2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

RECICLAMÁTICA : CONFECÇÃO DE OBJETOS PEDAGÓGICOS COM RECURSOS RECICLÁVEIS COMO UMA PROPOSTA DE ENSINO INTERDISCIPLINAR

Diana de Souza Carvalho
Jackson dos Santos Silva
Sumaia Almeida Ramos
Severino Cirino de Lima Neto

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Reciclamática:

Confecção de Objetos Pedagógicos Com Recursos Recicláveis Como Uma Proposta de Ensino Interdisciplinar

2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

RECICLAMÁTICA : CONFECÇÃO DE OBJETOS PEDAGÓGICOS COM RECURSOS RECICLÁVEIS COMO UMA PROPOSTA DE ENSINO INTERDISCIPLINAR

Diana de Souza Carvalho
Jackson dos Santos Silva
Sumaia Almeida Ramos
Severino Cirino de Lima Neto

1ª edição
2016
Rio de Janeiro

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Reciclamática - 2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano

Reciclamática : Confecção de objetos pedagógicos com recursos recicláveis como uma proposta de ensino interdisciplinar

Copyright © 2016 Diana de Souza Carvalho, Jackson dos Santos Silva, Sumaia Almeida Ramos e Severino Cirino de Lima Neto
Direitos reservados pela Sociedade Brasileira de Matemática
A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Sociedade Brasileira de Matemática
Presidente: Hilário Alencar
Vice- Presidente: Paolo Piccione
Diretores: João Xavier
José Espinar
Marcela de Souza
Walcy Santos

Editor Executivo
Hilário Alencar

Assessor Editorial
Tiago Costa Rocha

Comissão Organizadora
Cíntia Karla Alves Souza (IFBA)
Michel Guerra de Souza (IFES – ES)
Odimógenes Soares Lopes (IFPI) - Coordenador Geral
Priscilla Guez Rabelo (Colégio Pedro II – RJ/ANPMat)
Renata Magarinus (EE Raimundo Corrêa/ANPMat)
Wilbertt Jose de Oliveira Moura (IFPI)

Comissão Acadêmica
Antônio Cardoso do Amaral (EE Augustinho Brandão – PI/ANPMat)
Fábio Pinheiro Luz (IFPI)
João Xavier da Cruz Neto (UFPI)
Marcela Luciano de Souza (UFTM/SBM)
Odimógenes Soares Lopes (IFPI) - Coordenador Local
Raquel Oliveira Bodart (IFTM/ANPMat)
Severino Cirino de Lima Neto (NUPEMAT/UNIVASF)

Capa: Pablo Diego Regino
Projeto gráfico: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

ISBN: 978-85-8337-127-4

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Aos estudantes das Escolas Públicas de Petrolina-PE
que participam dos projetos ofertados pelo
NUPEMAT.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Lista de Figuras

2.1 Ilustração Torre de Hanói 15
2.2 Torre de Hanói confeccionado com materiais reciclados Fonte: Próprio Autor 16
2.3 Ilustração MaqGir Fonte: Próprio autor 17
2.4 Construção do tetraedro regular 20
2.5 Construção do tetraedro regular 20
2.6 Construção do tetraedro regular 21
2.7 Construção do tetraedro regular 21
2.8 Modelo das asas das células tetraédricas Fonte: Próprio Autor . . 22
2.9 Anexando as asas Fonte: [2] 22
2.10 União das peças Fonte: [2] 22
2.11 Montagem da Rabeta Fonte: [2] 23
2.12 Ilustração Balança de Dois Pratos 24
2.13 Ilustração da estrutura que sustenta o Prato da balança 24

3.1 Elipse $\varepsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 26
3.2 11: Hipérbole 28
3.3 Elipse na máquina MaqGir Fonte: adaptado de SANTOS, 2014 . . 32
3.4 Elipsoide visualizada por meio da MaqGir Fonte: SANTOS, 2014 33
3.5 Plano $x = k$ cortando a elipsoide Fonte: Próprio Autor 34
3.6 Plano y=k cortando o elipsoide Fonte: Próprio Autor 35
3.7 Hiperboloide visualizada por meio da MeqGir Fonte: adaptado de SANTOS, 2014 36
3.8 Plano z=k intersectando o hiperboloide de uma folha 37

