



**7º Simpósio Nacional da
Formação do Professor
de Matemática**

PRODUÇÃO DE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

**ações e reflexões para seu ensino e
aprendizagem**

Murilo Falcirolli Amorim

Ana Paula Jahn



Associação Nacional dos Professores
de Matemática na Educação Básica

PRODUÇÃO DE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

**ações e reflexões para seu ensino e
aprendizagem**

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

Presidente:

Marcela Luciano Vilela de Souza

Vice-Presidente:

Ana Luiza de Freitas Kessler

Diretores:

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Raquel Bodart

Sumaia Almeida Ramos

Viviane de Oliveira Santos

7º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Comissão Organizadora:

Ana Luiza de Freitas Kessler

Anderson Yassuhiro Afuso

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Carlos Eduardo de Oliveira

Cecília Pereira de Andrade

Elen Viviani Pereira Spreafico

Graziele Souza Mozer

Leonardo Barichello

Marcela Luciano Vilela de Souza

Marcelo Firer

Raquel Oliveira Bodart

Samuel Rocha de Oliveira

Sumaia Almeida Ramos

Viviane de Oliveira Santos

Comitê Científico:

Antonio Cardoso do Amaral

Ana Luiza de Freitas Kessler

Bernadete Angelina Gatti

Eliana Souza

Érika Botelho Guimarães Rijo Alves

Fábio Luiz Borges Simas

Gilberto Januário

João Frederico C.A. Meyer

Marcela Luciano Vilela de Souza

Marcelo Firer

Victor Augusto Giraldo

Viviane de Oliveira Santos

Walcy Santos

Yuriko Yakamoto Baldin

Comitê Editorial:

Alzenira da Silva Leão

Antônio Cardoso do Amaral

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Evanilson Landim Alves

Gladson Octaviano Antunes

José Fernando Santos Rodrigues Junior

Josieli Fátima Tonin Pagliosa

Lino Marcos da Silva

Marcela Luciano Vilela de Souza

Michel Cambrainha de Paula

Nickson Deyvis da Silva Correia

Renata Magarinus

Rita Santos Guimarães

Roberto César Cucharero Peregrina

Vitor Gustavo de Amorim

Viviane de Oliveira Santos



**7º Simpósio Nacional da
Formação do Professor
de Matemática**

PRODUÇÃO DE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

**ações e reflexões para seu ensino e
aprendizagem**

**Murilo Falcirolli Amorim
Ana Paula Jahn**

1ª edição

2026

Rio de Janeiro

Produção de provas e demonstrações matemáticas: ações e reflexões para seu ensino e aprendizagem

Copyright © 2026, Murilo Falcirolli Amorim, Ana Paula Jahn

Direitos reservados pela Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica.

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Projeto gráfico: Gabriel Brasil Nepomuceno

Produção editorial: Editora Pi

www.editorapi.com.br | contato@editorapi.com.br | +55 21 97748-7208

Distribuição: Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

www.anpmat.org.br | editoraanpmat@anpmat.org.br

ISBN: 978-65-88013-45-8

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Amorim, Murilo Falcirolli
Produção de provas e demonstrações matemáticas
[livro eletrônico] : ações e reflexões para seu
ensino e aprendizagem / Murilo Falcirolli Amorim, Ana
Paula Jahn. -- 1. ed. -- Rio de Janeiro : ANPMat,
2026. -- ("Simpósio Nacional da Formação do Professor
de Matemática")
PDF

Bibliografia
ISBN 978-65-88013-45-8

1. Argumentação 2. Educação básica 3. Matemática -
Estudo e ensino 4. Professores - Formação I. Jahn,
Ana Paula. II. Título III. Série.

26-398745.0

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Maria Alice Ferreira - Bibliotecária - CRB-8/7964

Sobre os autores





Murilo Falciorli Amorim

muriloamorim@usp.br

[http://lattes.cnpq.br/](http://lattes.cnpq.br/6571901552283055)

6571901552283055

Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade de São Paulo (IME-USP) e mestrando pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da mesma instituição. Foi bolsista CAPES/PLI na Universidade de Coimbra (Portugal) durante a graduação. Suas pesquisas concentram-se nos processos de ensino, aprendizagem e produção de provas e demonstrações matemáticas na Educação Básica e no Ensino Superior.

Professora do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade de São Paulo (IME-USP). Doutora em Didática da Matemática pela Université Joseph Fourier (França) com pós-doutorados no exterior e no Brasil, coordena o Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (MPEM-USP) e é vice-diretora do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática (CAEM-IME-USP). Desenvolve pesquisas na área de Educação Matemática, com foco em processos de prova e argumentação, recursos digitais (incluindo IA) e formação de professores.



Ana Paula Jahn

anajahn@ime.usp.br

[https:](https://lattes.ime.usp.br/mat/membro-3612359023677691.html)

[//lattes.ime.usp.br/mat/
membro-3612359023677691.
html](https://lattes.ime.usp.br/mat/membro-3612359023677691.html)

Sumário



Sobre os autores	ii
Prefácio	viii
Agradecimentos	xi
1 Introdução	1
2 Organização e Desenvolvimento da Oficina	4
3 Tarefa 1 - Números pares e ímpares	7
3.1 Proposta e Objetivos	8
3.2 Relato da experiência da Tarefa 1	9
4 Tarefa 2 - Provas da desigualdade triangular	17
4.1 Proposta e Objetivos	18
4.2 Relato de experiência da Tarefa 2	20
5 Tarefa 3 - Somando números consecutivos	28
6 Considerações Finais	31
A Apêndice	34
Referências	38

Lista de Figuras



1	Nuvem de palavras	5
---	-----------------------------	---

Prefácio



Prezado(a) colega professor(a), prezado(a) formador(a) de professores que ensinam Matemática,

Você já refletiu sobre os desafios e as potencialidades de trabalhar com provas e demonstrações matemáticas na Educação Básica? Já se perguntou como despertar o interesse dos estudantes pela argumentação e pelo raciocínio dedutivo? Quais caminhos trilhar para que a produção de provas matemáticas deixe de ser um obstáculo e se torne uma rica oportunidade de aprendizagem?

Nesta publicação, fruto de uma oficina realizada durante o 7º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática (ANPMat), convidamos você a explorar conosco diversos aspectos do processo de produção de provas e demonstrações matemáticas. Nosso objetivo principal é compartilhar uma perspectiva que ajude a lidar com a complexidade da aprendizagem desse tema, inspirada em uma abordagem heurística (Lakatos, 1978)¹ que reconhece os múltiplos caminhos e raciocínios que podem emergir quando nos engajamos em processos de prova.

Para fundamentar nossa análise dos “processos de validação” que permeiam a produção de provas e demonstrações, adotamos a distinção proposta por Balacheff (1987) entre “prova” (uma argumentação aceita por um determinado público em um dado momento) e “demonstração” (uma prova que segue regras lógicas formais e é aceita pela comunidade de matemáticos). Essa distinção nos permite extrapolar a noção mais restritiva de “demonstração” com a qual temos contato no Ensino Superior, que atende ao rigor e formalismo acadêmico, e conceber a possibilidade e a legitimidade de se produzir provas que não sigam as mesmas regras.

Acreditamos que, ao se inserirem em atividades de provas/demonstração, seus alunos – e nós mesmos, enquanto aprendizes – podem percorrer um espectro de ideias, desde as mais intuitivas até as mais rigorosas, passando por tentativas com diferentes graus de precisão. Nesse percurso, habilidades investigativas e argumentativas são naturalmente mobilizadas (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2013)², revelando conhecimentos, práticas e valores que fazem parte do universo cultural de cada estudante. Como educadores, é essencial estarmos atentos tanto às dinâmicas que se estabelecem nos grupos – a validação entre pares, o convencimento, a refutação construtiva, a colaboração – quanto às trajetórias individuais de cada aluno, com suas próprias jornadas cognitivas e emocionais na busca por aprimorar suas habilidades de produção matemática.

Partindo dessa visão plural, as discussões que propomos neste *e-book* visam oferecer subsídios e inspirar novas abordagens para a inserção do tema das provas e demonstrações matemáticas na Educação Básica. Queremos compartilhar ideias que possam subsidiar suas práticas docentes e auxiliar em eventuais tentativas de lidar com situações desafiadoras envolvendo argumentação matemática em sala de aula.

Para tornar essa exploração mais concreta, apresentamos e analisamos tarefas que foram propostas aos professores participantes da Oficina. Essas tarefas foram cuidadosamente selecionadas e formuladas com o intuito de:

¹ A heurística de Lakatos propõe que o ensino da Matemática deve espelhar o modo como a disciplina se desenvolve historicamente: por meio de um diálogo entre “provas e refutações”. Em vez de apresentar demonstrações prontas, valoriza-se o percurso da construção do pensamento, no qual o erro e o contraexemplo são ferramentas fundamentais para o aperfeiçoamento do raciocínio.

² Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), as atividades investigativas diferenciam-se dos exercícios tradicionais por serem tarefas abertas e desafiadoras. Nelas, o aluno não aplica apenas uma técnica pronta, mas assume o papel de protagonista: ele precisa formular questões, buscar padrões, criar conjecturas e testar suas próprias estratégias de resolução.

- desafiar suas concepções sobre a produção de provas/demonstrações matemáticas;
- apresentar tarefas em contextos teóricos elementares, que podem ser adaptadas para o trabalho com seus estudantes;
- evidenciar elementos cruciais do processo de prova/demonstração;
- discutir sobre a pluralidade de maneiras de desenvolver e estruturar uma prova matemática;
- incentivar o desenvolvimento de raciocínios cada vez mais elaborados;
- compreender mais profundamente a estrutura e o rigor da Matemática acadêmica e refletir sobre maneiras de superá-lo a fim de atender aos contextos da Educação Básica; e
- estimular discussões que tragam a riqueza e a complexidade dos processos de investigação e argumentação matemática.

Compartilhamos da preocupação expressa por [Matheus \(2016\)](#), que aponta para um possível distanciamento do trabalho com argumentação e prova na matemática escolar brasileira, muitas vezes devido a uma visão excessivamente técnica da prova rigorosa (demonstração) na formação do professor. Em vez de ser vista como uma atividade humana de construção de significados e de convencimento, a prova rigorosa pode ser interpretada prioritariamente como um modelo formal a ser seguido, distanciando-se das práticas argumentativas mais amplas e acessíveis que podem ser exploradas na Educação Básica. Essa leitura técnica, como argumenta [Garnica \(1995\)](#), deve ser complementada com uma abordagem mais crítica e reflexiva sobre a prova no contexto educacional. Concordamos que é fundamental levar essa discussão para além dos limites da lógica proposicional e das técnicas de demonstração, incentivando a investigação, o descobrimento, a formulação de conjecturas, o debate e a elaboração autêntica de argumentos pelos próprios estudantes.

Além disso, reconhecemos a importância da dimensão emocional que acompanha a experiência de aprender e fazer matemática, especialmente em atividades que envolvem provas/demonstrações e resolução de problemas. Os momentos de dúvida, de erro e de acerto são inerentes ao processo e podem gerar diferentes emoções nos estudantes. Assim, nós o convidamos a refletir sobre como podemos, enquanto educadores, auxiliar nossos alunos a construir significados positivos para o fracasso e o sucesso nessas atividades.

Ao longo deste texto, esperamos que você tenha a oportunidade de “vivenciar” a experiência da Oficina, conhecendo as propostas das tarefas e acompanhando nosso relato de como elas se desenvolveram, e, principalmente, refletir sobre as implicações pedagógicas dessas experiências para a sua prática em sala de aula. Esperamos que, ao final desta leitura, você se sinta mais confiante e inspirado(a) para desmistificar a produção de provas e demonstrações matemáticas na sala de aula, transformando-a em uma jornada de descoberta e crescimento para seus estudantes.

Rio de Janeiro, 2026

Murilo Falcirulli Amorim

Ana Paula Jahn

Agradecimientos



Agradecemos à ANPMat e aos organizadores do 7º *Simpósio Nacional de Formação do Professor de Matemática* pelo evento agradável e pela oportunidade de ministrar a Oficina aqui relatada; ao professor Pedro Alves Oliveira, que ministrou conosco a Oficina e inspirou a proposta da Tarefa 2; a todos(as) os(as) participantes, que embarcaram em nossas propostas e nos ofereceram muito mais do que esperávamos; e ao IME-USP pelo auxílio financeiro para nossa participação no evento.

1

Introdução



O ensino de provas e demonstrações matemáticas na Educação Básica configura-se como um desafio central e, simultaneamente, uma oportunidade ímpar para o desenvolvimento do raciocínio matemático e da capacidade argumentativa dos estudantes.

Há um consenso na área de Educação Matemática sobre a importância crucial de cultivar habilidades de argumentar e provar, não apenas como ferramentas para a resolução de problemas e o desenvolvimento do pensamento crítico, mas também como elementos essenciais na formação de cidadãos capazes de analisar e avaliar informações de maneira fundamentada. Documentos curriculares, tanto no Brasil quanto em outros países, preconizam a integração de atividades que possibilitem aos alunos construir e comunicar argumentos matematicamente válidos (Jahn; Healy; Coelho, 2007).

