



**7º Simpósio Nacional da
Formação do Professor
de Matemática**

OFICINA DE DOBRADURAS E CANUDOS DO LEMAT-UERJ

**Geometria em ação
no estudo dos poliedros**

Barbra Candice Southern
Bernardo Fernandes Cruz
Eduarda de Jesus Cardoso
Leandro da Silva Machado



ANPMat
Associação Nacional dos Professores
de Matemática na Educação Básica

OFICINA DE DOBRADURAS E CANUDOS DO LEMAT-UERJ

Geometria em ação no estudo dos poliedros

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

Presidente:

Marcela Luciano Vilela de Souza

Vice-Presidente:

Ana Luiza de Freitas Kessler

Diretores:

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Raquel Bodart

Sumaia Almeida Ramos

Viviane de Oliveira Santos

7º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Comissão Organizadora:

Ana Luiza de Freitas Kessler

Anderson Yassuhiro Afuso

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Carlos Eduardo de Oliveira

Cecília Pereira de Andrade

Elen Viviani Pereira Spreafico

Graziele Souza Mozer

Leonardo Barichello

Marcela Luciano Vilela de Souza

Marcelo Firer

Raquel Oliveira Bodart

Samuel Rocha de Oliveira

Sumaia Almeida Ramos

Viviane de Oliveira Santos

Comitê Científico:

Antonio Cardoso do Amaral

Ana Luiza de Freitas Kessler

Bernadete Angelina Gatti

Eliana Souza

Érika Botelho Guimarães Rijo Alves

Fábio Luiz Borges Simas

Gilberto Januário

João Frederico C.A. Meyer

Marcela Luciano Vilela de Souza

Marcelo Firer

Victor Augusto Giraldo

Viviane de Oliveira Santos

Walcy Santos

Yuriko Yakamoto Baldin

Comitê Editorial:

Alzenira da Silva Leão

Antônio Cardoso do Amaral

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Evanilson Landim Alves

Gladson Octaviano Antunes

José Fernando Santos Rodrigues Junior

Josieli Fátima Tonin Pagliosa

Lino Marcos da Silva

Marcela Luciano Vilela de Souza

Michel Cambrainha de Paula

Nickson Deyvis da Silva Correia

Renata Magarinus

Rita Santos Guimarães

Roberto César Cucharero Peregrina

Vitor Gustavo de Amorim

Viviane de Oliveira Santos



**7º Simpósio Nacional da
Formação do Professor
de Matemática**

OFICINA DE DOBRADURAS E CANUDOS DO LEMAT-UERJ

**Geometria em ação
no estudo dos poliedros**

Barbra Candice Southern
Bernardo Fernandes Cruz
Eduarda de Jesus Cardoso
Leandro da Silva Machado

1ª edição

2026

Rio de Janeiro

Oficina de dobraduras e canudos do LEMAT-UERJ: Geometria em ação no estudo dos poliedros

Copyright © 2026, Barbra Candice Southern, Bernardo Fernandes Cruz, Eduarda de Jesus Cardoso, Leandro da Silva Machado

Direitos reservados pela Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica. A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Projeto gráfico: Gabriel Brasil Nepomuceno

Produção editorial: Editora Pi

www.editorapi.com.br | contato@editorapi.com.br | +55 21 97748-7208

Distribuição: Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

www.anpmat.org.br | editoraanpmat@anpmat.org.br

ISBN: 978-65-88013-42-7

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Oficina de dobraduras e canudos do LEMAT-UERJ
[livro eletrônico] : geometria em ação no
estudo dos poliedros / Barbra Candice
Southern...[et al.]. -- 1. ed. --
Rio de Janeiro : ANPMat, 2026.
-- (Simpósio nacional da formação do professor
de matemática ; 7)
PDF

Outros autores: Bernardo Fernandes Cruz, Eduarda
de Jesus Cardoso, Leandro da Silva Machado.
Bibliografia.
ISBN 978-65-88013-42-7

1. Educação matemática 2. Geometria espacial
(Ensino médio) 3. Matemática - Estudo e ensino
4. Prática pedagógica I. Southern, Barbra Candice.
II. Cruz, Bernardo Fernandes. III. Cardoso, Eduarda
de Jesus. IV. Machado, Leandro da Silva.
V. Série.

26-387926.0

CDD-510

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática 510

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415

Sobre os autores





**Barbra Candice
Southern**

barbrasouthern@gmail.com
[https://lattes.cnpq.br/
8441160974286622](https://lattes.cnpq.br/8441160974286622)

Possui graduação em Educação Artística – Habilitação em Desenho pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (2012), graduação em Arquitetura e Urbanismo pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (1998) e mestrado em Planejamento Urbano e Regional pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (2007). Atualmente é Professora Assistente do Departamento de Matemática e Desenho, Coordenadora do projeto de Extensão GeometriCap e participante dos Projetos LEMAT e LATED. Lotada no Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira (CAP-UERJ), Centro de Educação e Humanidades – UERJ, atuando nas áreas de ensino e educação sobre técnicas de representação gráfica, desenho técnico, com ênfase em tecnologias e produção de materiais didáticos com participação mais ativa, inclusiva e interdisciplinar.

Bernardo Fernandes Cruz é mestre em Modelagem Computacional pelo Instituto Politécnico do Rio de Janeiro IPRJ-UERJ. É professor de Matemática e Desenho. Professor Assistente do Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira – CAP-UERJ. Lotado no Departamento de Matemática e Desenho, DMD. Atua no Ensino Fundamental – Anos Finais e no Ensino Médio. Ministra turmas na Licenciatura de Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), campus Maracanã. Coordena o projeto Lemat – Laboratório de Ensino em Matemática do CAP-UERJ.



**Bernardo Fernandes
Cruz**

bernardouerj1@gmail.com
[https://lattes.cnpq.br/
5477554442334825](https://lattes.cnpq.br/5477554442334825)



**Eduarda de Jesus
Cardoso**

eduardadjc@gmail.com

[http://lattes.cnpq.br/](http://lattes.cnpq.br/8193483806283283)

8193483806283283

Eduarda de Jesus Cardoso é mestre em Ensino de Matemática e doutoranda em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). É professora de Matemática do Departamento de Matemática e Desenho do Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira – CAP-UERJ, onde atua no Ensino Fundamental – Anos Finais, no Ensino Médio e também em disciplinas voltadas para a formação de professores no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), campus Maracanã. Coordena o projeto Promovendo a Aprendizagem de Matemática na Transição dos Anos Iniciais para os Anos Finais: Uma Abordagem Baseada nas Mentalidades Matemáticas, desenvolvido em parceria com a Fundação Itaú Social. É também coordenadora do projeto de extensão Conexões Matemáticas – Comportamentos de Ensino e Aprendizagem, vinculado ao CAP-UERJ.

Mestrado Profissional em Matemática pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (2015). Licenciatura em Matemática pela UERJ (2002) e Especialização em Matemática para Professores de Ensino Fundamental e Médio pela UFF (2005). Professor Assistente da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), lotado no Departamento de Matemática e Desenho do Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira – CAP-UERJ, onde coordena o projeto Trazendo o Lúdico para Sala de Aula: Jogos Didáticos. Atua também na Rede Municipal de Duque de Caxias, como Professor do Ensino Fundamental II. Linhas de Pesquisa atuantes: Matemática Lúdica, Produção de Material Didático Impresso e Digital.



**Leandro da Silva
Machado**

leandromachado@ime.uerj.br

[http://lattes.cnpq.br/](http://lattes.cnpq.br/7314531244491082)

7314531244491082

Sumário



Prefácio	x
Introdução	xii
1 Articulações entre MM e a TRSS: uma perspectiva para o ensino de geometria	1
1.1 Mentalidades Matemáticas: aprender com sentido e criatividade	2
1.2 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica	3
1.3 Articulação entre as abordagens: implicações para a prática docente	5
2 Oficina de superfícies platônicas – sólidos tridimensionais	7
2.1 Metodologia	9
3 Construção dos poliedros de Platão com canudos e suas relações no ensino da matemática	13
3.1 Os poliedros de Platão	14
3.2 Oficina de construção dos poliedros	18
4 Aprofundamento matemático: volumes	23
4.1 Cubo	24
4.2 Tetraedro e octaedro regulares	25
4.3 Pentágono regular e o número de ouro	27
4.4 Dodecaedro regular	31
4.5 Icosaedro regular	34
5 Considerações finais	37
Referências	40

Lista de Figuras



1	Exemplo de Conversão	5
2	Cubo (Hexaedro Regular) formado por seis faces quadradas.	10
3	Dodecaedro apresentando doze faces pentagonais regulares.	11
4	Tetraedro Regular com Canudos	15
5	Hexaedro Regular com Canudos	15
6	Hexaedro Regular Estabilizado	16
7	Octaedro Regular com Canudos	16
8	Dodecaedro Regular com Canudos	17
9	Icosaedro Regular com Canudos	17
10	Processo de Construção do Tetraedro Regular com Canudos	18
11	Quatro pirâmides trirretangulares para formação de um Cubo	19
12	Cubo, a partir das quatro pirâmides trirretangulares	19
13	Doze pirâmides pentagonais congruentes	20
14	Dodecaedro Regular construído a partir das doze pirâmides.	20
15	Tetraedro e Octaedro inscritos em um Cubo.	21
16	Pirâmides triangulares usada no Icosaedro Regular.	21
17	Icosaedro Regular com Canudos.	22
18	Cubo de aresta a	24
19	Tetraedro e Octaedro inscritos no Cubo, Oficina de Canudos	25
20	Seção Plana do Cubo e Arestas do Octaedro Regular	26
21	O Pentágono Regular de Lado 1	27
22	O Centro do Pentágono Regular de Lado 1	30
23	Pentágono dividido em 5 triângulos congruentes	31
24	Dodecaedro Regular de Aresta 1	31
25	Triângulos BSD e SND no Dodecaedro Regular de Aresta 1	32
26	Triângulo retângulo UVC em uma das pirâmides que formam o Dodecaedro Regular	33
27	Icosaedro Regular de Aresta 1	34
28	Triângulos CJA e JDA no Icosaedro Regular de Aresta 1	35
29	Triângulo retângulo MNC em uma das pirâmides que formam o Icosaedro Regular	36

Prefácio



As reflexões aqui apresentadas aconteceram na oficina ministrada pelos professores autores deste *e-book* no 7º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática, intitulada “Oficina de Dobraduras e Canudos do LEMAT: Geometria em Ação no Estudo dos Poliedros”. A proposta teve como objetivo discutir, junto aos professores participantes do evento, as possibilidades de utilização das construções com dobraduras e canudos não apenas como disparadores para discussões dos conceitos matemáticos associados aos poliedros, mas também como recursos para o aprofundamento desses conceitos.

Idealizada por professores e professoras do Laboratório de Ensino em Matemática (LEMAT) e docentes de Matemática do CAP-UERJ, esta oficina propôs uma experiência formativa que convidou os participantes a mergulharem na geometria espacial por meio da construção de sólidos tridimensionais com dobraduras de papel e canudos, articulando arte, ciência e ludicidade. Durante os encontros, os participantes puderam vivenciar concretamente os conceitos matemáticos associados aos poliedros e compreender, por meio da experimentação, propriedades como a Relação de Euler e o cálculo de volumes dos sólidos de Platão.

A oficina ocorreu em duas sessões de duas horas cada. Na primeira, os participantes foram divididos em quatro grupos e experimentaram a construção dos sólidos platônicos por meio de dobraduras de papel. Durante essa etapa, foram realizadas intervenções e breves discussões sobre as possibilidades de aplicação desse tipo de trabalho na Educação Básica. Já na segunda sessão, construímos inicialmente, de forma individual, um tetraedro com canudos de papel. Em seguida, realizamos a construção coletiva de um cubo, a partir da composição de quatro pirâmides triretangulares. Também apresentamos um dodecaedro, feito a partir da composição de doze pirâmides pentagonais, e construímos coletivamente um icosaedro composto por vinte pirâmides triangulares. Após as construções, sistematizamos com os participantes as relações matemáticas acerca dos volumes dos sólidos construídos.

Mais do que ensinar conceitos, essa proposta busca inspirar. Ao apresentar a matemática como uma linguagem viva e visual, conectada à prática artesanal, os autores reafirmam o compromisso do LEMAT com uma educação matemática mais significativa e inclusiva.

Este *e-book* tem como objetivo registrar e compartilhar as experiências vivenciadas nessa oficina, oferecendo aos leitores não apenas um relato de práticas, mas também sugestões de atividades, reflexões teóricas e caminhos possíveis para levar essa proposta às salas de aula da Educação Básica.

Desejamos que este material inspire educadores e educadoras a explorar a geometria com novos olhares, despertando, em seus estudantes, o encantamento por uma matemática que se constrói com as mãos, com a mente e com o coração.

Boa leitura e boas construções!

