



**7º Simpósio Nacional da
Formação do Professor
de Matemática**

GEOGEBRA DISCOVERY NO ENSINO DE MATEMÁTICA

abordagens e práticas

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar
Daniel Mendes Inácio de Souza
Marcio Vieira de Almeida



ANPMat
Associação Nacional dos Professores
de Matemática na Educação Básica

GEOGEBRA DISCOVERY NO ENSINO DE MATEMÁTICA

abordagens e práticas

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

Presidente:

Marcela Luciano Vilela de Souza

Vice-Presidente:

Ana Luiza de Freitas Kessler

Diretores:

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Raquel Bodart

Sumaia Almeida Ramos

Viviane de Oliveira Santos

7º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Comissão Organizadora:

Ana Luiza de Freitas Kessler

Anderson Yassuhiro Afuso

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Carlos Eduardo de Oliveira

Cecília Pereira de Andrade

Elen Viviani Pereira Spreafico

Graziele Souza Mozer

Leonardo Barichello

Marcela Luciano Vilela de Souza

Marcelo Firer

Raquel Oliveira Bodart

Samuel Rocha de Oliveira

Sumaia Almeida Ramos

Viviane de Oliveira Santos

Comitê Científico:

Antonio Cardoso do Amaral

Ana Luiza de Freitas Kessler

Bernadete Angelina Gatti

Eliana Souza

Érika Botelho Guimarães Rijo Alves

Fábio Luiz Borges Simas

Gilberto Januário

João Frederico C.A. Meyer

Marcela Luciano Vilela de Souza

Marcelo Firer

Victor Augusto Giraldo

Viviane de Oliveira Santos

Walcy Santos

Yuriko Yakamoto Baldin

Comitê Editorial:

Alzenira da Silva Leão

Antônio Cardoso do Amaral

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues

Evanilson Landim Alves

Gladson Octaviano Antunes

José Fernando Santos Rodrigues Junior

Josieli Fátima Tonin Pagliosa

Lino Marcos da Silva

Marcela Luciano Vilela de Souza

Michel Cambrainha de Paula

Nickson Deyvis da Silva Correia

Renata Magarinus

Rita Santos Guimarães

Roberto César Cucharero Peregrina

Vitor Gustavo de Amorim

Viviane de Oliveira Santos



**7º Simpósio Nacional da
Formação do Professor
de Matemática**

GEOGEBRA DISCOVERY NO ENSINO DE MATEMÁTICA

abordagens e práticas

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar
Daniel Mendes Inácio de Souza
Marcio Vieira de Almeida

1ª edição

2026

Rio de Janeiro

GEOGEBRA DISCOVERY NO ENSINO DE MATEMÁTICA: ABORDAGENS E PRÁTICAS

Copyright © 2026 Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, Daniel Mendes Inácio de Souza e Marcio Vieira de Almeida

Direitos reservados pela Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica. A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Projeto gráfico: Gabriel Brasil Nepomuceno

Produção editorial: Editora Pi

www.editorapi.com.br | contato@editorapi.com.br | +55 21 97748-7208

Distribuição: Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

www.anpmat.org.br | editoraanpmat@anpmat.org.br

ISBN: 978-65-88013-43-4

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Abar, Celina Aparecida Almeida Pereira
Geogebra discovery no ensino de matemática
[livro eletrônico] : abordagens e práticas /
Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, Daniel
Mendes Inácio de Souza, Marcio Vieira de
Almeida. -- Rio de Janeiro : Associação Nacional
dos Professores de Matemática na Educação Básica -
ANPMat, 2026.

PDF

Bibliografia.

ISBN 978-65-88013-43-4

1. Educação matemática 2. Geogebra
3. Matemática - Estudo e ensino 4. Professores -
Formação profissional I. Souza, Daniel Mendes
Inácio de. II. Almeida, Marcio Vieira de.
III. Título.

26-397375.0

CDD-510.7

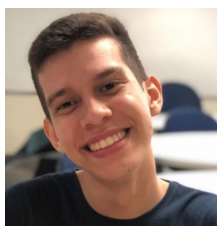
Índices para catálogo sistemático:

1. Educação matemática 510.7

Aline Grazielle Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

Sobre os autores





Daniel Mendes Inácio de Souza

daniel_mendes0802@hotmail.com

Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2024) e graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Presbiteriana Mackenzie (2021). Atua como Professor Assistente de Matemática do Ensino Fundamental II no Colégio Vértice e como Professor de Matemática do Ensino Médio e de Itinerários Formativos no Colégio Octagon (2022–2023). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Formação de Professores, atuando principalmente nos seguintes temas: Matemática no Ensino Fundamental II e Ensino Médio, Tecnologias Digitais para o Ensino da Matemática e processos de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2017) e graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade de São Paulo (2009). Atua principalmente nos seguintes temas: tecnologias digitais no ensino de Matemática, pensamento computacional, inteligência artificial e formação de professores. Foi professor visitante, entre 2022 e 2024, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), campus São Paulo, onde atuou no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede (PROFMAT). É professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP. Atualmente, é professor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP).



Marcio Vieira de Almeida

marcioalmeidasp@gmail.com



Celina Aparecida Almeida Pereira Abar

abarcaap@gmail.com

Doutora em Lógica Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1985). Possui graduação em Licenciatura e Bacharelado em Matemática e mestrado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1979). É especialista em Tecnologias Interativas Aplicadas à Educação (PUC-SP, 2000), em Design Instrucional para Educação On-Line (UFJF, 2007) e em Entornos Virtuais de Aprendizagem (OEI, 2010). Atua no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP. Seus projetos de pesquisa em desenvolvimento abordam tecnologias digitais, realidades virtual e aumentada, ensino híbrido, contexto STEM e STEAM e Inteligência Artificial. É coordenadora do Instituto GeoGebra de São Paulo e editora da Revista do Instituto Internacional GeoGebra de São Paulo.

Sumário



Sobre os autores	ii
Prefácio	x
Agradecimentos	xii
1 Introdução	1
2 Aporte teórico	4
3 Sobre o GeoGebra e o GeoGebra Discovery	6
4 Conhecendo, investigando e utilizando o GeoGebra	12
4.1 Atividades do primeiro dia	14
4.1.1 Construção do Quadrado	15
4.1.2 Construção de um Hexágono Regular	16
4.1.3 Círculo Circunscrito a um Triângulo	17
4.1.4 Visualizar o Teorema “todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo”	19
4.1.5 Construção de Tangentes a um Círculo	20
4.2 Atividades do segundo dia	21
5 Considerações finais	35
Referências	38

Lista de Figuras



1	Exemplo de utilização do botão “More...” no comando Relation do GeoGebra Discovery .	8
2	O comando Relation do GeoGebra Discovery	10
3	Resultado do comando Relation do GeoGebra Discovery	10
4	Um dos momentos do minicurso realizado no 7º Simpósio Nacional	13
5	Outro momento do minicurso realizado na 7º Simpósio Nacional	14
6	Auxílio para a construção da prova do teorema sobre triângulos inscritos em um semicírculo	19
7	Figura fornecida no enunciado da atividade	20
8	Proposta de construção apresentada aos participantes	21
9	Construção do lugar geométrico indicado na proposta 1	22
10	Construção do lugar geométrico indicado na proposta 2	23
11	Construção das curvas epicicloides, para valores $n = 2$ e $n = 6$	23
12	Explorando a janela CAS	24
13	Resolvendo equações considerando cada uma das incógnitas da equação $8x^2 - 6 \cdot m \cdot x + m^2 = 0$	25
14	Construção da Atividade 1, sem os resultados do comando Discover	27
15	Construção da Atividade 1, com os resultados do comando Discover	27
16	Construção da Atividade 2, sem os resultados do comando Discover	28
17	Construção da Atividade 2, com os resultados do comando Discover	28
18	Construção da Atividade 3, com os resultados do comando <i>Relation</i>	29
19	Construção da Atividade 3, com os resultados do comando <i>Relation</i> (f, i)	30
20	Primeira parte da construção da Atividade 4	31
21	Segunda parte da construção da Atividade 4	31
22	Construção do ponto médio F sobre o lugar geométrico <i>eq1</i> criado	32
23	Utilizando o comando relação <i>Relation</i> (c, g) na Atividade 4	32
24	Resultado final da Atividade 4	32
25	Lugar Geométrico a partir da atividade 5	33

Lista de Quadros



1	Resumo das ferramentas disponíveis no GeoGebra Discovery	9
2	Propostas de Atividades para a exploração de quadriláteros com o GeoGebra	17
3	Questões relacionadas à exploração do circuncentro de um triângulo com o GeoGebra . .	17
4	Propostas de atividades para a exploração do comando CentroDoTriângulo com o GeoGebra	18
5	Proposta para a resolução de uma equação no GeoGebra	25
6	Explorando Parâmetros de um polinômio de grau 2	25
7	Enunciado da primeira atividade utilizando o GeoGebra Discovery	26
8	Enunciado da segunda atividade utilizando o GeoGebra Discovery	27
9	Enunciado da terceira atividade utilizando o GeoGebra Discovery	29
10	Enunciado da quarta atividade utilizando o GeoGebra Discovery	30
11	Enunciado da quinta atividade utilizando o GeoGebra Discovery	33

Prefácio



A evolução das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) e sua crescente incorporação nas mais variadas atividades tornaram essas inovações fundamentais também para a prática docente, principalmente no contexto do ensino da Matemática. É difícil conceber que um professor consiga desenvolver um trabalho de qualidade nos dias de hoje sem utilizar novos recursos tecnológicos para dar suporte a suas atividades. O processo de formação e atualização deve ser contínuo e acompanhar o desenvolvimento constante das tecnologias.

Assim, com o intuito de capacitar professores para um novo cenário em sua prática docente, o Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo (IGISP) ofereceu este minicurso, para o 7º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática (promovido pela ANPMat - Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica), realizado nas dependências da Universidade de Campinas (UNICAMP), cujo principal objetivo foi que o professor desenvolvesse habilidades para ensinar, com qualidade, conteúdos de Geometria e Álgebra, incorporando novos recursos tecnológicos a sua prática docente.

O programa do minicurso permitiu aos professores o acesso às estratégias de ensino e de aprendizagem com o uso do GeoGebra, com suporte em teorias e pesquisas utilizadas como base para a prática docente. O suporte teórico foi a teoria da Gênese Instrumental de Pierre Rabardel, considerando as dimensões de instrumentação e instrumentalização.

Para a exploração desses conteúdos, utilizou-se o GeoGebra e o GeoGebra Discovery, escolhidos por serem de livre acesso e por possibilitarem a completa realização das atividades propostas.

Os participantes eram professores do Ensino Fundamental ou Médio, que já possuíam alguma familiaridade com os conceitos algébricos e geométricos pertinentes ao Ensino Básico e faziam uso do computador. Os professores foram envolvidos em um contexto de aprendizagem com propostas de problemas, formulação de hipóteses e tomadas de decisão em um diálogo permanente com a realidade de seu cotidiano da sala de aula.

O objetivo deste e-book é oferecer, por meio de algumas propostas de atividades realizadas no minicurso, orientações pedagógicas para a criação de um ambiente dinâmico no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática à prática docente de seus leitores.

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar
Daniel Mendes Inácio de Souza
Marcio Vieira de Almeida

Agradecimientos



Os autores agradecem à ANPMat pela realização e organização do evento, bem como pela oportunidade de ministrar este minicurso para professores de diferentes regiões do Brasil; ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e à CAPES pelo apoio financeiro, viabilizado por meio do projeto PROAP, que possibilitou a participação no evento.

Introdução



O Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo (IGISP), criado em 2011, está sediado no Programa de Pos-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) e ativo nas dependências da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias da mesma Universidade. A linha de investigação, Tecnologias da Informação e Educação Matemática, do programa de pós-graduação acima, é objeto de pesquisa do grupo Tecnologias Digitais na Educação Matemática (TecDEM), do qual, na proposta aqui apresentada, a autora é coordenadora e os outros autores são participantes. Por um lado, as pesquisas desse grupo objetivam compreender as dificuldades existentes na prática de docentes de Matemática no uso das tecnologias, em especial das tecnologias digitais. Tais dificuldades dizem respeito à transposição didática dos saberes a ensinar e às possibilidades oferecidas pelas tecnologias, em especial o GeoGebra, para criar estratégias didáticas que permitam aprimorar e dinamizar o processo de construção do conhecimento matemático por parte de professores e alunos. Por outro lado, a digitalização traz para a Educação Matemática novas ferramentas que requerem um novo currículo, um novo *design* de tarefas, e uma maior interação com outras disciplinas.

De acordo com Abar (2011, p. 14–15):

[...] na era digital, não incorporar as tecnologias no processo educacional, é condenar à marginalidade todas as pessoas que não tenham a competência para utilizar os instrumentos tecnológicos que lhe possibilita o vínculo com a sociedade.

Importante observar que apenas a existência das tecnologias que permitem o rápido acesso às informações e à comunicação não garante a construção do conhecimento e de uma sociedade preparada para seu uso. Isso depende das pessoas e não das tecnologias utilizadas. Neste aspecto é que se sobressai o papel das tecnologias na educação: que seu uso seja direcionado à construção do conhecimento e à formação de pessoas competentes para a inserção em uma sociedade cada vez mais tecnológica. Deste modo o uso das tecnologias na educação não é um fim em si mesmo e sim um instrumento para o desenvolvimento cognitivo.