Entretanto, a realidade observada em pesquisas e avaliações revela uma lacuna persistente no desenvolvimento dessas habilidades nos níveis do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Esse cenário complexo pode ser compreendido à luz de fatores históricos, como possíveis negligências curriculares pós-Movimento da Matemática Moderna (Pietropaolo, 2005), e também em relação à formação de professores, que nem sempre oferece um preparo adequado para abordar esse tema (Garnica, 1995; Matheus, 2016).

Estudos como os de Healy e Hoyles (2000) evidenciam a tendência dos alunos em confundir justificativas empíricas com raciocínios dedutivos, além de priorizar aspectos de forma na análise de argumentos, em detrimento da compreensão do conteúdo matemático subjacente (Chazan, 1993; Healy; Hoyles, 2000). No que tange aos professores, observa-se, por vezes, uma visão limitada da prova como um procedimento pedagógico restrito, com fim em si mesmo, e não como um instrumento dinâmico para a exploração e comunicação matemática (Knuth, 2002).

Diante desse contexto, a presente publicação, originada de uma oficina para professores de Matemática e formadores de professores, busca oferecer um amparo teórico-metodológico para o trabalho com provas e demonstrações na sala de aula da Educação Básica. Acreditamos que a demonstração em Matemática, tradicionalmente vista como um divisor de águas entre essa disciplina e as ciências experimentais por seu método de validação dedutivo, possui um potencial didático muitas vezes subutilizado. Nossas experiências como educadores e pesquisadores têm demonstrado que as primeiras interações de ingressantes em cursos de exatas com demonstrações podem ser marcadas por insegurança e até mesmo “medo”, impactando sua relação com a Matemática. Nesse sentido, julgamos fundamental explorar e validar estratégias didáticas que possam transformar essa relação e preparar melhor os futuros professores para o ensino de provas na Educação Básica.

A escolha de uma abordagem que valoriza a exploração e a construção gradual da compreensão da prova matemática se justifica pela necessidade de ir além de uma visão puramente formal e prescritiva. Concordamos com Balacheff, Almouloud e Moretti (2022) quando aponta que, para muitos alunos, a prova matemática pode parecer uma mera formalidade exigida pelo contexto escolar, desvinculada de sua necessidade intrínseca para o pensamento matemático. Observamos também que a passividade dos alunos diante de provas apresentadas pelo professor pode inibir a percepção de seu próprio potencial como produtores de argumentos matemáticos válidos. Nesse sentido, inspirados na ideia de que a Educação Matemática constitui um regime de verdade próprio (Garnica, 2002), distinto daquele praticado na academia, propomos uma abordagem que subverte as normas do formalismo matemático e valoriza a autonomia do estudante em produzir raciocínios e explicações que sejam, para ele, coerentes, reconhecendo que diferentes tipos de prova são pertinentes à matemática escolar.

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL. MEC, 2018) destaca a natureza hipotético-dedutiva da Matemática, alicerçada em axiomas e demonstrações, e simultaneamente enfatiza a importância de metodologias heurísticas para a efetiva aprendizagem da disciplina. Essa perspectiva reconhece que, embora o rigor lógico-dedutivo seja essencial à estrutura da Matemática, o processo de construção do conhecimento matemático frequentemente se inicia com a exploração, a intuição e a experimentação.

Nesse sentido, a crítica de Lakatos (1978) ao “estilo dedutivista” ressoa com a necessidade de repensarmos as abordagens tradicionais no ensino de provas. Para Lakatos, a apresentação da matemática como um sistema fechado de axiomas e teoremas, desvinculada de sua gênese e desenvolvimento histórico, pode obscurecer o processo dinâmico e criativo inerente à construção do conhecimento matemático. Em contraposição, o autor defende uma abordagem heurística que valoriza a formulação de conjecturas, a tentativa de prova, a refutação, a análise dos contraexemplos e o refinamento progressivo das ideias até a formalização teórica. Essa perspectiva pedagógica pressupõe a capacidade dos estudantes de (re)descobrirem conceitos matemáticos, promovendo uma aprendizagem mais significativa (Alves; Tatsch, 2017).

Um elemento crucial para engajar os estudantes no processo de prova é o desenvolvimento da “necessidade intelectual” (Harel, 1998). Segundo Harel, essa necessidade surge quando os alunos se deparam com situações que desafiam seu conhecimento prévio, motivando-os a buscar soluções e construir novos entendimentos. Para fomentar essa necessidade, o autor sugere estratégias como evocar a incerteza e o conflito cognitivo e promover a aprendizagem baseada na investigação, transmitindo uma “cultura matemática”. Essas estratégias se interconectam, com a incerteza impulsionando a investigação, que por sua vez pode gerar conflitos cognitivos, todos elementos fundamentais da prática matemática autêntica.

A adoção de uma abordagem heurística no ensino de provas e demonstrações, portanto, alinha-se com as diretrizes curriculares contemporâneas e com as teorias de aprendizagem que valorizam o papel ativo do estudante na construção do conhecimento. Ao invés de apresentar a prova como um produto final a ser memorizado, essa perspectiva enfatiza o processo de investigação, a formulação de argumentos e a validação de ideias, buscando desenvolver nos alunos uma compreensão mais profunda e significativa da natureza do raciocínio matemático.

O objetivo da Oficina, portanto, não se centra na apreensão imediata de demonstrações formais, mas sim na compreensão dos processos mentais e das habilidades envolvidas na produção de provas e argumentações matemáticas, visando desenvolver uma relação mais engajada e significativa com essa prática fundamental da atividade matemática.

Organização e Desenvolvimento da Oficina



A Oficina teve início com uma breve apresentação dos ministrantes e dos participantes, seguida pela exposição dos objetivos de nossa proposta. Realizamos então um levantamento inicial por meio da produção de uma nuvem de palavras (Figura 1), utilizando a expressão “Provas e Demonstrações Matemáticas”, para captar as primeiras impressões e ideias dos participantes sobre o tema.

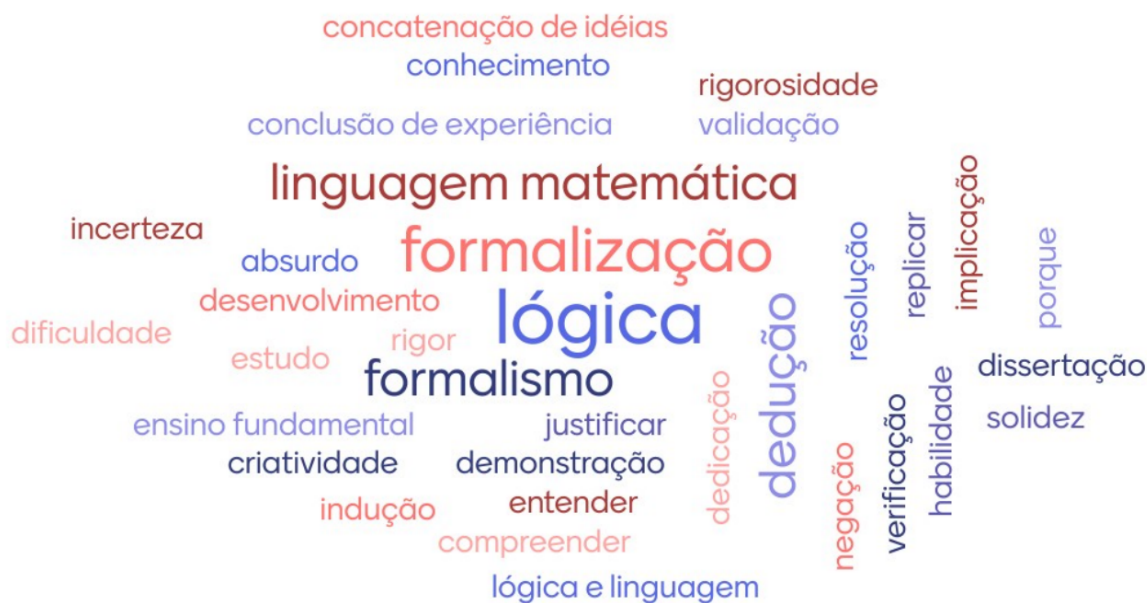


Figura 1: Nuvem de palavras

Fonte: Elaborado na primeira sessão da Oficina.

Cada participante submeteu 3 palavras ou conceitos para compor a nuvem, sem poder visualizar as palavras submetidas pelos colegas. Neste momento inicial, 14 participantes estavam presentes e participaram da dinâmica, e mais participantes chegaram posteriormente.

Podemos ver na nuvem uma convergência em associar “Provas e Demonstrações Matemáticas” aos conceitos de lógica (5 ocorrências, agrupando “lógica” e “lógica e linguagem”), formalismo (5 ocorrências, agrupando “formalização” e “formalismo”), linguagem matemática (2 ocorrências), dedução (2 ocorrências) e rigor (2 ocorrências, agrupando “rigor” e “rigorosidade”). Essa nuvem, que tem fortes relações com a cultura matemática acadêmica, ressalta o ponto de partida da Oficina. O leitor ou a leitora deste texto perceberá essas relações sendo explicitadas e tornando-se objeto de reflexão durante as atividades relatadas na sequência.

Após uma breve discussão sobre a nuvem produzida, passamos às tarefas. Três tarefas foram realizadas ao longo dos dois dias de Oficina, a primeira tendo sido feita no primeiro dia, e as outras duas no segundo. As tarefas, que nomeiam as seções deste *e-book* são as seguintes:

- Tarefa 1: pares e ímpares;
- Tarefa 2: provas da desigualdade triangular;
- Tarefa 3: somando números consecutivos.

A condução de cada tarefa passou por diferentes momentos de trabalho. Começamos com um trabalho individual, seguido por discussões em pequenos grupos (com 5-6 integrantes) e, por fim, uma

reflexão coletiva com todos os participantes. Durante as atividades individuais, solicitamos que os participantes estivessem atentos às dificuldades encontradas — por menores que fossem — e às habilidades mobilizadas nos processos de construção das provas/demonstrações matemáticas.

É importante destacar que uma versão similar da Oficina já havia sido aplicada com estudantes de Licenciatura em Matemática em outras ocasiões, embora esta tenha sido a primeira vez que realizamos esse tipo de atividade em um contexto de formação continuada. A maioria dos participantes era composta por professores, havendo também alguns licenciandos e um estudante do Ensino Médio.

Por se tratar de uma oficina inserida em um simpósio da ANPMat, podemos assumir que os professores participantes têm uma maior disposição para o aperfeiçoamento contínuo da prática pedagógica — alguns, inclusive, cursavam mestrado profissional —, o que pode ter contribuído para o forte engajamento que percebemos e para a riqueza das discussões proporcionadas, as quais tentamos rememorar, reviver e publicar neste livro digital.

É possível que o interesse por participar especificamente de nossa Oficina, dentre diversas opções oferecidas no evento, também pode ser um fator importante para explicar os resultados que observamos. No entanto, alguns participantes admitiram que tiveram dúvidas ou interpretaram incorretamente o título da Oficina: “Produção de Provas e Demonstrações Matemáticas: Ações e Reflexões para seu Ensino e Aprendizagem”. Estes participantes confundiram o sentido do termo “prova”, associado aqui a argumentação e demonstração, com a ideia de “teste” ou “avaliação”. Uma explicação possível para esse fenômeno é dada por [Matheus \(2016\)](#), que descreve uma situação semelhante em sua pesquisa, também em contexto de formação continuada.

Esse episódio revela ao menos dois aspectos dignos de nota. O primeiro é que a palavra *prova* no sentido matemático, está tão distante da prática docente das professoras que, mesmo tendo sido usada ao lado de *argumentação* e *demonstração*, foi tomada em seu sentido de *avaliação*. E o segundo é que, para as professoras participantes, numa hierarquia de prioridades, o tema da avaliação educacional está muito à frente do da prova matemática. ([Matheus, 2016](#), p. 118)

Contudo, mesmo os participantes que fizeram essa confusão inicial tiveram um ótimo engajamento. Analisando em retrospecto a experiência da Oficina, podemos perceber três pilares principais para nossas propostas e intervenções: o aprofundamento da proficiência técnica dos participantes em analisar e produzir provas matemáticas; a valorização da autonomia do professor, do estudante e da Matemática da Educação Básica, enquanto campo de produção coletiva de conhecimento próprio da comunidade da sala de aula; e a troca de experiências, tanto imediatas, da resolução das tarefas propostas, quanto as mais duradouras, advindas do trabalho em sala de aula, da formação inicial ou dos tempos de escola. Ao longo deste livro, a leitora ou o leitor poderá identificar cada um destes pilares, apesar do terceiro ter recebido menos ênfase em nossa redação dos relatos. Do ponto de vista da formação de professores e da pesquisa em Educação Matemática, acreditamos que esses três pilares, em um contexto colaborativo de formação continuada, podem ser um bom direcionamento para apoiar professores que tenham interesse no trabalho com provas/demonstrações na Educação Básica, bem como para desenvolver novos conhecimentos nessa área que atendam às demandas teóricas e metodológicas trazidas pelos professores participantes.