Campinas, setembro de 2024

Barbra Candice Southern

Bernardo Fernandes Cruz

Eduarda de Jesus Cardoso

Leandro da Silva Machado

Introdução



O LEMAT – Laboratório de Ensino em Matemática do CAP-UERJ, atualmente sob a coordenação dos professores Barbra Southern e Bernardo Cruz, surgiu a partir da integração entre os professores de Desenho Geométrico e Matemática do Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira. Seu propósito é desenvolver recursos didáticos que favoreçam o processo de ensino e aprendizagem da Matemática com base em atividades multissensoriais. Além disso, busca ampliar o reconhecimento do CAP-UERJ como um espaço de pesquisa, que possibilita o engajamento de licenciandos e professores nas discussões e no delineamento de propostas que visam tornar a Matemática mais atrativa, divertida e colaborativa.

Pesquisas como Santos e Oliveira (2018) e Silva e Barros (2023) apontam que o ensino de Geometria na Educação Básica, por vezes, se restringe a abordagens que priorizam a memorização de fórmulas e a manipulação de representações planas e abstratas, distanciando os estudantes da riqueza conceitual e visual que esse campo da Matemática oferece. A oficina *Dobraduras e Canudos do LEMAT: Geometria em Ação no Estudo dos Poliedros* nasceu do desejo de transformar essa realidade, por meio de uma proposta que articula sensibilidade, criatividade, colaboração e rigor matemático.

O uso de dobraduras para construir superfícies poliédricas constitui uma abordagem fascinante, que integra Geometria e arte. Por meio dessas atividades, os estudantes da Educação Básica podem experimentar diretamente os princípios de simetria, proporção e estrutura tridimensional. Assim, aprendem sobre as características e propriedades dessas formas e desenvolvem habilidades práticas, como precisão na medição, coordenação motora fina e resolução de problemas.

Utilizando apenas papel, é possível criar modelos tridimensionais das cinco formas platônicas: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, sendo que cada uma delas requer técnicas específicas de dobradura e montagem para alcançar sua perfeição. No Ensino Fundamental, essa abordagem pode servir como uma introdução lúdica e acessível ao estudo dos sólidos geométricos. Já no Ensino Médio, além de ser uma experiência educacional poderosa e envolvente, permite o aprofundamento das relações entre os elementos de um poliedro, como arestas, vértices e faces.

Dessa forma, os estudantes da educação básica podem explorar as interconexões entre esses elementos enquanto constroem os modelos, o que fortalece sua compreensão conceitual. Essa experiência está alinhada às recomendações da BNCC para o campo geométrico:

Nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. (Brasil, 2018, p. 271)

Trabalhar a geometria espacial com materiais concretos que possam ser manipulados pelos estudantes é uma estratégia interessante e potente para introduzir esse conteúdo nas aulas da Educação Básica. A riqueza da construção de poliedros platônicos com canudos conduz a uma reflexão sobre os entes que compõem uma figura espacial, associada às suas diferentes formas.

O objetivo geral desta oficina foi discutir, junto aos participantes do evento, as possibilidades de utilização das construções com dobraduras e canudos não apenas como disparadores para a abordagem de conceitos matemáticos associados aos poliedros, mas também como recursos para o aprofundamento desses conceitos. Para isso, definimos os seguintes objetivos específicos:

- construção de diversos poliedros por meio de dobraduras e canudos;

- análise das propriedades intrínsecas das figuras construídas, como a Relação de Euler;
- aprofundamento matemático por meio de um roteiro de investigação, que conduz os participantes à visualização e compreensão das expressões que caracterizam o volume do cubo, do tetraedro regular, do octaedro regular, do dodecaedro regular e do icosaedro regular.

A proposta da oficina foi fundamentada na abordagem Mentalidades Matemáticas (MM), desenvolvida por Boaler (2018a) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1993). Boaler (2018a) defende uma matemática acessível a todos os estudantes, ressignificando o erro como parte do processo de aprendizagem, promovendo o pensamento visual e incentivando experiências significativas, criativas e desafiadoras. Nessa perspectiva, a construção dos sólidos platônicos com dobraduras de papel e estruturas feitas com canudos e barbante proporciona um ambiente de aprendizagem que estimula o engajamento ativo dos participantes, despertando o encantamento e a curiosidade diante dos conceitos geométricos.

De acordo com Duval (1993) a compreensão de um objeto matemático exige a articulação entre diferentes registros de representação, como o gráfico, o algébrico, e geométrico, o verbal e o concreto. As pesquisas do autor apontam que o aprendizado matemático se efetiva quando o estudante é capaz de converter informações entre ao menos dois registros, processo essencial no ensino da Geometria. Ao construir modelos tridimensionais, manipular materiais concretos, interpretar diagramas e discutir propriedades matemáticas verbalmente, os participantes da oficina vivenciaram essa conversão entre registros, tornando mais acessível e compreensível o estudo dos poliedros.

Este *e-book* tem como propósito registrar essa experiência formativa, oferecendo aos professores e professoras da Educação Básica sugestões de práticas que articulam teoria e prática, pensamento visual e representação simbólica, ludicidade e rigor matemático. Esperamos que as páginas a seguir inspirem novas formas de ensinar e aprender Geometria, aproximando a Matemática da experiência concreta, do trabalho coletivo e da expressão criativa.

Este livro digital apresenta cinco capítulos que abordam os conceitos e as atividades desenvolvidas durante a oficina realizada no 7º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática. O primeiro capítulo discute o referencial teórico que fundamenta a proposta, com foco na abordagem MM e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. O segundo capítulo descreve a oficina de dobraduras, detalhando a construção de poliedros a partir de dobraduras de papel. O terceiro capítulo apresenta a oficina de canudos, com a construção das mesmas figuras geométricas utilizando canudos e barbante. O quarto capítulo trata do aprofundamento matemático, destacando os cálculos envolvidos e a conversão entre registros visuais e algébricos. Por fim, o quinto capítulo reúne as considerações finais sobre os dois dias de oficina e propõe reflexões acerca dos desdobramentos possíveis da experiência.

**Articulações entre
Mentalidades Matemáticas
e a Teoria dos Registros de
Representação Semiótica:
uma perspectiva para o
ensino de geometria**



Nas últimas décadas, diferentes abordagens teóricas têm contribuído significativamente para transformar as práticas de ensino da Matemática, especialmente no que se refere à valorização do pensamento visual, da criatividade e do uso de múltiplas linguagens. Este capítulo apresenta uma articulação entre a abordagem MM, proposta por Boaler (2018a), e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida por Duval (1993), com foco na potencialização da aprendizagem da Geometria no contexto da Educação Básica.

1.1 Mentalidades Matemáticas: aprender com sentido e criatividade

A abordagem MM, proposta por Boaler (2015, 2018a, 2019), refere-se às atitudes, opiniões e formas de pensar que influenciam a maneira como as pessoas se relacionam com a Matemática e constroem seu entendimento sobre ela. Fundamentada em estudos da Neurociência, da Psicologia da Educação e da Educação Matemática, essa abordagem defende que todos os estudantes são capazes de aprender Matemática em níveis elevados, desde que tenham acesso a oportunidades significativas, desafiadoras e conectadas a experiências reais.

As novas evidências da neurociência revelam que todas as pessoas, com a mensagem e o ensino adequados, podem ser bem-sucedidas em matemática e todos podem ter altos níveis de aprendizagem na escola. Existem algumas crianças que têm necessidades educacionais muito especiais as quais dificultam sua aprendizagem em matemática, mas para a maioria das crianças - cerca de 95% - qualquer nível de matemática escolar está ao seu alcance. E o potencial do cérebro para crescer e mudar é igualmente forte em crianças com necessidades especiais. (Boaler, 2018a, p. 4)

Essa abordagem busca romper com uma cultura escolar tradicional baseada na repetição de procedimentos e na memorização de fórmulas. Em vez disso, propõe uma Matemática viva, criativa e acessível, que valoriza diferentes formas de pensar e de representar os conceitos matemáticos. Em termos práticos, a abordagem se concretiza por meio de estratégias que incentivam a investigação matemática e a exploração de múltiplas soluções, respeitando a plasticidade cerebral e as diversas formas de aprendizagem dos estudantes.

Quando os estudantes encaram a matemática como uma ampla paisagem de enigmas inexplorados na qual eles podem perambular, fazendo perguntas e pensando sobre relações, eles compreendem que seu papel é pensar, dar sentido, crescer. Quanto os estudantes veem a matemática como um conjunto de ideias e relações e seu papel como o de pensar sobre as ideias, e dar um sentido para elas, eles desenvolvem uma mentalidade matemática. (Boaler, 2018a, p. 32)

Para que os educandos obtenham melhores resultados, os professores devem promover em sala de aula um ambiente seguro e encorajador, no qual os alunos se sintam motivados a explorar, testar hipóteses, cometer erros e aprender com eles. Aulas e atividades criativas, abertas e flexíveis, aliadas a mensagens de incentivo consistentes, favorecem o engajamento e a persistência diante de desafios.

Nesse sentido, (Boaler, 2018a) propõe o uso de tarefas do tipo “piso baixo, teto alto”, que são acessíveis a todos, mas ao mesmo tempo desafiadoras. O “piso baixo” assegura que qualquer estudante seja capaz de compreender a proposta e iniciar sua resolução, mesmo que isso implique trabalhar com

casos particulares ou representações visuais. Já o “teto alto” pressupõe que a mesma tarefa pode levar a reflexões profundas, à conexão entre diferentes conceitos e à formulação de múltiplas estratégias de resolução.

Nesse contexto, o ensino da Geometria se revela um terreno fértil para o desenvolvimento de práticas que estimulem a experimentação, a construção, a argumentação e a comunicação matemática. A oficina proposta oferece um espaço privilegiado para que os participantes atuem como mediadores de situações investigativas, fomentando discussões que levem os estudantes da educação básica a formular hipóteses, testar ideias e, a partir das experiências concretas de construção dos poliedros, deduzirem por si próprios as fórmulas para o cálculo do volume dessas figuras. Em vez de apenas memorizar expressões prontas, os participantes são convidados a compreender as relações espaciais envolvidas, desenvolvendo um raciocínio geométrico mais profundo, significativo e duradouro.

Dessa forma, a abordagem MM convida professores e professoras a repensarem suas práticas e a criarem ambientes de aprendizagem mais acolhedores, desafiadores e significativos. Ao valorizar o raciocínio visual, a investigação, o trabalho colaborativo e a pluralidade de estratégias, essa perspectiva rompe com modelos tradicionais de ensino pautados na repetição e na memorização, promovendo uma Matemática viva, acessível e inclusiva. Reconhecer a plasticidade cerebral e as diferentes formas de aprender é fundamental para garantir que todos os estudantes tenham a oportunidade de desenvolver seu potencial matemático em altos níveis. Nesse sentido, propostas como a oficina *Dobraduras e Canudos do LEMAT* materializam os princípios dessa abordagem, ao oferecer experiências concretas, criativas e investigativas que ampliam a compreensão e o encantamento pela Geometria.

1.2 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), desenvolvida por Raymond Duval a partir da década de 1970, tem como eixo central a compreensão das representações no processo de aprendizagem matemática. Sua origem epistemológica está ancorada nas ideias construtivistas, em diálogo com a epistemologia genética de Piaget, especialmente ao considerar que o conhecimento matemático é uma construção mental que requer atividades cognitivas específicas para ser mobilizado.

Duval iniciou suas investigações no Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática (IREM), em Estrasburgo, com o objetivo de compreender as dificuldades enfrentadas pelos estudantes na aprendizagem da Matemática. Ao longo de suas pesquisas, identificou que tais dificuldades estavam frequentemente relacionadas à incapacidade dos alunos em transitar entre diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. Como destaca o autor: “as dificuldades dos alunos para compreender Matemática surgem por conta da diversidade e complexidade dessas transformações” (Duval, 1993 apud 2012, p. 1, trad. Moretti).

A base da teoria reside na distinção entre o objeto matemático e a representação semiótica utilizada para expressá-lo. Segundo Duval (2012), os objetos matemáticos não possuem existência física nem são acessíveis diretamente pelos sentidos. Assim, o acesso a esses objetos é possível apenas por meio de sistemas semióticos, que são conjuntos de signos organizados de acordo com regras específicas de produção e interpretação. Como afirma Flores (2006, p. 3), “os objetos matemáticos, não sendo acessíveis pela percepção, só podem sê-lo por sua representação, lembrando que um mesmo objeto matemático poderá ter representações diferentes, dependendo da necessidade e do uso.”

Para designar os sistemas semióticos específicos utilizados na Matemática, Duval (2012) introduz o conceito de registro de representação semiótica. Um registro é, portanto, um sistema de signos que cumpre não apenas a função de comunicação, mas também as funções cognitivas de objetivação (construção de significado para si) e de tratamento. São exemplos de registros: a língua natural, os sistemas de escrita (numérica, algébrica e simbólica), os gráficos cartesianos e as figuras geométricas.

Do ponto de vista cognitivo, nenhuma representação é completa em relação ao objeto que representa. Cada uma revela aspectos específicos e possui limitações próprias de significação e funcionamento. Como explica Duval (2012, p. 4, trad. Moretti): “as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que têm inconvenientes próprios de significação e de funcionamento.” Por isso, “o objeto matemático nunca pode ser confundido com a representação semiótica utilizada para representá-lo” (Duval, entrevista para Freitas e Rezende (2020, p. 17)).