4.1 Pontos e retas no plano 39
4.2 semirreta de origem A Fonte: Próprio autor 40
4.3 Circunferência e setor circular Fonte: Próprio autor 41
4.4 42
4.5 Ângulo Fonte: Próprio autor 43
4.6 ângulo AOB 44
4.7 45
4.8 46

4.9 47
4.10 47
4.11 48
4.12 48
4.13 49
4.14 49
4.15 50
4.16 50
4.17 51
4.18 51
4.19 52
4.20 52
4.21 53
4.22 53
4.23 54
4.24 54
4.25 55
4.26 55
4.27 56
4.28 56
4.29 57
4.30 57
4.31 58
4.32 58

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Sumário

1 O QUE É O *RECICLAMÁTICA*? 11
1.1 QUANTO À INTERDISCIPLINARIDADE 12

2 OBJETOS PEDAGÓGICOS: COM REPRODUZIR COM MATEIRIAS RECICLADOS? 13
2.1 TORRE DE HANÓI 14
2.2 TANGRAM 15
2.3 MAQGIR 17
2.4 PIPA TETRAÉDRICA 18
2.5 BALANÇA DE DOIS PRATOS 23

3 SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO 25
3.1 ELIPSE 25
3.2 HIPÉRBOLE 28
3.3 PARÁBOLA 30
3.4 SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO E A MEQGIR 32
3.4.1 Elipsoide de revolução 32
3.4.2 Hiperboloide de revolução de uma folha 36

4 A GEOMETRIA DO TANGRAM 39
4.1 CONSTRUINDO O TANGRAM COM RÉGUA E COMPASSO . 46

Prefácio

A partir dos anos de 1970, as discussões acerca das alterações ambientais como consequência das atividades humanas passaram a ser recorrente em eventos regionais, nacionais e internacionais. Tais reuniões foram motivadas pelos resultados, à época, recentes sobre as mudanças climáticas globais e com cenários desanimadores para um futuro próximo. Como já era certeza nas pesquisas do século passado, entramos no século vinte e um com índices alarmantes sobre as mudanças de temperaturas e as consequências socioeconômicas dessa condição natural.

Nesse contexto, a educação entra como aliada para mudanças de comportamentos e de crenças com relação ao uso dos recursos naturais finitos. A atitude de um pequeno grupo pode levar a ideia de multiplicação de comportamento a uma grande parcela e, assim, fazer uma revolução nos atuais padrões de utilização dos bens naturais. Acreditando nisso, o Núcleo de Pesquisa e Ensino em Matemática (NUPEMAT/UNIVASF) propõe a utilização de materiais recicláveis na confecção de objetos pedagógicos para dinamizar aulas de matemática na educação básica.

O reuso de materiais possibilita o melhor aproveitamento dos recursos já extraídos da natureza, exclui etapas de produção de outros objetos mais sofisticados, economizando recursos naturais e financeiros e, diminui o custo do objeto sem, contudo, diminui a sua qualidade nas aulas de matemática. Além disso, com primeira etapa da oficina, é feito uma explanação sobre as atuais pesquisas sobre o cenário global de mudanças climáticas, dando ênfase às suas possíveis consequências.

A *Reciclamática* é uma oficina de confecção de objetos e tem a pretensão de incentivar professores de escolas públicas a organizar seu laboratório com objetos de baixo custo, produzidos de forma simples, com material de reuso e que possibilitam bons resultados no processo de ensino-aprendizagem.

O objetivo principal desse trabalho é sugerir a confecção de objetos pedagógicos que podem ser usados nas aulas de matemática tornando-as mais dinâmicas e atrativas ao estudante da educação básica. As oficinas de confecção podem ser ofertadas a professores da educação básica e a estudantes, seguindo uma conceituação dos temas trabalhados de acordo com o perfil dos participantes.

Para finalizar essa primeira parte, gostaríamos de agradecer à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), por oportunizar-nos a divulgação desse trabalho; à Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF), pela cessão do espaço para a estruturação do Núcleo de Pesquisa e Ensino em Matemática (NUPEMAT) e

Anais do Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

todo apoio dado aos trabalhos planejados e executados pelo NUPEMAT por intermédio da Pró-reitoria de Extensão (PROEX); e, por fim, à equipe do NUPEMAT, por tornar o trabalho em equipe prazeroso e produtivo.