Tarefa 1 - Números pares e ímpares



3.1 Proposta e Objetivos

A Tarefa 1 foi formulada e apresentada com o seguinte enunciado:

DEFINIÇÃO 3.1

Dizemos que um número inteiro n é par se $\frac{n}{2}$ é inteiro.

DEFINIÇÃO 3.2

Dizemos que um número inteiro n é ímpar se $\frac{n-1}{2}$ é inteiro.

Seja n um número inteiro.

- (a) Mostre que, se n é par, então n^2 é par.
- (b) Mostre que, se n é ímpar, então n^2 é ímpar.
- (c) Mostre que, se n^2 é ímpar, então n é ímpar.

Sendo essa uma tarefa introdutória, tomamos o cuidado de elaborar um exercício que trate de conteúdos familiares para professores e licenciandos (números pares e ímpares, frações, elevação ao quadrado e números inteiros), com proposições logicamente simples (se A então B) e um comando claro e direto para a iniciação do processo de prova (“Mostre que”).

O elemento surpresa do exercício, que traz inovação ao contexto da Oficina, está na definição de paridade que formulamos, que difere da definição usualmente adotada nos livros didáticos. Com essa escolha, pretendemos que os participantes se vejam na necessidade de revisitar conceitos familiares e investir esforço para desenvolver novas estratégias procedimentais de inferência e argumentação, a fim de provar as proposições de forma rigorosa.

O item (a) tem o intuito de trazer à tona os desafios do primeiro contato com o exercício (“como posso iniciar?”, “onde devo chegar?”, “o que eu posso ou não posso assumir?”), e proporcionar o desenvolvimento de estratégias para lidar com o “novo conceito” de paridade, nos moldes dados pela Definição 3.1. O item (b) é muito similar ao item (a), adicionando uma fina camada de dificuldade, do ponto de vista da engenhosidade das manipulações algébricas para atender ao formato da Definição 3.2. Já a resolução do item (c) rompe a estrutura argumentativa desenvolvida e reforçada nos itens anteriores, e demanda uma nova estratégia de resolução. Mas, como apenas o item (a) foi realizado na Oficina, somente a Definição 3.1 foi utilizada.

A repetição do termo “ n ”, usado tanto nas definições quanto nas proposições, é intencional. Para interpretar o significado, por exemplo, da tese “ n^2 é par”, é preciso substituir o termo “ n ” na Definição 3.1 por “ n^2 ”, o que causa certa estranheza e costuma gerar dúvidas. Para nós, esse pequeno transtorno é oportuno para frisar o caráter formal da definição, em que os símbolos em si ou seus significados não importam; importam apenas as relações sintáticas entre eles. A partir do momento em que se diz “Seja n um número inteiro”, a identidade do símbolo “ n ” se renova. Esse não é um dos grandes objetivos da tarefa, mas esperamos, com essa breve reflexão, explicitar uma potencial dificuldade a ser enfrentada por estudantes na Educação Básica: a reciclagem e ressignificação de símbolos em Matemática.

O volume de discussões que a Tarefa 1 proporcionou nos surpreendeu positivamente. O engajamento dos participantes foi intenso e genuíno, transparecendo o interesse em explorar as nuances matemáticas das provas produzidas e abstraindo de seu contexto específico questões gerais sobre a prática e o ensino de Matemática. Por esse motivo, priorizando o aprofundamento das análises e discussões, optamos por não avançar para os outros itens da tarefa, focando exclusivamente no item (a).

No relato que apresentamos a seguir, a leitora ou o leitor poderá imergir nos obstáculos enfrentados pelos participantes da Oficina e em suas tentativas de resolução; nas intenções por trás das intervenções que fizemos enquanto ministrantes; e nos caminhos tomados pelas discussões que se desenrolaram. Tudo isso motivado por um único item de um exercício do tipo “Mostre que”, inserido em um ambiente repleto de pessoas interessadas em se aprofundar nos meandros teóricos referentes ao trabalho com provas matemáticas na Educação Básica.

Os principais objetivos da Tarefa 1 podem ser assim formulados:

1. promover a discussão sobre as dificuldades enfrentadas por estudantes ao iniciarem o estudo de provas e demonstrações matemáticas, especialmente no que se refere ao uso de definições não familiares;
2. contrastar a dificuldade inicial na resolução da tarefa com a aparente facilidade de compreensão posterior à resolução, a fim de discutir os efeitos negativos de se considerar “óbvia” uma atividade com elementos novos para os estudantes;
3. evidenciar o caráter singular das provas produzidas pelos participantes, desconstruindo a ideia de que existe uma única demonstração correta para cada proposição;
4. levar os participantes a reconhecer a necessidade de assumir afirmações não justificadas na construção de uma prova matemática, e estimular a discussão sobre os critérios para a escolha de tais afirmações;
5. explorar técnicas indiretas de argumentação e discutir sua importância como estratégia pedagógica na condução de tarefas de prova, valorizando a autonomia dos estudantes.

Vale ressaltar que o Objetivo 4 não foi previsto quando elaboramos a Oficina, e acrescentamos à nossa lista em virtude das reflexões que a experiência nos proporcionou. Já o Objetivo 5 não foi contemplado, pois está mais atrelado à resolução do item (c) da Tarefa 1, que não foi abordado. Os Objetivos 1 e 2 estiveram por trás da maior parte das intervenções que fizemos na condução da Oficina – relatadas na seção seguinte –, em discussões referentes às dificuldades presentes até mesmo nas práticas matemáticas mais simples, que muitas vezes passam despercebidas, mas que se tornam evidentes quando removemos o elemento de familiaridade. Esperávamos, assim, promover aprendizagens tanto no âmbito epistemológico quanto educacional, de forma que os participantes pudessem refletir sobre a experiência de estudantes da Educação Básica com provas matemáticas, trazendo um novo ponto de vista às dificuldades encontradas e compreendendo mais profundamente alguns aspectos da prática matemática e sua aprendizagem.

3.2 Relato da experiência da Tarefa 1

Depois de apresentar o enunciado da Tarefa 1, iniciamos com a leitura das definições, certificando-nos de que todos as compreendiam. Perguntamos aos participantes se já haviam usado essa definição, e

a maioria negou, referindo que a definição mais conhecida é a de que “um número inteiro n é par (ímpar) se existe k inteiro tal que $n = 2k$ ($n = 2k + 1$)”. Autorizamos que começassem a resolver, primeiramente, apenas o item (a).

A primeira dificuldade que identificamos foi em “como começar”. Não foi tão simples, de início, enxergar nas definições dadas os *significados* da hipótese “ n é par” e da tese “ n^2 é par”. Quando necessário, em intervenções individuais, para que o participante fizesse as conexões necessárias, perguntávamos “o que significa ser par?”. Similarmente às perguntas propostas por Polya (1995) no contexto da resolução de problemas¹, essa é uma pergunta que não revela nenhuma conexão externa ao pensamento do participante, e, portanto, mantém a autenticidade de seu raciocínio. Afinal, o participante sempre pode se perguntar o significado dos conceitos que utiliza em Matemática.

Traduzindo a hipótese e a tese a partir da definição, eventualmente todos conseguiram interpretar a proposição do item a) como a implicação “se $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$, então $\frac{n^2}{2} \in \mathbb{Z}$ ”. Percebemos que essa transição dissipa a névoa de dúvidas do tipo “como começar?” ou “o que é para fazer?”, e trouxe um grau de concretude para o problema. Essa concretude, por sua vez, é acompanhada de dúvidas mais pragmáticas: e agora? Como proceder?

Aos participantes que se encontravam nesse impasse, nossa intervenção foi na direção de dizer que eles precisavam desenvolver alguma estratégia para realizar inferências a partir das afirmações que têm. Em outras palavras, eles precisavam aprender a “manipular” afirmações do tipo “ $x \in \mathbb{Z}$ ”. Os resultados dessas intervenções, evidentemente, não foram imediatos, e o desenvolvimento das estratégias operacionais necessárias para provar a proposição assumiu várias etapas.

A primeira tentativa bem sucedida que alguns participantes fizeram foi a de transportar o problema para um formato mais familiar. Veja:

$$\begin{aligned} n \text{ é par} &\implies \frac{n}{2} \in \mathbb{Z} \implies \text{existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \frac{n}{2} = k. \\ \frac{n}{2} = k &\implies n = 2k \implies n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \implies \frac{n^2}{2} = 2k^2 \in \mathbb{Z} \implies \frac{n^2}{2} \text{ é par.} \end{aligned}$$

Vendo essa resolução, parabenizamos os participantes que a produziram e chamamos a atenção para a estratégia que utilizaram: transpor para o formato da definição mais conhecida, “ $n = 2k$ ”, resolver o problema nesse formato, “ $n^2 = 2(2k^2)$ ”, e depois retornar ao formato da definição dada no enunciado, “ $\frac{n^2}{2} \in \mathbb{Z}$ ”. Em nossa interpretação, essa transformação facilita a resolução do problema para os participantes por que permite que as inferências principais a serem realizadas sejam simples manipulações em equação, que demandam habilidades procedimentais muito mais familiares do que aquelas necessárias para inferir a partir de afirmações do tipo “ $x \in \mathbb{Z}$ ”.

Apesar da prova mencionada estar correta, solicitamos que os participantes retornassem ao problema e se desafiassem a produzir uma prova que não lançasse mão do formato familiar da definição “ $n = 2k$ ”, incentivando-os a enfrentar, e não contornar, o obstáculo que encontraram. Ou seja, pedimos que refizessem a resolução utilizando apenas a definição de paridade que foi apresentada no enunciado

¹ George Polya, em sua obra clássica intitulada “A Arte de Resolver Problemas” (1995), sugere perguntas heurísticas (metacognitivas) para cada fase da resolução de um problema. Para a fase de compreensão do problema, destacam-se: “Qual é a incógnita?”, “Quais são os dados?” e “Qual é a condicionante?”. A pergunta “o que significa ser par?”, citada no texto, atua no nível da compreensão dos dados e das definições, essencial para o início da estratégia de resolução.

$\left(\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}\right)$, como se não conhecessem a definição usual. Nosso pedido não faz o menor sentido do ponto de vista matemático, pois a prova em questão, produzida pelos participantes, não apresenta erro conceitual, procedimental ou estrutural referente à transposição do formato do problema, que foi realizada corretamente. Não há respaldo lógico ou matemático para a exigência de que a prova seja refeita abrindo mão da estratégia da transposição de definições. Entretanto, o sentido da nossa intervenção se encontra na esfera da *metalinguagem* e da *metacognição*.

Intervimos com a intenção de explicitar as características fundamentais da linguagem empregada e elucidar os aspectos cognitivos de tal resolução, e reconhecemos que a resolução apresentada traz poucas novidades para os participantes. Ao propor que refaçam a prova sem recorrer à definição familiar de paridade, tencionamos que os integrantes explorem caminhos argumentativos e tipos de raciocínio *estranhos* ao seu repertório, e assim experienciem uma nova dificuldade – que será retomada posteriormente nesta seção. Portanto, para nós, mesmo depois de se produzir uma prova correta, ainda pode haver espaço para mais tentativas e aprendizagem. Afinal, o objetivo da tarefa não é simplesmente provar proposições matemáticas, mas sim aprofundar com os professores sua proficiência técnica no processo de produção de provas e sua criticidade em analisar tal processo de pontos de vista que transcendam o ponto de vista técnico.

Foi então que surgiu, de um grupo de participantes, a primeira tentativa de resolução contendo inferências condizentes com o formato da definição fornecida no enunciado, que redigimos na lousa assim conforme ditavam:

$$n \text{ é par} \implies \frac{n}{2} \in \mathbb{Z} \implies \left(\frac{n}{2}\right)^2 \in \mathbb{Z} \implies \frac{n^2}{4} \in \mathbb{Z}.$$

A justificativa inédita utilizada nessa dedução, expressa oralmente, foi que “o quadrado de qualquer número inteiro é um número inteiro”, permitindo que todas as passagens mantivessem a estrutura “ $x \in \mathbb{Z}$ ”, e alcançando o termo “ n^2 ”, necessário para a conclusão da tese. Contudo, os participantes ficaram confusos – compreensivelmente –, questionando se esses argumentos são suficientes para concluir que n^2 é par.

Alguns disseram que sim – sem tanta convicção –, justificando que, “se $\frac{n^2}{4}$ é inteiro, então n^2 é múltiplo de 4, e portanto é par”. Em resposta, dissemos que a justificativa é correta, mas que depende do significado de “ser múltiplo de 4” e da proposição “se é múltiplo de 4, então é par”. Reforçamos a proposta de que, para esse exercício, em que o próprio conceito de paridade é redefinido, todos os conhecimentos sobre números pares sejam suspensos. Essa foi uma ótima oportunidade para explorar o conceito de formalismo e a diferença entre semântica e sintaxe.