Também é essencial ter o entendimento de que se as tecnologias forem utilizadas simplesmente para transmitir informações, já elaboradas, no processo de aprendizagem, elas estarão a serviço de uma função pedagógica tradicional sem possibilitar nenhuma inovação ou mudanças por parte dos sujeitos envolvidos.

Assim, para incorporar as tecnologias digitais na prática dos professores, é necessário que conheçam ou manipulem equipamentos tecnológicos e tenham uma formação inicial e permanente, possibilitando que desenvolvam a capacidade de buscar, usar e gerar informações.

É preciso buscar informações, realizar cursos, pedir ajuda aos mais experientes, enfim, utilizar os mais diferentes meios para aprender a se relacionar com a inovação e ir além, começar a criar novas formas de uso e, daí, gerar outras utilizações. Essas novas aprendizagens, quando colocadas em prática, reorientam todos os nossos processos de descobertas, relações, valores e comportamentos (Kenski, 2007, p. 44).

Cada nova tecnologia que surge precisa ser aprendida, por meio de iniciativa própria ou por meio de cursos e a ajuda dos mais experientes.

Esse e-book está dividido em quatro capítulos além desta Introdução. No Capítulo 2, apresenta-se o aporte teórico da Gênese Instrumental de Pierre Rabardel, que orientou a construção das atividades em suas dimensões de instrumentação e instrumentalização.

No Capítulo 3, são apresentados os recursos tecnológicos GeoGebra e GeoGebra Discovery utilizados no desenvolvimento das atividades do minicurso.

As atividades do minicurso, realizadas ao longo de dois dias, são descritas no Capítulo 4. O e-book é concluído com as Considerações Finais, as Referências e os Agradecimentos.

Aporte teórico



No contexto das formações de professores pode-se considerar a teoria Gênese Instrumental, de [Rabardel \(1995\)](#), a qual orienta os procedimentos de formações desenvolvidas ressaltando duas dimensões que devem ocorrer para que haja desenvolvimento cognitivo e consolidação dos conhecimentos adquiridos: a instrumentação, adaptação de um usuário a um artefato e a instrumentalização, adaptação do artefato para ser utilizado no decorrer de uma atividade situada.

A instrumentação, segundo [Rabardel \(1995\)](#), a adaptação do usuário a um artefato, podendo ser material ou não, ocorrerá pelos meios que agimos, os esquemas de utilização. A instrumentação é uma descoberta das propriedades intrínsecas de um artefato. No caso dessa proposta, na dimensão da instrumentação, o artefato é o software GeoGebra, que será apresentado e utilizado no minicurso durante o qual as investigações iniciais permitirão um conhecimento sobre o software por meio de seu menu, suas ferramentas, seus comandos e suas janelas.

Na instrumentalização ocorre um processo no qual o usuário adapta, aprimora, modifica ou utiliza as propriedades do artefato para atender às suas necessidades a partir do conhecimento que adquiriu sobre o artefato. A instrumentalização vai acontecendo à medida que o usuário vai se aprofundando no uso do instrumento. Ocorre, assim, a gênese instrumental, o artefato se configurando como um instrumento, por meio dos esquemas de utilização necessários, e considerando seu desenvolvimento durante a formação.

Verificou-se, no desenvolvimento da formação, a Gênese Instrumental na evolução dos participantes ao utilizarem o GeoGebra como artefato e foi possível observar os esquemas de utilização que foram mobilizados ou construídos ao longo de suas ações durante o trabalho com as atividades propostas.

Segundo [Rabardel \(1995\)](#), o processo de formação de instrumentos sugere a necessidade de algum tempo de observação para a compreensão do fenômeno e a identificação de esquemas. Desse modo, em algumas atividades desenvolvidas pelos participantes e com autorização deles, identificaram-se estratégias utilizadas no contexto da gênese instrumental.

Sobre o GeoGebra e o GeoGebra Discovery



O GeoGebra¹ considerado como um Sistema de Geometria Dinâmica (DGS – *Dynamic Geometry Software*), é um software de código aberto e livre na internet e foi desenvolvido pelo austríaco Markus Hohenwarter, em sua tese de doutorado em 2001. De acordo com Hohenwarter e Preiner (2007), é um software que inclui Geometria Dinâmica (DGS) e Sistema de Álgebra Computacional (*Computer Algebra System* – CAS), sendo denominado, pelos autores, como um software de Matemática Dinâmica (*Dynamic Mathematics Software* – DMS), para o ensino e aprendizagem de Matemática, e que pode ser utilizado da Educação Básica até o nível Superior.

Como possuiu código aberto e gratuito (não para fins comerciais), o GeoGebra se faz presente em mais de 200 países, sua equipe de desenvolvedores apresenta constantes atualizações e, conforme Botana *et al.* (2020), contribui com estudantes, professores e pesquisadores, para estudos no contexto de diferentes áreas, em especial, da Educação Matemática.

Os Sistemas de Geometria Dinâmica podem ser considerados ferramentas apropriadas e úteis por oferecerem, a partir de sua concepção, possibilidades de visualização geométrica e experimentação algébrica para todos os níveis de ensino, pois combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em uma única aplicação.

Atualmente, DGS modernos incluem recursos que permitem a descoberta, verificação automática e matematicamente rigorosa de teoremas geométricos que podem ser exploradas no GeoGebra Discovery, uma versão experimental do GeoGebra, que possui recursos de raciocínio automatizado (Kovács; Recio; Vélez, 2018).

Segundo Souza (2024), o GeoGebra Discovery é uma versão experimental do GeoGebra lançada em 2021, que incorpora ferramentas avançadas e permite auxílio no desenvolvimento de demonstração de teoremas. Essa versão possibilita verificar conjecturas, provas e propriedades em construções geométricas, combinando os recursos de Geometria Dinâmica (DGS) e de um Sistema de Álgebra Computacional (CAS).

Alguns recursos básicos de raciocínio automatizado estão disponíveis no GeoGebra, versões 5 e 6; no entanto, outros comandos podem, apenas, ser encontrados no GeoGebra Discovery², também disponível em tablets e smartphones.

Entre suas principais inovações estão as Ferramentas de Raciocínio Automático (ART, sigla em inglês para *Automated Reasoning Tools*), que incluem comandos como *Relation*, *LocusEquation*, *Prove*, *ProveDetails*, *Discover*, *Compare* e *Envelope*. Esses comandos permitem ao usuário criar, verificar e refutar conjecturas geométricas de forma automática, aprimorando o raciocínio matemático.

Os novos comandos denominados de *Automated Reasoning Tools* (ART) dados por um botão no Menu (🔍 Discover) e na Linha de Entrada, permitem que o usuário automaticamente conjecture, descubra e prove declarações sobre diferentes elementos de uma determinada construção geométrica.

O conjunto de ferramentas ART, até o momento, é composto das ferramentas e comandos denominados de: *Relation*, *LocusEquation*, *Prove* e *ProveDetails*, *Discover* e *Compare*, que permite a comparação entre comprimentos de segmentos (desigualdades) e *ShowProof*, que fornece ao usuário um certificado de prova na janela CAS.

¹ Disponível em: www.geogebra.org.

² Disponível em: <http://autgeo.online/geogebra-discovery/>.

A ferramenta *Relation*, existente na versão oficial do GeoGebra, retorna com respostas numéricas, afirmando ou não, a possibilidade de as relações entre dois objetos ocorrerem. Na versão atual, o comando permite verificar, validar ou negar conjecturas geométricas, como também à descoberta de propriedades relacionadas a determinados objetos, pois carrega um botão adicional, chamado de “More...” na mensagem de verificação numérica e, ao clicá-lo, é acionado o sistema ART que traduz o objeto geométrico selecionado em equações polinomiais. Como pode ser visto na Figura 1, depois de utilizar o comando *Relation*, existe a opção “More...”:

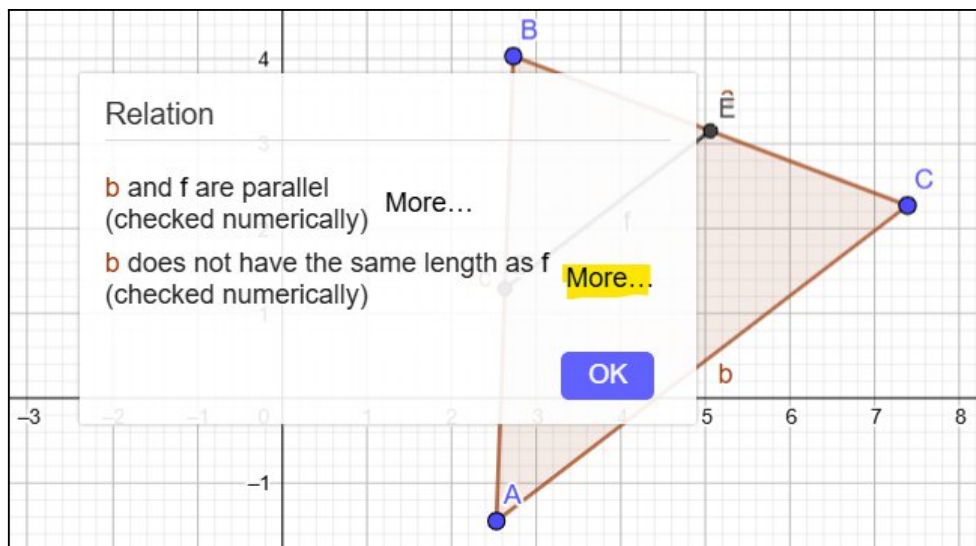


Figura 1: Exemplo de utilização do botão “More...” no comando *Relation* do GeoGebra Discovery

Fonte: Produção nossa.

Comando *LocusEquation*, permite, por meio das ferramentas ART, a descoberta de novos teoremas, mediante hipóteses complementares que apoiam uma tese, como também, calcula a equação implícita de um ponto dada uma propriedade válida.

Os comandos *Prove* e *ProveDetails*, disponíveis na versão oficial do GeoGebra, funcionam de maneiras semelhantes, ou seja, o usuário digita o comando e insere a conjectura, obtendo como resposta verdadeiro (*True*) ou falso (*False*).

O comando *Discover*, ainda, exclusivo da versão experimental do GeoGebra Discovery, busca de forma automática e combinatória, as possíveis relações geométricas envolvendo um determinado elemento à escolha do usuário.

O comando *Compare* faz a comparação entre comprimentos do segmento (desigualdades) (Kovács; Recio; Vélez, 2020; Kovács; Recio; Vélez, 2022).

No Quadro 1, apresenta-se uma descrição dos principais comandos do GeoGebra Discovery.

No minicurso oferecido, foi possível desenvolver algumas atividades envolvendo tópicos de Geometria Plana no GeoGebra Discovery³. Pode-se destacar que tais tópicos envolviam a construção de polígonos regulares, colinearidade de pontos, congruência de segmentos, pontos notáveis de um triângulo, propri-

³ Disponível em: <http://autgeo.online/geogebra-discovery/>.

Quadro 1: Resumo das ferramentas disponíveis no GeoGebra Discovery

Comando	Descrição
<i>Relation</i> (<Objeto>, <Objeto>) <i>Relation</i> (<Lista>)	• Avalia relações entre objetos geométricos indicados (nos parâmetros), como perpendicularidade, paralelismo, igualdade ou incidência; • Retorna respostas numéricas confirmando ou refutando conjecturas e pode acionar as Ferramentas de Raciocínio Automático (ART) para cálculos simbólicos mais detalhados, como, por exemplo, a apresentação de uma relação entre dois objetos.
<i>LocusEquation</i> (<Expressão Booleana>, <Ponto móvel>)	• Gera a equação implícita de um lugar geométrico associado a uma propriedade a ser validada. • Útil para identificar posições específicas de elementos geométricos para que determinada conjectura seja verdadeira.
<i>Prove</i> (<Expressão Booleana>) <i>ProveDetails</i> (<Expressão Booleana>)	• Verificam se uma expressão booleana, com base nos objetos descritos, é verdadeira ou falsa; • O comando <i>ProveDetails</i> fornece condições adicionais, como evitar configurações degeneradas, para garantir a veracidade da conjectura.
<i>Discover</i> (<Ponto>)	• Realiza uma exploração automática de propriedades geométricas de um ponto em uma construção; • Analisa um ponto de uma construção geométrica e identifica possíveis propriedades, como congruências, colinearidades, paralelismos e ortogonalidades nos objetos da construção.
<i>Compare</i> (<Expressão>, <Expressão>)	• Compara duas grandezas geométricas, apontando desigualdades e possíveis relações entre elas; • Verifica relações de igualdade ou desigualdade e indica conexões matemáticas.
<i>Envelope</i> (<Caminho>, <Ponto>)	• Recurso que permite determinar a envoltória de uma família de curvas ou retas. Sendo que envoltória é uma curva que “envolve” outras curvas ou linhas, representando o lugar geométrico que toca todas as curvas da família em pontos tangentes.

Fonte: Souza (2024).

edades de uma circunferência, dentre outros. Como exemplo da utilização do GeoGebra Discovery, foi apresentada uma construção (Figura 1) que faz uso da ferramenta Relation.