A aprendizagem significativa da Matemática exige, portanto, a mobilização de diferentes registros e, sobretudo, a conversão entre registros, processo cognitivo considerado central na teoria. Para Duval (2023), a compreensão dos conceitos matemáticos (noesis) está indissociavelmente ligada à representação (semiose), e ignorar esse aspecto no ensino resulta em abordagens reducionistas:

O paradoxo cognitivo do pensamento matemático e as dificuldades que resultam para sua aprendizagem se dão pelo fato de que não há **noesis** sem **semiose**, enquanto houver vontade de ensinar matemática como se a semiose fosse uma operação desprezível em relação à **noesis**. No entanto, é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro. E, independentemente de toda comodidade de tratamento, **o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma representações.** (Duval, 1993, p. 6, grifos do autor)

A TRRS destaca três atividades cognitivas fundamentais para a aprendizagem matemática: tratamento, conversão e coordenação.

- **Tratamento** refere-se à transformação de uma representação em outra dentro do mesmo registro. Por exemplo, manipular a função $f(x) = x^2 + 2x - 3$ como fatorar sua expressão algébrica para $f(x) = (x - 1)(x + 3)$ ou escrevê-la na forma canônica $f(x) = (x + 1)^2 - 4$ são formas de tratamento no registro algébrico.
- **Conversão** é a atividade de transformação de uma representação de um registro para outro, mantendo a referência ao mesmo objeto, mas revelando aspectos distintos. Um exemplo clássico é a conversão da forma algébrica de uma função para seu gráfico cartesiano, conforme ilustraremos na Figura 1 a seguir. Essa atividade permite ao estudante ampliar sua compreensão e desenvolver conexões entre diferentes formas de representar o mesmo conteúdo.

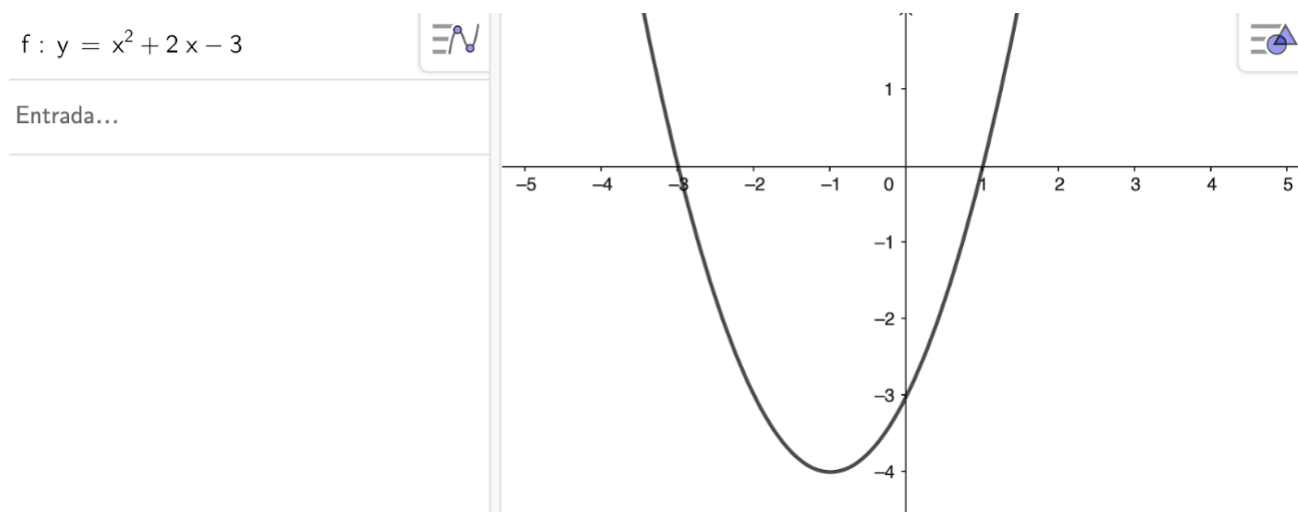


Figura 1: Exemplo de Conversão

Fonte: Os autores (2025)

- **Coordenação** refere-se à capacidade de reconhecer que diferentes representações — pertencentes a registros distintos — referem-se ao mesmo objeto matemático. A coordenação é essencial para que o estudante desenvolva autonomia e flexibilidade cognitiva, sendo condição fundamental para toda forma de aprendizagem matemática significativa.

Levar em conta a existência de múltiplos registros e promover atividades que incentivem a conversão e a coordenação entre eles é, portanto, imprescindível. Como observa Flores (2006, p. 3), “é isto que possibilitará a diferenciação entre o objeto e sua representação”, promovendo uma compreensão mais profunda e duradoura dos conceitos matemáticos.

A proposta da oficina *Dobraduras e Canudos do LEMAT* concretiza os princípios da TRRS ao oferecer aos participantes a oportunidade de mobilizar e coordenar múltiplos registros na construção e análise de poliedros. Durante as atividades, os participantes passaram por diferentes formas de representação: manipularam materiais concretos, construíram figuras geométricas com papel e canudos, realizaram medições e comparações, representaram relações matemáticas por meio de expressões algébricas e discutiram as propriedades observadas em linguagem natural. Ao articular esses diferentes registros, a oficina favoreceu o desenvolvimento do pensamento geométrico e proporcionou situações de conversão e coordenação entre registros, essenciais para a construção de significados matemáticos sólidos e duradouros.

1.3 Articulação entre as abordagens: implicações para a prática docente

A oficina *Dobraduras e Canudos do LEMAT* foi pensada à luz dessas duas abordagens teóricas. Por meio da construção concreta de poliedros com dobraduras de papel e canudos, os participantes foram convidados a experimentar a matemática com as mãos, com o corpo, com os olhos — e, posteriormente, com a linguagem simbólica.

Na primeira sessão, os participantes se envolveram com registros concretos por meio de dobraduras, canudos, barbantes e visualização das formas, desenvolvendo intuições espaciais e estabelecendo relações entre elementos dos poliedros. Na segunda sessão, essas experiências foram conectadas a registros algébricos e verbais, ao se discutir as expressões que determinam o volume dos sólidos, como o cubo, o tetraedro e o octaedro.

Essa transposição entre registros, aliada a uma proposta pedagógica que valoriza a experimentação, o trabalho em grupo e a resolução de desafios, se alinha fortemente à proposta MM. O erro foi acolhido como parte do processo, o raciocínio visual foi mobilizado como ponto de partida e o fazer com as mãos se tornou um meio potente de construção de significados.

A articulação entre a abordagem MM e a teoria dos registros de representação semiótica reforça a importância de práticas pedagógicas que valorizem a pluralidade de formas de aprender e ensinar Matemática. Ambas as perspectivas convergem na defesa de uma educação matemática mais inclusiva, sensível e significativa, que favoreça o pensamento crítico e a construção de conhecimento com base na compreensão e não apenas na memorização.

Para que os estudantes da educação básica se apropriem dos conceitos geométricos de forma mais profunda, é essencial que os professores conheçam e mobilizem diferentes registros de representação e criem situações de aprendizagem em que seus alunos possam transitar entre eles. Ao mesmo tempo, é necessário cultivar nas salas de aula uma cultura de valorização da criatividade, da colaboração e da coragem de pensar de modos diversos, princípios centrais das MM.

**Oficina de
superfícies platônicas –
sólidos tridimensionais**



O ensino de desenho bidimensional e tridimensional está presente em diversas áreas do conhecimento e cotidiano das pessoas. No entanto, observa-se a falta de estímulos adequados para tornar seu aprendizado mais eficaz. Nesse contexto, o ambiente de ensino/aprendizagem deve proporcionar um espaço de experimentação e criação, permitindo ao estudante desenvolver o raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas (Libâneo, 1994).

Experiências em sala de aula e estudos na literatura apontam dificuldades significativas dos estudantes do Ensino Fundamental e Médio na compreensão de conceitos relacionados ao desenho, incluindo a Geometria Descritiva (GD) e suas aplicações. Essas dificuldades são especialmente evidentes em atividades que exigem habilidades espaciais ou de visualização. Diante desse desafio, a adoção de estratégias didáticas diversificadas pode ser uma alternativa para facilitar a aprendizagem.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998) ressaltam a necessidade de utilização de diferentes formas de informação e recursos tecnológicos para promover um ensino dinâmico e significativo. De acordo com esses documentos, o processo de ensino/aprendizagem deve estimular a construção do pensamento lógico-matemático, incentivando a investigação e fornecendo elementos fundamentais para a participação ativa do estudante na sociedade.

Essas orientações dialogam com a perspectiva da TRRS, que destaca a importância e necessidade de transitar entre registros para que ocorra compreensão efetiva do objeto matemático em estudo. A oficina aqui descrita explora exatamente esse trânsito, permitindo que os participantes passem do plano (dobradura de superfícies) para o tridimensional (montagem dos sólidos), alcançando depois os conceitos abstratos. A proposta se aproxima das ideias das MM ao promover uma atividade prática que valoriza a exploração, a criatividade e a colaboração entre os participantes, afastando-se de um ensino meramente transmissivo e incentivando a confiança em experimentar estratégias diversas na construção dos sólidos.

A aprendizagem, conforme discutido por Libâneo (1994), é um processo de assimilação ativa que requer atividades práticas em diferentes modalidades. Exercícios que promovam a aplicação prática de conhecimentos e habilidades são essenciais para consolidar a compreensão dos conceitos abordados. Nesse sentido, o uso das dobraduras pode contribuir para a formação de uma aprendizagem mais significativa e eficaz.

Nesta oficina, explorou-se a criação de superfícies platônicas por meio da arte de dobrar. Por meio da construção desse material, demonstrou-se aos participantes a diferença entre superfície, sólido e volume. Inicialmente, discutiram-se as propriedades dos sólidos platônicos, seguindo-se para as técnicas de dobramento utilizadas na confecção de cada forma. Por fim, apresentaram-se dicas e variações para a criação de sólidos platônicos por meio de dobraduras. Para compreender a construção de superfícies platônicas através da dobradura, foi necessário analisar suas propriedades fundamentais.

Os sólidos geométricos foram definidos como volumes constituídos por figuras geométricas, classificando-se em poliedros (apenas com superfícies planas) e não poliedros (com superfícies planas e curvas). Os sólidos platônicos destacaram-se como formas tridimensionais com faces formadas por polígonos regulares e ângulos iguais entre si. Foram construídos dois tipos:

- Cubo (Hexaedro): formado por seis faces quadradas.
- Dodecaedro: apresentando doze faces pentagonais regulares.

2.1 Metodologia

A oficina foi organizada em três momentos: discussão conceitual inicial, estudo das propriedades dos sólidos platônicos e construção por dobraduras. Descreveremos a seguir cada um deles.

- (i) Discussão conceitual inicial, na qual foram retomados os conceitos de superfície, sólido e volume:
 - superfície foi apresentada como uma entidade bidimensional, sem espessura, representada, por exemplo, por polígonos regulares;
 - sólido como objeto tridimensional, limitado por superfícies planas ou curvas;
 - volume como a medida do espaço ocupado por esse sólido. Para tornar essas diferenças visíveis, iniciou-se com dobraduras de polígonos regulares (superfícies), que, ao serem unidas, formaram poliedros (sólidos), possibilitando, em seguida, discutir a ideia de espaço interno (volume).
- (ii) Estudo das propriedades dos sólidos platônicos, no qual foram apresentadas e discutidas as seguintes propriedades:
 - número e tipo de faces (polígonos regulares),
 - arestas e vértices;
 - regularidade dos ângulos;
 - simetria;
 - unicidade dos cinco sólidos platônicos.
- (iii) Construção por dobraduras.

Para as construções foram escolhidos o Cubo (hexaedro regular) e o Dodecaedro, por sua acessibilidade de construção. Aplicaram-se técnicas de dobradura para a montagem de cada sólido, permitindo aos participantes visualizar a transformação de superfícies planas em estruturas tridimensionais. Foram utilizados materiais como papel apropriado para origami. Para o cubo, utilizou-se a técnica de módulos simples de origami, que, unidos, formaram a estrutura tridimensional. Para o dodecaedro, a montagem exigiu uma sequência de dobras mais complexa, unindo doze faces pentagonais.

A Figura 2 ilustra o passo-a-passo para a construção do Hexaedro, enquanto a Figura 3 ilustra o passo-a-passo para a construção do Dodecaedro.