Não importam, do ponto de vista formal, as ideias que se tenha sobre os conceitos em jogo. Importam apenas os símbolos e as inferências feitas com eles. O “jogo” é jogado segundo as regras sintáticas para manipulação dos símbolos matemáticos, que prescindem da interpretação que fazemos sobre eles. Por definição, a afirmação “ x ser par” não se verifica a partir de ideias sobre paridade, mas a partir da dedução da seguinte sequência de símbolos: “ $\frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$ ”. É claro que essa é uma visão extrema e limitada da prática matemática, que não é aderida nem mesmo na prática de matemáticos profissionais, e não propomos que seja incorporada à Educação Básica. Mas, com essa exposição, os participantes aceitaram o desafio de tentar deduzir precisamente a afirmação “ $\frac{n^2}{2} \in \mathbb{Z}$ ”.

Para isso, alguns integrantes buscaram, sem sucesso, alguma manipulação algébrica que alcançasse a sequência de símbolos requerida na tese da proposição:

$$\frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\frac{n^2}{2}}{2} \in \mathbb{Z}$$

Abrindo um breve parêntese, um argumento incorreto, mas muito convincente, que não foi feito nesse dia, mas com o qual já nos deparamos quando aplicamos essa tarefa para estudantes da Licenciatura, é o seguinte: “Se $\frac{n^2/2}{2}$ é inteiro, então $\frac{n^2}{2}$ é par. Como todo número par é inteiro, então $\frac{n^2}{2}$ é inteiro. Logo, por definição, n^2 é par.” O erro do argumento é sutil e se encontra na primeira passagem. A definição de paridade só se aplica a números inteiros, e, portanto, para inferir que um número é par, deve-se garantir, primeiro, que ele é inteiro. Ou seja, para inferir, na primeira passagem, que $\frac{n^2}{2}$ é par, seria necessário provar antes que $\frac{n^2}{2}$ é inteiro. Retomamos o relato.

Levou um tempo considerável até que um participante desenvolvesse a estratégia cabal para o problema: multiplicar por 2. Por incrível que possa parecer, essa ideia com aparência tão simples foi inédita para o grupo de participantes, e foi recebida com um suspiro de alegria e esclarecimento: Como o dobro de qualquer número inteiro é inteiro, e como $\frac{n^2}{4} \in \mathbb{Z}$, então $2 \cdot \frac{n^2}{4} \in \mathbb{Z}$. Logo $\frac{n^2}{2} \in \mathbb{Z}$, e, portanto, n^2 é par.

Certa vez, quando indagamos a um estudante de graduação por que é tão difícil, no primeiro contato com esse exercício, conceber a ideia de multiplicar por 2, ele disse que é porque nós temos enraizada a ideia de “equilíbrio” proveniente da manipulação de equações. Em uma equação, se eu multiplicar um lado da igualdade por 2, devo também multiplicar por 2 o outro lado; e se eu multiplicar um termo por 2, devo também dividi-lo por 2. Isso se verifica nas manipulações algébricas que os participantes haviam realizado. Mas, no contexto desse exercício, em que as afirmações inferidas não são igualdades (como “ $x = y$ ”), mas sim pertinências no conjunto dos números inteiros (como “ $x \in \mathbb{Z}$ ”), é permitido multiplicar por 2, sem a necessidade de “compensar” essa operação.

Um participante da Oficina logo percebeu e apontou a propriedade subjacente aos argumentos utilizados, tanto de elevar ao quadrado quanto de multiplicar por 2: “Estamos usando a propriedade de que o produto de números inteiros é, também, um número inteiro”. Confirmamos com entusiasmo diante de sua observação, e ele então nos perguntou: “Nós podemos usar essa propriedade nesse exercício? Como saber o que eu posso ou não posso usar numa demonstração?”.

A dúvida do participante é legítima e nos indica que talvez essa discussão seja necessária para a tematização do trabalho com provas matemáticas na Educação Básica em contextos de formação continuada de professores. Knuth (2002, p. 83) comenta que as perguntas “*what constitutes proof?*” (“o que constitui uma prova?”) ou o que pode ser considerado como prova?) e “*is a proof a proof or are there levels of proof?*” (“prova é prova ou existem níveis de prova?”) ou toda prova está no mesmo patamar de rigor?) lhe proporcionaram discussões enriquecedoras em seu estudo com professores da Educação Básica.

Na Oficina, a partir da pergunta do participante, introduzimos um tema mais amplo, que foi aprofundado na discussão da Tarefa 2, sobre a autonomia da Matemática da Educação Básica e a liberdade do professor. Propomos uma resposta geral a essa pergunta, “Como saber o que eu posso ou não posso usar numa demonstração?”, no final da seção seguinte, e nos restringimos agora a oferecer apenas uma

resposta mais contextualizada à tarefa específica em questão, a partir da análise que apresentamos a seguir.

Quando propusemos aos participantes que comparassem a última prova produzida com a prova que fariam utilizando a definição “ $n = 2k$ ”, eles pareceram impressionados com a diferença entre elas, mas quando mostramos as fortes semelhanças entre os argumentos das duas provas, eles se surpreenderam ainda mais. Elencamos a seguir, respectivamente, a prova produzida na Oficina, usando a definição “ $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$ ” e a prova mais usual da propriedade estudada, usando a definição “ $n = 2k$ ”.

$$n \text{ é par} \implies \frac{n}{2} \in \mathbb{Z} \implies \left(\frac{n}{2}\right)^2 \in \mathbb{Z} \implies \frac{n^2}{4} \in \mathbb{Z} \implies 2 \cdot \left(\frac{n^2}{4}\right) \in \mathbb{Z} \implies \frac{n^2}{2} \in \mathbb{Z} \implies n^2 \text{ é par.}$$

$$n \text{ é par} \implies \text{existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n = 2k.$$

$$n = 2k \implies n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2). \text{ Como } 2k^2 \in \mathbb{Z}, \text{ segue que } n^2 \text{ é par.}$$

Para exibir a forte semelhança entre as duas provas, destacamos a conclusão “ $n^2 = 2(2k^2)$ ”, da segunda prova, e seguiu-se na Oficina uma interação similar a esta:

- Ministrante: Utilizando a definição usual, por que essa passagem conclui a prova?
- Participante: Porque mostramos que n^2 é duas vezes alguma coisa.
- Ministrante: Alguma coisa?
- Participante: Duas vezes um número inteiro.
- Ministrante: Qual número inteiro?
- Participante: $2k^2$
- Ministrante: E por que $2k^2$ é um número inteiro?
- Participante: Por que k é inteiro.
- Ministrante: E por que $2k^2$ é um número inteiro?
- Participante: Porque o dobro do quadrado de qualquer número inteiro é um número inteiro... Ah!

Os participantes perceberam que os argumentos de elevar ao quadrado e de multiplicar por 2, que levaram tanto tempo para ser concebidos, não eram exclusividade da prova feita a partir da definição “ $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$ ”, pois haviam sido utilizados na prova da proposição feita a partir da definição usual². Portanto, em resposta ao participante que questionou sobre a validade de utilizar a propriedade de que o produto de números inteiros é inteiro, pudemos dizer que essa propriedade, que chama atenção na “nova” prova, já estava sendo utilizada implicitamente na prova “antiga”, sem ser questionada. Talvez haja, então, um consenso de que, para provar proposições sobre paridade de números inteiros, pode-se assumir todas as propriedades das operações de anel dos inteiros (adição e multiplicação).

² Inclusive, alguns participantes comentaram que tentaram explicitamente emular ou “imitar”, no contexto do exercício proposto, os argumentos da prova que conheciam, mas não obtiveram sucesso.

O clima de desafio, esforço intelectual, dúvidas e erros abriu lugar para uma sensação de alívio, esclarecimento e resolução. Mas por trás dos sentimentos positivos, ainda havia um nó para desatar. Por um lado, a prova produzida parecia muito simples, e por outro, havíamos levado mais de uma hora para desenvolvê-la em um grupo repleto de professores de Matemática. Decidimos cuidadosamente tensionar o tópico da “facilidade” da prova, para trazer à tona o olhar para a dimensão emocional do trabalho com provas, que se entrelaça com a dimensão cognitiva, e nela costuma se esconder.

Sabendo que tocaríamos em um tema delicado, a fim de que os participantes estivessem temporariamente imunizados para o que viria a seguir, um de nós alertou calmamente, antes de fazer suas provocações, que faria na sequência uma “fala violenta”, com a qual nenhum de nós concordava, e que problematizaríamos depois. As provocações foram pronunciadas em ordem crescente de provocação: “Não era fácil esse exercício? Como assim? Vocês não conseguiram resolver? Por que? Vocês não entenderam a definição? Ou vocês não sabem multiplicar por 2?”.

Para acrescentar à tensão das provocações, apresentamos uma prova muito mais simples para a proposição, que nenhum participante havia pensado:

$$n \text{ é par} \implies \frac{n}{2} \in \mathbb{Z} \implies n \cdot \left(\frac{n}{2}\right) \in \mathbb{Z} \implies \frac{n^2}{2} \in \mathbb{Z} \implies n^2 \text{ é par.}$$

Como “ n ” e “ $\frac{n}{2}$ ” são inteiros, o produto deles também é inteiro. Continuando a provocação, dissemos que, desde o início, bastava multiplicar por “ n ” para concluir a prova, o que deveria ser algo “óbvio” de se pensar, dado que estamos partindo de “ $\frac{n}{2}$ ” e precisamos chegar em “ $\frac{n^2}{2}$ ”.

Sabemos que a dificuldade para a qual apontamos não é particularidade do grupo de participantes da nossa Oficina. Em nossa experiência com mais de cem estudantes universitários, ingressantes ou veteranos, de diversos cursos de exatas do IME-USP, com quem aplicamos esse exercício, quase todos apresentaram dificuldades similares às que mencionamos aqui. Para nós, isso evidencia o que [Fischbein \(1994\)](#) ressalta sobre a importância do desenvolvimento de habilidades procedimentais para se fazer matemática, e não apenas do conhecimento do conteúdo teórico formalizado.

É uma mera ilusão acreditar que, ao conhecer axiomas, teoremas, provas e definições da maneira como são expostos formalmente nos livros didáticos, uma pessoa se torna capaz de resolver problemas matemáticos. Existe uma concepção errônea generalizada segundo a qual, em matemática, se você entende um sistema de conceitos, você espontaneamente passa a ser capaz de usá-los para resolver os problemas correspondentes. Nós precisamos de habilidades, e não apenas de compreensão, e as habilidades só podem ser adquiridas por meio de treinamento prático e sistemático. ([Fischbein, 1994](#), p. 232, grifo do autor, tradução nossa)³

Essa reflexão expõe a falácia implícita nas provocações, de que a facilidade para se resolver o exercício é proporcional à familiaridade que o indivíduo possui com os conceitos necessários para sua resolução.

³ It is a mere illusion to believe that by knowing axioms, theorems, proofs, and definitions as they are exposed formally in textbooks, one becomes able to solve mathematical problems. There is a widespread misconception according to which, in mathematics, if you understand a system of concepts, you spontaneously become able to use them in solving the corresponding class of problems. We need *skills* and not only *understanding*, and skills can be acquired only by practical, systematic training. ([Fischbein, 1994](#), p. 232, grifo do autor)

Os participantes têm, sim, muita familiaridade com todos os conteúdos mobilizados na resolução, mas nem por isso eles “deveriam saber” resolver o problema nas primeiras tentativas. Para solucioná-lo, é necessário, como alertamos no início da atividade, desenvolver estratégias procedimentais para inferir afirmações no formato “ $x \in \mathbb{Z}$ ” imposto pela definição.

E se o desafio de desenvolver habilidades procedimentais se deve à novidade que a definição traz para os participantes, é certo que no contexto da Educação Básica esses desafios serão instaurados. Afinal, qualquer definição com que um estudante se deparar pela primeira vez será, para ele, muito mais nova e sem precedentes do que a definição alternativa de paridade da tarefa estudada é nova para os participantes da Oficina.

Entretanto, não é simples reconhecer a falácia da provocação que fizemos. Pelo contrário, é muito fácil convencer um estudante de que ele é intelectualmente insuficiente, especialmente quando trabalhamos com provas matemáticas. Muitos problemas difíceis de serem resolvidos adquirem uma aparência de facilidade depois que se conhece sua resolução. Essa facilidade *a posteriori* muitas vezes é assimilada e reconhecida pelo próprio estudante, e contrastando-a em retrospecto com a dificuldade que enfrentou para resolver (ou não) o problema, o estudante se convence de que é incapaz de superar um obstáculo que ele reconhece como “fácil”: como eu pude não pensar nisso?.

E nem sequer é necessário um provocador externo para que o indivíduo se convença de ser intelectualmente insuficiente. A provocação que pronunciamos na Oficina é uma explicitação de provocações internas contra as quais aprendemos a lutar em nossa jornada de aprender a aprender Matemática.

O pensamento empírico torna-se claro depois, quando o conjunto de argumentos fica estabelecido. Ao retomar um passado cheio de erros, encontra-se a verdade num autêntico arrependimento intelectual. No fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização. (Bachelard, 1996, p. 17, grifo do autor)

Por isso, o arrependimento intelectual que o trabalho com provas e com problemas proporciona não é algo a ser evitado, mas sim um tema que deve ser explorado na relação didática. Mais do que não fazer provocações “violentas” na posição de educador, como as que simulamos na Oficina, é preciso exercer um trabalho direcionado ao cuidado emocional com os estudantes. E não basta dizer palavras afirmativas ou mencionar que o erro faz parte da aprendizagem. Também é necessário reconhecer a dificuldade real dos obstáculos que o estudante enfrenta, que talvez nem ele reconheça, nem nós tenhamos previsto de antemão, e explicitá-la, reforçando aprendizados tanto dos conceitos e procedimentos quanto de natureza metacognitiva e emocional.