A Figura 2 mostra, como exemplo, uma construção com três pontos colineares A, B e C, um ponto livre O, e os pontos médios D, E e F dos segmentos OA, OB e OC, respectivamente. Na Barra de Entrada, o comando $\text{Relation}(\{D, E, F\})$ é introduzido para estudar a existência, se houver, de alguma propriedade entre os pontos D, E e F.

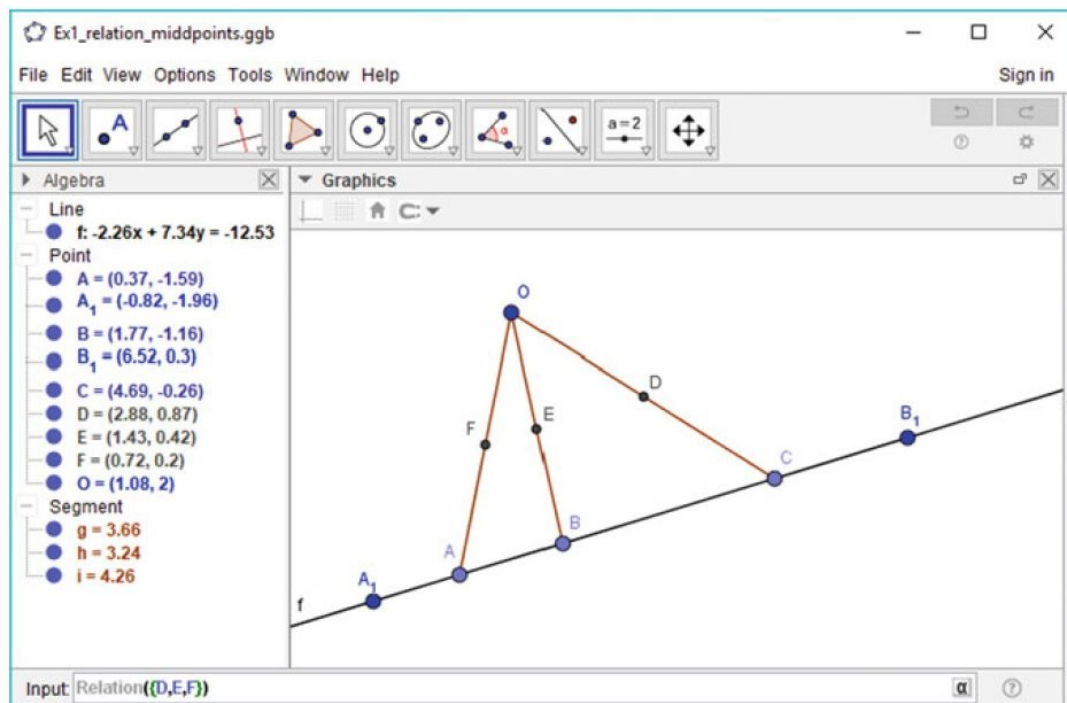


Figura 2: O comando Relation do GeoGebra Discovery

Fonte: Kovács, Recio e Vélez (2020, p. 27).

A parte esquerda da Figura 3 inclui a mensagem de resposta a este comando indicando que os pontos D, E e F são, pelo menos para esta figura, colineares.

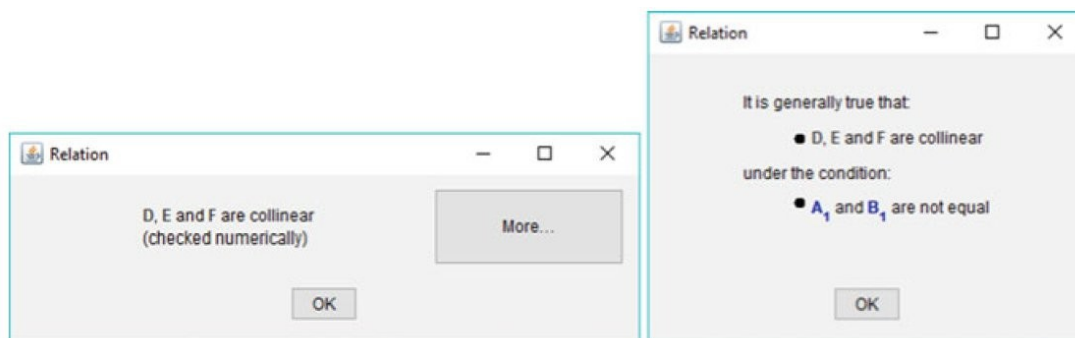


Figura 3: Resultado do comando Relation do GeoGebra Discovery

Fonte: Kovács, Recio e Vélez (2020, p. 27).

Por fim, ao pressionar o ícone “More...”, a Figura 3 apresenta, na janela à direita, informações afirmando que os pontos D, E, F são colineares. Com isso pode-se concluir a validade do seguinte

teorema: “os pontos médios de diferentes segmentos de um ponto a diferentes pontos de uma reta fixa são colineares”.

Desenvolvido com base na tese de doutorado de Zoltán Kovács (Kovács, 2015) e continuamente aprimorado por uma rede colaborativa, o GeoGebra Discovery pode ser utilizado tanto na Educação Matemática quanto na Matemática Pura, atendendo estudantes, professores e pesquisadores de diversos níveis.

Souza (2024) adverte sobre a existência de uma limitação na utilização do GeoGebra Discovery, pois verificações de teoremas e resultados que envolvam medidas de ângulos ainda necessitam de aprimoramento como observam Kovács, Recio e Vélez (2020).

Construções que envolvam medidas de ângulos, no contexto da Geometria Plana, ainda requerem atualizações a serem incorporadas ao GeoGebra Discovery. Por se tratar de grandezas não algébricas, há a necessidade de aprimoramentos que precisam ser introduzidos ao software, pois “ao combinar observações algébricas e geométricas puras, teoremas simples sobre a igualdade de ângulos poderão ser facilmente detectados” (Kovács; Recio; Vélez, 2020, p. 10, tradução nossa).

Outras pesquisas realizadas (Souza, 2024; Russo, 2024) indicam que a exploração da Matemática com o GeoGebra é fundamental para o apoio ao entendimento da Matemática por seu aspecto dinâmico ao permitir a animação das construções, revelando suas características e propriedades.

Conhecendo, investigando e utilizando o GeoGebra



A dinâmica da formação, neste minicurso, foi orientada por uma participação ativa dos professores nas atividades práticas.

Em um processo de investigação [Estrela \(1990\)](#), considera a existência de cinco etapas procedimentais essenciais. A primeira etapa trata da recolha de elementos de estrutura que não decorrem da observação direta da investigação. Na etapa dois, estabelece-se o diálogo com os intervenientes mais diretos no estudo. Na etapa três, definem-se os papéis dos investigadores e dos professores e respectivas estratégias de intervenção. Na etapa quatro, delimitam-se as linhas orientadoras da formação e a recolha de dados e, por fim, na quinta, emerge a avaliação, em que se analisam os dados, problematizam-se e analisam-se os processos e os produtos obtidos. Assim, em cada uma das cinco etapas propostas por [Estrela \(1990\)](#), foram inclusas ações de intervenção de forma a aprofundar o estudo como um todo lógico, consistente e coerente.

O minicurso foi desenvolvido durante 4 horas em dois dias nas dependências da Universidade de Campinas (UNICAMP). Os participantes eram professores do Ensino Fundamental ou Médio que tinham familiaridade com os conceitos algébricos e geométricos pertinentes ao Ensino Básico e que já faziam uso do computador com acesso à internet. Nos momentos iniciais do minicurso, foram fornecidas as orientações para acesso ou instalação e obtenção do aplicativo GeoGebra utilizado.

As Figuras 4 e 5 mostram como o minicurso foi desenvolvido, pois as propostas de atividades eram projetadas em uma tela do laboratório.

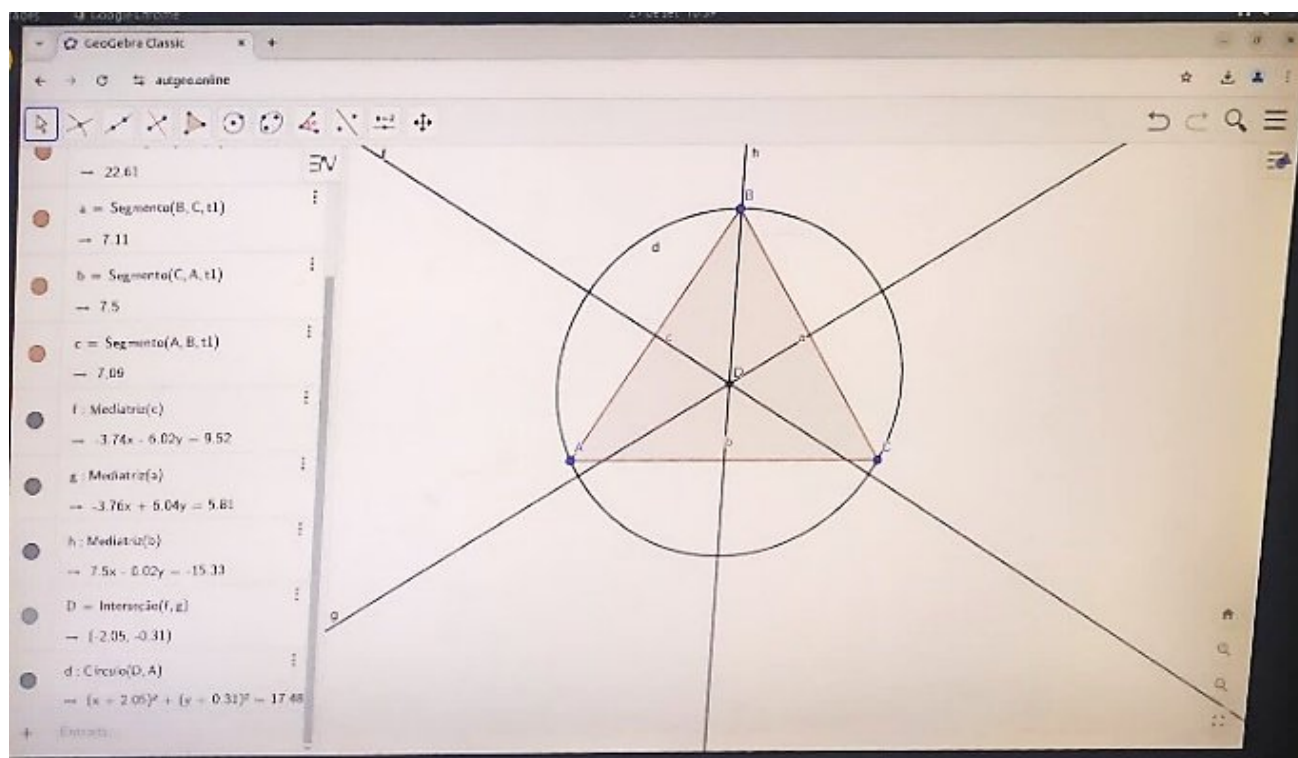


Figura 4: Um dos momentos do minicurso realizado no 7º Simpósio Nacional

Fonte: Acervo pessoal.

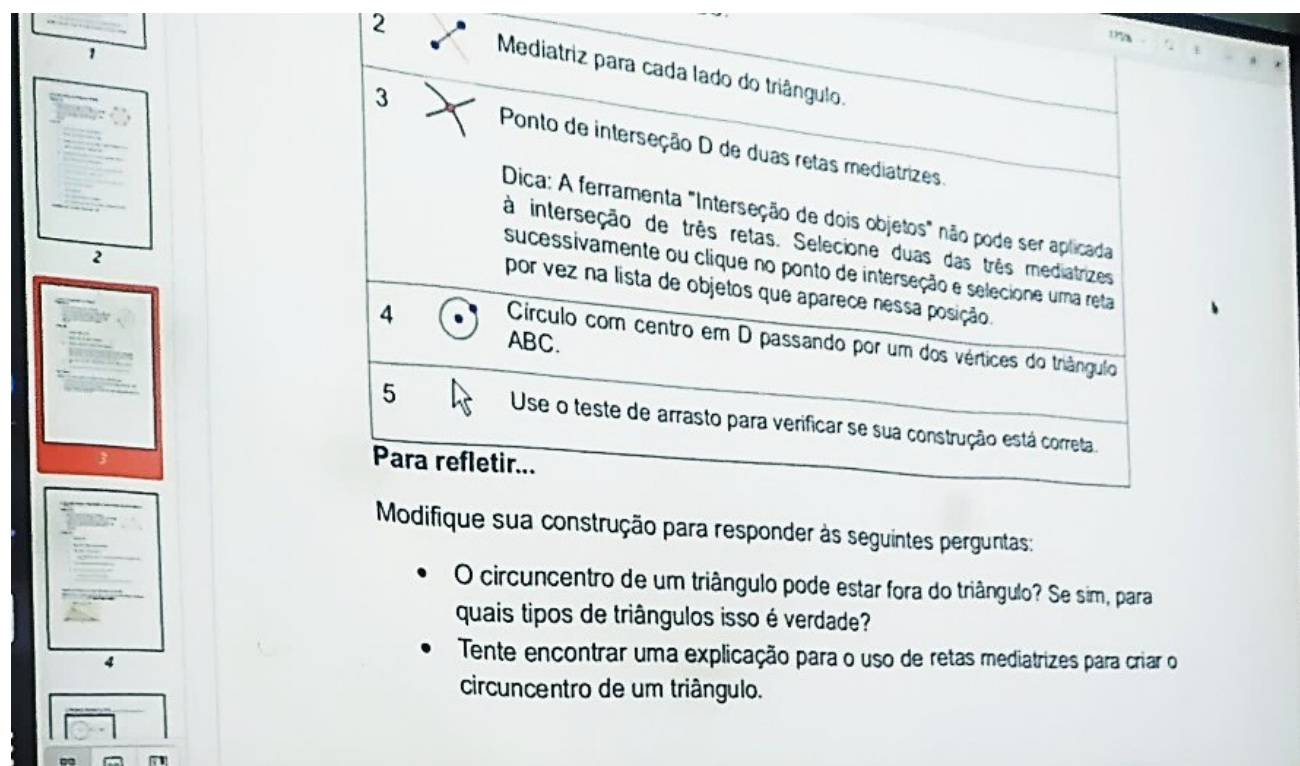


Figura 5: Outro momento do minicurso realizado na 7^o Simpósio Nacional

Fonte: Acervo pessoal.