Os autores Dezembro, 2016

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Agradecimentos

À SBM
À UNIVASF
À equipe do NUPEMAT

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Capítulo 1

O QUE É O *RECICLAMÁTICA*?

Etimologicamente, o termo *Reciclamática* é a junção de dois prefixos formando uma expressão que é facilmente direcionado a temas relacionados ao meio ambiente, sobretudo quando avaliado as palavras que o compõe. *Recicla* assume a posição do primeiro prefixo e dá a ideia de reciclagem. Tal palavra tem a pretensão de explicar a ação realizada nas oficinas e na proposta do projeto: utilização de materiais recicláveis na produção e confecção de objetos pedagógicos utilizados nas aulas de matemática da educação básica, o que já consegue explicar o segundo prefixo que a conecta. Mesmo utilizando uma palavra relativamente simples, seu significado consegue passar a informação e dar o impacto esperado, dentro da temática abordada.

Como já foi perguntado em algumas situações, é interessante ser esclarecido aqui que o nome não sugere fusão de duas disciplinas, até por que é impossível discorrer sobre o meio ambiente, suas particularidades e problemas, sem acesso em diversas áreas do conhecimento, uma vez que o principal agente modificador e modelador das formas presentes na natureza, o homem, está presente na criação de todas as ciências. Logo, improvável falar sobre os impactos causado pelo homem sem, contudo, entrar em áreas da filosofia, da sociologia, da matemática, da biologia, e de muitas outras.

O termo é uma fusão de ideias que surgiram no âmbito do Núcleo de Pesquisa e Ensino de Matemática da Universidade Federal do Vale do São Francisco, do qual participam profissionais de áreas distintas, o que viabiliza a oferta de oficinas, projetos e palestras envolvendo temas transversais dentro da educação e das propostas contidas na matriz curricular dos municípios aos quais o NUPEMAT atende.

Essas ideias foram amadurecidas, aplicadas e multiplicadas em eventos, como parte das atividades do projeto de treinamento para estudantes que participam das olimpíadas municipais, nacionais e internacionais denominado Descobrindo talentos em Matemática. Tal projeto é ofertado nas escolas da educação básica, incluindo turmas do ensino fundamental, ensino médio e ensino técnico, o que deu suporte à confirmação da viabilidade da proposta na aprendizagem dos estudantes.

Os problemas ambientais se inserem no cenário de preocupações em comum

Anais do Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

das diversas áreas de conhecimento, o que torna o tema da oficina atraente a qualquer público. Somado a isso, a proposta de confecção de objetos que possam ser utilizados em sala de aula assume uma dupla função: quando ofertado a estudantes, estes aprendem os conceitos matemáticos, estudam enquanto confeccionam o objeto e são atualizados quanto ao cenário das alterações globais nos recursos naturais e discussões sobre mudanças climáticas no planeta.

Quando ofertado para docente, estes aprendem formas mais didáticas para ensinar matemática, descobrem as possibilidades de construção de laboratórios de matemática em sua escola com um custo muito baixo, além disso associa todas essas possibilidades às necessidades impostas dentro da matriz curricular quanto à temática sustentabilidade.

1.1 QUANTO À INTERDISCIPLINARIDADE

De acordo com as normas que regem as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica, que é comum a todas as modalidades de ensino dentro da Educação Básica, é de responsabilidade das unidades escolares, com o devido suporte do órgão governamental que a regulamente, inserir em sua matriz curricular assuntos que contemplem "a sustentabilidade socioambiental como meta universal, desenvolvida como prática educativa integrada, contínua e permanente, e baseada na compreensão do necessário equilíbrio e respeito nas relações do ser humano com seu ambiente." [1]. Tal exigência está de acordo com os acordos firmados e/ou ratificados nos encontros entre as nações na Conferência das Partes (da sigla em inglês, COP), ocorrida em dezembro de 2015 em Paris.

Diante dessas exigências das DCNs, fica evidente que, independente da área de ensino, a inserção da temática ambiental na matriz curricular escolar é imprescindível e, para tanto, o trabalho da temática deve ser feito em todas as disciplinas da matriz. Pensando nisso, planejar aulas de matemática em que o aluno é construtor dos objetos que serão usados para sua aprendizagem desperta maior interesse pelo assunto abordado, uma vez que a confecção de tais objetos gera uma expectativa quanto à sua utilização posterior.