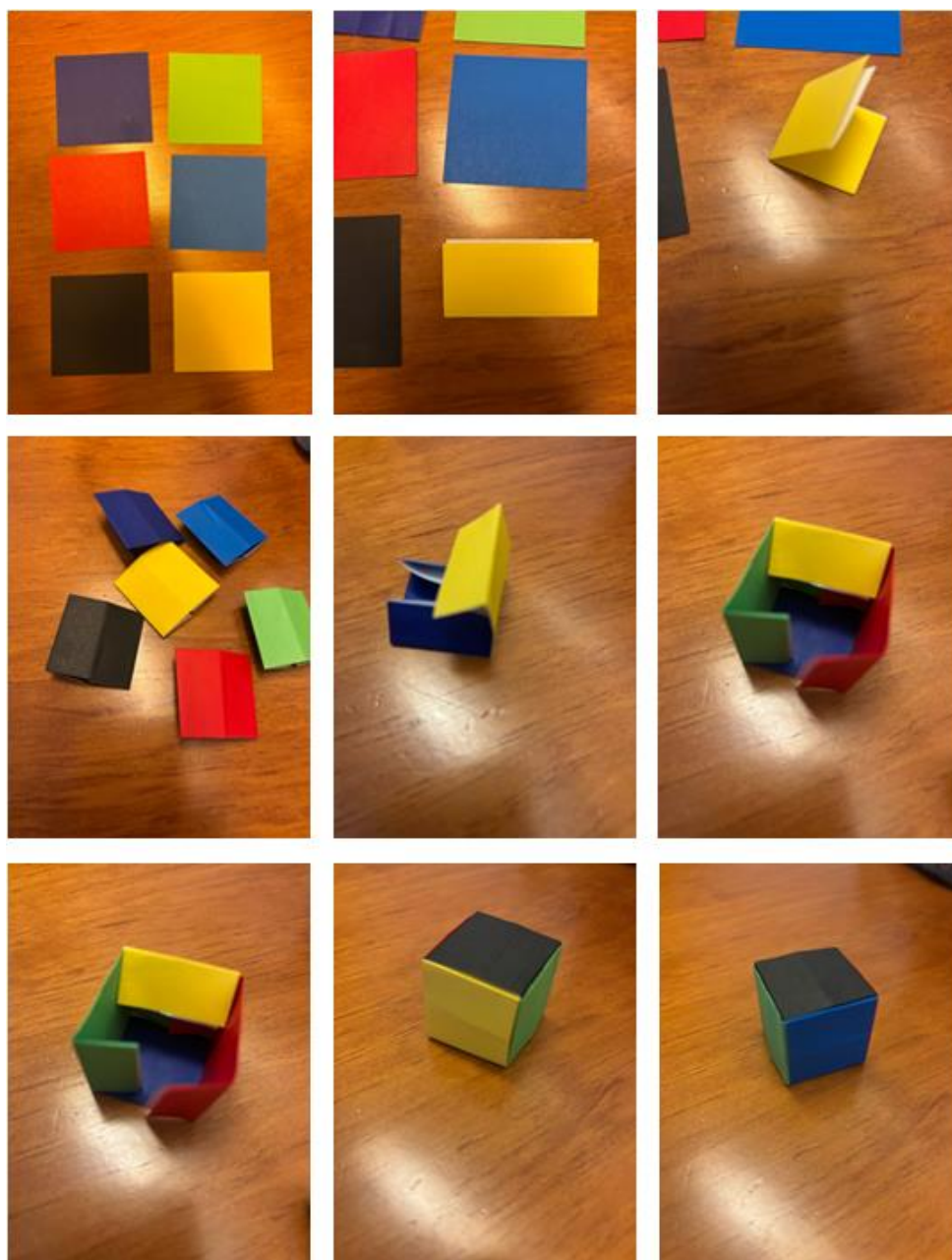


Figura 2: Cubo (Hexaedro Regular) formado por seis faces quadradas.

Fonte: Os autores

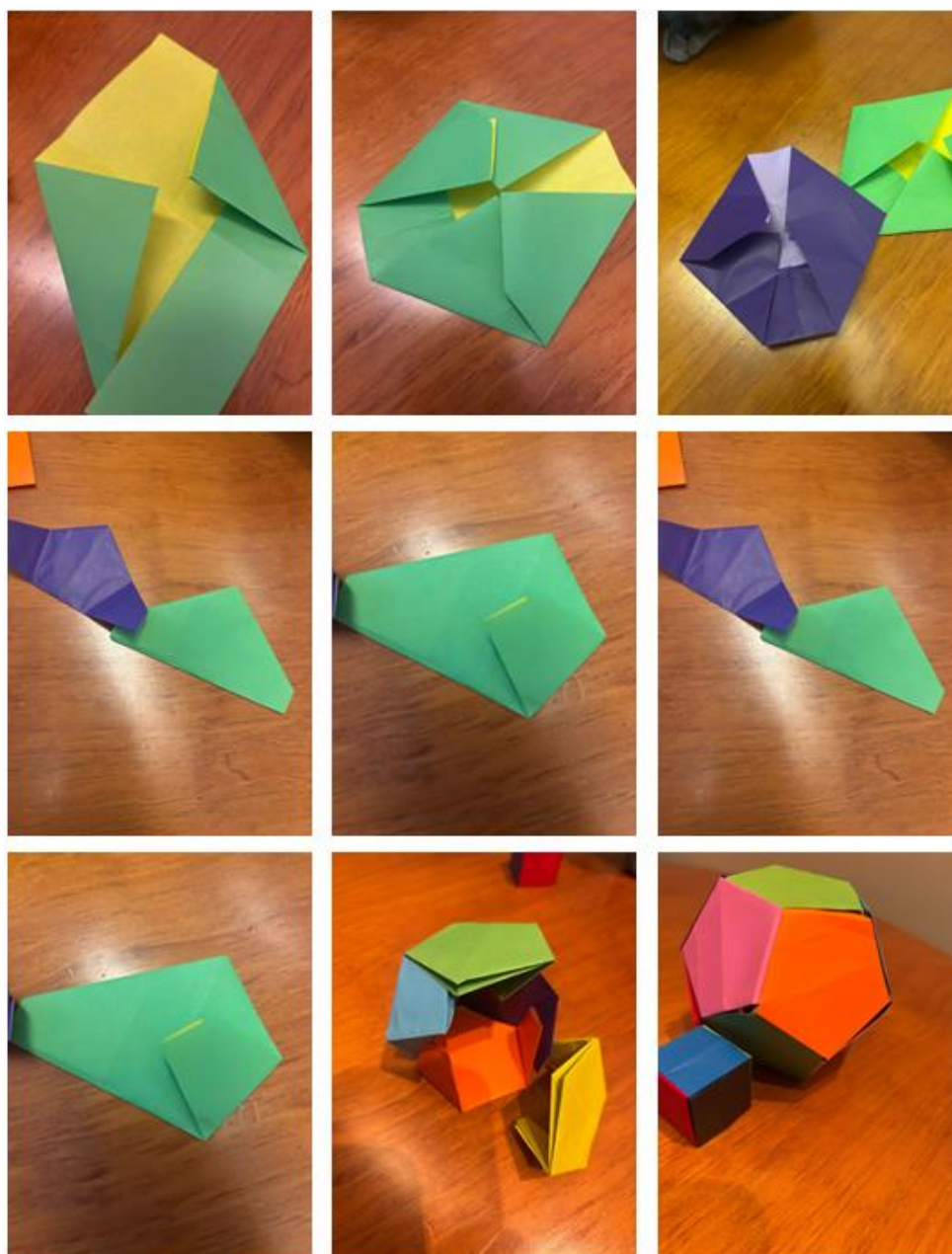


Figura 3: Dodecaedro apresentando doze faces pentagonais regulares.

Fonte: Os autores

A manipulação física das dobraduras auxiliou os participantes a compreenderem de modo mais claro a distinção entre superfície (bidimensional), sólido (tridimensional) e volume, além de evidenciar a relação entre Geometria e Arte, sobretudo no momento em que a construção dos poliedros se apropriou das técnicas de origami.

Adicionalmente, variantes nas técnicas de dobramento permitiram a exploração de diferentes níveis de complexidade, seja pelo número de módulos necessários, seja pela precisão exigida nas dobras. A montagem dos sólidos permitiu explorar tanto aspectos matemáticos (conceitos de face, aresta, vértice, regularidade) quanto aspectos artísticos (simetria, estética da forma).

A abordagem prática por meio de dobraduras foi eficaz para o ensino das propriedades dos sólidos platônicos. A metodologia adotada reforçou conceitos geométricos e estimulou a criatividade e o enga-

jamento dos participantes, mostrando-se alinhada com os princípios das MM, pois encorajou tentativas, erros e descobertas coletivas, e com a TRRS, pois favoreceu a conversão entre diferentes registros de representação. Ao final da oficina, recomendou-se a adaptação da proposta para diferentes faixas etárias, utilizando materiais acessíveis e estratégias pedagógicas diversificadas.

Construção dos poliedros de Platão com canudos e suas relações no ensino da matemática



Este capítulo refere-se ao segundo dia da oficina, que teve como objetivo aprofundar a exploração dos poliedros de Platão por meio de uma experiência prática distinta daquela realizada no primeiro dia: a construção tridimensional com canudos. Essa mudança de material e de estratégia pedagógica foi planejada para ampliar a vivência dos participantes. Ao confeccionar modelos com canudos, é possível manipular e visualizar diretamente as arestas, vértices e faces, favorecendo a discussão de propriedades fundamentais, como a Relação de Euler, bem como a identificação das características que diferenciam cada sólido.

A proposta para o segundo dia teve como objetivos (i) possibilitar a visualização concreta das propriedades dos sólidos regulares, (ii) discutir a Relação de Euler a partir das construções, e (iii) explorar as potencialidades e limitações do material no ensino da Matemática. A atividade buscou estimular reflexões sobre aspectos didáticos que emergem durante o processo de montagem desses modelos em contexto escolar, como:

- a necessidade de estabilizar estruturas por meio de diagonais adicionais ou subdivisão de arestas;
- a viabilidade de certos métodos de montagem, quando comparados a construções mais diretas;
- e a influência dessas escolhas na contagem e interpretação dos elementos do poliedro, especialmente ao discutir a relação $V + F = A + 2$ com estudantes da educação básica.

Na sequência, descrevemos os cinco sólidos regulares, destacando o número de faces, arestas e vértices, a estratégia de construção e observações didáticas relevantes.

3.1 Os poliedros de Platão

Os poliedros de Platão são sólidos tridimensionais convexos e regulares, caracterizados por terem todas as faces formadas por polígonos regulares congruentes, com o mesmo número de faces encontrando-se em cada vértice. Essa combinação de simetria e regularidade faz com que existam apenas cinco poliedros desse tipo: o tetraedro (quatro faces triangulares), o hexaedro ou cubo (seis faces quadradas), o octaedro (oito faces triangulares), o dodecaedro (doze faces pentagonais) e o icosaedro (vinte faces triangulares).

Esses sólidos receberam o nome em referência ao filósofo grego Platão, que, no diálogo *Timeu*, associou-os aos elementos naturais: fogo, terra, ar, água e o universo como um todo. Mais do que um interesse filosófico, no entanto, eles possuem relevância matemática: exemplificam propriedades geométricas como simetria, congruência e a Relação de Euler, que conecta o número de vértices, faces e arestas de todo poliedro convexo.

Nesta seção, apresentamos cada um dos cinco poliedros de Platão e discutimos possibilidades de construção por meio de canudos e barbante, apontando aspectos que podem ser explorados em atividades para a Educação Básica. Em seguida, na próxima seção, detalharemos como essas ideias foram aplicadas no segundo dia da oficina, descrevendo as estratégias de montagem adotadas, os desafios enfrentados e as reflexões didáticas que emergiram a partir da prática.

Ao propor a construção desses sólidos em atividades de ensino, sugerimos seguir a ordem: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Essa sequência possibilita que os estudantes avancem de

maneira gradual, iniciando com formas mais simples por possuírem menor quantidade de faces e, progressivamente, enfrentando a complexidade de manipular estruturas com maior número de faces, o que reduz a frustração inicial e favorece a compreensão do processo.

O tetraedro possui 4 faces triangulares, 4 vértices e 6 arestas. Por possuir menos faces e serem faces triangulares é considerado o mais simples de ser construído e apresenta boa estabilidade estrutural, pois suas faces triangulares conferem rigidez à forma. A Figura 4 ilustra a montagem de um tetraedro regular com canudos.



Figura 4: Tetraedro Regular com Canudos

Fonte: Os autores

O hexaedro regular (cubo), é formado por 6 faces quadradas, 8 vértices e 12 arestas. Diferentemente do tetraedro, o cubo (Figura 5) não se mantém estável quando montado apenas com suas arestas.

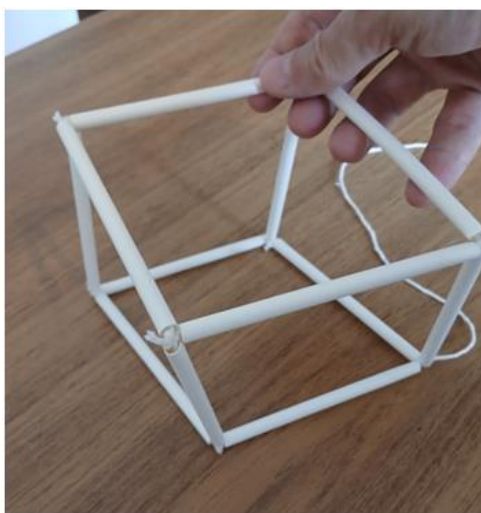


Figura 5: Hexaedro Regular com Canudos

Fonte: Os autores

Para reforçar a estrutura e possibilitar a exploração de suas propriedades, pode-se acrescentar diagonais em algumas faces, tornando-o firme e resistente, conforme pode ser observado na Figura 6.