4.1 Atividades do primeiro dia

No primeiro dia, foi apresentado o software GeoGebra, bem como seus menus e ferramentas geométricas básicas, além das construções geométricas fundamentais e suas propriedades, conforme descrito por Alencar (2012).

O objetivo foi explorar alguns conteúdos de Matemática trabalhados na Educação Básica em Geometria, tais como quadriláteros, triângulos, círculos, semelhança de figuras e transformações geométricas, por meio de propostas de atividades desenvolvidas pelos participantes e orientadas segundo as autoras Abar e Cotic (2014).

Os professores foram estimulados a apresentar propriedades fundamentais no contexto da Geometria e a formular conjecturas sobre as construções executadas.

As atividades foram desenvolvidas em três módulos seguidas por questões para reflexão e foram expostas por meio de um projetor.

Módulo 1

Nesse módulo, foram dados os primeiros passos na exploração do GeoGebra, com foco em algumas construções básicas da Geometria:

Houve uma etapa inicial com o objetivo de auxiliar os participantes a se familiarizarem com a tela e algumas opções de ferramentas do aplicativo GeoGebra. Em seguida, o foco foi capacitá-los a produzir figuras com formatação e legendas e algumas construções geométricas simples. E, por fim, a última parte

almejou capacitá-los a realizar duas construções fundamentais do desenho geométrico, nas quais foram apresentados os passos para a construção de um quadrado e um hexágono.

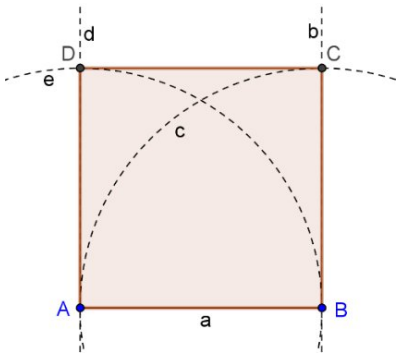
Abaixo são descritas duas primeiras construções, cujo objetivo foi auxiliar na familiarização dos participantes que ainda não conheciam as ferramentas e comandos do GeoGebra. Essas atividades compuseram o Módulo 1 do curso.

A primeira atividade consistiu na construção de um quadrado, sem utilizar a ferramenta Polígono Regular, por meio de instruções que guiavam seu desenvolvimento.

4.1.1 Construção do Quadrado

Preparações

- Abra um novo arquivo do GeoGebra.
- Oculte a Janela de Álgebra, o Campo de Entrada e os eixos de coordenadas (menu Exibir).
- Altere a configuração de rotulagem para “Apenas novos pontos” (menu Opções – Rotular).



Segue um conjunto de instruções, com os ícones de ferramentas do GeoGebra, que podem ser utilizadas para a construção do quadrado.

1		Segmento AB entre os pontos A e B.
2		Reta b perpendicular ao segmento AB através do ponto B.
3		Círculo c com centro em B passando por A.
4		Interseccione o círculo c com a linha perpendicular b para obter o ponto de interseção C.
5		Reta d perpendicular ao segmento AB através do ponto A.
6		Círculo e com centro em A passando por B.
7		Interseccione a linha perpendicular d com o círculo e para obter o ponto de interseção D.
8		Crie o polígono ABCD. Dica: não se esqueça de fechar o polígono clicando no ponto A após selecionar o ponto D.
9		Oculte os círculos e as linhas perpendiculares.
10		Use o teste de arrasto para verificar se sua construção está correta.

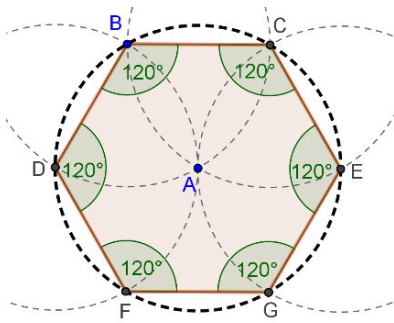
Com o teste do arrasto, indicado no Passo 10, o usuário pôde verificar que a construção realizada mantém determinadas propriedades, como a congruências dos lados e a perpendicularidade de lados adjacentes.

A próxima construção foi a de um hexágono regular, sem a utilização da ferramenta polígono regular.

4.1.2 Construção de um Hexágono Regular

Preparações

- Abra um novo arquivo do GeoGebra.
- Oculte a Janela de Álgebra, o Campo de Entrada e os eixos de coordenadas (menu Exibir).
- Altere a configuração de rotulagem para “Para todos os novos objetos” (menu Opções – Rotular).



Segue um conjunto de instruções, com os ícones de ferramentas do GeoGebra, que podem ser utilizadas para a construção do hexágono.

1		Círculo c com centro em A passando por B.
2		Círculo d com centro em B passando por A.
3		Interseção dos círculos c e d para obter os vértices do hexágono C e D.
4		Círculo e com centro em C passando por A.
5		Interseção do novo círculo e com o círculo c para obter o vértice E.
6		Círculo f com centro em E passando por A.
7		Interseção do novo círculo f com o círculo c para obter o vértice F.
8		Círculo g com centro em F passando por A.
9		Interseção do novo círculo g com o círculo c para obter o vértice G.
10		Desenhe o hexágono FGDBCE.
11		Oculte os círculos.
12		Exiba os ângulos internos do hexágono.
13		Use o teste de arrasto para verificar se sua construção está correta.

Módulo 2

Neste módulo, foram exploradas a construção e classificação de quadriláteros e triângulos, bem como algumas de suas propriedades. Ele foi dividido em quatro momentos.

O primeiro momento consistiu em uma sessão inicial com o objetivo de capacitá-los a classificar e construir quadriláteros. Foram propostas as seguintes atividades apresentadas no Quadro 2.

No segundo momento, foram apresentadas atividades visando à sua capacitação para classificar e construir triângulos e verificar a congruência de triângulos utilizando o GeoGebra. Para isso, deu-se início com a seguinte construção:

Quadro 2: Propostas de Atividades para a exploração de quadriláteros com o GeoGebra

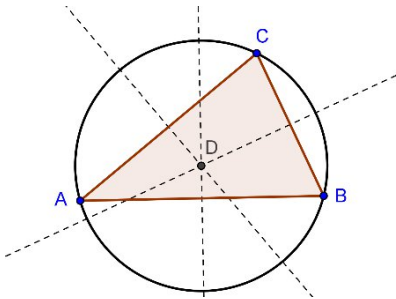
1. Dados dois pontos A e B como deve ser colocado um terceiro ponto C de modo que se pode construir um quadrado tendo A, B e C como vértices do mesmo? E um retângulo? E um trapézio isósceles?
2. Desenvolver as seguintes construções (a) dado um segmento AB, construir um quadrado em que uma de suas diagonais é o segmento AB. (b) construir vários quadriláteros: um quadrado, um retângulo, um losango, um paralelogramo, um trapézio e um trapezoide.
3. Construir um quadrilátero qualquer e obter uma classificação dos quadriláteros de acordo com suas diagonais (quadrado, retângulo, losango, romboide, paralelogramo, trapézio, trapezoide).

Fonte: Produção dos autores.

4.1.3 Círculo Circunscrito a um Triângulo

Preparações

- Abra um novo arquivo do GeoGebra.
- Oculte a Janela de Álgebra, o Campo de Entrada e os eixos de coordenadas (menu Exibir).
- Altere a configuração de rotulagem para “Para todos os novos objetos” (menu Opções – Rotular).



1		Triângulo arbitrário ABC.
2		Mediatriz para cada lado do triângulo.
3		Ponto de interseção D de duas retas mediatrizes. Dica: a ferramenta “Interseção de dois objetos” não pode ser aplicada à interseção de três retas. Selecione duas das três mediatrizes sucessivamente ou clique no ponto de interseção e selecione uma reta por vez na lista de objetos que aparece nessa posição.
4		Círculo com centro em D passando por um dos vértices do triângulo ABC.
5		Use o teste de arrasto para verificar se sua construção está correta.

Foram feitas as seguintes questões relacionadas à construção, que são apresentadas no Quadro 3.

Quadro 3: Questões relacionadas à exploração do circuncentro de um triângulo com o GeoGebra

Modifique sua construção para responder às seguintes perguntas: • O circuncentro de um triângulo pode estar fora do triângulo? Se sim, para quais tipos de triângulos isso é verdade? • Tente encontrar uma explicação para o uso de retas mediatrizes para criar o circuncentro de um triângulo.

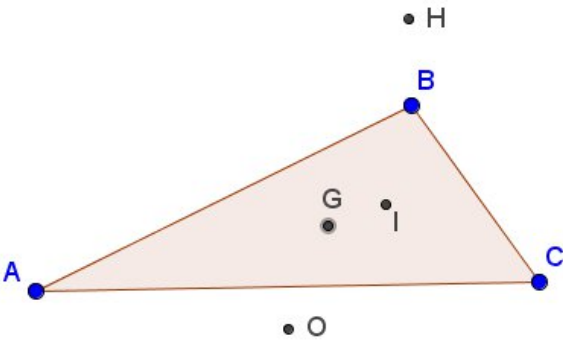
Fonte: Produção dos autores.

No terceiro momento, o objetivo foi capacitá-los a identificar e verificar a semelhança de triângulos, bem como a realizar duas construções básicas do desenho geométrico que são necessárias para as transformações geométricas. No último momento, buscou-se capacitá-los a identificar e construir alguns pontos notáveis de um triângulo, além de explorar propriedades da Geometria Plana. Em todos os momentos, foram utilizadas as ferramentas do GeoGebra para auxiliá-los na verificação de algumas conjecturas matemáticas plausíveis.

Segue a atividade na qual é apresentado o comando `CentroDoTriângulo` que permite construir os pontos notáveis de um triângulo qualquer.

Quadro 4: Propostas de atividades para a exploração do comando `CentroDoTriângulo` com o GeoGebra

Obter os quatro pontos notáveis de um triângulo (circuncentro O, baricentro G, ortocentro H e incentro I), escondendo na construção todos os objetos, exceto o triângulo ABC e os pontos notáveis, como aparece na seguinte imagem:



Index n	Center
1	Incenter
2	Centroid
3	Circumcenter
4	Orthocenter
5	Nine-point center

Usar os comandos

- `TriangleCenter(<Point>, <Point>, <Point>, <Number>)`
- `CentrodoTriângulo(<Ponto>, <Ponto>, <Ponto>, <Número>)`

Tentar responder as questões a seguir movimentando os vértices do triângulo:

1. Descobrir se os quatro pontos notáveis podem estar alinhados. Quais condições são necessárias para que isso aconteça?
2. Dos quatro pontos, há alguns que sempre estão no interior do triângulo independentemente do tipo de triângulo. Indicar quais são estes pontos.
3. É possível que alguns desses pontos notáveis possam estar localizados sobre um lado do triângulo? Descrever quando isso ocorre e em que condições.
4. Como um vértice pode coincidir alguns desses pontos notáveis? Indicar de que ponto ou pontos se tratam e descrever se há alguma relação com o tipo de triângulo construído.
5. Podem coincidir os quatro pontos notáveis? O que acontece, neste caso, com o triângulo?

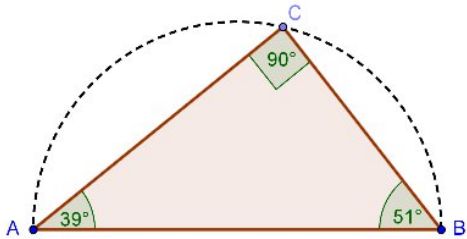
Fonte: Produção dos autores.

Outra atividade está relacionada à verificação do seguinte resultado: todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo.

4.1.4 Visualizar o Teorema “todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo”

Preparações

- Abra um novo arquivo do GeoGebra.
- Oculte a Janela de Álgebra, o Campo de Entrada e os eixos de coordenadas (menu Exibir).
- Altere a configuração de rotulagem para “Para todos os novos objetos” (menu Opções – Rotular).



1		Segmento AB.
2		Semicírculo através dos pontos A e B.
3		Novo ponto C no semicírculo. Dica: Verifique se o ponto C realmente está no arco arrastando-o com o mouse.
4		Crie o triângulo ABC em sentido anti-horário.
5		Crie os ângulos internos do triângulo ABC. Dica: Clique no meio do polígono.
6		Arraste o ponto C para verificar se sua construção está correta.

Tarefa

Tente elaborar uma prova gráfica para este teorema.