As experiências obtidas nas oficinas de *Reciclamática*, tanto com aluno quanto com professores, mostrou à equipe que a apropriação do assunto abordado com o uso dos objetos é bem mais significativa quando estes são confeccionados pelo grupo que irá assistir a aula sobre o tema relacionado ao citado objeto. Acredita-se que o processo de confecção do objeto confere curiosidade aos estudantes e desperta a criatividade do professor que, em muitas situações, diante da correria do dia a dia, fica alheio às possibilidades de oferecer uma aula dinâmica à sua turma.

Capítulo 2

OBJETOS PEDAGÓGICOS: COM REPRODUZIR COM MATEIRIAS RECICLADOS?

Nem todos os estudantes apresentam bom desempenho em matemática, tendo alguns, inclusive, dificuldades em realizar as quatro operações e, por conseguinte, em lidar com operadores mais complexos. É neste momento que a presença do professor como mediador faz a diferença na aprendizagem do aluno, exigindo do profissional a capacidade de diversificar sua didática, aproximando conceitos abstratos à realidade do estudante. Nesse sentido, os educadores decidem por utilizar objetos concretos, com a intensão de materializar os conceitos a serem ensinados. Durante este processo, os materiais utilizados desempenham um importante papel em relacionar o que se pretende ensinar ao que o aluno já conhece. Antes disso, os conhecimentos que se desejava transmitir eram vistos como ideias distantes da realidade do educando [12].

Apesar dos objetos concretos serem uma excelente alternativa pedagógica, o uso é limitado, devido às dificuldades encontradas pelos educadores que, de acordo com Lorenzato [8] se dão, na maioria das vezes, pelo/por: alto custo dos objetos, o que inviabiliza à aquisição por parte da escola, a formação continuada do docente, a inadequação do objeto aos assuntos abordados em sala de aula, o fato de as turmas serem numerosas e, por esse motivo, apresentar dificuldade para o trabalho com determinado objeto, uma vez que sua quantidade é inferior à necessária para integração da turma; além disso, tais atividades exigem do professor mais tempo para ensinar.

Diante do exposto, fica evidente a importância dessa proposta, uma vez que ela propõe a confecção e utilização de objetos que apresentem baixo custo e que sejam viáveis no ensino da matemática. Nesse sentido, observar-se-á nesse manual que os instrumentos sugeridos, na sua maioria, são conhecidos, justamente porque se acredita que o educador já tenha pensado em utiliza-lo em sala de aula e que, talvez, a necessidade de alto investimento o tenha impedido de realiza-lo. Portanto,

Anais do Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

a escolha se deu pela popularidade de tal objeto nos trabalhos já publicados na área e que, a partir da leitura deste material, o docente poderá utiliza-lo sem se preocupar com a quantidade ou o custo, uma vez que o uso de materiais reciclados permite a produção em grande quantidade com baixo custo.

A descrição dos objetos e a proposição de situações-problema seguem duas etapas: a construção do objeto e a sua posterior manipulação. Evidencia-se aqui a importância da participação dos alunos no processo de construção e que tenham a oportunidade de manusear o material livremente, para que comecem as investigações dos conceitos e os problemas possam surgir motivando a discussão em sala de aula.

Nesta lógica, nas sessões a seguir seguem a construção de cada objeto, nos capítulos seguintes segue a discussão de propostas de conteúdos e abordagens que podem ser trabalhadas durante a confecção ou após, permitindo a livre manipulação por parte dos estudantes, bem como o conhecimento de todo o processo construção.

2.1 TORRE DE HANÓI

Materiais:

- Duas embalagens retangulares de papelão (13x20x18);
- Papel jornal ou revista;
- Cola branca;
- Tintas guache;
- Três canetas;
- Tinta spray (opcional);
- Fita Adesiva
- Pincel

Como fazer:

1. **Base:** Com a fita adesiva, una as duas caixas retangulares, unindo as faces retangulares com as menores medidas. Em um recipiente, misture cola branca e água, com atenção para o volume de cola ser sempre maior que o da água. Corte o papel jornal (revista) em tiras retangulares, assim facilitará a aplicação do papel sobre a caixa. Passe cola com o pincel direto na caixa e aplique o papel aos poucos, para uma melhor textura e rigidez. Sempre passe cola sobre o papel deixando-o bem úmido. Repita este processo três vezes (se achar necessário, faça mais camadas). Coloque-o exposto ao sol e espere secar.

