuste das peças.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Observa-se que é possível ver as peças de diferentes perspectivas, bastando clicar nas vistas, conforme a Figura 68.

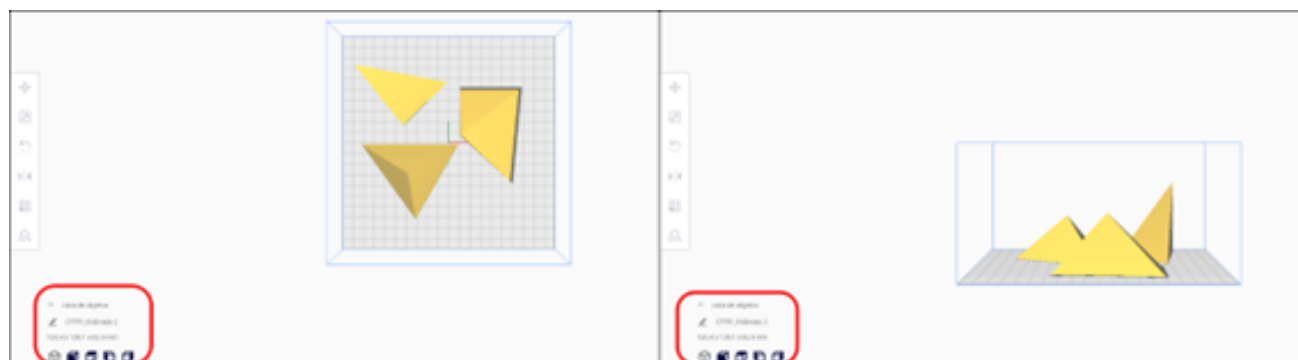


Figura 68: Visualização das peças.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Após realizar os ajustes que a construção necessita, deve-se clicar em “Fatiar”. Ao fazer isso, uma aba irá aparecer, exibindo informações sobre o tempo estimado de impressão e a quantidade de material que será utilizada, como ilustra a Figura 69.

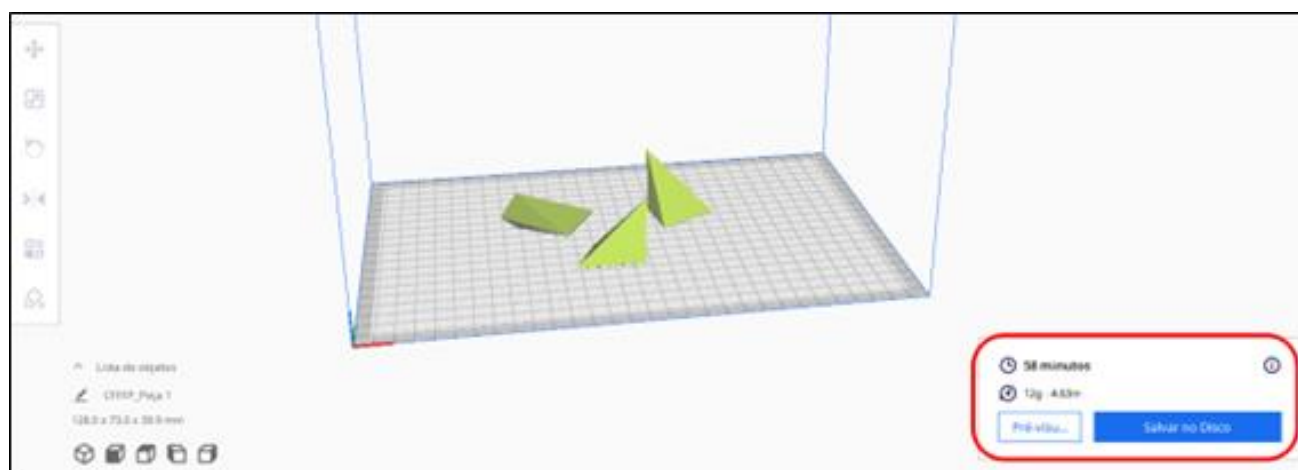


Figura 69: Processo de fatiamento.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Ao clicar em “Pré-visualizar” é possível ter uma ideia das camadas que a impressora irá fazer durante o processo (Figura 70).