E para reconhecer as dificuldades que o estudante enfrenta, são fundamentais a pergunta e a escuta. Pergunta verdadeira, que não tem intenção de instalar dicas e ideias sorrateiras na mente do estudante a fim de facilitar sua resolução do problema, e escuta verdadeira, que procura a empatia e não se ofusca pelos pensamentos do que se irá perguntar ou dizer quando seu interlocutor acabar sua fala. Mas também é fundamental o preparo prévio do educador, imergindo nas nuances do problema que será proposto e fazendo um trabalho autorreflexivo para conhecer suas próprias dificuldades e observar os obstáculos que enfrenta em seu processo de resolução.

Por último, apresentamos à leitora ou ao leitor uma prova, ligeiramente mais simples que a prova usual, para a proposição de que o quadrado de um número par é um número par, usando a definição “ $n = 2k$ ”.

Se n é par, então existe k inteiro tal que $n = 2k$. Multiplicando os dois membros da igualdade por n , resulta $n^2 = 2kn$. Como kn é inteiro, segue que n^2 é par.

Essa prova não foi apresentada na Oficina porque na época ainda não a havíamos concebido. Mas direcionamos ao leitor ou à leitora uma reflexão: Quantas vezes você já provou formalmente essa proposição, no papel ou na mente, antes ou durante a leitura desta seção? Você alguma vez pensou em provar formalmente a proposição referida dessa maneira, ou de uma maneira diferente da usual? Se não, por que? Você concorda que essa prova é um pouco mais simples do que a prova usual da proposição, elevando os dois membros ao quadrado e argumentando que $4k^2 = 2(2k^2)$ e que $2k^2$ é inteiro? Se sim, então por que ela não é mais disseminada?

Para dar continuidade a essa reflexão e expandir o debate, apresentamos no Apêndice A as provas relativas aos itens (b) e (c) da Tarefa 1.

Tarefa 2 - Provas da desigualdade triangular



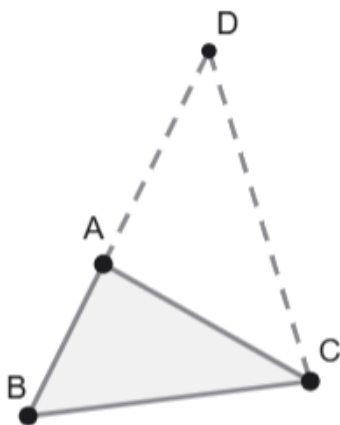
4.1 Proposta e Objetivos

A Tarefa 2 é inspirada no trabalho de Oliveira (2023. 90 f), que foi um dos ministrantes da Oficina. A tarefa consiste em uma análise aberta motivada por três provas da propriedade da Geometria Plana conhecida como “desigualdade triangular”. Para simular, neste texto, a experiência que os participantes tiveram na Oficina, as autorias das Provas 1, 2 e 3 são inicialmente omitidas, e reveladas em um dos parágrafos finais da seção seguinte. A seguir, reproduzimos o enunciado da tarefa entregue aos participantes.

Analise cada uma das provas da propriedade da desigualdade triangular apresentadas a seguir e comente se, para você, a prova está completa, é convincente, contém erros ou lacunas, é clara, é rigorosa, e o que mais julgar pertinente.

Prova 1

Seja ABC um triângulo. Prolongamos o segmento BA ¹ até um ponto D de tal forma que $AD = AC$, formando o triângulo ACD isósceles.



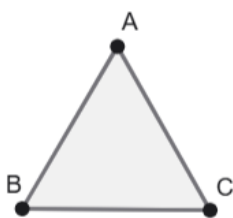
Como ACD é isósceles, os ângulos ACD e ADC são congruentes. Portanto, o ângulo BCD é maior do que o ângulo ADC ; e, como DCB é um triângulo, sendo o ângulo BCD maior do que o ângulo BDC , e o maior lado opõe-se ao maior ângulo, então, $DB > BC$.

Mas, $DA = AC$; portanto, $BA + AC > BC$. Do mesmo modo, então, podemos provar que $AB + BC > CA$, e que $BC + CA > AB$.

Portanto, está provado que dois lados de todo triângulo, tomados juntos, é maior que o lado restante.

Prova 2

1. Triângulo Equilátero (todos os lados são iguais: $AB = BC = AC$)



Queremos mostrar que qualquer lado do triângulo equilátero é menor do que a soma dos outros dois lados.

Vejamos a soma $AB + BC$.

Como todos os lados são iguais, então $BC = AC$.

Logo, temos que $AB + BC = AB + AC > AC$.

Assim, mostramos que o lado AC é menor que a soma dos outros dois.

2. Triângulo Isósceles ($AB = AC$ e os dois ângulos da base BC são iguais)

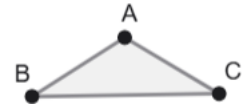


Vamos separar em dois casos: (1) quando os lados iguais são maiores do que a base, e (2) quando a base é maior do que os lados iguais.

Para o primeiro caso ($AB = AC > BC$), temos que $AB + BC > AC$ e $AC + BC > AB$.

Sabemos também que $AB > BC$ e $AC > BC$, então $AB + AC > BC$.

Para o caso de a base ser maior que os lados iguais ($BC > AB = AC$), temos que $AB + BC > AC$ e $BC + AC > AB$.



Agora, para mostrar que a base é menor do que a soma dos dois lados iguais ($AB + AC > BC$) é necessário usar outro argumento. Do ponto A é traçado um segmento até o ponto D no lado BC, de forma que $AB = BD$, formando o triângulo isósceles ABD.

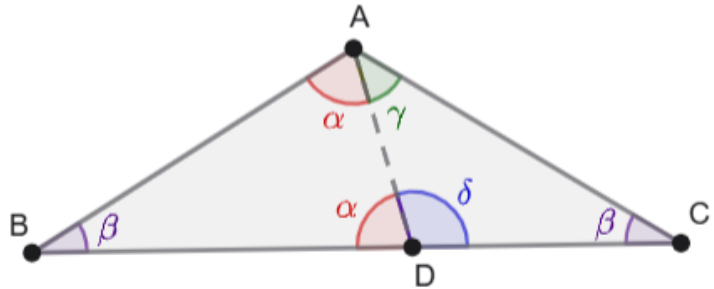
Portanto os ângulos BAD e BDA são iguais. Então podemos chamar:

$$\angle BAD = \angle BDA = \alpha,$$

$$\angle ABC = \angle ACB = \beta,$$

$$\angle CAD = \gamma,$$

$$\angle CDA = \delta.$$



Temos que $\alpha + \delta > \alpha + \gamma$. Logo, $\delta > \gamma$.

Portanto $AC > DC$, e somando AB nos dois lados da desigualdade, temos: $AC + AB > AB + DC$. Mas como $AB = BD$, temos $AC + AB > BD + DC = BC$. Assim, fica provado que $AC + AB > BC$.

3. Triângulo escaleno (todos os lados são diferentes)

Neste caso, basta seguir os mesmos raciocínios dos casos anteriores.

Prova 3

Em um triângulo ABC , o segmento BC , por exemplo, é o caminho mais curto de B para C , logo BC é menor que $BA + AC$.

A compilação de Oliveira (2023. 90f) é provocadora à medida que incita a comparação do rigor empregado em cada prova e provoca reflexões sobre a legitimidade das justificações apresentadas, especialmente com relação à Prova 3. A omissão das autorias das provas foi uma estratégia para evitar que a posição social (*status*) de seus autores influenciasse as opiniões dos participantes sobre a validade de seus argumentos. Isso abre a possibilidade de estarmos discutindo sobre provas produzidas por crianças, estudantes de Ensino Médio, graduandos, professores, matemáticos profissionais, ou até pelos ministrantes da Oficina.

Os principais objetivos da Tarefa 2 são:

1. discutir sobre a validade e importância de justificativas intuitivas;
 2. compreender o rigor como um conjunto de regras consensuais em processo constante de adaptação;
- e

¹ Os autores das provas apresentadas nesta seção utilizam a notação “ AB ”, por exemplo, para denotar tanto o segmento de reta cujas extremidades são os pontos A e B (ente geométrico, conjunto de pontos), quanto a medida numérica da distância entre os pontos A e B (comprimento do segmento, medida). A distinção entre uma ou outra acepção deve ser feita pelo contexto.

3. problematizar a submissão da Matemática da Educação Básica sob as normas de rigor da Matemática acadêmica.

Nossa intenção inicial na adaptação dessa tarefa era promover um debate entre os participantes sobre aspectos linguísticos da produção de provas matemáticas, e portanto apenas o Objetivo 1 foi previsto em nossa preparação. Para nossa felicidade, os participantes nos surpreenderam com questões ainda mais sofisticadas, tocando em aspectos *metalinguísticos* e estruturais da prova matemática – o que nos motivou a formular e agregar à lista de objetivos os itens 2 e 3. Em vista dessas questões inesperadas, durante a condução das discussões, lançamos mão de alguns conceitos e referenciais teóricos que não havíamos planejado introduzir, o que conferiu uma maior espontaneidade para o ambiente da Oficina.

Na redação do relato apresentado na seção seguinte, percebemos que o assunto da estruturação de teorias matemáticas, essencial para o trabalho com provas, exige bastante abstração para ser tematizado e comunicado. Por esse motivo, alguns trechos do texto tomam uma dimensão mais filosófica e podem ser mais difíceis de se compreender à primeira leitura. Esforçamo-nos, então, para permear com exemplos e analogias as exposições mais densas, e reforçar as questões motivadoras e conclusões parciais que possam auxiliar na compreensão das ideias. Aos leitores que se interessarem pelo tema, incentivamos que persistam na leitura até o fim, para alcançar os resultados da discussão apresentada, onde sugerimos um caminho para o trabalho com provas na Educação Básica que *não* esteja subordinado às restrições do formalismo acadêmico, e oferecemos um direcionamento para a pergunta “como saber o que eu posso ou não posso usar numa demonstração?”.

4.2 Relato de experiência da Tarefa 2

Ao final do primeiro dia da Oficina, fornecemos aos participantes o material contendo o enunciado e as provas da Tarefa 2, para que pudessem lê-lo durante o restante do dia e iniciássemos as discussões no segundo e último dia de Oficina.

Retomamos a Oficina abrindo espaço para discutir sobre as provas contidas no material, e muitos participantes mostraram-se especialmente interessados em discutir a Prova 3, como esperávamos. Para garantir que todos tivessem compreendido as Provas 1 e 2, enfatizamos suas passagens principais e esclarecemos as dúvidas mencionadas.

Vale destaque a ressalva de um professor participante sobre a propriedade de que “o maior lado opõe-se ao maior ângulo”, utilizada explicitamente na Prova 1, e implícita na Prova 2. O professor pontuou que a propriedade não é verdadeira, porque, em um triângulo equilátero, não há lados ou ângulos maiores ou menores. Para ele, a propriedade se aplicaria apenas a triângulos escalenos. Também foi criticada a Prova 2 por não apresentar o argumento completo do último caso, que completamos na lousa em diálogo com os participantes.

Quando passamos para a discussão da Prova 3, sentimos a atenção da sala se intensificar. Ouvimos comentários elogiando a simplicidade da terceira prova, por esclarecer a proposição em muito menos palavras que as outras duas, mas essa opinião não foi unânime. Alguns participantes apontaram que a propriedade utilizada *depende* da desigualdade triangular, e por isso não pode ser usada para prová-la. A prova não só dividiu opiniões entre os participantes, como também desestabilizou seus próprios critérios de rigor matemático. As dúvidas sobre as provas 1 e 2 eram dúvidas de interpretação e compreensão

de argumentos, mas a Prova 3 não gerou esse tipo de dúvidas, com as quais todos nós já estávamos acostumados. As dúvidas geradas eram de natureza metalinguística, e pareciam muito mais latentes, especialmente para os professores da Educação Básica: *Só isso é suficiente? Está correto? Se meu aluno fizer um argumento como este, posso dizer que está certo? Eu posso provar assim em sala de aula?*

Um participante que cursava Ensino Médio em Instituto Federal fez então uma pergunta que, para nós, toca no cerne do problema: *A propriedade de que “o menor caminho entre dois pontos é um segmento de reta” é um axioma?* – em sua interpretação, a prova é legítima caso a resposta seja afirmativa.

Antes de iniciarmos uma análise mais aprofundada, salientamos que vamos tratar do aspecto estruturante da prova na teorização da Matemática, na função que a prova desempenha em sistematizar o conhecimento matemático, algo que as experimentações empíricas e a intuição pura não são capazes de realizar (De Villiers, 1999, p. 20).