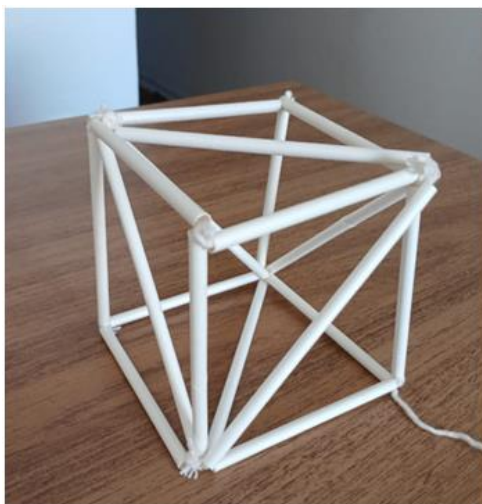


Figura 6: Hexaedro Regular Estabilizado

Fonte: Os autores

O octaedro regular é constituído por 8 faces triangulares, 6 vértices e 12 arestas, ilustrado na Figura 7. Sua estrutura é naturalmente estável, dispensando reforços adicionais.



Figura 7: Octaedro Regular com Canudos

Fonte: Os autores

O dodecaedro regular possui 12 faces pentagonais, 20 vértices e 30 arestas. Nessa construção, uma vez que as faces são pentágonos, a estrutura mostrou-se instável quando formada apenas pelas arestas externas (Figura 8). Para garantir estabilidade, é recomendável incluir diagonais internas ou subdividir algumas arestas.



Figura 8: Dodecaedro Regular com Canudos

Fonte: Os autores

Por fim, o icosaedro regular é composto por 20 faces triangulares, 12 vértices e 30 arestas. Assim como o tetraedro e o octaedro, o icosaedro (Figura 9) é formado por faces triangulares, o que o torna estável após a montagem.

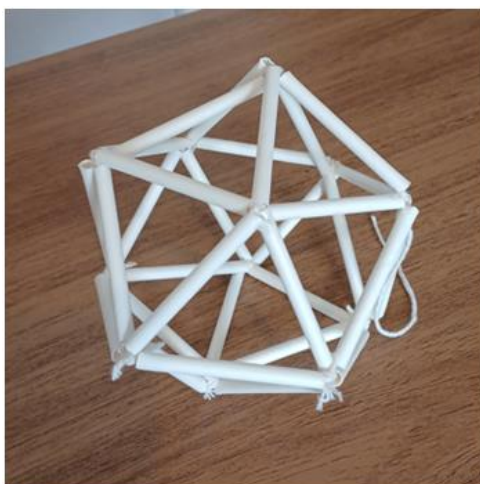


Figura 9: Icosaedro Regular com Canudos

Fonte: Os autores

Após a apresentação e construção de todos os poliedros, destacou-se que tetraedro, octaedro e icosaedro têm faces triangulares, o que contribui para sua estabilidade estrutural. Essa característica merece atenção do professor ao propor atividades com canudos, pois estruturas baseadas em polígonos triangulares tendem a se manter firmes, enquanto aquelas com faces quadradas ou pentagonais frequentemente necessitam de reforços adicionais. Consideramos relevante discutir com os estudantes como o uso de mais de um canudo para representar uma única aresta pode impactar a contagem das arestas ao trabalhar a Relação de Euler, promovendo uma reflexão crítica sobre as escolhas feitas na construção dos modelos.

3.2 Oficina de construção dos poliedros

No primeiro momento da oficina os participantes construíram individualmente o tetraedro regular. Para isso, cada um recebeu três canudos de 20 cm e um pedaço de barbante de aproximadamente 115 cm. Solicitou-se que os canudos fossem cortados ao meio com o auxílio de uma tesoura, obtendo seis segmentos que representariam as arestas do tetraedro.

Para iniciar a montagem, uniram-se três canudos formando uma das faces; o barbante foi passado internamente por esses três canudos. Em seguida, adicionaram-se mais dois canudos, também atravessados pelo barbante. Para fixar o último canudo, retornou-se o barbante por dentro de um dos primeiros, concluindo as seis arestas e fechando a estrutura com um nó, como mostra a Figura 10.

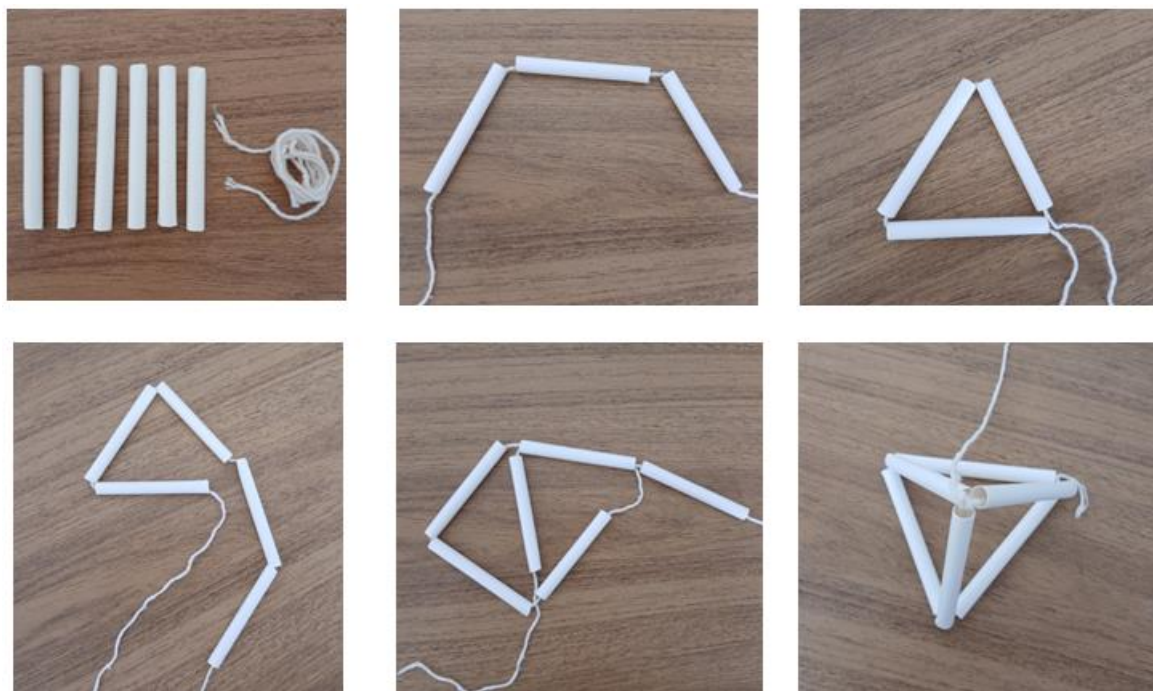


Figura 10: Processo de Construção do Tetraedro Regular com Canudos

Fonte: Os autores

No segundo momento, o desafio foi a construção de um cubo a partir de quatro pirâmides trirretangulares, ilustrado na Figura 11. O processo de montagem de cada pirâmide é semelhante ao do tetraedro, com a diferença de incluir ângulos retos. Cada pirâmide utilizou três canudos menores, de tamanho 10 cm, (arestas) e três maiores, de tamanho 14 cm, (diagonais das faces). Para facilitar a execução e otimizar o tempo da oficina, os canudos já foram entregues cortados nas medidas indicadas.



Figura 11: Quatro pirâmides trirretangulares para formação de um Cubo

Fonte: Os autores

Os grupos construíram as quatro pirâmides trirretangulares e, em seguida, as uniram para formar o cubo. O resultado final está ilustrado na Figura 12. Nessa construção, as diagonais das faces do cubo ficaram duplicadas. Foram utilizados vinte e quatro canudos para a montagem final do cubo.

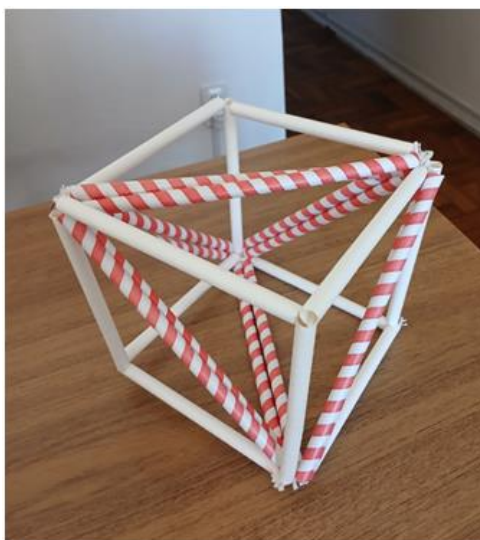


Figura 12: Cubo, a partir das quatro pirâmides trirretangulares

Fonte: Os autores

Como exemplo adicional, apresentou-se um dodecaedro já construído com canudos (Figura 14), formado pela união de doze pirâmides pentagonais congruentes (Figura 13). Cada pirâmide utilizou dez canudos, totalizando cento e vinte peças para todo o sólido. Para fixar as pirâmides entre si, foram usados pequenos pedaços de barbante; nessa construção todas as arestas ficaram duplicadas para facilitar a construção e montagem do sólido.



Figura 13: Doze pirâmides pentagonais congruentes

Fonte: Os autores



Figura 14: Dodecaedro Regular construído a partir das doze pirâmides.

Fonte: Os autores

Outra estrutura apresentada já pronta foi a clássica combinação de octaedro e tetraedro inscritos em um cubo (Figura 15). Para o cubo, utilizaram-se doze canudos nas arestas e seis nas diagonais das faces; o octaedro exigiu mais doze canudos. Os vértices do octaedro foram fixados no ponto médio das diagonais da face do cubo, que formavam o tetraedro.

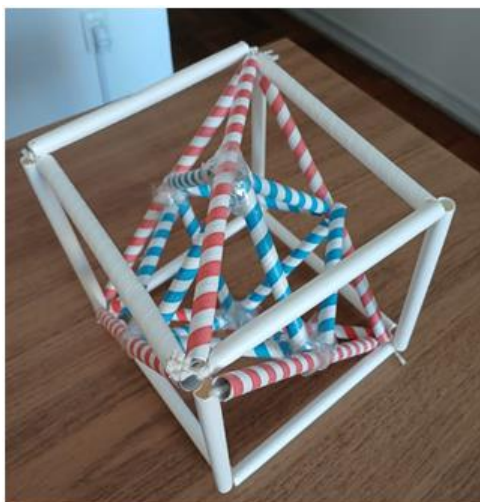


Figura 15: Tetraedro e Octaedro inscritos em um Cubo.

Fonte: Os autores

Em seguida, realizou-se a construção coletiva de um icosaedro regular. Os participantes montaram vinte pirâmides congruentes de base triangular, os triângulos da base tinham aresta de listra vermelha com medida de 21 cm, as demais arestas eram formadas por canudos branco de medida 20 cm como exemplificado na Figura 16, utilizando 120 canudos no total.



Figura 16: Pirâmides triangulares usada no Icosaedro Regular.

Fonte: Os autores

Ao unir todas as pirâmides, formou-se o icosaedro, um verdadeiro quebra-cabeça geométrico, ilustrado na Figura 17. Assim como em outras estruturas, as arestas foram duplicadas para facilitar a sua construção.

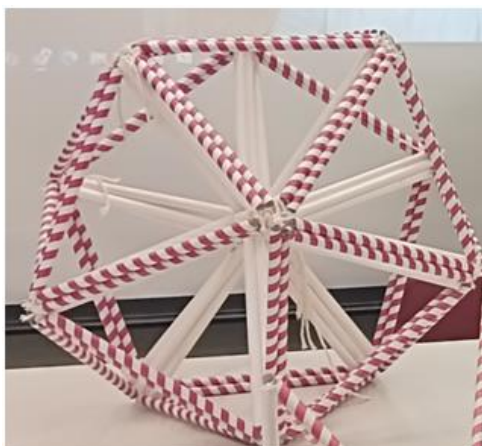


Figura 17: Icosaedro Regular com Canudos.

Fonte: Os autores

A construção dos poliedros com canudos evidenciou tanto o potencial quanto as limitações do material didático. O uso de pirâmides como peça-base facilitou a montagem, mas gerou duplicações em algumas arestas, o que precisou ser esclarecido para evitar erros. Esse aspecto, longe de ser um problema, mostrou-se fértil para discussão: os participantes foram levados a distinguir entre a representação concreta e o conceito matemático.

A atividade, embora desafiadora por envolver cortes, amarrações e muitas peças delicadas, despertou grande engajamento dos participantes. Além de possibilitar a contagem de faces, vértices e arestas, promoveu questionamentos sobre a aplicabilidade da Relação de Euler e sobre como a forma geométrica influencia a estabilidade estrutural.

4

Aprofundamento matemático: volumes



Neste capítulo, vamos partir dos objetos construídos nas Oficinas para exaurir os volumes dos Sólidos Platônicos.

4.1 Cubo

Por definição, o volume do cubo de aresta 1 mede 1 unidade de volume. Assim, 1 m^3 equivale ao volume de um cubo de aresta 1 m, 1 cm^3 equivale ao volume de um cubo de aresta 1 cm, 1 km^3 equivale ao volume de um cubo de aresta 1 km e assim por diante.

Para calcular o volume de um cubo de aresta a , basta verificar a quantidade necessária e suficiente de cubos unitários para preencher o cubo. Iniciaremos com um cubo cuja medida da aresta é um número inteiro. A Figura 18 ilustra esta situação.