Dica. Na Figura 6 foi criado o ponto médio O do segmento BC e o raio OA como um segmento. Lembre-se: $180^\circ = \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC$.

A Figura 6 ilustra a demonstração do fato de que o ângulo $\angle BAC$ é reto ao se considerar uma circunferência de diâmetro BC e centro em O. O ponto A pertence à circunferência, e os segmentos AB e AC formam o triângulo ABC. Traçando o segmento AO, decomposmos o ângulo $\angle BAC$ em dois ângulos, α e β . Como $OA = OB = OC$ (raios da circunferência), os triângulos AOB e AOC são isósceles, o que implica que os ângulos na base em B e C também são, respectivamente, α e β . Assim, a soma dos ângulos internos do triângulo ABC pode ser escrita como $\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ$, donde se conclui que $\alpha + \beta = 90^\circ$. Portanto, $\angle BAC$ é um ângulo reto, como queríamos demonstrar.

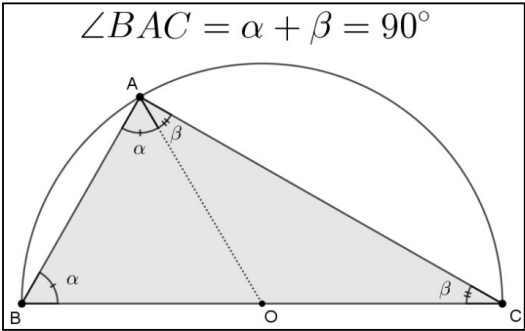


Figura 6: Auxílio para a construção da prova do teorema sobre triângulos inscritos em um semicírculo

Fonte: Produção dos autores.

Módulo 3

No terceiro módulo, foram explorados os círculos, com o objetivo de identificar e verificar algumas de suas propriedades e fazer construções de polígonos inscritos e circunscritos. Este módulo foi dividido em três momentos: no primeiro, desenvolveu-se uma parte inicial, cujo objetivo foi capacitá-los a identificar e verificar algumas propriedades dos círculos, assim como explorar seus componentes básicos. No segundo momento, foram trabalhadas algumas construções para identificar propriedades relacionadas às cordas, arcos e ângulos centrais de um círculo. Por fim, foram realizadas construções de polígonos inscritos e circunscritos em um círculo, com o objetivo de identificar suas propriedades.

A seguir, apresenta-se uma atividade trabalhada para o desenvolvimento do segundo momento.

4.1.5 Construção de Tangentes a um Círculo

Com a visualização da imagem abaixo tente representar as retas tangentes ao círculo que passam pelo ponto C.

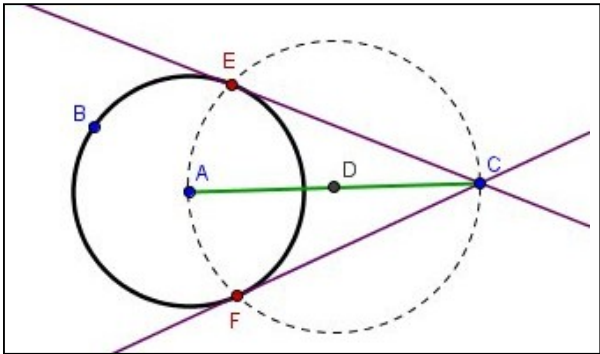


Figura 7: Figura fornecida no enunciado da atividade

Fonte: Produção dos autores.

Preparações

- Abra um novo arquivo do GeoGebra.
- Mostre a Janela de Álgebra e o Campo de Entrada, bem como os eixos de coordenadas (menu Exibir).

1	$A = (0, 0)$	Crie o ponto A. Dica: certifique-se de fechar o parêntese.
2	$(3, 0)$	Crie o ponto B. Dica: se você não especificar um nome, os objetos serão nomeados em ordem alfabética.
3	$c = \text{Círculo}(A, B)$	Círculo com centro em A passando por B. Dica: círculo é um objeto dependente.
4	$(5,4)$	Crie o ponto C fora da circunferência c.

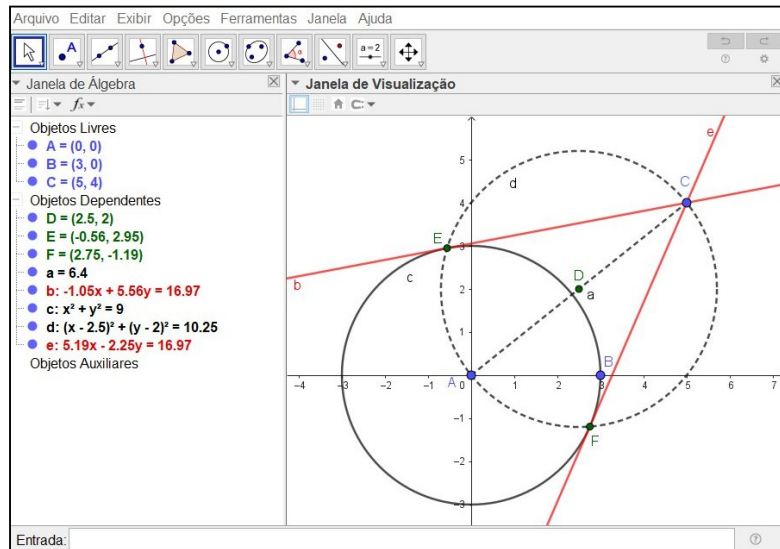


Figura 8: Proposta de construção apresentada aos participantes

Fonte: Produção dos autores.

Nota: O GeoGebra distingue entre objetos livres e dependentes. Enquanto objetos livres podem ser modificados diretamente usando o mouse ou o teclado, objetos dependentes se adaptam às mudanças de seus objetos parentais. Portanto, é irrelevante de que forma (mouse ou teclado) um objeto foi criado inicialmente!

Nesta seção, foram exibidas algumas atividades desenvolvidas no primeiro dia do minicurso voltado à integração do *software* GeoGebra no ensino de Geometria. Inicialmente, foi exposta a estrutura do minicurso, detalhando os três módulos iniciais:

1. O Módulo 1 abordou a introdução ao GeoGebra, incluindo familiarização com suas ferramentas e a realização de construções básicas, tais como quadrados e hexágonos, com ênfase na verificação de propriedades geométricas;
2. No Módulo 2, os participantes foram orientados na classificação e construção de quadriláteros e triângulos, analisando propriedades como congruência, semelhança e pontos notáveis dos triângulos;
3. O Módulo 3 tratou dos círculos, explorando suas propriedades e a construção de polígonos inscritos e circunscritos.

Foram propostas reflexões sobre os conceitos geométricos por meio de questões e atividades práticas. As ferramentas do GeoGebra desempenharam um papel central no desenvolvimento das atividades desse primeiro dia, incentivando o raciocínio geométrico e a formulação de conjecturas.

4.2 Atividades do segundo dia

No segundo dia, foi possível investigar algumas ferramentas algébricas básicas do GeoGebra com a utilização da Janela CAS; sistemas de coordenadas; família de funções e estudo dos polinômios;

conteúdos iniciais da trigonometria e alguns teoremas; lugar geométrico; áreas e aplicações Geométricas e Algébricas.

Os participantes verificaram que equações e coordenadas poderiam ser inseridas diretamente na área de comando e a possibilidade de exploração de variáveis vinculadas a números, vetores e pontos. A dupla apresentação geométrica e algébrica dos objetos estudados no GeoGebra possibilitou o trâmite natural da geometria sintética (baseada em propriedades geométricas) para a geometria analítica (baseada em equações algébricas).

Com relação ao GeoGebra Discovery, foram explorados alguns comandos da versão experimental, como *Relation* e *Discover*.

As atividades foram estruturadas em três módulos, cada um seguido de questões para reflexão, sendo expostas em uma tela por meio de um projetor:

Módulo 1

Neste módulo, por meio de resultados envolvendo objetos matemáticos, foi feita uma introdução ao conceito de lugar geométrico, explorando as facilidades do programa GeoGebra para a sua construção.

Um Lugar Geométrico é um conjunto de infinitos pontos em um plano que satisfazem a uma ou mais propriedades. Construir um lugar geométrico consiste em definir posições de elementos geométricos a partir de determinada propriedade.

1. Obter o lugar geométrico descrito pelo ponto médio D de uma corda AB quando o ponto B se movimentar ao longo de uma circunferência.

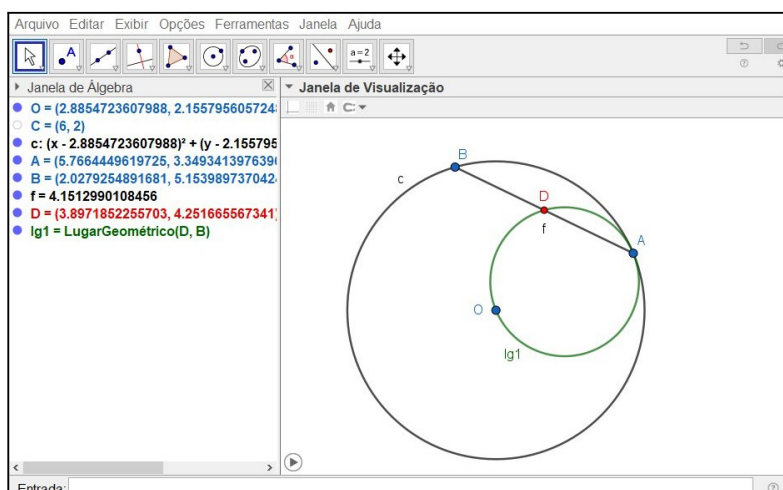


Figura 9: Construção do lugar geométrico indicado na proposta 1

Fonte: Produção dos autores.

2. Considere o ponto A de uma circunferência e um ponto exterior B. Seja P o ponto de interseção da reta tangente à circunferência no ponto A e da reta perpendicular à tangente anterior construída pelo ponto B. Encontre o lugar geométrico do ponto P quando A percorre a circunferência.

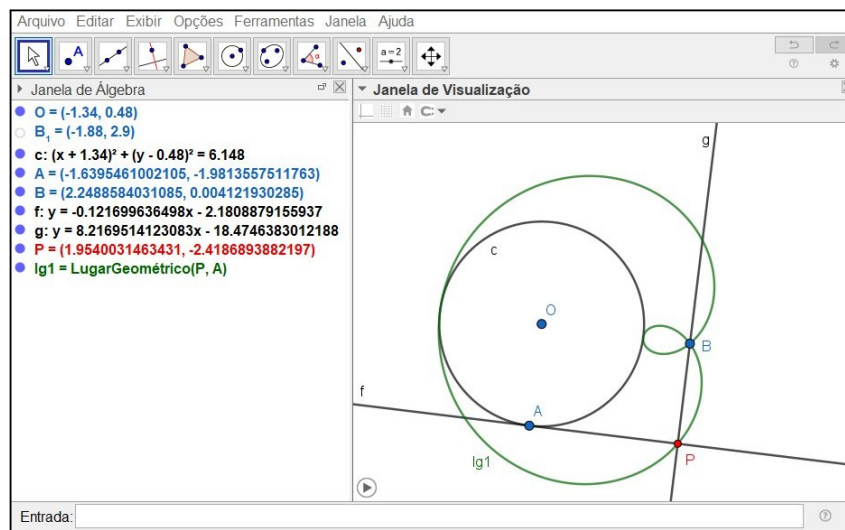


Figura 10: Construção do lugar geométrico indicado na proposta 2

Fonte: Produção dos autores.

3. Construa curvas chamadas epicloides utilizando controles deslizantes. Para essas curvas, siga os seguintes passos:

- Construa uma circunferência c_1 , escondendo os pontos usados para sua construção. Obtenha sobre ela um ponto C; em seguida, construa uma nova circunferência c_2 com centro em C e raio fixo. Sobre esta nova circunferência c_2 obtenha um ponto D.
- Defina um controle deslizante entre 2 e 10 com incremento de uma unidade.
- Ative as animações automáticas dos pontos C e D e em propriedades do ponto D, acesse a aba Álgebra e escreva o valor do controle deslizante como velocidade de animação do ponto D.
- Observe o que acontece com o ponto D.
- Mude a cor do ponto D e ative seu rastro.
- E, finalmente, verifique que figuras são obtidas movendo o controle deslizante que define a velocidade da animação do ponto D.

Fonte: Produção dos autores.

Na Figura 11, são apresentadas algumas curvas denominadas epicloides, com os seguintes valores de controle deslizante, $n = 2$ e $n = 8$, respectivamente.

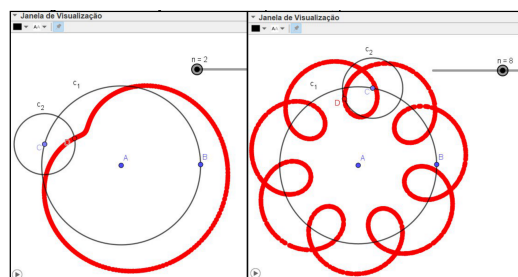


Figura 11: Construção das curvas epicloides, para valores $n = 2$ e $n = 6$

Fonte: Produção dos autores.

Módulo 2

Foram exploradas neste módulo possibilidades de trabalhar álgebra no GeoGebra, com auxílio da Janela CAS, estabelecendo definições, propriedades e explorando os diferentes registros de representação (linguagens: natural, simbólica e gráfica).