Assim que o processo de fatiamento for concluído, basta salvar o arquivo com a extensão G-code e transferi-lo para um dispositivo que seja compatível com a impressora 3D. A Figura 71 ilustra um comparativo entre a construção feita no GeoGebra e os sólidos impressos.

Observa-se que as possibilidades apresentadas apenas incluem sólidos geométricos que podem ser utilizados em sala de aula do ensino básico. Utilizando de equações, pode-se construir superfícies tridimensionais no GeoGebra que também podem ser impressas. Além disso, existe a possibilidade de encontrar peças em alguns repositórios, e é exatamente disso que trata o próximo capítulo.

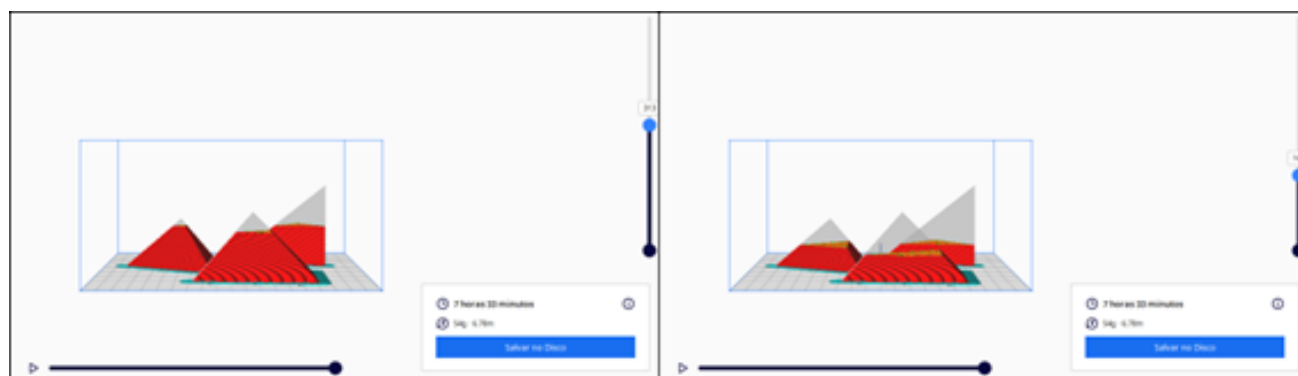


Figura 70: Fatiamento.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

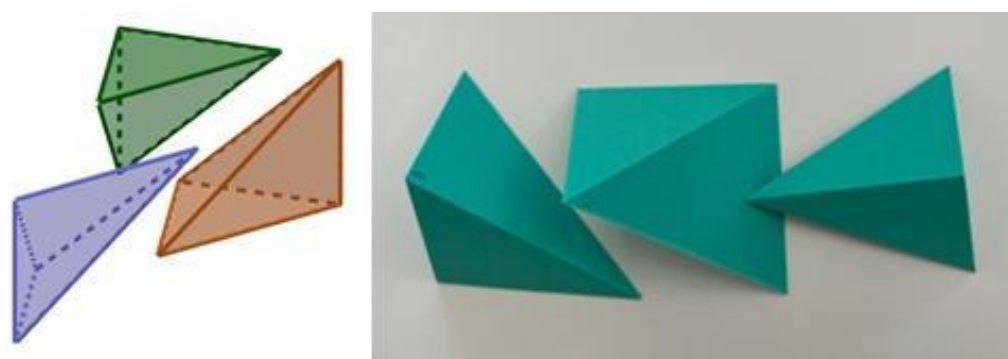


Figura 71: Prisma fatiado em 3 pirâmides.

Fonte: Acervo do grupo (2023).

Repositório



Um repositório é um site em que diferentes arquivos são armazenados, preservados e compartilhados com maior facilidade. Existem repositórios em que é possível acessar tais arquivos de forma gratuita ou até mesmo compartilhar os próprios arquivos. Observa-se que também existem repositórios pagos, que para ter acesso e fazer o *download* dos arquivos lá disponíveis, é necessário pagar um determinado valor.

Na área da tecnologia de impressão 3D existem diversos repositórios de arquivos *.stl* de fácil acesso e gratuitos na internet, como por exemplo Myminifactory¹, stlfinder², Cults³, entre outros. No que segue, apresenta-se o repositório *Thingiverse*, conforme apresentado aos participantes do minicurso. Observa-se que este é um dos repositórios que possui uma vasta quantidade de materiais que podem ser utilizados no ensino de Matemática.