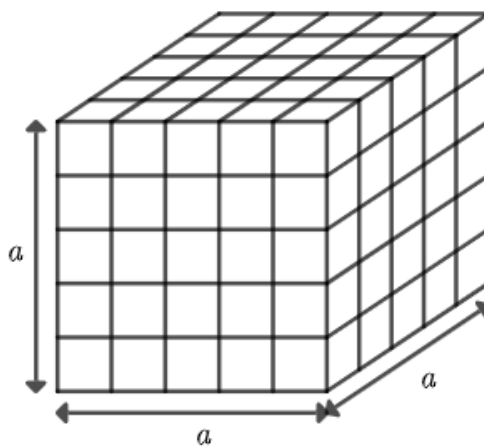


Figura 18: Cubo de aresta a .

Fonte: Os autores

É possível notar que haverá $a \cdot a = a^2$ cubinhos na base desse cubo. E, como o cubo é formado por a camadas iguais à de baixo, segue que o volume deste cubo é $a^2 \cdot a = a^3$.

No entanto, digamos que este cubo tenha como medida de suas arestas um número racional, não inteiro. Então, esta medida pode ser representada por $a = \frac{p}{q}$ com p e q inteiros, q não-nulo. Tomemos, então, um cubinho de aresta $\frac{1}{q}$ e vamos refletir sobre quantos desses cubinhos serão necessários e suficientes para cobrir um cubo unitário. Temos que $a = \frac{p}{q} = p \cdot \frac{1}{q}$. Isto mostra que é possível subdividir a unidade em q partes iguais, ou seja, vamos conseguir colocar $q \cdot q = q^2$ cubinhos na base do cubo unitário. Ainda, conseguiremos q camadas como esta, empilhando bases como esta no cubo unitário, de forma que o volume do cubo unitário é igual a $q^2 \cdot q = q^3$. Dessa equação, segue que o volume de cada cubinho de aresta $\frac{1}{q}$ mede $\left(\frac{1}{q}\right)^3 = \frac{1}{q^3}$.

Agora, precisamos refletir sobre quantos cubinhos de aresta $\frac{1}{q}$ são necessários e suficientes para cobrir um cubo de aresta $a = \frac{p}{q}$. Ora, como $a = p \cdot \frac{1}{q}$ podemos concluir que serão necessários e suficientes $p \cdot p = p^2$ cubinhos de aresta $\frac{1}{q}$ para a base e, consequentemente, $p^2 \cdot p = p^3$ para o cubo inteiro. Lembrando que cada um desses p^3 cubinhos tem volume igual a $\frac{1}{q^3}$, então o volume do cubo original é

dado por

$$V = p^3 \cdot \frac{1}{q^3} = \frac{p^3}{q^3} = \left(\frac{p}{q}\right)^3 = a^3,$$

mostrando que a expressão também é válida se a aresta do cubo tiver uma medida racional, não-inteira.

Por fim, caso a medida da aresta do cubo seja um número irracional, o método da exaustão de Eudoxo prova que a fórmula também é válida. Em linhas gerais, basta você tomar dois racionais tão próximos quanto se queira do número irracional que é a medida da aresta do cubo, um por falta, outro por excesso. Então, o volume está limitado pelos cubos desses racionais. Quanto mais este intervalo é reduzido, mais o volume do cubo se aproxima de a^3 , garantindo que a expressão também seja válida caso a medida do cubo seja um número irracional.

Portanto, o volume de um cubo de aresta a é a^3 .

4.2 Tetraedro e octaedro regulares

A partir da clássica figura do Tetraedro e do Octaedro Regulares, inscritos no Cubo, apresentados durante a Oficina de Canudos (Figura 19), calcularemos o volume desses dois sólidos, inicialmente em função da aresta do Cubo e, posteriormente, em função das suas próprias arestas.

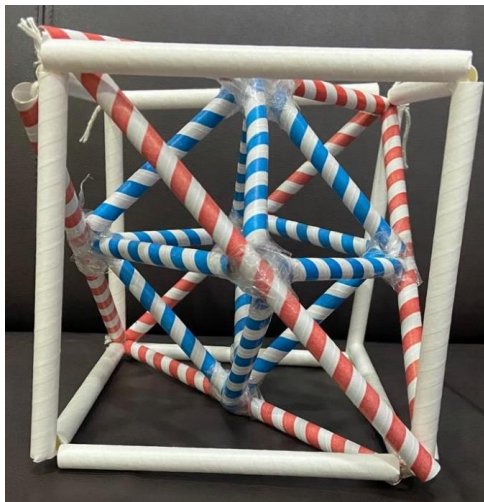


Figura 19: Tetraedro e Octaedro inscritos no Cubo, Oficina de Canudos

Fonte: Os autores

Na Oficina de Canudos verificamos que este Tetraedro é realmente regular, pois suas arestas são as diagonais das faces do Cubo. Da mesma forma, o Octaedro também é regular, pois suas arestas são os segmentos que ligam os pontos médios das arestas do Tetraedro Regular.

Para calcular o volume do Tetraedro, começemos percebendo que este Cubo foi construído a partir de 4 pirâmides trirretangulares mais o Tetraedro. Logo, temos:

$$V_{\text{Cubo}} = 4V_{\text{Pirâmide}} + V_{\text{Tetraedro Regular}}$$

Mas a base de cada pirâmide é um triângulo cuja área é a metade da área da base do cubo e altura de cada pirâmide é a própria altura do cubo. Desta forma, o volume de cada pirâmide é dado por:

$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}.$$

Das duas equações acima, segue:

$$V_{\text{Tetraedro Regular}} = V_{\text{Cubo}} - 4V_{\text{Pirâmide}} = a^3 - 4 \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{2a^3}{6} = \frac{a^3}{3}.$$

Portanto, o volume do Tetraedro Regular inscrito no Cubo mede um terço do volume do Cubo.

Para encontrarmos o volume do Tetraedro Regular em função de sua própria aresta, vamos estabelecer a relação entre a aresta do cubo, que chamamos a e a aresta do Tetraedro Regular, que chamaremos A_4 . Sendo A_4 a diagonal da face do Cubo, temos:

$$A_4 = a\sqrt{2} \implies a = \frac{A_4}{\sqrt{2}}.$$

Segue:

$$V_{\text{Tetraedro Regular}} = \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot a^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{A_4}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{(A_4)^3}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{(A_4)^3 \sqrt{2}}{12}.$$

Da mesma maneira, vamos calcular o volume do Octaedro Regular a partir do volume do Cubo. Para isto, iniciaremos percebendo que o Octaedro pode ser decomposto em duas pirâmides iguais e cuja base é um quadrado cuja medida do lado é a metade da medida da diagonal do Cubo.

Este resultado pode ser observado de duas formas distintas: constatando que, como o Octaedro é formado por segmentos que ligam os pontos médios das arestas do Tetraedro, então a medida de sua aresta é a metade da medida da aresta do Tetraedro (que, por sua vez, é a diagonal do Cubo) ou observando a seção plana que passa na metade do Cubo, como mostra a Figura 20.

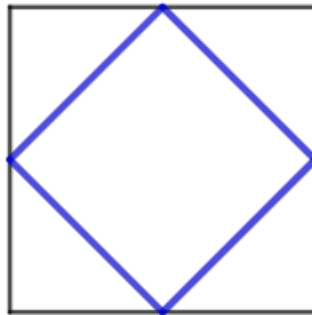


Figura 20: Seção Plana do Cubo e Arestas do Octaedro Regular

Fonte: Os autores

Logo, temos:

$$V_{\text{Octaedro Regular}} = 2V_{\text{Pirâmide}}$$

Mas a altura de cada pirâmide mede a metade da altura do Cubo. Desta forma, o volume de cada pirâmide é dado por:

$$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{12}.$$

Das duas equações acima, segue:

$$V_{\text{Octaedro Regular}} = 2V_{\text{Pirâmide}} = 2 \cdot \frac{a^3}{12} = \frac{a^3}{6}.$$

Portanto, o volume do Octaedro Regular inscrito no Cubo mede um sexto do volume do Cubo.

Para encontrarmos o volume do Octaedro Regular em função de sua própria aresta, basta utilizar a relação estabelecida entre a aresta do cubo, que chamamos a e a aresta do Octaedro Regular, que chamaremos A_8 . Como visto, temos:

$$A_8 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \implies a = \frac{2A_8}{\sqrt{2}} = A_8\sqrt{2}.$$

Segue:

$$V_{\text{Octaedro Regular}} = \frac{a^3}{6} = \frac{(A_8\sqrt{2})^3}{6} = \frac{(A_8)^3 \cdot 2\sqrt{2}}{6} = \frac{(A_8)^3 \sqrt{2}}{3}.$$

4.3 Pentágono regular e o número de ouro

Para calcularmos os volumes do Dodecaedro Regular e do Icosaedro Regular, precisaremos, inicialmente, resgatar duas propriedades características do Pentágono Regular, uma vez que os dois sólidos se relacionam diretamente com este polígono: o Dodecaedro Regular é composto de 12 faces pentagonais, enquanto o Icosaedro Regular pode ser visto como duas pirâmides pentagonais encaixadas em um antiprisma, poliedro com duas bases poligonais iguais e paralelas, que são conectadas por faces triangulares.

PROPRIEDADE 4.1

A medida da diagonal de um pentágono regular de lado 1 é igual ao número de ouro (φ).

Demonstração. A Figura 21 ilustra um pentágono regular de lado 1 e três das suas diagonais, cujas medidas serão denotadas por x .

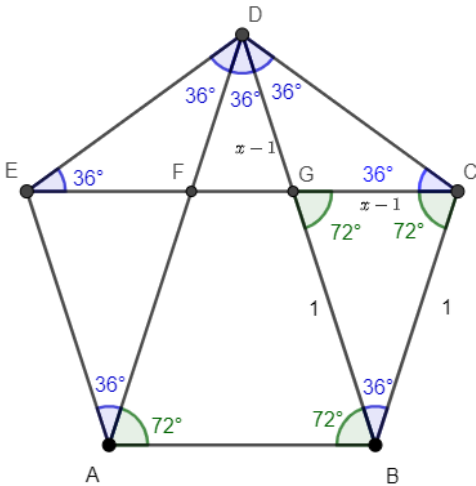


Figura 21: O Pentágono Regular de Lado 1

Fonte: Os autores

Podemos observar que há vários triângulos isósceles na figura. Por exemplo, como BC e CD são lados do pentágono, o triângulo BCD é isósceles e, portanto, os ângulos DBC e BDC são congruentes. Como o ângulo BCD mede 108° (ângulo interno do pentágono), concluímos que $\hat{DBC} = \hat{BDC}$.

Da mesma forma, pela própria simetria do polígono, podemos concluir que $D\hat{A}E = A\hat{D}E = 36^\circ$. Segue, $A\hat{D}B = 108^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 36^\circ$. Ainda, o triângulo CDE é congruente aos triângulos BCD e AED (LAL), de forma que $D\hat{C}E = D\hat{E}C = 36^\circ$.

Por outro lado, o ângulo BGC é externo ao triângulo CDG e, portanto, mede $36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$, mostrando-nos que o triângulo BCG também é isósceles e, mais do que isso, é semelhante ao triângulo ABD .

A semelhança entre os triângulos CGB e ABD nos permitirá calcular a medida da diagonal do pentágono regular: chamemos esta medida de x . Como o triângulo BCG é isósceles, $BG = BC = 1$. Segue $DG = x - 1$. Mas como o triângulo CDG também é isósceles, $CG = DG = x - 1$. Por fim, da semelhança entre os triângulos BCG e ABD temos:

$$\frac{CG}{AB} = \frac{GB}{BD} \implies \frac{x-1}{1} = \frac{1}{x} \implies x(x-1) = 1 \implies x^2 - x - 1 = 0$$

A única solução positiva (imprescindível para ser a medida da diagonal do pentágono) é dada pelo número de ouro, a saber:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi. \quad \blacksquare$$

O número de ouro possui alguns atributos matemáticos peculiarmente interessantes. Apresentaremos um desses, que nos ajudarão nos cálculos apresentados ao longo deste capítulo: as potências de φ (ou seja, φ^n) podem ser escritas da forma $F_n \cdot \varphi + F_{n-1}$, onde F_n e F_{n-1} são termos consecutivos da sequência de Fibonacci. Uma forma simples de verificar tal propriedade é notar que, como φ é solução da equação $x^2 - x - 1 = 0$, então $\varphi^2 = \varphi + 1$. Segue:

$$\begin{aligned} \varphi^3 &= \varphi^2 \cdot \varphi = (\varphi + 1) \cdot \varphi = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1 \\ \varphi^4 &= \varphi^3 \cdot \varphi = (2\varphi + 1) \cdot \varphi = 2\varphi^2 + \varphi = 3\varphi + 2 \\ \varphi^5 &= \varphi^4 \cdot \varphi = (3\varphi + 2) \cdot \varphi = 3\varphi^2 + 2\varphi = 5\varphi + 3 \\ \varphi^6 &= \varphi^5 \cdot \varphi = (5\varphi + 3) \cdot \varphi = 5\varphi^2 + 3\varphi = 8\varphi + 5 \\ &\vdots \\ \varphi^n &= F_n \cdot \varphi + F_{n-1}. \end{aligned}$$