A primeira atividade foi a seguinte: Resolver a equação $2x = \sin(x - 1)$.

Ao utilizar o comando Soluções, da Janela CAS, não é apresentada uma solução exata da equação. Na Figura 12, tem-se o resultado da Janela CAS e a representação gráfica das funções reais $f(x) = 2x$ e $g(x) = \sin(x - 1)$, que são definidas por meio das duas funções que correspondem a cada um dos membros da equação. Com a representação gráfica das funções é possível verificar se há uma solução. Nota-se que há uma raiz no intervalo $[-1, 0]$ que pode ser obtida com a ajuda do comando CalcularSoluçõesNumericamente, e configurando o GeoGebra para apresentar 15 casas decimais para uma aproximação da solução de $2x = \sin(x - 1)$.

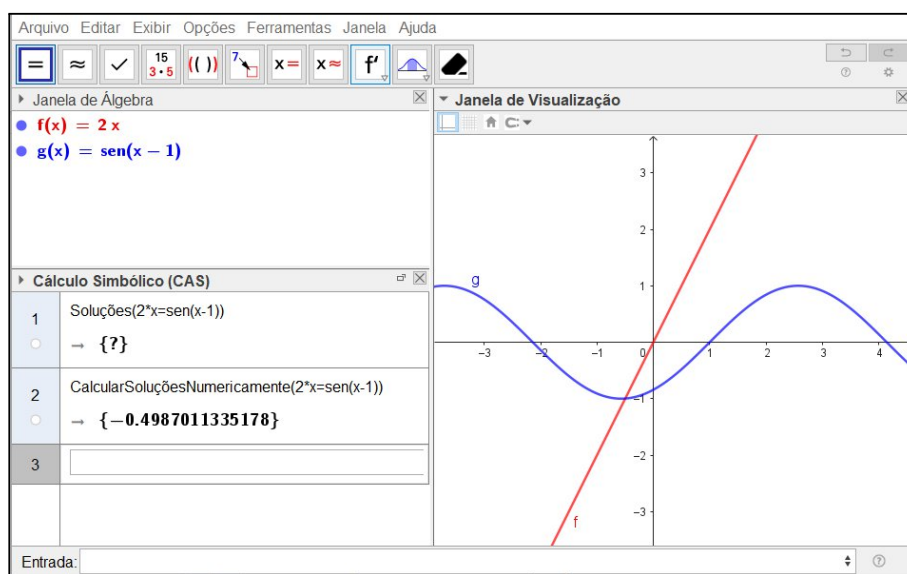


Figura 12: Explorando a janela CAS

Fonte: Produção dos autores.

A próxima atividade está apresentada no Quadro 5 e nela se utiliza o comando *Resolver*(<Equação em x>), no qual o parâmetro é uma equação cuja variável é a letra x. Se for solicitado que o GeoGebra resolva uma equação em que variável não seja x, é necessário utilizar o comando *Resolver*(<Equação>, <Variável>), no qual o parâmetro <Variável> é indicado pelo usuário.

Na próxima atividade (Quadro 6), pode-se verificar a exploração dos parâmetros de um polinômio de grau 2, dado na forma $ax^2 + bx + c$.

Quadro 5: Proposta para a resolução de uma equação no GeoGebra

Resolver, com relação a cada uma das variáveis, a equação: $8x^2 - 6 \cdot m \cdot x + m^2 = 0$.
Vamos analisar a equação sob duas perspectivas complementares: primeiro, considerando m como parâmetro e x como incógnita, isto é, uma equação quadrática em x ; em seguida, reescrevendo-a como uma equação quadrática em m , tomando x como parâmetro fixo. Essa dupla abordagem permite explorar diferentes interpretações algébricas e condições sobre as soluções.
Para resolver a equação para cada uma das variáveis, basta escrever a equação indicando a variável em relação à qual se deseja obter a solução, como mostrado na imagem a seguir:

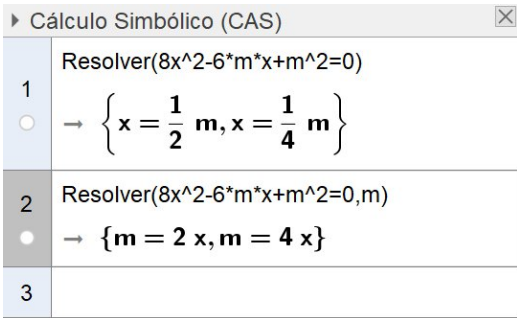


Figura 13: Resolvendo equações considerando cada uma das incógnitas da equação $8x^2 - 6 \cdot m \cdot x + m^2 = 0$

Fonte: Produção dos autores.

Quadro 6: Explorando Parâmetros de um polinômio de grau 2

Preparações

- Abra um novo arquivo do GeoGebra.
- Mostre a Janela de Álgebra e o Campo de Entrada, bem como os eixos de coordenadas (menu Exibir).

Instruções

1. Entrada do Polinômio: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
2. Na Janela de Álgebra, clique com o botão direito em cada um dos parâmetros e selecione “Exibir Objeto”, então, os controles deslizantes serão exibidos na Janela de Visualização.
3. Altere o valor do parâmetro a movendo o ponto no controle deslizante com o mouse. Como isso influencia o gráfico do polinômio? O que acontece com o gráfico quando o valor do parâmetro é
 - (a) maior que 1,
 - (b) entre 0 e 1, ou
 - (c) negativo?Relate suas observações.
4. Altere o valor do parâmetro b . Como isso influencia o gráfico do polinômio?
5. Altere o valor do parâmetro c . Como isso influencia o gráfico do polinômio?

Fonte: Produção dos autores.

Nesta seção, apresenta-se uma parte das atividades realizadas no minicurso com o uso do GeoGebra para explorar conceitos matemáticos. Neste segundo dia de atividade, foram exploradas ferramentas

algébricas básicas, sistemas de coordenadas, famílias de funções, estudo de polinômios, trigonometria inicial, teoremas e construções geométricas. A dupla representação geométrica e algébrica foi destacada, facilitando a transição entre a Geometria e a Álgebra.

Módulo 3

Neste módulo são apresentadas atividades nas quais foram utilizados comandos exclusivos do GeoGebra Discovery¹.

Algumas das atividades desenvolvidas na oficina utilizaram como referência, em sua respectiva conclusão, a propriedade sobre o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo. Muniz Neto (2013) enuncia a proposição que relaciona uma base média relativa a um dos lados de um triângulo da seguinte forma:

Seja ABC um triângulo qualquer. Se MN é a base média de ABC relativa à BC, então $MN \parallel BC$. Reciprocamente, se pelo ponto médio M do lado AB traçarmos a paralela ao lado BC, então tal reta intersecta o lado AC em seu ponto médio N. Ademais, em um qualquer dos casos acima, tem-se: $MN = \frac{1}{2}BC$.

A primeira atividade, apresentada no Quadro 7, utiliza o comando Discover do GeoGebra Discovery. Na Figura 14, apresenta-se a construção, e na Figura 15, exibe-se o resultado da aplicação do comando *Discover(G)*, incluindo os elementos adicionais inseridos pelo GeoGebra Discovery.

Quadro 7: Enunciado da primeira atividade utilizando o GeoGebra Discovery

Atividade 1. Explorando o comando Discover

Seja ABCD um quadrilátero e E, F, G e H os pontos médios dos segmentos AB, AC, CD e BD, respectivamente. Prove que EFGH é um paralelogramo. Na entrada digite *Discover(G)* e identifique as propriedades que validam a prova.

Fonte: Produção dos autores.

Com os elementos adicionais apresentados na Figura 15, é possível verificar que o segmento GH é paralelo ao segmento BC, conforme o Teorema da Base Média no triângulo BCD. De forma análoga, é possível verificar que o segmento EF também é paralelo ao segmento BC, pelo Teorema da Base Média aplicado ao triângulo BAC. Logo, é possível concluir que GH é paralelo ao segmento EF, pelo fato de os dois serem paralelos a BC. Logo, pela dupla aplicação do teorema da base média nos triângulos considerados, obtemos que $EF \parallel BC$ e $GH \parallel BC$, donde $EF \parallel GH$. Além disso, como ambos os segmentos correspondem à metade de BC, segue que EF é congruente a GH. Portanto, o quadrilátero EFGH possui um par de lados opostos paralelos e congruentes, o que implica que é um paralelogramo. Adicionalmente, o GeoGebra Discovery possibilita explorar uma propriedade do paralelogramo, que diz respeito a congruência dos segmentos opostos. A congruência entre os dois segmentos decorre do Teorema da Base Média, pois as medidas dos segmentos são iguais a $EF = GH = \frac{1}{2}BC$. De forma análoga, é possível concluir que os segmentos EF e GH são paralelos e congruentes. Dessa forma, o conjunto de ART possibilita explorar a definição de um paralelogramo e uma de suas propriedades (Souza, 2024).

¹ Disponível em: <http://autgeo.online/geogebra-discovery/>.

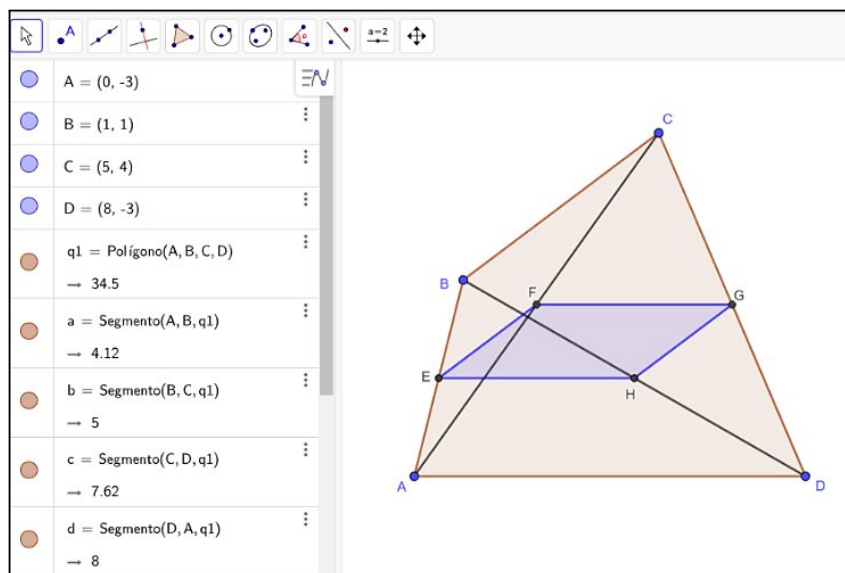


Figura 14: Construção da Atividade 1, sem os resultados do comando Discover

Fonte: Produção dos autores.

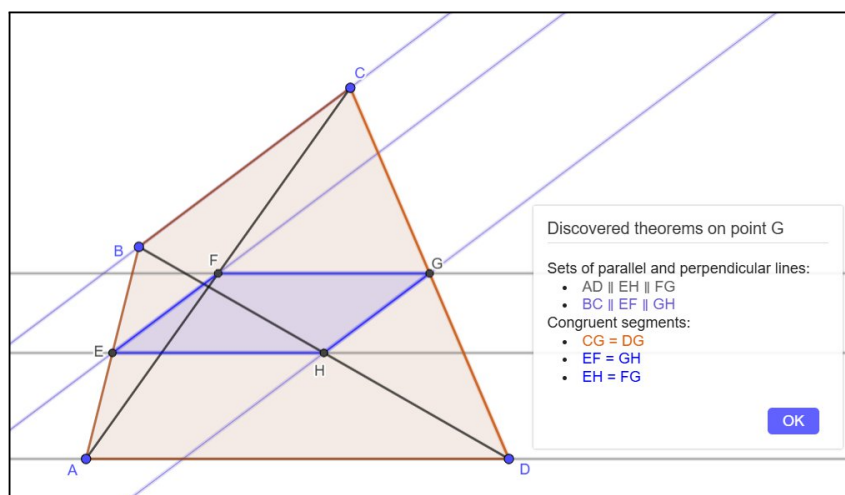


Figura 15: Construção da Atividade 1, com os resultados do comando Discover

Fonte: Produção dos autores.

No Quadro 8, expõe-se o enunciado da segunda atividade.

Quadro 8: Enunciado da segunda atividade utilizando o GeoGebra Discovery

Atividade 2. Construa um quadrilátero qualquer ABCD e os pontos médios PQRS dos respectivos lados. Na entrada digite *Discover(P)*. Leia as informações disponibilizadas na janela aberta. O que se pode afirmar sobre o quadrilátero PQRS? Que informações na janela aberta permitem comprovar sua afirmação?

Fonte: Produção dos autores.

Na Figura 16, apresenta-se a construção da Atividade 2 e na Figura 17 é o resultado da aplicação do comando *Discover(P)*, com os elementos adicionais inseridos pelo GeoGebra Discovery.