A caixa esta quase pronta para ser utilizada como base, falta apenas definir o local dos orifícios que são fixadas as hastes e pintar na cor que desejar. A sugestão é que os orifícios sejam definidos após determinar as medidas dos discos, pois as

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

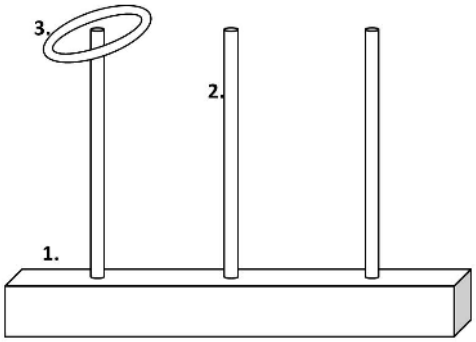


Figura 2.1: Ilustração Torre de Hanói

distâncias entre elas devem ser superior ao diâmetro do disco maior. Caso os discos sejam em forma de quadrados, a distância deverá ser maior que o lado do quadrado.

2. **Hastes:** Este é bem simples. Retire todos os acessórios da caneta ficando apenas com o corpo, neste caso, o tubo maior.

3. **Discos:** Os discos podem ser em forma de circunferências ou quadrados. A quantidade mínima é de três peças, considerando sempre o diâmetro (lado do quadrado) menor que o outro. De forma que a sobreposição das peças formem sempre um cone ou pirâmide.

Moldes: se o modelo for uma circunferência, a construção se torna simples. Basta definir medidas de raios em forma decrescente, com atenção para o raio não formar uma peça que exceda as medidas da base da torre, caso isso aconteça, o objeto perderá a elegância. Em uma folha em branco, desenhe com compasso circunferências com raios distintos. Se o modelo for um quadrado, construa com régua e compasso (veja o capítulo 3).

Utilize os moldes para recortar os quadrados de papelão, em seguida faça um revestimento de papel, seguindo o mesmo processo realizado na base, e pinte com cores distintas e vibrantes, obtendo o objeto da figura 2.

2.2 TANGRAM

O Tangram é um quebra-cabeça chinês de sete peças: cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo. A sua origem é narrada por uma lenda na qual um sábio deixou uma cerâmica quadrada cair ao chão, fazendo-a quebrar-se em sete pedaços. A medida que o sábio tentava montar o quadrado, percebeu que a composição das peças dava origem a outras imagens [11].

Smole e Diniz [12] salienta que sendo a lenda verdadeira ou não, não interfere na ludicidade do objeto além de afirmar que desde o quarto ano do ensino fundamental é possível assimilar conceitos geométricos por meio, deste jogo. É

Anais do Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

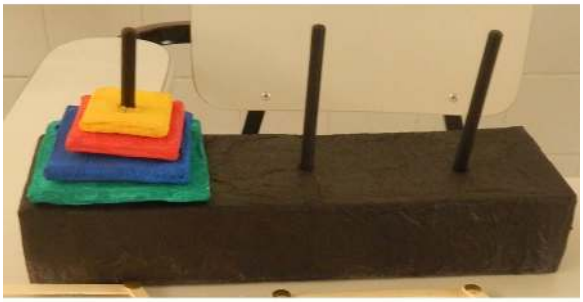


Figura 2.2: Torre de Hanói confeccionado com materiais reciclados Fonte: Próprio Autor

inegável, que se a lenda for bem narrada, a curiosidade pode ser estimulada facilmente deixando a aula mais atrativa.

MATERIAIS:

- Papelão;
- Papel Jornal ou revista;
- Cola branca;
- Tintas guache;
- Instrumentos para construções geométricas ou molde pronto.

COMO FAZER:

È necessário definir o molde do Tangram que deseja montar. Para isso, há duas opções: utilizar um modelo (facilmente encontrado na internet) ou construir com o uso de régua e compasso. Escolhendo a primeira opção, recorte o modelo e sobreponha-o ao papelão para recortar as peças. Em seguida faça o revestimento com papel semelhante ao realizado na base da Torre de Hanói. Para deixar mais alegre, basta pintar com cores vibrantes, pintando cada peça com uma cor diferente.