PROPRIEDADE 4.2

$$\cos 36^\circ = \frac{\varphi}{2}, \quad \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{3-\varphi}}{2} \quad e \quad \cos 72^\circ = \frac{\varphi-1}{2}.$$

Demonstração. Retomemos a Figura 21, utilizada na demonstração da propriedade anterior e vamos aplicar a Lei dos Cossenos no triângulo ABD :

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos \hat{A}DB \\
 1^2 &= \varphi^2 + \varphi^2 - 2 \cdot \varphi \cdot \varphi \cdot \cos 36^\circ \\
 1 &= 2\varphi^2 - 2\varphi^2 \cdot \cos 36^\circ \\
 1 &= 2\varphi^2 \cdot (1 - \cos 36^\circ) \\
 1 - \cos 36^\circ &= \frac{1}{2\varphi^2} \\
 \cos 36^\circ &= 1 - \frac{1}{2\varphi^2} = \frac{2\varphi^2 - 1}{2\varphi^2} \\
 \cos 36^\circ &= \frac{2 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \\
 \cos 36^\circ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \implies \cos 36^\circ = \frac{\varphi}{2}.
 \end{aligned}$$

Agora, utilizaremos a propriedade fundamental da Trigonometria para calcularmos o valor de $\sin 36^\circ$:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 36^\circ + \cos^2 36^\circ &= 1 \\
 \sin^2 36^\circ + \frac{\varphi^2}{4} &= 1 \implies \sin^2 36^\circ = 1 - \frac{\varphi^2}{4} \\
 \sin 36^\circ &= \sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{4}} = \frac{\sqrt{4 - \varphi^2}}{2} \implies \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{3 - \varphi}}{2}.
 \end{aligned}$$

Para calcular $\cos 72^\circ$, vamos tomar como base as razões trigonométricas calculadas para o ângulo de 36° :

$$\cos 72^\circ = \cos(36^\circ + 36^\circ) = 2 \cos^2 36^\circ - 1 \implies \cos 72^\circ = \frac{\varphi^2}{2} - 1 = \frac{\varphi - 1}{2}. \quad \blacksquare$$

PROPRIEDADE 4.3

A distância do centro do pentágono regular de lado 1 a qualquer de seus vértices é $\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi + 2}}$.

Demonstração. A Figura 22 ilustra um pentágono regular de lado 1 e seu centro, denominado O . Queremos calcular a distância $OA = OD = d$.

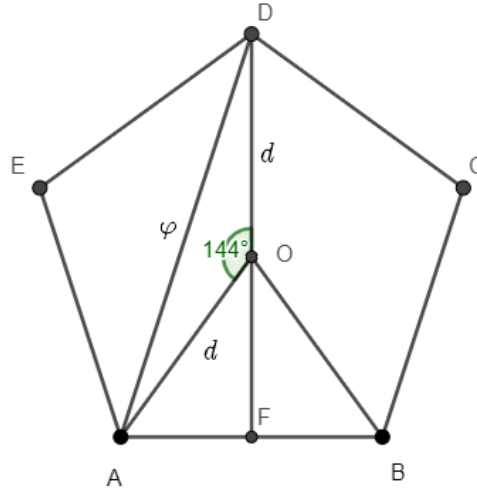


Figura 22: O Centro do Pentágono Regular de Lado 1

Fonte: Os autores

Utilizando a Lei dos Cossenos no triângulo AOD , temos:

$$AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2 \cdot AO \cdot OD \cdot \cos 144^\circ$$

$$\varphi^2 = d^2 + d^2 - 2d^2 \cdot \cos 144^\circ$$

$$\varphi^2 = 2d^2 - 2d^2 \cdot (-\cos 36^\circ)$$

$$\varphi^2 = 2d^2 \cdot \left(1 + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\varphi^2 = 2d^2 \cdot \left(\frac{2 + \varphi}{2}\right)$$

$$\varphi^2 = 2d^2 \cdot \left(\frac{1 + \varphi^2}{2}\right)$$

$$\varphi^2 = d^2 \cdot (1 + \varphi^2)$$

$$d^2 = \frac{\varphi^2}{1 + \varphi^2}$$

$$d = \frac{\varphi}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \Rightarrow d = \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi + 2}}.$$

■

PROPRIEDADE 4.4

A área de um pentágono regular de lado 1 é $\frac{5(\varphi + 1)}{4\sqrt{\varphi + 2}}$.

Demonstração. A Figura 23 ilustra um pentágono regular de lado 1 dividido em 5 triângulos congruentes. Para calcular a área do pentágono, basta calcular a área de um desses triângulos e multiplicar por 5.

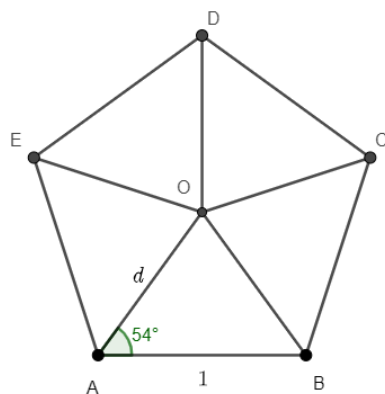


Figura 23: Pentágono dividido em 5 triângulos congruentes

Fonte: Os autores

Segue:

$$\begin{aligned}
 S &= 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AO \cdot \sin 54^\circ \\
 S &= 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi+2}} \cdot \cos 36^\circ \implies S = \frac{5}{2} \cdot \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi+2}} \cdot \frac{\varphi}{2} \\
 S &= \frac{5}{4} \cdot \frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi+2}} \implies S = \frac{5(\varphi+1)}{4\sqrt{\varphi+2}}.
 \end{aligned}$$

■

4.4 Dodecaedro regular

Durante a Oficina de Canudos, mostramos um Dodecaedro Regular montado a partir de doze pirâmides congruentes. Assim, para calcular o volume do Dodecaedro Regular, basta encontrar o volume de cada uma dessas pirâmides e multiplicá-lo por doze.

No modelo a seguir, ilustrado pela Figura 24, temos um dodecaedro de aresta 1, no qual destacamos uma dessas pirâmides, o ponto U , centro do dodecaedro e o ponto V , centro do pentágono da base da pirâmide destacada.

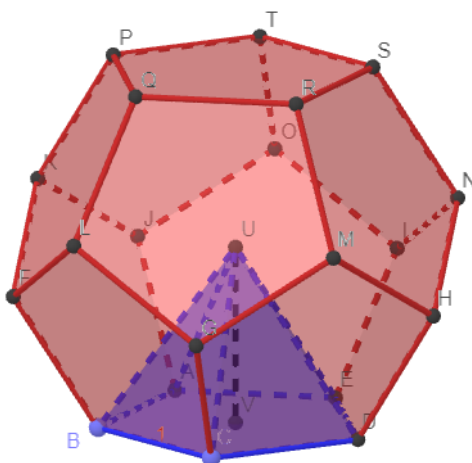


Figura 24: Dodecaedro Regular de Aresta 1

Fonte: Os autores

Explorando o modelo, podemos perceber duas relações entre os elementos do dodecaedro:

- o segmento BU é o raio da circunferência circunscrita ao dodecaedro, uma vez que a distância de U a B é exatamente a mesma que a distância de U a cada um dos outros vértices do poliedro. Assim, vamos tomar $BU = R$;
- o segmento UV é a altura da pirâmide destacada e também é o raio da circunferência inscrita ao poliedro, uma vez que a distância de U a V é exatamente a mesma que a distância de U a cada um dos outros centros das faces do poliedro. Assim, vamos tomar $UV = r$.

Continuando a exploração do modelo, percebemos que o triângulo BSD (onde $BS = 2R$ e $BD = \varphi$) é retângulo, de forma que, encontrando a medida de SD , podemos usar o Teorema de Pitágoras para calcular R . Entretanto, na Oficina de Dobraduras, foi mostrado que o ângulo entre as faces do Dodecaedro Regular mede 120° , de forma que é possível calcular a medida de SD , aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo SND . A Figura 25 destaca esses dois triângulos.

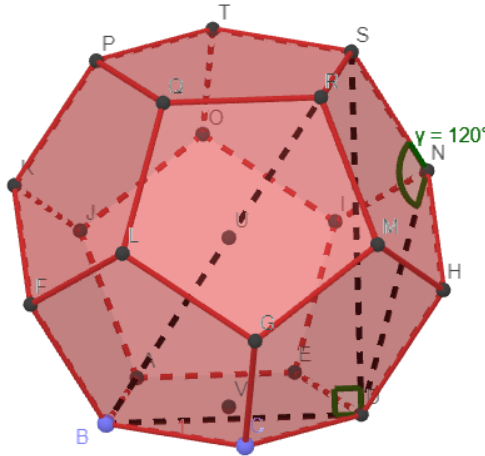


Figura 25: Triângulos BSD e SND no Dodecaedro Regular de Aresta 1

Fonte: Os autores

Das relações métricas nos dois triângulos citados, temos:

$$SD^2 = SN^2 + ND^2 - 2 \cdot SN \cdot ND \cdot \cos 120^\circ$$

$$SD^2 = 1^2 + \varphi^2 - 2 \cdot 1 \cdot \varphi \cdot (-0,5)$$

$$SD^2 = 1 + \varphi^2 + \varphi = 2\varphi^2$$

e

$$BS^2 = SD^2 + BD^2 \implies BS^2 = 2\varphi^2 + \varphi^2$$

$$BS^2 = 3\varphi^2 \implies BS = \varphi\sqrt{3}.$$

Portanto, temos:

$$R = \frac{BS}{2} = \frac{\varphi\sqrt{3}}{2}.$$

Foi a partir desta relação que calculamos a medida das arestas das doze pirâmides congruentes que utilizamos para construir o Dodecaedro Regular na Oficina de Canudos. Como $R \cong 1,4$ as arestas “internas” das pirâmides (os segmentos que ligarão a base ao vértice) serão maiores que as arestas “externas” (base da pirâmide que efetivamente formam o dodecaedro).

Por exemplo, se quisermos construir um dodecaedro a partir de canudos de 20 cm, então as arestas internas serão construídas com canudos brancos (arestas que ficarão na parte de dentro) com esta medida e os canudos coloridos (arestas que efetivamente comporão o dodecaedro) deverão ser cortados em $20 \div 1,4 \cong 14,3$ cm.

Para encontrar o volume do Dodecaedro Regular de aresta 1, basta calcular o volume de uma das pirâmides que o compõem e multiplicar por 12. A área da base do pentágono já temos, falta calcular a altura de cada uma dessas pirâmides. Para isto, podemos usar o Teorema de Pitágoras no triângulo UVC , como mostra a Figura 26.

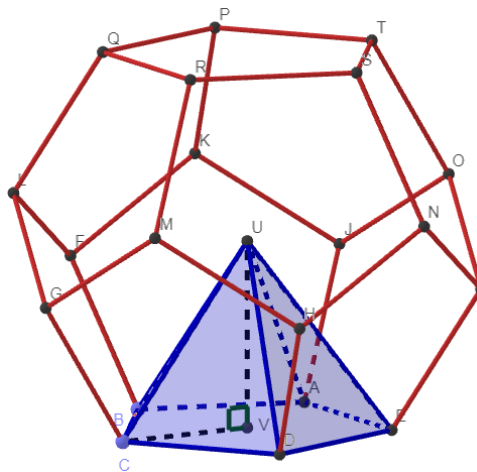


Figura 26: Triângulo retângulo UVC em uma das pirâmides que formam o Dodecaedro Regular

Fonte: Os autores

Dessa forma, segue:

$$\begin{aligned}
 UV^2 + CV^2 &= UC^2 \\
 h^2 + \left(\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi+2}} \right)^2 &= \left(\frac{\varphi\sqrt{3}}{2} \right)^2 \\
 h^2 &= \frac{3\varphi^2}{4} - \frac{\varphi^2}{\varphi+2} = \frac{3\varphi+3}{4} - \frac{\varphi+1}{\varphi+2} = \frac{(3\varphi+3)(\varphi+2) - 4(\varphi+1)}{4(\varphi+2)} \\
 h^2 &= \frac{3\varphi^2 + 9\varphi + 6 - 4\varphi - 4}{4(\varphi+2)} = \frac{3\varphi^2 + 5\varphi + 2}{4(\varphi+2)} = \frac{3\varphi+3+5\varphi+2}{4(\varphi+2)} = \frac{8\varphi+5}{4\varphi+8} \\
 h^2 &= \frac{\varphi^6}{4(\varphi+2)} \implies h = \frac{\varphi^3}{2\sqrt{\varphi+2}}
 \end{aligned}$$

Portanto, o volume do Dodecaedro Regular de aresta 1 é dado por:

$$V = 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5\varphi^2}{4\sqrt{\varphi+2}} \cdot \frac{\varphi^3}{2\sqrt{\varphi+2}} = \frac{5\varphi^5}{2(\varphi+2)}$$

$$V = \frac{5}{2} \cdot \frac{\varphi^5}{\varphi+2}$$

Consequentemente, o volume de um Dodecaedro Regular de aresta A_{12} é dado por

$$V = \frac{5}{2} \cdot (A_{12})^3 \cdot \frac{\varphi^5}{\varphi+2}$$

4.5 Icosaedro regular

Durante a Oficina de Canudos, montamos, juntamente com os participantes da oficina, um Icosaedro Regular a partir de vinte pirâmides congruentes. Assim, para calcular o volume do Icosaedro Regular, basta encontrar o volume de cada uma dessas pirâmides e multiplicá-lo por vinte.