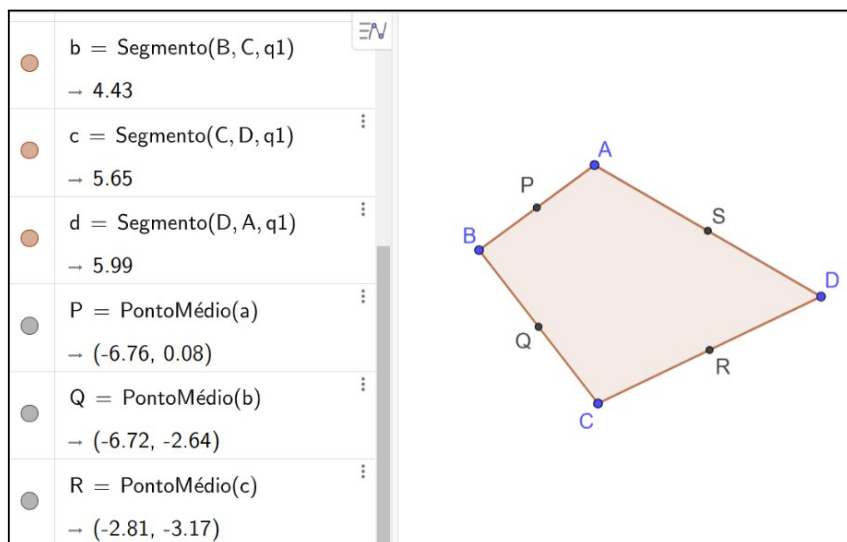


Figura 16: Construção da Atividade 2, sem os resultados do comando Discover

Fonte: Produção dos autores.

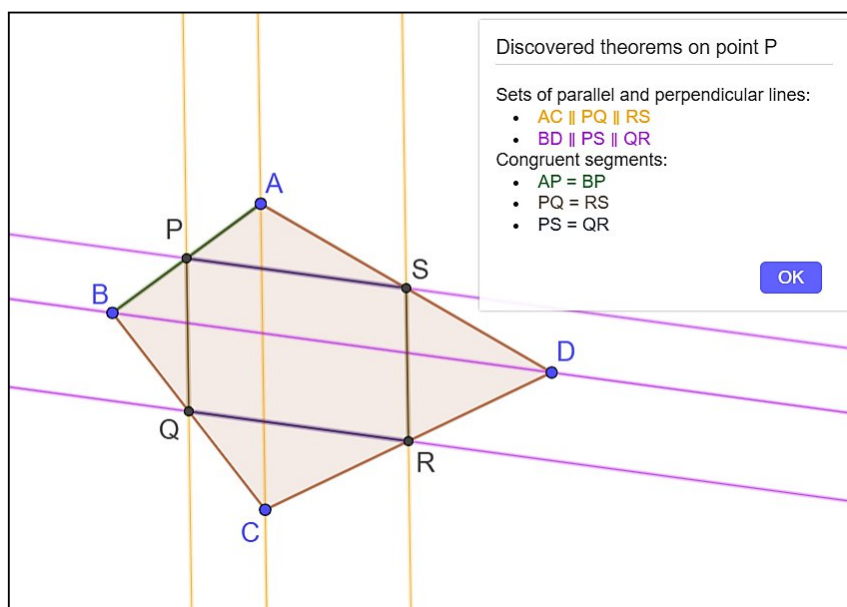


Figura 17: Construção da Atividade 2, com os resultados do comando Discover

Fonte: Produção dos autores.

Com os elementos adicionais apresentados na Figura 17, é possível verificar que o segmento PQ é paralelo ao segmento AC , conforme o Teorema da Base Média no triângulo BAC . Analogamente, o segmento SR é paralelo a AC , utilizando o Teorema da Base Média no triângulo DAC . Como os segmentos PQ e SR são paralelos a AC , conclui-se que PQ é paralelo a SR . O mesmo raciocínio pode ser estabelecido com os segmentos PS e QR . Logo, $PQRS$ é um paralelogramo. A Janela de Resposta do GeoGebra Discovery também apresentou informações relativas à congruência de segmentos, indicando que possuem a mesma medida. Assim, ao relacionar o Teorema da Base Média de um triângulo com as informações fornecidas pelo software, pode-se afirmar que $PQ = SR = \frac{1}{2}AC$. A mesma constatação pode

ser encontrada para o outro par de segmentos. Portanto, é possível concluir que os pares de segmentos PQ e SR; PS e QR são paralelos e congruentes.

A terceira atividade é apresenta no Quadro 9.

Quadro 9: Enunciado da terceira atividade utilizando o GeoGebra Discovery

Atividade 3. Construa um triângulo qualquer e as medianas dos respectivos lados. Construa dois segmentos, um que liga um dos vértices e o ponto de interseção das medianas e o outro a respectiva mediana. O que se pode afirmar sobre as propriedades entre esses segmentos? Que informações na janela aberta permitem comprovar sua afirmação? Para isso utilize o comando *Relation*(<Objeto>, <Objeto>).

Fonte: Produção dos autores.

Na Figura 18, é apresentado o resultado mostrando a relação entre o segmento que une um dos vértices e o ponto de interseção das medianas (denotado por i) e a respectiva mediana (denotada por f) na qual esse segmento está contido. Nesse caso, foi utilizado o comando *Relation* da seguinte forma: *Relation*(i, f). O comando *Relation* poderia ser utilizado da seguinte forma: *Relation*(f, i), apresentado a seguir na Figura 19.

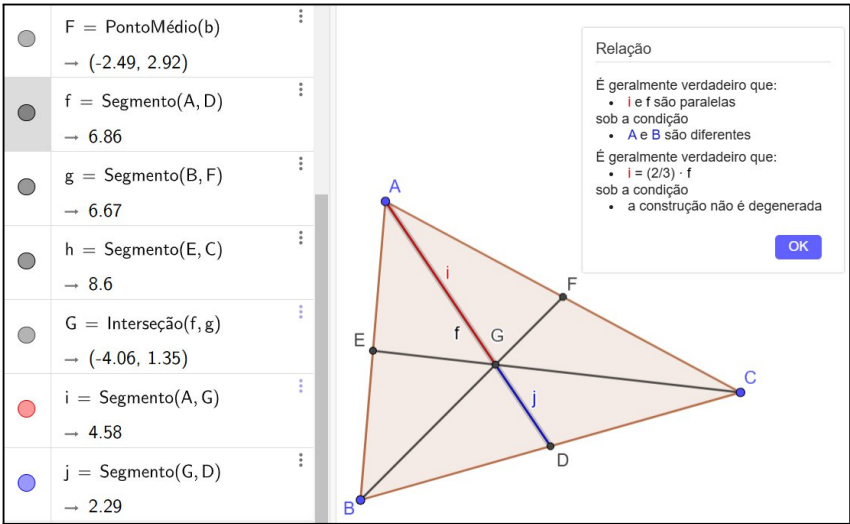


Figura 18: Construção da Atividade 3, com os resultados do comando *Relation*

Fonte: Produção dos autores.

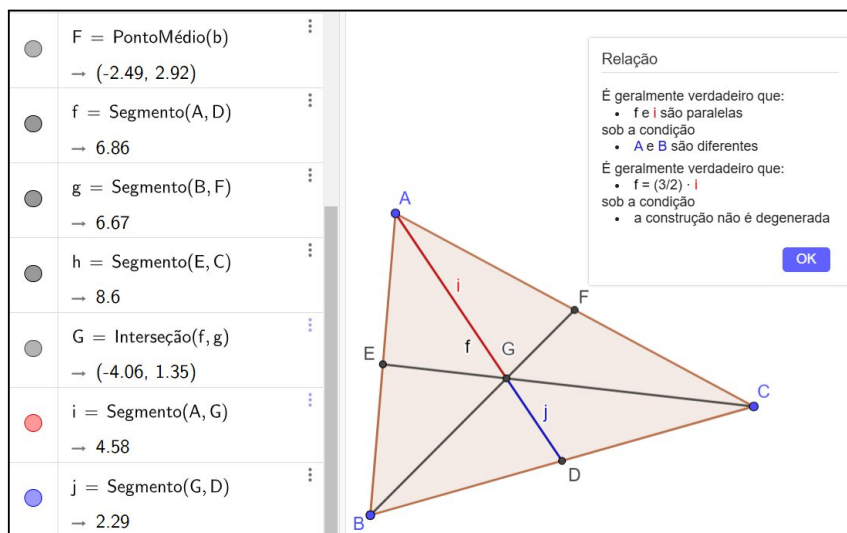


Figura 19: Construção da Atividade 3, com os resultados do comando *Relation*(f, i)

Fonte: Produção dos autores.

Para a quarta atividade foi proposta a recíproca do teorema: em um triângulo, o segmento que une aos pontos médios de quaisquer dois lados é paralelo ao terceiro lado e metade da medida de seu comprimento e enunciada como segue:

Quadro 10: Enunciado da quarta atividade utilizando o GeoGebra Discovery

Atividade 4. Se um segmento de reta é paralelo a um lado de um triângulo e tem a metade do comprimento do lado, então esse segmento une os pontos médios dos outros dois lados do triângulo.

Fonte: Produção dos autores.

A proposta para o desenvolvimento da Atividade 4 foi explorar o comando *LocusEquation* ou *EquaçãoDoLugarGeométrico*. Considerou-se no triângulo ABC, o ponto médio D e outro ponto qualquer (E) em qualquer um dos outros lados do triângulo (Figura 20). Tem-se a seguinte pergunta: onde deve estar esse ponto (E) para que propriedade seja válida? Para ser respondida utilizou-se o comando: *EquaçãoDoLugarGeométrico*(<Expressão Booleana>, <Ponto Móvel>) e os seguintes passos:

- construir o triângulo ABC criando automaticamente segmentos a, b e c.
- usar a ferramenta Ponto Médio e criar o ponto médio D do segmento a.
- colocar um ponto arbitrário E sobre o segmento b, com a ferramenta Ponto.
- criar o segmento f que une D e E, com a ferramenta Segmento (Figura 20).
- No GeoGebra Discovery, pode-se verificar qual é a exigência de E para ter o segmento f paralelo ao segmento c, para isso utiliza-se o comando *EquaçãoDoLugarGeométrico*(<Expressão Booleana>, <Movendo Ponto>), em que a expressão booleana será $c \parallel f$ (c paralelo a f), e o ponto móvel é o ponto E que está sobre o segmento b. Para isso, deverá ser digitado o seguinte comando no Campo de Entrada do GeoGebra:

$$\text{EquaçãoDoLugarGeométrico}(f \parallel c, E)$$

- f. A curva implícita *eq1*, destacada na Figura 21, será computada e plotada, e parece ser um único ponto.
- g. Arraste os objetos livres e conjecture que E deve ser o ponto médio de b.
- h. Para confirmar essa conjectura, crie o ponto médio F do segmento b sobre a marcação obtida *eq1* (Figura 22).
- i. Faça os objetos E, f e *eq1* invisíveis, escondendo-os, com a ferramenta Exibir/ Esconder Objetos.
- j. Construa o segmento g por D e F.
- k. Use o comando *Relation*(⟨Objeto⟩, ⟨Objeto⟩) para comparar c e g, digitando no Campo de Entrada *Relation*(c, g).

Em seguida, aparecerá uma janela com informações indicando que c e g são paralelos e que isso foi verificado de forma numérica (Figura 23). Quando se clica na palavra “Mais...”, na janela pop-up, o GeoGebra Discovery fornece uma resposta simbólica indicando que os segmentos são paralelos e que existe uma relação entre as medidas de c e g, ou seja, que $c = 2g$. Essas informações são apresentadas na Figura 24.

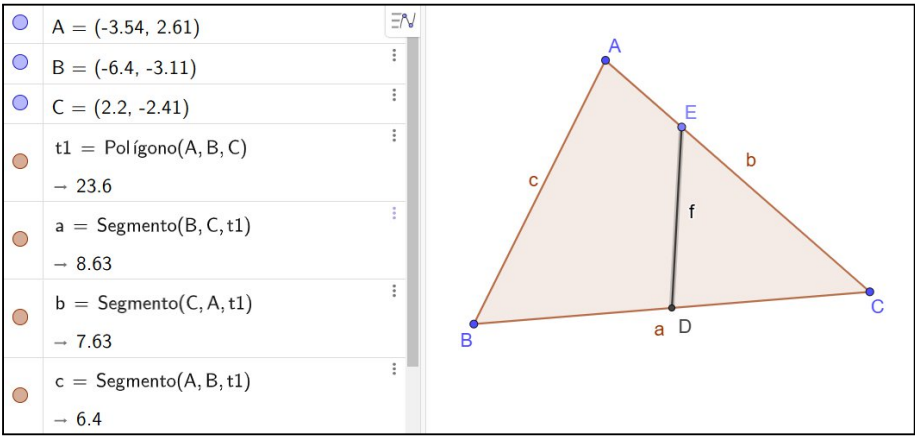


Figura 20: Primeira parte da construção da Atividade 4

Fonte: Produção dos autores.

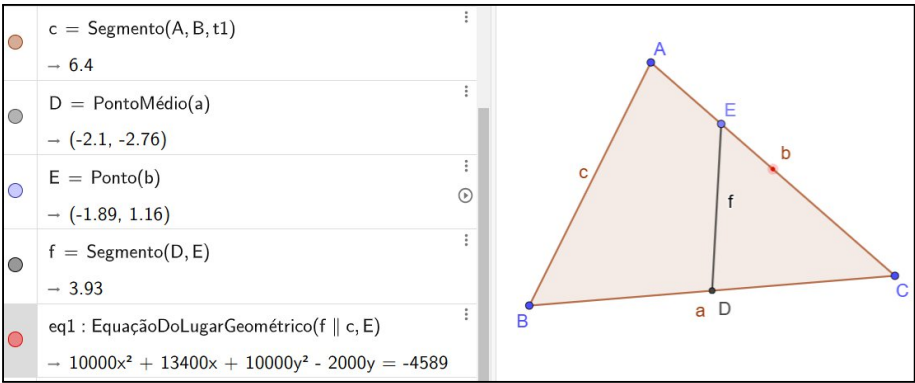


Figura 21: Segunda parte da construção da Atividade 4

Fonte: Produção dos autores.