Caso opte pela construção com régua e compasso, o passo a passo está descrito no capítulo 3. No entanto, apresentaremos como uma abordagem em sala de aula, ou seja, o estudante deverá construir o Tangram, descrevendo o passo a passo e justificando as estratégias utilizadas. Após a construção use-o como molde para recortar o papelão.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

2.3 MAQGIR

Nos anos iniciais da educação as visualizações das formas geométricas são de fundamental importância no desenvolvimento da percepção e visualização do espaço. Descrever e identificar formas é o principal objetivo nesta fase inicial, para assim, o individuo desenvolve habilidades de visualizar objetos, descrevendo suas possíveis modificações visuais no espaço [12].

O desenvolvimento destas habilidades prepara o aluno para enfrentar problemas mais complexos encontrados no ensino médio da educação básica e no ensino superior. Desta forma, quando o educando não desenvolve este tipo de habilidade, enfrenta dificuldades em descrever na linguagem algébrica a geometria plana e espacial.

A MeqGir é uma máquina construída para gerar sólidos de revolução por meio da rotação de funções em torno de um eixo, além disso, com o auxilio de um laser, é possível visualizar as imagens geradas pelas intersecções de planos com as superfícies.

Com esta máquina, o aluno encontra de forma prática as equações que descrevem os sólidos de revolução, observando as imagens geradas por meio da rotação e das intersecções, sendo possível visualizar os três eixos de rotação.

A confecção a seguir descreve uma maneira prática e fácil de construir este aparato por um custo bem acessível.

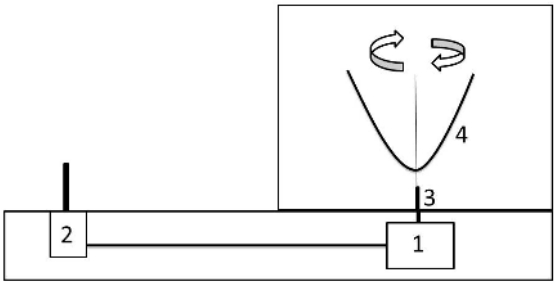


Figura 2.3: Ilustração MaqGir Fonte: Próprio autor

MATERIAIS:

- Mancal de Acrílico;
- Caixa de madeira
- Um motor de DVD de 5,9 volts
- Eliminador de 5,0 volts e 5 mA de corrente elétrica

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

- Um resistor variável de 1kΩ
- Bomba de caneta esferográfica
- Viseira de capacete de motocicleta;
- Esparadrapo ou fita crepe
- Raio de bicicleta

COMO FAZER:

Todo o corpo mecânico da máquina fica na parte interior da caixa de madeira, na qual encontra-se um motor de (1) DVD de 5,9 volts, ligado a um (2) eliminador de $5,0volts$ de $5mA$ de corrente elétrica e um (2) resistor variável de $1k4\omega$. No eixo do motor é fixada uma (3) bucha (pedaço de 1cm de bomba de caneta esferográfica) para acoplamento dos eixos de rotação.

No mancal deve-se fazer um orifício cujo diâmetro corresponde ao diâmetro do raio de bicicleta, que é utilizado como eixo de rotação com o mínimo possível de folga. Quanto às (4) peças que serão giradas, os moldes serão feitos com viseira de capacete de motocicleta, onde nas bordas foram desenhadas as cônicas utilizando-se esparadrapo ou fita crepe. A fita adesiva é utilizada para fixação do mancal de acrílico na base de madeira, onde basta utilizá- la em apenas uma das bases.

2.4 PIPA TETRAÉDRICA

Após a criação do carro e da locomotiva no século $XVIII$, no século XX, engenheiros do mundo todo direcionam suas pesquisas para uma nova ambição, a de poder voar. Alguns argumentavam a impossibilidade de objetos gigantes poderem voar, como registrado pelo astrônomo e matemático Simon Newcomb $(1835 - 1909)$:

> *Considere duas máquinas voadoras semelhantes, sendo que uma tem o dobro da escala da outra. Todos sabemos que o volume e, então, o peso de dois corpos semelhantes são proporcionais aos cubos de duas dimensões. O cubo de dois é 8, então a máquina maior terá 8 vezes o peso da máquina menor. As áreas das superfícies destas máquinas, por outro lado, são proporcionais aos quadrados de suas dimensões. O quadrado de dois é 4. Desta maneira, a máquina mais pesada exporá ao vento uma superfície com áreas apenas 4 vezes maior, tendo então uma nítida desvantagem na razão eficiência por peso*
>
> – Simon Newcomb, *[2]*