Nosso olhar se distancia ligeiramente da prova específica em questão e passa a enxergar o escopo maior da estrutura da teoria em que ela se insere, como se estivéssemos folheando um livro-texto que apresenta formalmente uma teoria matemática. Observamos, por exemplo, o fluxo de encadeamento dos teoremas (teorema A é usado para provar o teorema B, que é usado para provar o teorema C). Como se estivéssemos alçando voo e olhando para o chão, quanto mais nos distanciamos, mais elementos adentram nosso campo de visão, e menos detalhes enxergamos. Afastando-se ainda mais, podemos ver desde a base axiomática da teoria – assumindo que se trata de uma teoria axiomatizada – até seus teoremas finais, e alcançamos o limite de altitude para essa teoria – se subíssemos mais, talvez avistássemos outras. A essa distância, nossa preocupação não está em questões minuciosas da linguagem, como a clareza e a precisão dos argumentos formais, ou a adequação das propriedades usadas na prova de uma proposição, que seriam preocupações mais locais, de quem está com os pés no chão, como estávamos durante a Tarefa 1. Em vez disso, preocupamo-nos com aspectos mais *globais*, por exemplo, com a assertividade do encadeamento teórico, evitando provar proposições “desnecessárias”; com o acúmulo de conhecimentos, desde a base axiomática, que culmina nos teoremas principais da teoria; com a escolha precisa das definições, hipóteses e axiomas, a fim de facilitar o percurso dedutivo até os teoremas principais; e com problemas de *circularidade* no encadeamento de teoremas (teorema A é usado para provar o teorema B, e o teorema B é usado para provar o teorema A, o que prova que os teoremas A e B são logicamente equivalentes, mas não valida nenhum dos dois, do ponto de vista formal).

Na perspectiva de alguns dos participantes, para avaliar a validade da Prova 3, seria necessário consultar livros como *Os Elementos* de Euclides a fim de verificar se a propriedade de que “o menor caminho entre dois pontos é o segmento de reta que os conecta” é um axioma, ou ao menos, se é demonstrada antes da desigualdade triangular.

Mas porque subordinar a avaliação de provas produzidas por ou para estudantes da Educação Básica do século XXI à sistematização teórica euclidiana do século III a.C.? É necessário importar regras estruturais externas para organizar logicamente as práticas matemáticas autênticas da Educação Básica? Para nós, isso revela um tipo de subordinação ao rigor empregado nas produções matemáticas a nível acadêmico, cujos objetivos, de estruturação ampla das teorias formais, não atendem às prioridades de aprendizagem para a Educação Básica, que incluem o descobrimento, a verificação e a busca por explicações.

Embora alguns elementos de verificação estejam obviamente presentes aqui [na função sistematizadora da prova], o objetivo principal claramente não é “*verificar se certas afirmações são realmente verdadeiras*”, mas organizar proposições individuais não logicamente relacionadas, que já são conhecidas como verdadeiras, em um *todo coerente e unificado*. Devido à perspectiva global fornecida por tal simplificação e unificação, há também, é claro, um elemento distinto de iluminação presente quando a prova é usada como um meio de sistematização. Neste caso, no entanto, o foco recai sobre a iluminação global em vez da local. Portanto, é falso afirmar na escola, ao provar afirmações autoevidentes, como que os ângulos opostos de duas retas que se intersectam são iguais, que estamos “nos certificando”. Os matemáticos estão, na verdade, muito menos preocupados com a veracidade de tais teoremas do que com sua sistematização em um sistema dedutivo. (De Villiers, 1999, p. 21, grifo do autor, tradução nossa)²

A fim de propor e justificar um caminho alternativo à subordinação da Matemática da Educação Básica ao rigor da Matemática acadêmica, vamos iniciar uma nova reflexão. Na Tarefa 1, provamos a proposição de que o quadrado de um número par é um número par utilizando a definição de paridade e a propriedade de que o produto de números inteiros é um número inteiro. Dessa forma, a prova produzida não é garantia absoluta da veracidade da proposição, mas sim um condicionamento desta à validade da propriedade utilizada na prova. Se calhar de não ser verdade que o produto de inteiros é inteiro, a prova produzida cai por terra e não há garantia de que a proposição provada é verdadeira.

Podemos, então, tentar provar a propriedade de que o produto de números inteiros é inteiro. Definimos o produto de inteiros como o resultado de iterações sucessivas da operação de adição de inteiros, e utilizamos a propriedade de que a soma de números inteiros é um número inteiro. Assim, condicionamos a propriedade da multiplicação de inteiros – e, conseqüentemente, a proposição de que quadrado de um número par é par –, à propriedade da adição de inteiros. Mas como justificar esta propriedade? Também podemos definir a soma de inteiros como o resultado de iterações sucessivas da operação de *sucessão*, isto é, de tomar o sucessor, somar 1 (com um cuidado para adições com parcelas negativas), e utilizar a propriedade de que o sucessor (ou antecessor) de um número inteiro é inteiro. Mas qual é a garantia de que essa propriedade vale?

Essa regressão de justificações pode terminar com o estabelecimento dos Axiomas de Peano, que postulam, de uma maneira simplificada, que o “sucessor” de um “número natural” (ambos termos indefinidos) é um “número natural”. Mas a regressão ainda pode continuar. Podemos dar mais um passo para trás e *definir* a operação de sucessão e o conjunto dos números naturais a partir dos Axiomas de Zermelo-Fraenkel para a Teoria de Conjuntos. E o que nos impede de retroceder ainda mais e criar uma axiomatização ainda mais abstrata que define os termos indefinidos da Teoria de Conjuntos (“conjunto” e “pertence”) e que sirva como base para provar os Axiomas de Zermelo-Fraenkel?

² Although some elements of verification are obviously also present here, the main objective clearly is not “*to check whether certain statements are really true*”, but to organize logically unrelated individual statements that are already known to be true into a *coherent unified whole*. Due to the global perspective provided by such simplification and unification, there is of course also a distinct element of illumination present when proof is used as a means of systematization. In this case, however, the focus falls on global rather than local illumination. Thus, it is in reality false to say at school when proving self evident statements such as that the opposite angles of two intersecting lines are equal, that we are “making sure”. Mathematicians are actually far less concerned about the truth of such theorems, than with their systematization into a deductive system.

O ponto é que, ao que tudo indica, esse tipo de regressão aristotélica da cadeia de justificações, em busca pela *causa primeira* das coisas, não parece ter fim (ou melhor, início), e por isso não é possível livrar a Matemática de suas “lacunas”. Sempre que justificamos uma afirmação utilizando uma propriedade, essa propriedade passa a ser a nova afirmação injustificada – preenchemos uma lacuna abrindo outra. A menos, talvez, das provas exaustivas e das tautologias da Lógica – como “se A, então A” –, toda prova precisa se embasar em alguma afirmação não justificada, seja ela uma ideia implícita, um consenso, uma conjectura, uma propriedade autoevidente ou um axioma. Nesse sentido, as lacunas são parte essencial da Matemática, ao passo que os axiomas, em sua inquestionabilidade, são um recurso que utilizamos para preenchê-las artificialmente, quando não queremos nos preocupar com o abismo infinito de cadeias de causalidade que possam anteceder nossos teoremas.

Põe-se então sob uma nova perspectiva a pergunta do participante, “isso é um axioma?”. Um axioma, a princípio, não “é”. Axiomas são forjados e, por meio de convenções sociais, *se tornam*. Um axioma só é axioma porque um grupo de pessoas decidiu que o “axioma” é axioma – assim como “uma prova só se torna uma prova após o ato social de aceitá-la como prova”, citando a máxima de Manin (1981, p. 104, tradução nossa)³

E assim como as lacunas fazem parte da essência da Matemática, a necessidade de recorrer a mecanismos artificiais, intuitivos, consensuais ou implícitos para preenchê-las também é essencial, à medida que esses mecanismos oferecem um ponto de partida para as argumentações, permitindo-nos “parar de olhar para trás” e seguir em frente, no sentido da dedução e dos desdobramentos da teoria.

Mas o que interpretamos nas falas dos participantes da Oficina, e que se alinha com nossas percepções da formação inicial de professores, é que aquilo que entendemos como *essencial* na Matemática – as lacunas e a necessidade de preenchê-las – não recebe a devida explicitação, e perde seu posto. Numa inversão de papéis, um conjunto de axiomas – arbitrariamente escolhidos para preencher artificialmente as lacunas essenciais da Matemática – é eternizado nos livros-texto e passa a ser aprendido como se fossem essenciais, como se fossem os axiomas verdadeiros, como se não houvesse outras possibilidades estruturais distintas daquela que se tornou hegemônica.

Freudenthal (1973), diante do dilema de sua época entre ensinar ou não axiomática nas escolas, critica a mera apresentação estática de axiomas prontos e compreende a *axiomatização* como um aspecto essencial da Matemática acadêmica.

A axiomática deve ser ensinada nas escolas? Se for ensinada da forma como tem sido em grande parte dos projetos nos últimos anos, eu digo que não. A axiomática pré-fabricada não é mais um objeto de ensino do que a matemática pré-fabricada em geral [no sentido de que uma é tão inadequada quanto a outra]. Mas o que é considerado essencial na axiomática pelo matemático adulto, quero dizer, a axiomatização, pode ser um objeto de ensino. (Freudenthal, 1973, p. 451, tradução nossa)⁴

³ A proof only becomes a proof after the social act of accepting it as a proof. (Manin, 1981, p. 104)

⁴ Should axiomatics be taught in schools? If it is taught in the form it has been in the majority of projects in the last few years, I say “no”. Prefabricated axiomatics is no more a teaching matter in school instruction than is prefabricated mathematics in general. But what is judged to be essential in axiomatics by the adult mathematician, I mean axiomatizing, may be a teaching matter. (Freudenthal, 1973, p. 451)

Mais do que isso, o autor alerta que alguns estudantes na Educação Básica ainda não são capazes de assimilar uma teoria por completo, desde seus fundamentos até seus resultados principais, e por isso propõe que a axiomatização, como uma *organização global* da estrutura teórica, não é uma abordagem adequada para os contextos mais iniciais de aprendizagem.

Estamos novamente de volta à [questão da] axiomática, mas acho que agora podemos distinguir mais claramente o que a axiomática significa. Um texto matemático pode começar com axiomas porque é matemática pronta. A matemática enquanto atividade nunca faz isso. Em geral, o que fazemos quando criamos e aplicamos a matemática é uma atividade de **organização local**. Os iniciantes em matemática não podem fazer mais do que isso. Todo professor sabe que a maioria dos alunos só consegue produzir e entender cadeias de dedução curtas. Eles não conseguem compreender provas longas como um todo, e muito menos conseguem ver uma parte substancial da matemática como um sistema dedutivo. Somos sortudos se conseguirmos **aprender a organizar localmente** um campo matematizável da realidade ou uma parte da própria matemática, porque isso é exatamente o que eles precisarão no cotidiano e em sua profissão. **Organizar localmente não é uma atividade deficiente, ilícita ou desonesta em matemática.** É uma atitude amplamente aceita pelo matemático adulto na matemática pura ou aplicada, embora ele nunca publique tais exercícios. Nenhum dos vários sistemas axiomáticos da geometria jamais foi usado para encontrar ou provar afirmações geométricas, caso elas sejam necessárias em álgebra ou em análise. É muito complicado e o caminho dos axiomas até os teoremas importantes é muito longo. A prova é substituída pela firme convicção de que ela pode ser feita, mas fazê-la dificilmente vale a pena. Fica-se satisfeito com a organização local, dentro dos limites de um horizonte de evidências em constante mudança. (Freudenthal, 1973, p. 461, tradução nossa, grifo nosso)⁵

Essa reflexão suscita um caminho alternativo à subordinação da Matemática da Educação Básica ao rigor da Matemática acadêmica. Em vez de recorrer às estruturas formais para decidir sobre a legitimidade de uma prova matemática contextualizada na Educação Básica, podemos começar avaliando apenas a coerência interna das argumentações – isto é, dos argumentos em uma prova e das relações lógicas entre eles. Nesse sentido, não nos preocuparíamos em trabalhar com uma *organização global*, da teoria como um todo, mas apenas com *organizações locais* (Freudenthal, 1973), com encadeamentos

⁵ We are again back at axiomatics, but I think we can now more clearly distinguish what axiomatics means. A mathematical text may start with axioms because it is ready-made mathematics. Mathematics as an activity never does so. In general, what we do if we create and if we apply mathematics is an activity of local organization. Beginners in mathematics cannot do more than that. Every teacher knows that most pupils can only produce and understand short deduction chains. They cannot grasp long proofs as a whole, and still less can they view a substantial part of mathematics as a deductive system. We are lucky if they can learn to organize locally a mathematizable field of reality or a piece of mathematics itself, because this is just what they will need in everyday life and in their profession. Organizing locally is not a deficient or illicit or dishonest activity in mathematics. It is a generally accepted attitude of the grown-up mathematician in pure and applied mathematics even though he would never publish such exercises. None of the various axiom systems of geometry has ever been used to find or to prove geometrical statements if they are needed in algebra or analysis. It is much too complicated and the road from the axioms to important theorems is much too long. The proof is superseded by the firm conviction that it can be done but that it is hardly worthwhile. One is satisfied with the local organization up to a changing horizon of evidence. (Freudenthal, 1973, p. 461)

dedutivos apropriados ao grau de maturidade dos estudantes. E, conforme os estudantes amadurecerem, podemos introduzir perguntas que ampliem ligeiramente seus olhares para algumas questões teóricas estruturais – das provas em uma teoria e das relações lógicas entre elas.