4.1 Thingiverse

O *Thingiverse*⁴ (Figura 72) é um repositório de arquivos de design digital, que são criados e compartilhados pelos próprios usuários. Os arquivos disponibilizados no *website* podem ser utilizados para impressão 3D, também para a tecnologia de cortadoras a *laser*, para máquinas fresadoras, entre outras.

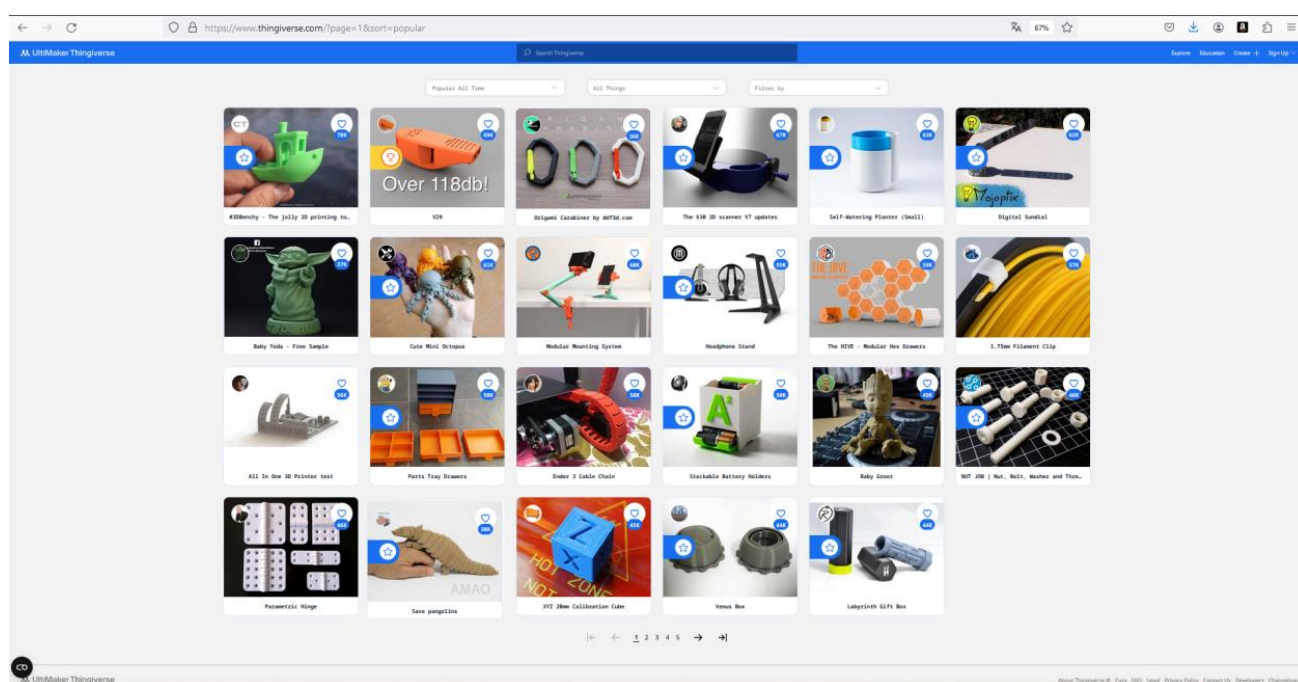


Figura 72: Interface do Thingiverse.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Vale ressaltar que ao pesquisar um termo de pesquisa em inglês, o número de resultados exibidos é maior do que ao pesquisar esse termo em português. Para pesquisar no *Thingiverse*, basta digitar

¹ <https://www.myminifactory.com/>

² <https://www.stlfinder.com/>

³ <https://cults3d.com/en>

⁴ <https://www.thingiverse.com/>

a palavra desejada na guia “*Search Thingiverse*” na aba “*All Things*” ou procurar diretamente por produtos educacionais, clicando em “*Learning*”, como ilustra a Figura 73.