No modelo a seguir, ilustrado pela Figura 27, temos um icosaedro de aresta 1, no qual destacamos uma dessas pirâmides, o ponto U , centro do dodecaedro e o ponto V , centro do pentágono da base da pirâmide destacada.

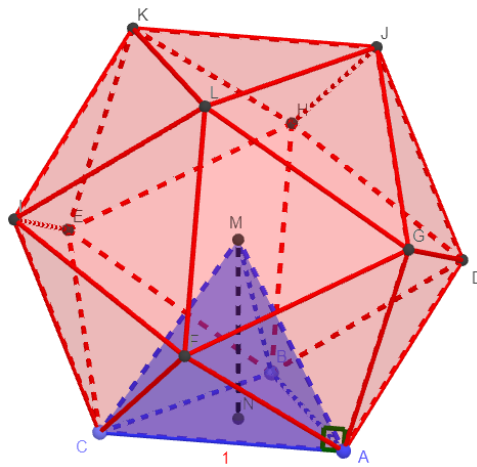


Figura 27: Icosaedro Regular de Aresta 1

Fonte: Os autores

Explorando o modelo, podemos perceber duas relações entre os elementos do icosaedro:

- o segmento CM é o raio da circunferência circunscrita ao icosaedro, uma vez que a distância de C a M é exatamente a mesma que a distância de M a cada um dos outros vértices do poliedro. Assim, vamos tomar $CM = R$;
- o segmento MN é a altura da pirâmide destacada e também é o raio da circunferência inscrita ao poliedro, uma vez que a distância de M a N é exatamente a mesma que a distância de M a cada um dos outros centros das faces do poliedro. Assim, vamos tomar $MN = r$.

Continuando a exploração do modelo, percebemos que o triângulo CJA (onde $CJ = 2R$ e $CA = 1$) é retângulo, de forma que, encontrando a medida de JA , podemos usar o Teorema de Pitágoras para calcular R . Entretanto, o ângulo JDA é um dos ângulos de uma das “cúpulas” do Icosaedro e, portanto, mede 108° . Consequentemente, é possível calcular a medida de JA , aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo isósceles JDA . A Figura 28 destaca esses dois triângulos.

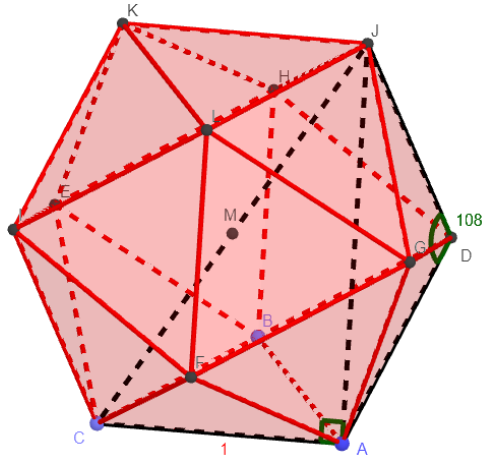


Figura 28: Triângulos CJA e JDA no Icosaedro Regular de Aresta 1

Fonte: Os autores

Das relações métricas nos dois triângulos citados, temos:

$$JA^2 = JD^2 + DA^2 - 2 \cdot JD \cdot DA \cdot \cos 108^\circ$$

$$JA^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-\cos 72^\circ)$$

$$JA^2 = 2 + 2 \cdot \left(\frac{\varphi - 1}{2} \right)$$

$$JA^2 = 2 + \varphi - 1$$

$$JA^2 = \varphi + 1 = \varphi^2$$

$$JA = \varphi.$$

Note que o segmento JA é uma das diagonais da pirâmide pentagonal, o que confirma a medida φ encontrada no cálculo acima. Ainda, temos:

$$CJ^2 = JA^2 + AC^2 \implies CJ^2 = \varphi^2 + 1 = \varphi + 2 \implies CJ = \sqrt{\varphi + 2}.$$

Portanto, temos:

$$R = \frac{CJ}{2} = \frac{\sqrt{\varphi + 2}}{2}.$$

Foi a partir desta relação que calculamos a medida das arestas das vinte pirâmides congruentes que utilizamos para construir o Icosaedro Regular na Oficina de Canudos. Como $R \cong 0,95$ as arestas que formam o topo das pirâmides serão menores que as arestas da base (as que efetivamente formam o icosaedro).

Por exemplo, se quisermos construir um icosaedro a partir de canudos de 20 cm, então as arestas externas serão construídas com canudos vermelhos com esta medida e os canudos brancos deverão ser cortados em $20 \cdot 0,95 \cong 19$, cm.

Para encontrar o volume do Icosaedro Regular de aresta 1, basta calcular o volume de uma das pirâmides que o compõem e multiplicar por 20. Precisaremos resgatar dois conceitos sobre triângulos equiláteros:

- a área de um triângulo equilátero de lado 1 é $\frac{\sqrt{3}}{4}$;
- o segmento que liga um vértice ao centro do triângulo equilátero é $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Para justificar estes resultados, basta notar que a altura do triângulo equilátero é $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e que a distância de um vértice ao centro (encontro das medianas) é $\frac{2}{3}$ dessa medida.

Portanto, falta calcular apenas a altura de cada uma das pirâmides. Para isto, podemos usar o Teorema de Pitágoras no triângulo UVC , como mostra a Figura 29.

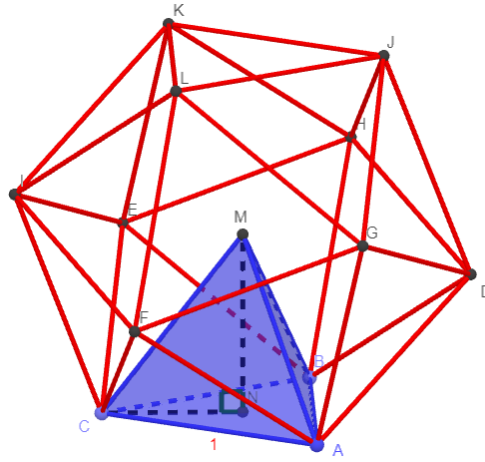


Figura 29: Triângulo retângulo MNC em uma das pirâmides que formam o Icosaedro Regular

Fonte: Os autores

Dessa forma, segue:

$$\begin{aligned}
 MN^2 + CN^2 &= CM^2 \\
 h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{\varphi+2}}{2}\right)^2 \\
 h^2 + \frac{1}{3} &= \frac{\varphi+2}{4} \implies h^2 = \frac{3\varphi+6}{12} - \frac{4}{12} = \frac{3\varphi+2}{12} = \frac{\varphi^4}{12} \\
 h &= \frac{\varphi^2}{2\sqrt{3}} \implies h = \frac{\varphi^2\sqrt{3}}{6}.
 \end{aligned}$$

Portanto, o volume do Icosaedro Regular de aresta 1 é dado por:

$$V = 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\varphi^2\sqrt{3}}{6} \implies V = \frac{5\varphi^2}{6}.$$

Consequentemente, o volume de um Icosaedro Regular de aresta A_{20} é dado por

$$V = \frac{5}{6} \cdot (A_{20})^3 \cdot \varphi^2.$$

Considerações finais



A oficina *Dobraduras e Canudos do LEMAT: Geometria em Ação no Estudo dos Poliedros* buscou proporcionar uma experiência formativa significativa a professores e professoras da Educação Básica, unindo teoria e prática no ensino da Geometria. Por meio de atividades concretas, visuais e colaborativas, os participantes foram convidados a explorar conceitos fundamentais da Geometria Espacial, como os poliedros de Platão, suas propriedades e seus volumes, a partir da construção com dobraduras e materiais simples como papel, canudos e barbante.

Esta proposta de oficina representou uma oportunidade ímpar para nós, professores do CAP-UERJ, compartilharmos nosso trabalho na linha de pesquisa referente à produção de atividades multissensoriais com outros professores de Matemática da Educação Básica. A oficina foi concebida como um espaço de trocas, experimentação e reflexão sobre práticas pedagógicas que valorizam o pensamento visual, o uso de materiais concretos e a investigação matemática como formas de tornar o ensino da Geometria mais acessível e significativo.

Na primeira sessão, apresentamos possibilidades de construção de poliedros por meio de dobraduras e, em um segundo momento, utilizando canudos. A partir dessas construções, exploramos algumas propriedades dos sólidos e discutimos com os participantes como essas atividades podem enriquecer as aulas sobre esse tema no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Além de promover o engajamento por meio da ludicidade, as atividades favoreceram a apropriação de conceitos geométricos fundamentais e estimularam a criatividade e o trabalho colaborativo.

Na segunda sessão, realizamos um aprofundamento matemático, utilizando as construções com canudos como base. O objetivo foi discutir figuras clássicas da Geometria Espacial, como o tetraedro regular presente no cubo e a relação entre o octaedro e o cubo. Além disso, os participantes foram convidados a deduzir os volumes do dodecaedro regular e do icosaedro regular a partir de sua decomposição em pirâmides. Ao vivenciarem essas investigações, os professores puderam refletir sobre a importância de propostas que não apenas apresentem fórmulas prontas, mas que envolvam os estudantes na construção ativa do conhecimento matemático.

Fundamentada na abordagem MM propostas por Boaler (2015, 2018a, 2019), e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval (1993), a oficina concretizou um espaço de aprendizagem pautado na mobilização de múltiplos registros de representação e no desenvolvimento de um raciocínio geométrico mais profundo. As atividades propiciaram a conversão entre registros, como o concreto, o figural, o algébrico e o verbal, promovendo a compreensão dos objetos matemáticos para além de suas representações formais. Nesse processo, os erros foram compreendidos como oportunidades de aprendizagem, e a pluralidade de estratégias foi valorizada como elemento central para a construção de sentido na Matemática.

Acreditamos que propostas como esta contribuem para a ressignificação do ensino de Matemática, especialmente da Geometria, e para o fortalecimento da formação docente contínua, ao oferecer instrumentos teóricos e práticos que podem ser adaptados a diferentes realidades escolares. Esperamos que este *e-book* sirva como registro, inspiração e convite para que mais educadores e educadoras levem para suas salas de aula uma Matemática viva, sensível e transformadora, construída com as mãos, com a mente e com o coração.

Referências



- BOALER, J. **Fluência sem medo: pesquisas mostram as melhores formas de aprender fatos matemáticos**. [S. l.: s. n.], 2015. https://youcubed2.wpenginpowered.com/wp-content/uploads/2017/03/CD05_Fluence_Without_Fear_PORTUGUESE-.pdf. Acesso em: 03 jul. 2022.
- BOALER, J. **Mentalidades matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador**. Porto Alegre: Penso, 2018.
- BOALER, J. **Ver para entender: a importância da matemática visual para o cérebro e o aprendizado**. [S. l.: s. n.], 2018. <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2018/05/Ver-para-Entender.pdf>. Acesso em: 08 jul. 2022.
- BOALER, J. **Prove it to me! Mathematics teaching in the middle school**. NCTM, v. 24, n. 7, p. 422–428, 2019.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. [S. l.: s. n.], 2018. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 22 mar. 2024.
- DUVAL, R. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives – IREM (Strasbourg)*, v. 6, p. 37–65, 1993.
- DUVAL, R. **Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking**. In: PROCEEDINGS of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cuernavaca, Morelos, Mexico: [s. n.], 1999. p. 23–26.
- DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, S. D. A. O. (ed.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. São Paulo: Papirus, 2008. p. 11–33.
- DUVAL, R. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. *Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT*, v. 7, n. 2, 2012.
- DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento (tradução revisitada em 2023)**. *Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT*, v. 7, n. 2, 2023. Tradução revisitada em 2023.
- DUVAL, R.; KAPUT, J. J. **Visualization: cognitive functions in mathematical thinking**. [S. l.: s. n.], 1999. Basic issues for learning.
- FLORES, A. **Geometric representations in the transition from arithmetic to algebra. Representations and mathematics visualization**, p. 9–29, 2002.
- FLORES, C. R. **Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem**. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, v. 19, n. 26, 2006.
- FREITAS, J. L. M. D.; REZENDE, V. **Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, v. 2, n. 3, p. 10–34, 2020.
- LIBÂNEO, J. C. **Didática**. 2ª. São Paulo: Cortez, 1994.

ROGENSKI, M. L.; PEDROSO, S. **O ensino da geometria na educação básica: realidade e possibilidades**. [S. l.: s. n.], 2015. <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf>. Acesso em: 05 jan. 2015.

SANTOS, A.; OLIVEIRA, G. **A prática pedagógica em geometria nos primeiros anos do ensino fundamental: construindo significados**. *Revista Valore*, v. 3, n. 1, p. 388–407, 2018.

SILVA, M.; BARROS, K. **A aprendizagem de figuras planas: um olhar a partir das dificuldades dos alunos**. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco, Pesqueira, 2023.



7º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Realização e Organização



Associação Nacional dos Professores
de Matemática na Educação Básica

Distribuição