Livrando-se do fantasma da base axiomática externa e do encadeamento teórico hegemônico, outros recursos podem ser desenvolvidos na sala de aula, até pelos estudantes, para embasar justificações, como o uso de exemplos, de figuras, de conjecturas, de teoremas autoevidentes não provados, de afirmações equivalentes ao que se pretende provar, entre outras soluções criativas que muitas vezes não são valorizadas – ou sequer permitidas – na Matemática escolar.

Se uma prova nada mais é do que o condicionamento da validade de uma certa proposição à validade das propriedades utilizadas em sua justificação (a menos, talvez, de provas exaustivas e de tautologias lógicas), por que seria um problema embasar-se em uma conjectura ou uma proposição autoevidente não provada? Qual é o problema de realizar justificativas a partir de exemplos?

É verdade que exemplos e figuras podem enganar nosso senso intuitivo, é verdade que uma dedução circular não valida nenhuma de suas afirmações, e é claro que conjecturas podem ser falsas. Mas, por outro lado, toda prova produzida é única e agrega um conhecimento novo a quem a produz e a quem a lê, especialmente quando submetida a uma análise crítica colaborativa, sobretudo quando contém erros. Por exemplo, um encadeamento circular de proposições garante sua equivalência (condicionada, entretanto, às propriedades utilizadas nas provas que compõem essa cadeia) e pode abrir espaço para discussões estruturais da teoria (“Se provamos o Teorema A usando o Teorema B, e provamos o Teorema B usando o Teorema A, o que podemos concluir sobre a validade de cada teorema?”); exemplos e figuras podem ser esclarecedores e germinar suas generalizações; e conjecturas plausíveis e teoremas autoevidentes foram utilizados amplamente na história da Matemática, e podem, tais como os axiomas, ser assumidos verdadeiros para encaminhar outras investigações, agilizando o processo para se alcançar resultados teóricos mais fortes, distantes da base axiomática.

A matemática experimental, ou seja, a matemática da descoberta livre, é muito mais importante do que aquela confinada aos axiomas impostos pelo professor ou autor do livro didático, e não há razão para afirmar que ela seja menos rigorosa. (Freudenthal, 1973, p. 150, tradução nossa)⁶

Desde que se tenha clareza das suposições que se faz, que se conheça os “riscos” de poder estar assumindo afirmações falsas, e que se tenha criticidade para avaliar as consequências de suas escolhas teóricas, para nós, é completamente legítimo produzir Matemática a partir de *organizações locais*. E sendo essa uma produção autêntica do indivíduo, consideramo-la muito mais madura do que a mera assimilação de estruturas teóricas pré-fabricadas.

Não se trata de uma autorização para validar irrestritamente qualquer tentativa de argumentação, mas sim de um apelo para que nós nos autorizemos a produzir matemática com liberdade e autonomia intelectual, e para que cultivemos essa liberdade em sala de aula. Não se trata de abrir mão do rigor, mas sim de nos permitirmos ajustá-lo de forma que faça sentido para os estudantes, com os estudantes.

⁶ Experimental mathematics, that is, the mathematics of free discovery, is much more important than that which is confined to axioms imposed by the teacher or textbook author, and there is no reason to claim that it is any less rigorous. (Freudenthal, 1973, p. 150)

Trata-se de ter liberdade para abrir mão dos antigos dogmas matemáticos estruturais, quando forem um empecilho para a autonomia, e permitir que as teorias sejam desenvolvidas autenticamente a cada semestre sob uma nova estruturação, que pode ou não se assemelhar aos livros-texto de Matemática.

As considerações que fizemos nesta seção são um misto de ideias que discutimos na Oficina – algumas das quais havíamos planejado, outras surgiram espontaneamente – com reflexões posteriores que a discussão, ainda presente em nossas mentes, nos proporcionou. Em nossa percepção, os participantes receberam nossas sugestões – de exercer a autonomia da Matemática da Educação Básica em relação à Matemática acadêmica praticando *organizações locais* – com ar de surpresa e um certo entusiasmo. Muitos disseram que nunca haviam pensado que poderiam se desvencilhar das estruturas teóricas formais dos livros-texto de Matemática.

As críticas que alguns participantes fizeram à Prova 3, na direção de invalidá-la por não se enquadrar na estrutura teórica esperada, não pareciam emergir de conhecimentos próprios da prática docente dos participantes, fundamentados nas experiências e reflexões em sala de aula. Pelo contrário, os próprios participantes admitiram estar reproduzindo discursos que incorporaram na formação inicial.

Não afirmamos aqui que os professores universitários que contribuem para a formação inicial de professores tendem a enxergar com maus olhos produções matemáticas como a Prova 3. A depender do contexto, é possível que defenderiam veementemente a legitimidade dessa prova, tão simples e elegante. Entretanto, a ausência ou superficialidade de discussões na formação inicial – tal como apontaram os participantes – sobre validação, rigor, formalismo e o processo de produção de provas em geral, desfavorece um aprofundamento crítico sobre o assunto pelos professores. E ao estudar no Ensino Superior uma matemática apresentada como um produto formal pré-fabricado, e não como um processo vivo, e vivenciar práticas avaliativas que enxergam somente o critério do rigor formal, o dogma formalista cria raízes no olhar dos professores – felizmente, no contexto dos participantes da Oficina, essas raízes não eram profundas.

Nosso último argumento em defesa da legitimidade das três provas estudadas foi a revelação de seus autores. A menos de tradução e ligeiras adaptações para tornar a linguagem mais acessível, a Prova 1 foi proposta por Euclides de Alexandria ([Euclides, 2009](#), p. 112); a Prova 2, por Heron de Alexandria ([Marcén; Seguí, 2013](#), p. 4); e a Prova 3, por Adrien-Marie Legendre ([Legendre, 1809](#), p. 11). Os professores ficaram muito surpresos com a diversidade de ideias e estruturas empregadas nas diferentes provas, todas produzidas por matemáticos de renome. Apesar de sabermos que nosso critério de validação de uma prova não deve se pautar pelo fato de um matemático renomado tê-la produzido ou não, o argumento é imediatamente aceito. Afinal, ninguém quer ser o professor que invalida uma ideia de Adrien-Marie Legendre.

Retomando a pergunta feita pelo participante na Tarefa 1, “Como saber o que eu posso ou não posso usar numa demonstração?”, diante de todas essas discussões, talvez a maneira mais adequada de encarar esse dilema seja modificando a pergunta. Em vez de perguntar “eu posso supor isso?”, uma pergunta mais alinhada com os valores da autonomia intelectual, da liberdade e da autenticidade do pensamento seria a autorreflexão “eu quero supor isso?”. Nessa mentalidade, o indivíduo deve conciliar permissões e proibições que julgue adequadas para seu contexto matemático e seus objetivos de aprendizagem e produção de conhecimento. Uma abordagem mais permissiva pode trivializar o problema e inibir maiores aprendizagens (como assumir, no item (a) da Tarefa 1, que o produto de números pares é par), ou pode agregar um novo ponto de vista para o esclarecimento da proposição (como a Prova 3 da Tarefa 2).

Uma abordagem mais restritiva pode ser demasiado cansativa e laboriosa, ou pode gerar ótimos desafios intelectuais.

Talvez os mais fortes sinais de maturidade e proficiência em Matemática, tanto para estudantes quanto para professores, sejam a autonomia de tomar suas próprias decisões teórico-estruturais e a criticidade de avaliar as consequências teóricas de suas escolhas. Evidentemente, o cultivo da autonomia e da criticidade não é algo simples, e exige prática e reflexão. Com isso em mente, propusemos na Oficina a Tarefa 3, de caráter aberto e investigativo, que, além de ser útil em contextos de formação continuada de professores, pode ser aplicada também em sala de aula.

Tarefa 3 - Somando números consecutivos



O enunciado da terceira e última tarefa realizada na Oficina é o seguinte:

“Alguns números naturais podem ser expressos como soma de números naturais consecutivos, por exemplo, $6 = 1 + 2 + 3$ e $7 = 3 + 4$. Investigue esses números.”

Um dos objetivos dessa tarefa é proporcionar a experiência – e o desafio – de produzir matemática *livremente*, sem direcionamentos prévios, sem pontos de partida pré-determinados, e sem restrições quanto ao tipo de inferência considerada válida.

Para nós, a condução dessa tarefa foi um momento muito prazeroso de aprendizagem individual e coletiva com os participantes, apesar das limitações de tempo terem impossibilitado maiores discussões no campo da Educação Matemática. Assim, em vez de relatar neste texto as conclusões matemáticas que os participantes obtiveram, optamos por oferecer à leitora ou ao leitor a oportunidade de conduzir suas próprias investigações a partir do enunciado da Tarefa 3, para que possa fazer suas próprias descobertas e exercer sua autonomia matemática!

Além de poder ser utilizada como tarefa formativa para professores e licenciandos, acreditamos que esta proposta possui potencial para aplicação em sala de aula com pouca ou nenhuma adaptação. Caso a leitora ou o leitor deseje utilizá-la em contextos educacionais, apresentamos a seguir sugestões que podem orientar sua condução. Essas sugestões foram elaboradas com base em nossa experiência aplicando essa tarefa no Ensino Superior (Licenciaturas e Bacharelados) e em formações continuadas de professores que ensinam Matemática (da Educação Infantil ao Ensino Médio).

Recomendamos, primordialmente, que o docente que se propuser a aplicar esta atividade já a tenha realizado de forma individual, familiarizando-se com as dificuldades que os estudantes provavelmente enfrentarão. As sugestões aqui reunidas podem, inclusive, subsidiar esse momento inicial de preparação do professor.

É comum que os participantes sintam-se desorientados no início da investigação, devido à ausência proposital de comandos tradicionais como “calcule” ou “justifique”. Para investigar — ou seja, para descobrir propriedades acerca de um objeto de estudo, neste caso o conjunto de números expressos como soma de naturais consecutivos —, é muito útil saber formular perguntas. A prática investigativa consolida-se na busca por respostas a questionamentos que se modificam e se refinam conforme as descobertas avançam (Bachelard, 1996). O motor desse processo é, portanto, a perseguição da própria curiosidade, aspecto que, para nós, deve ser explicitado aos estudantes.

Ainda assim, elaborar perguntas pode não ser uma tarefa simples nos momentos iniciais. A curiosidade precisa ser cultivada e, para isso, a *observação* é um recurso importante. Os estudantes podem utilizar exemplos ou casos particulares (como $7 = 3 + 4$), organizando-os da maneira como desejarem na tentativa de encontrar padrões. Caso demonstrem insegurança diante da infinitude de possibilidades para o início da investigação, sugerimos que, em vez de oferecer restrições prontas (como “comece pelos números pares”), o professor acolha essa dificuldade na dimensão emocional: “Realmente, a infinitude de caminhos possíveis pode inibir o começo da caminhada, principalmente quando não sabemos qual deles levará a algo interessante. Mas todos os caminhos trilhados trazem novos conhecimentos, mesmo aqueles que parecem não levar a lugar algum. Qualquer caminho é válido; você só precisa se manter em movimento, cultivando sua curiosidade.”

Sugerir um caminho específico contraria, em nossa visão, o princípio da autonomia, devendo ser utilizado apenas como último recurso do docente para auxiliar o estudante: “Gostaria que eu sugerisse algumas perguntas investigativas?”.

Quando um padrão for percebido — por exemplo, em uma sequência de cinco elementos —, é necessário estimular no estudante tanto a verbalização dessa descoberta na forma de uma conjectura quanto a *necessidade intelectual* de validá-la (Harel, 1998). Para isso, o docente pode indagar se a regularidade se mantém para o sexto, sétimo, décimo ou centésimo elemento e, enfim, questionar a validade para todos os casos. Se o estudante estiver convicto da generalização e a pergunta “Será que o padrão se mantém?” não surtir efeito, uma abordagem eficaz para estimular a busca por explicações é questionar: “*Por que* o padrão se mantém?”. E mesmo que o padrão *não* se mantenha e possa ser refutado, recomendamos que as intervenções sejam as mesmas, sem dar a entender que a conjectura está incorreta, permitindo que o erro seja descoberto de forma autônoma pelo estudante.

Assim que uma pergunta investigativa for respondida, o professor pode instigar o próximo passo, questionando qual será o novo alvo da investigação: “Qual a próxima pergunta que quer tentar responder?”. A qualquer momento, os alunos têm a liberdade de modificar sua pergunta e “pivotar” o rumo do trabalho.

Por fim, quanto ao formato da atividade, costumamos propor que os estudantes investiguem primeiro individualmente, e posteriormente abrimos espaço para o compartilhamento de descobertas em grupo ou com toda a turma. Esse formato, contudo, é flexível e deve ser adaptado pelo docente conforme o perfil da turma e a metodologia com que está habituado.