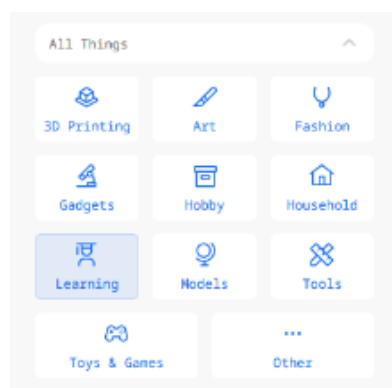


Figura 73: Processo de busca no Thingiverse.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

A aba “*Learning*” contém áreas específicas, em que é possível direcionar a busca, por exemplo, para materiais didáticos destinados ao ensino de Matemática, conforme ilustra a Figura 74.

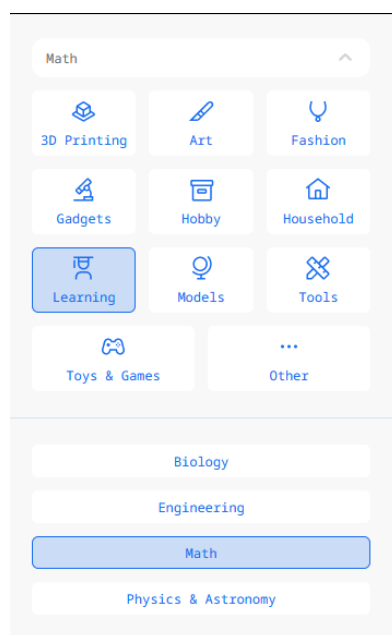


Figura 74: Aba Math, disponível no Thingiverse.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Feito essa seleção, o repositório fornece uma gama de arquivos *.stl* que poderão ser baixados e utilizados para realizar a impressão 3D, como ilustra a Figura 75.

Conforme exposto anteriormente, o *Thingiverse* é um de vários repositórios disponíveis na web e ter ciência da existência de tais sites, auxilia de forma significativa a quem está começando, pois algumas vezes não é necessário construir o objeto que se deseja utilizar, basta encontrar uma versão já disponibilizada.