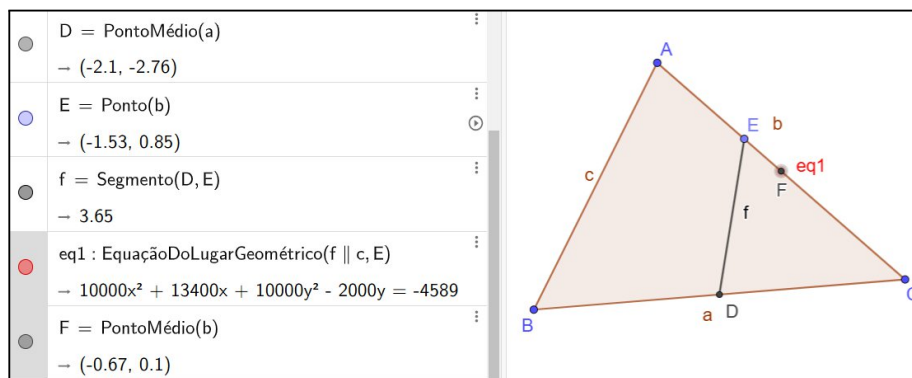


Figura 22: Construção do ponto médio F sobre o lugar geométrico *eq1* criado

Fonte: Produção dos autores.

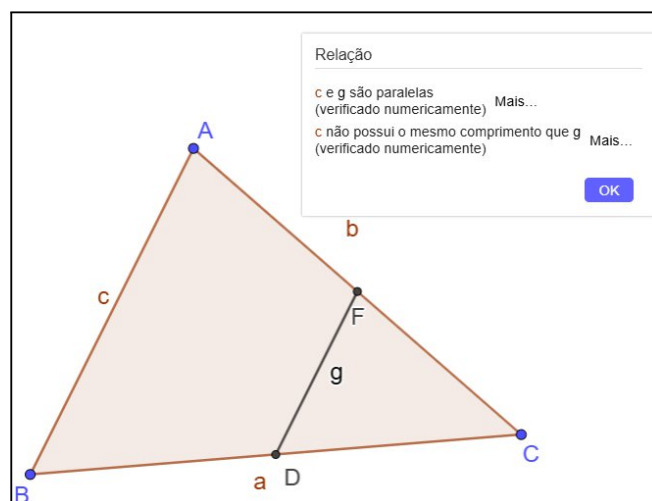


Figura 23: Utilizando o comando relação *Relation(c, g)* na Atividade 4

Fonte: Produção dos autores.

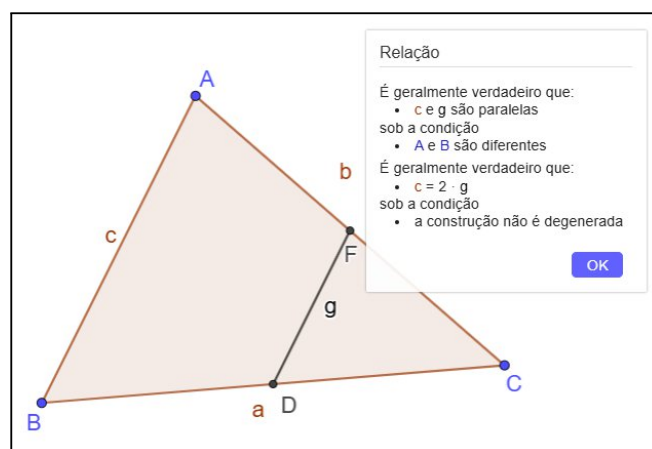


Figura 24: Resultado final da Atividade 4

Fonte: Produção dos autores.

Na última atividade, foi novamente empregado o comando *EquaçãoDoLugarGeométrico*. Cabe ressaltar que esse comando permite, por meio das ART, a verificação de novos teoremas, mediante hipóteses complementares que sustentam uma tese, além de calcular a equação implícita de um ponto a partir de uma propriedade válida. O enunciado da Atividade 5, encontra-se no Quadro 11.

Quadro 11: Enunciado da quinta atividade utilizando o GeoGebra Discovery

Atividade 5. Sejam os pontos A e B e um terceiro ponto C no círculo c com centro em A e pelo ponto B. Considere o ortocentro D do triângulo ABC. Em seguida, utilize o comando *EquaçãoDoLugarGeométrico*[D,C].

Fonte: Produção dos autores.

Esse comando, na Atividade 5, resulta em uma curva estrofoide mais uma reta – aqui a reta corresponde a um caso degenerado do triângulo quando $B = C$, mas a reta não é na verdade uma parte do locus geométrico. Na Figura 25, é apresentado o resultado.

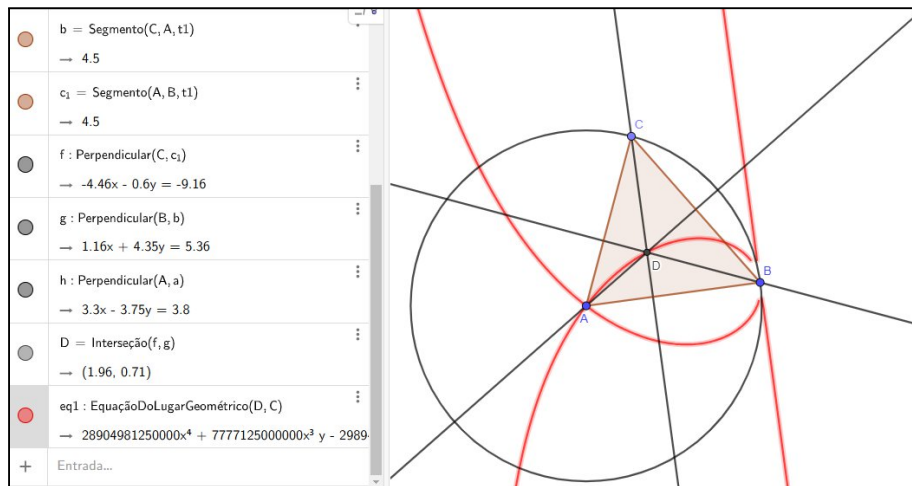


Figura 25: Lugar Geométrico a partir da atividade 5

Fonte: Produção dos autores.

Segundo MacTutor (s.d.), a curva estrofoide foi descrita pela primeira vez no trabalho de Isaac Barrow, em 1670. No entanto, Evangelista Torricelli já havia mencionado essa curva em suas cartas por volta de 1645, e Gilles de Roberval a descobriu como o lugar geométrico do foco da cônica obtida quando um plano que corta um cone gira em torno da tangente no vértice do cone. O nome “estrofoide” (que significa “uma cinta com uma torção”) foi proposto por Montuucci, em 1846.

Neste Módulo 3, do segundo dia do minicurso, o GeoGebra Discovery foi empregado para desenvolver atividades que exploram propriedades geométricas por meio de comandos específicos dessa versão experimental. As tarefas incluíram a prova que determinados quadriláteros são paralelogramos, investigando paralelismo e congruência entre segmentos recorrendo ao Teorema da Base Média de um triângulo, bem como explorar propriedades de medianas e lugares geométricos em triângulos. Além disso, o software possibilitou a aplicação do comando *EquaçãoDoLugarGeométrico* para determinar uma curva estrofoide como lugar geométrico relacionado a ortocentros. Essas atividades evidenciam o potencial do software

para facilitar a visualização, validação e descoberta de teoremas geométricos, promovendo uma abordagem investigativa e dinâmica no ensino da Matemática.

Considerações finais



Esse e-book apresentou atividades desenvolvidas durante o minicurso realizado no 7º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática promovido pela ANPMat, cujo principal objetivo foi capacitar os professores aprimorando suas habilidades para ensinar, com qualidade, conteúdos de Geometria e Álgebra, incorporando novos recursos tecnológicos à sua prática docente por meio da utilização do GeoGebra e do GeoGebra Discovery.

O ensino de Geometria Plana é um dos pilares da Educação Matemática, sendo seu entendimento profundo essencial para o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos. No entanto, a abordagem desse conteúdo pode ser significativamente aprimorada com o uso de tecnologias digitais.

A utilização do GeoGebra e do GeoGebra Discovery, que incorpora Ferramentas de Raciocínio Automático, conhecidas como *Automated Reasoning Tools* (ART), permite que professores e alunos explorem propriedades geométricas de maneira profunda, visualizando relações e verificando propriedades diretamente nos softwares, possibilitando verificar conjecturas e realizar provas automáticas em construções geométricas, tornando o processo de ensino mais interativo e dinâmico.

No que tange ao minicurso tratado neste trabalho, os participantes realizaram atividades práticas com o software, desenvolvendo construções geométricas e utilizando os comandos de raciocínio automatizado para verificar propriedades e teoremas, mobilizando as dimensões de instrumentação e instrumentalização da Gênese Instrumental de Rabardel (1995).

Entre os desafios enfrentados, destacam-se as dificuldades iniciais na utilização dos comandos do GeoGebra e do GeoGebra Discovery e a necessidade de maior tempo de prática para dominar o software. No entanto, os professores relataram que o uso das ART facilitou a compreensão de conceitos geométricos e trouxe novas possibilidades para suas práticas docentes.

O uso do GeoGebra Discovery no ensino da Geometria Plana traz diversas implicações didáticas, pois permite que os alunos explorem propriedades geométricas de forma interativa, visualizando relações que seriam difíceis de perceber em construções estáticas.

Os resultados do minicurso evidenciaram que o uso do GeoGebra Discovery e de ferramentas digitais similares devem ser incentivados em contextos educacionais, como uma forma de enriquecer o ensino da Matemática e promover o desenvolvimento de competências essenciais para o século XXI.

Como indicado por Estrela (1990), as ações de intervenção ocorridas tiveram como objetivo aprofundar o estudo, estruturando-o como um todo lógico, consistente e coerente.

Referências



- ABAR, C. A. A. P. Educação Matemática na Era Digital: Revista Iberoamericana de Educación Matemática. **Revista Unión**, San Cristobal de La Laguna, v. 7, n. 27, p. 14–28, 2011.
- ABAR, C. A. A. P.; COTIC, N. S. **GeoGebra: na produção do conhecimento matemático**. 1. ed. São Paulo: Iglu Editora Ltda, 2014.
- ALENCAR, S. V. d. **Educação Matemática: Oficinas Didáticas com GeoGebra**. 2012. Disponível em: https://www4.pucsp.br/tecmem/sergio_alencar.pdf. Acesso em: 1 fev. 2025.
- BOTANA, F. *et al.* Hacia un autómata géometra. **La Gaceta de la RSME**, v. 23, p. 343–371, 2020.
- ESTRELA, A. **Teoria e Prática de Observação de Classes**: uma estratégia de formação de professores. Lisboa: Instituto Nacional de Investigação Científica, 1990.
- HOHENWARTER, M.; PREINER, J. **Dynamic Mathematics with GeoGebra**. Mathematical Association of America. 2007. Disponível em: <https://www.maa.org/press/periodicals/loci/joma/dynamic-mathematics-with-geogebra>. Acesso em: 20 fev. 2024.
- KENSKI, V. M. **Educação e tecnologia**: O novo ritmo da informação. São Paulo: Papirus, 2007.
- KOVÁCS, Z. **Computer Based Conjectures and Proofs in Teaching Euclidean Geometry**. 2015. f. 138. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Johannes Kepler University Linz, Linz, Áustria.
- KOVÁCS, Z.; RECIO, T.; VÉLEZ, M. P. Using Automated Reasoning Tools in GeoGebra in the Teaching and Learning of Proving in Geometry. **International Journal for Technology in Mathematics Education**, v. 25, n. 2, p. 33–50, 2018.
- KOVÁCS, Z.; RECIO, T.; VÉLEZ, M. P. Automated Reasoning Tools with GeoGebra: What Are They? What Are They Good For? *In*: RICHARD, P. R.; VÉLEZ, M. P.; VAN VAERENBERGH, S. (ed.). **Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence Can Serve Mathematical Human Learning**. Cham: Springer, 2022. v. 17. (Mathematics Education in the Digital Era). p. 23–44.
- KOVÁCS, Z.; RECIO, T.; VÉLEZ, M. P. Using automated reasoning tools for mathematical exploration in GeoGebra Discovery. **International Journal for Technology in Mathematics Education**, v. 27, p. 187–198, 2020.
- MACTUTOR. **Right Strophoid**. s.d. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Right/>. Acesso em: 28 jan. 2025.
- MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção ProfMat).
- RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies**: une approche cognitive des instruments contemporains. Tradução: Heidi Wood. Paris: Armand Colin, 1995.
- RUSSO, A. M. **Propriedades da Geometria Plana exploradas por alunos do Ensino Fundamental com o uso do GeoGebra Discovery**. 2024. 367 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- SOUZA, D. M. I. d. **GeoGebra Discovery no contexto da Geometria Plana em uma formação continuada de professores de matemática**. 2024. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)

- Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.



7º Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

Realização e Organização



Associação Nacional dos Professores
de Matemática na Educação Básica

Distribuição