Considerações Finais



Os participantes da Oficina demonstraram grande interesse e entusiasmo em discutir sobre provas matemáticas e sua utilização na Educação Básica. Juntamente com esse interesse, muitos expressaram que ainda enfrentam inseguranças significativas, dizendo que não se sentem confiantes em produzir uma demonstração do início e tecendo críticas sobre a falta de discussões aprofundadas acerca desse tema na formação inicial. Esse desafio se manifestou também em dúvidas sobre o que constitui uma argumentação rigorosa, e sobre o que pode ou não ser assumido em uma prova matemática – que geraram longas discussões com ainda mais entusiasmo e engajamento.

Notamos que os participantes carregavam algumas concepções restritivas do que é ou não “permitido” fazer em uma prova matemática, que enfatizavam as regras de rigor e as “proibições” da Matemática acadêmica, opondo-se às preocupações com o desenvolvimento da autonomia e da criticidade dos estudantes. Mas essas concepções não foram defendidas veementemente pelos participantes; pelo contrário, não demorou para que elas fossem desconstruídas e ressignificadas. Segundo reflexões dos próprios participantes, elas eram mera reprodução de discursos apreendidos na formação inicial. Problematicando a subordinação da Matemática da Educação Básica à Matemática acadêmica, procuramos, na Tarefa 2, oferecer uma “saída” com base em [Freudenthal \(1973\)](#), apresentando algumas diretrizes para a concepção de um rigor matemático próprio dos contextos escolares.

As longas discussões e análises apresentadas neste texto não se devem, em nossa opinião, à complexidade das tarefas em si, mas à complexidade do trabalho com provas em geral, que envolve aspectos epistemológicos, filosóficos, culturais, e emocionais relacionados à produção matemática – afinal, o exercício da Tarefa 1 poderia ser resolvido na lousa em poucos minutos, sem gerar dúvidas e nem discussão. E para acessar essa riqueza temática, percebemos que é preciso, por um lado, imergir nas nuances técnicas e teóricas da tarefa e das tentativas de resolução e, por outro, abstrair do contexto específico reflexões críticas acerca do fazer matemático – fazendo alusão à distinção de [Garnica \(1995\)](#) entre *leitura técnica* e *leitura crítica*.

Consideramos que essa dualidade entre técnica e crítica pode servir como um parâmetro simples para professores da Educação Básica que estejam empenhados em abordagens que utilizem provas matemáticas como ferramentas de ensino e de aprendizagem.

Outro aspecto importante da escolha das tarefas motivadoras é a acessibilidade dos conceitos utilizados no enunciado. É perfeitamente possível desenvolver argumentos elegantes, estruturas lógicas complexas, análises metalinguísticas sofisticadas e problemas extremamente desafiadores a partir de conceitos matemáticos elementares. Em nossa percepção de outras experiências, desafiar um estudante dentro de sua familiaridade, utilizando apenas conceitos que ele já tenha assimilado por completo, desperta mais engajamento do que propor um desafio que utilize conceitos novos ou recém-ensinados, que ainda não tenham sido totalmente assimilados.

Vale ressaltar que o desafio por si só não é garantia de uma boa experiência didática com provas matemáticas. Pelo contrário, tanto no contexto da formação de professores quanto na Educação Básica, diante de tentativas de resolução “fracassadas”, a experiência com desafios pode ter o efeito oposto daquele desejado, afetando a autoestima e a autoconfiança dos integrantes, sejam eles professores ou estudantes. Por isso, consideramos que o uso didático de desafios deve ser feito com responsabilidade.

De acordo com Mead (1934, apud [Matos \(1992, p. 132\)](#)), “toda a experiência é mediada pela interpretação”, no sentido de que os significados dos objetos e acontecimentos não estão postos em si mesmos, mas lhe são conferidos pelas pessoas. Nessa perspectiva, consideramos que é a *interpretação* do fracasso,

e não o fracasso em si, que afeta o indivíduo. Por isso, no trabalho com desafios, em particular com provas matemáticas, é necessário – e, talvez, suficiente – *ressignificar o fracasso*.

O “fracasso” – ou dificuldade, ou erro – precisa ser acolhido e interpretado como oportunidade para aprendizagem. Especialmente entre professores de Matemática, as dificuldades que experienciamos ao tentar produzir ou analisar uma prova podem ser uma maneira de nos conectarmos com nossos estudantes a um nível tanto cognitivo quanto emocional, procurando encontrar, em nós mesmos, os obstáculos que enfrentam.

A

Apêndice



Neste Apêndice, apresentamos demonstrações para os itens (b) e (c) da Tarefa 1. Recomendamos fortemente a leitura da Seção 3.2 ('Relato de experiência da Tarefa 1') antes de consultar este texto, porque acreditamos que o conhecimento prévio dessas respostas pode enfraquecer a experiência cognitiva e emocional que buscamos construir neste *e-book*. Recomendamos também que, antes de ler as resoluções aqui apresentadas, o leitor ou a leitora se esforce tentando provar sozinho(a) as duas proposições, com as duas definições abordadas, a fim de vivenciar e refletir sobre as dificuldades e possíveis estratégias associadas ao processo de produção de provas. Não demonstraremos aqui a proposição do item (a), porque, ao longo da Seção 3.2, apresentamos quatro provas dessa proposição – duas para cada definição de paridade. Para facilitar a comparação das demonstrações feitas sob as diferentes definições, utilizamos uma formatação em duas colunas.

Por último, encorajamos que a leitora ou o leitor reflita sobre outras provas possíveis para as proposições (a), (b) e (c) com base em diferentes definições de paridade, especialmente as menos formalizadas, como “um número par é aquele que termina em 0, 2, 4, 6 ou 8”, “um número par é aquele que está na tabuada do 2”, “um número par é aquele que pode ser agrupado em parzinhos” ou “um número ímpar é aquele que não é par”.

Enunciados:

Seja n um número inteiro.

- (a) Mostre que se n é par, então n^2 é par. [Este item não será provado nesta seção.]
- (b) Mostre que, se n é ímpar, então n^2 é ímpar.
- (c) Mostre que, se n^2 é ímpar, então n é ímpar.

Definições usuais:

Definição 1: Dizemos que um número inteiro n é par se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$.

Definição 2: Dizemos que um número inteiro n é ímpar se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$.

Definições não usuais:

Definição 1: Dizemos que um número inteiro n é par se $\frac{n}{2}$ é inteiro.

Definição 2: Dizemos que um número inteiro n é ímpar se $\frac{n-1}{2}$ é inteiro.

Demonstrações:

b₁) Como n é ímpar, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$.

$$\begin{aligned} n = 2k + 1 &\Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 \\ &\Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &\Rightarrow n^2 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1. \end{aligned}$$

Como k é inteiro, então $2k^2 + 2k$ é inteiro. Portanto, n^2 é ímpar.

b₁) n é ímpar,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n^2 - 2n + 1}{4} \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow 2 \cdot \frac{n^2 - 2n + 1}{4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n^2 - 2n + 1}{2} \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \frac{n^2 - 2n + 1}{2} + n - 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n^2 - 1}{2} \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow n^2 \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

b₂) (Outra demonstração) Como n é ímpar, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$.

$$\begin{aligned} n = 2k + 1 &\Rightarrow n(n + 1) = (2k + 1)(n + 1) \\ &\Rightarrow n^2 + n = 2kn + 2k + n + 1 \\ &\Rightarrow n^2 = 2kn + 2k + 1 \\ &\Rightarrow n^2 = 2 \cdot (kn + k) + 1. \end{aligned}$$

Como k e n são inteiros, então $kn + k$ é inteiro. Portanto, n^2 é ímpar.

b₂) (Outra demonstração) n é ímpar,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot (n+1) \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \frac{n^2-1}{4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

c) (Independente da definição adotada) Suponha por absurdo que n não seja ímpar. Então n é par*, logo, pelo que foi provado no item (a), segue que n^2 é par. Como, por hipótese, n^2 é ímpar, resulta que n^2 é simultaneamente par e ímpar, o que é absurdo**. Portanto, n é ímpar.

A leitora ou o leitor pode tentar justificar as passagens destacadas com asteriscos. Há diversas maneiras de formular essas justificativas, e a seguir apresentamos algumas delas.

Para justificar as afirmações dessa prova destacadas com asterisco, podemos assumir o Teorema da Divisão Euclidiana, que garante que, dados a e b inteiros positivos, existem q e r únicos tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$ (interpretamos que q e r são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por b).

* Na divisão de n por 2, existem q e r tais que $n = 2q + r$ e $0 \leq r < 2$. Se n não é par, então $r \neq 0$, e resulta que $r = 1$. Segue que $n = 2q + 1$, e portanto n é ímpar. Em outras palavras, todo número inteiro é par ou ímpar.

** Se n é simultaneamente par e ímpar, então, pelas definições, existem k e l tais que $n = 2k$ e $n = 2l + 1$, mas isso contradiz a unicidade do resto da divisão de n por 2, e portanto é absurdo.

Analogamente à coluna da esquerda, podemos assumir uma versão equivalente do Teorema da Divisão Euclidiana: dados a e b inteiros, existe um único r inteiro tal que $\frac{a-r}{b} \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < b$.

* Dado n natural, existe r inteiro tal que $\frac{n-r}{2} \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < 2$.

Logo, $r = 0$ ou $r = 1$.

Portanto, n é par ou n é ímpar (se n não é par, então n é ímpar).

** Se n é simultaneamente par e ímpar, então, $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$ e $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}$. Logo, $\frac{n}{2} - \frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}$, e segue que $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$. Absurdo. (Ou, simplesmente, podemos utilizar a unicidade garantida pelo teorema).

Referências



ALVES, M. A.; TATSCH, K. J. S. Epistemologia, história e ensino da matemática: reflexões sobre formação e aprendizagem significativa. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 8, n. 3, p. 78–93, 2017. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/rencima/article/view/1258>. Acesso em: 24 dez. 2025.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento**. Tradução: Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. **Educational studies in mathematics**, v. 18, n. 2, p. 147–176, 1987.

BALACHEFF, N.; ALMOULOU, S. A.; MORETTI, M. T. A argumentação matemática: um precursor problemático da demonstração. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 24, n. 1, p. 770–815, 2022. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/57664>. Acesso em: 24 dez. 2025.

BRASIL. MEC. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC): Educação é a Base**. Brasília, DF: [s. n.], 2018.

CHAZAN, D. High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. **Educational studies in mathematics**, v. 24, n. 4, p. 359–387, 1993.

DE VILLIERS, M. D. **Rethinking Proof: With the Geometer's Sketchpad**. Emeryville, CA/USA: Key Curriculum Press, 1999.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. **Didactics of mathematics as a scientific discipline**, p. 231–245, 1994.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an Educational Task**. Dordrecht-Holland: D. Reidel Publishing Company, 1973.

GARNICA, A. V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática**. 1995. 258 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1995.

GARNICA, A. V. M. As demonstrações em educação matemática: um ensaio. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, v. 15, n. 18, p. 91–99, 2002.

HAREL, G. Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa). **The American Mathematical Monthly**, v. 105, n. 6, p. 497–507, 1998.

HEALY, L.; HOYLES, C. A study of proof conceptions in algebra. **Journal for research in mathematics education**, v. 31, n. 4, p. 396–428, 2000.

JAHN, A. P.; HEALY, L.; COELHO, S. P. Concepções de professores de matemática sobre prova e seu ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa. **Anais da 30ª Reunião Anual da ANPed: 30 anos de pesquisa e compromisso social**, Caxambu, v. 30, p. 24, 2007. Disponível em: <http://30reuniao.anped.org.br/trabalhos/GT19-3614--Int.pdf>. Acesso em: 25 mar. 2025.

- KNUTH, E. J. Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. **Journal of mathematics teacher education**, v. 5, n. 1, p. 61–88, 2002.
- LAKATOS, I. **Provas e refutações: a lógica do descobrimento matemático**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.
- LEGENDRE, A.-M. **Elementos de Geometria**. Tradução: Manoel Ferreira de Araujo Guimarães. Rio de Janeiro: Impressão Regia, 1809.
- MANIN, Y. I. A digression on proof. **The Two-year College Mathematics Journal**, v. 12, n. 2, p. 104–107, 1981.
- MARCÉN, A. M. O.; SEGUÍ, V. M. Demostraciones Del Pons Asinorum. Aportes de la Historia a la Enseñanza de la Matemática. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 13, n. 27, p. 01–16, 2013.
- MATHEUS, A. d. R. **Argumentação e prova na matemática escolar**. 2016. f. 145. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade de São Paulo, São Paulo. Instituto de Matemática e Estatística.
- MATOS, J. F. Atitudes e Concepções dos Alunos: definições e problemas de investigação. In: BROWN, M. *et al.* (ed.). **Educação Matemática: Temas de Investigação**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional; APM, 1992. p. 123–171.
- OLIVEIRA, P. A. **Provas e Demonstrações na Sala de Aula de Matemática: possibilidades de abordagem histórica na Educação Básica**. 2023. 90 f. Monografia – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.
- PIETROPAOLO, R. C. **(Re)Significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática**. 2005. 388 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-graduação em Educação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.
- POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- PONTE, J. P. d.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.



7º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Realização e Organização



Associação Nacional dos Professores
de Matemática na Educação Básica

Distribuição