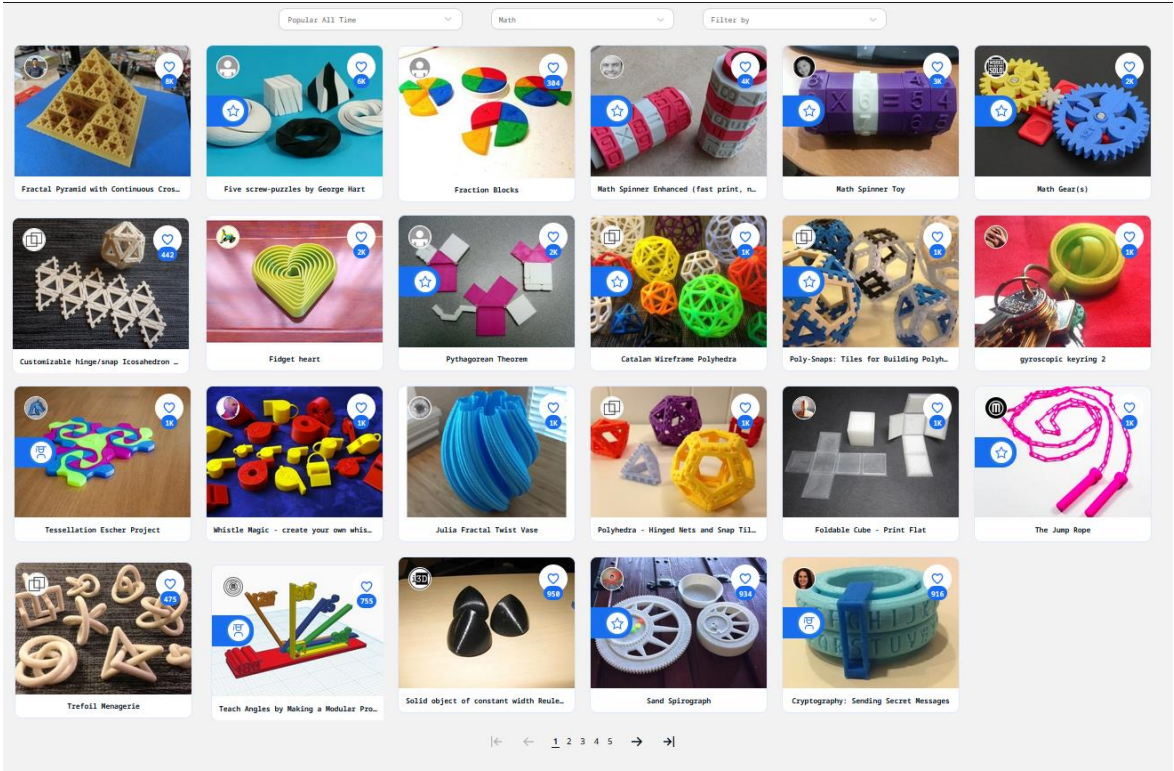


Figura 75: Exemplos de materiais educacionais da área de Matemática.

Fonte: Sistematizado pelos autores (2024).

Considerações finais



O acesso a impressoras 3D está se tornando cada vez mais comum nos espaços escolares. No entanto, apesar da disponibilidade de treinamento em equipamentos, a transformação de uma ideia matemática em um modelo imprimível continua sendo um desafio para muitos professores. Nesse sentido, o objetivo do minicurso ministrado no 6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática, consistiu em apresentar propostas de materiais impressos em 3D que possam ser utilizados em sala de aula.

Para isso, utilizou-se o apoio do *software* GeoGebra Online para construir alguns sólidos, conforme indicados no terceiro capítulo desse trabalho. Optou-se por esse *software*, uma vez que ele é muito utilizado pelos professores, e utilizou-se a sua versão *online* por ser de fácil acesso, necessitando apenas de acesso à internet. As construções foram escolhidas de forma estratégica, visando tanto ao conhecimento e utilização de diferentes ferramentas disponíveis no *software* GeoGebra, quanto à construção de elementos básicos que podem servir de base para diversas outras construções.

Também, durante o minicurso, foram apresentados alguns repositórios de artefatos que podem ser utilizados em sala de aula, como indicamos no quarto capítulo. Tal apresentação é fundamental para que os professores possam ter acesso a materiais que já estão disponibilizados, economizando uma certa energia para construí-los.

Além da construção dos objetos indicados no terceiro capítulo, durante o referido espaço foi possível realizar a impressão de alguns modelos, incluindo os que foram construídos pelos participantes, o que foi uma experiência gratificante, visto que os participantes conseguiram visualizar e manipular suas ideias. Por ocasião do minicurso, conseguimos que os participantes construíssem os objetos apresentados e outros de sua escolha. Com o auxílio da organização do Simpósio, foi disponibilizado um espaço e uma impressora 3D, o que foi crucial para que os participantes pudessem acompanhar o processo de impressão.

Referências



- FISCHER, Z.; LEE, T.; SULLIVAN, L. Palm Print: Handheld 3D Printer. **Bachelor of Science thesis, Worcester Polytechnic Institute, Massachusetts**, 2020.
- GIBSON, I. *et al.* **Additive manufacturing technologies**. [S. l.]: Springer, 2021. v. 17.
- HERRERA, L.; PÉREZ, J.; ORDÓÑEZ, S. Developing spatial mathematical skills through 3D tools: augmented reality, virtual environments and 3D printing. **International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)**, v. 13, n. 4, p. 1385–1399, 2019.
- NOVAK, E.; BRANNON, M. *et al.* A systematic review of empirical research on learning with 3D printing technology. **Journal of Computer Assisted Learning**, v. 37, n. 5, p. 1455–1478, 2021.
- NOVAK, E.; WISDOM, S. Effects of 3D printing project-based learning on preservice elementary teachers' science attitudes, science content knowledge, and anxiety about teaching science. **Journal of Science Education and Technology**, v. 27, n. 5, p. 412–432, 2018.
- SHAHRUBUDIN, N.; LEE, T. C.; RAMLAN, R. An overview on 3D printing technology: Technological, materials, and applications. **Procedia manufacturing**, v. 35, p. 1286–1296, 2019.
- ULBRICH, E. *et al.* Amazing walk through mathematics. *In: MIXED reality for education*. [S. l.]: Springer, 2023. p. 7–31.



6º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Realização e Organização



Associação Nacional dos Professores
de Matemática na Educação Básica

Distribuição