Com isso, construir aparatos voadores gigantes seria impossível, uma vez que sua estrutura ficaria fragilizada não suportando o seu peso. Por outro lado, alguns acreditavam na possibilidade desses objetos voarem. Esse é o caso do cientista escocês Alexander Graham Bell $(1847 - 1922)$ que argumenta que os pássaros eram a prova natural de que objetos mais pesados podem voar.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

> *Em 1899, Bell começou a desenvolver um novo design de uma aeronave que tinha uma grande área de superfície e ao mesmo tempo era leve. Ele se encontrou completamente imerso no projeto ("Por que? Eu não sei", ele explicou enigmaticamente), argumentando que provas de máquinas voadoras mais pesadas do que o ar estavam no mundo natural. "Nós todos estamos interessados em locomoção aérea", ele escreveu. "E eu tenho certeza que ninguém que observou com atenção o voo de pássaros pode duvidar por um momento do voo aéreo de corpos especificamente mais pesados do que o ar."*
>
> – DOLLAGHAN, *[4]*

Graham Bell criou um modelo de pipa em que era constante a razão eficiência por peso, para isso, a estratégia foi usar células tetraédricas. Almejando algo maior, Bell em 1903 criou uma máquina voadora com 3 393 células tetraédricas, chamada de *Cygnet*. No entanto, não obteve muito sucesso, fazendo-o desistir de seu projeto [4].

Apesar do fracasso em aeronaves, suas teorias contribuíram para trabalhos no campo de materiais leves. Como exemplo desses trabalhos, pode-se citar o trabalho do engenheiro Tomás Saraceno, que desenvolveu o projeto Solar Bell que consiste em uma escultura de voo inspirada na forma da pipa tetraédrica, construído com as mais recentes tecnologias no campo de materiais leves e de energia sustentável. Este projeto é fruto de uma ideia de um futuro com edificações flutuantes.

Seguindo esta mesma perspectiva, o cientista e poeta norte-americano Richard Buckminster Fuller (1895-1983) idealizou a cúpula geodésica que permite a construção de habitações leves e transportáveis, construídas com o mínimo de materiais possíveis.

Observe que as estruturas criadas por Tomás Saraceno, Fuller e Bell apresentam em comum a intensão de criar objetos mais leves, capazes de sustentar grande número de pessoas e objetos.

MATERIAIS:

- Canudos (A quantidade depende do tamanho da pipa);
- Papel jornal ou papel revista;
- Cola branca ou fita dupla face;
- Barbante;
- Um palito de madeira no mesmo tamanho do canudo;

COMO FAZER:

Comece construindo as células de tetraedro regular. Para isso, passe o barbante pelos canudos seguindo o esquema abaixo.

Passe o barbante por dentro de três canudos formando um triângulo (2.4).

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Em seguida passe o barbante por dentro do canudo do lado esquerdo. Ao sair na extremidade oposta, passe por dentro de dois novos canudos. Continue o percurso formando um losango e o barbante saindo nos vértices opostos,veja a figura (2.5).

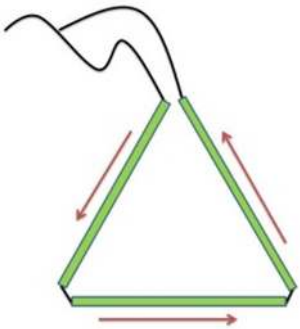


Figura 2.4: Construção do tetraedro regular

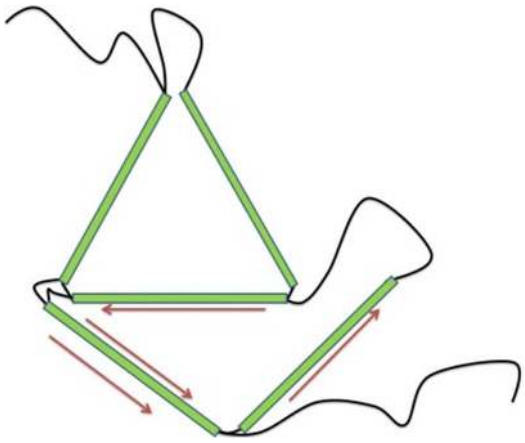


Figura 2.5: Construção do tetraedro regular

Escolha um dos vértices para anexar um novo canudo, veja a figura (2.6).

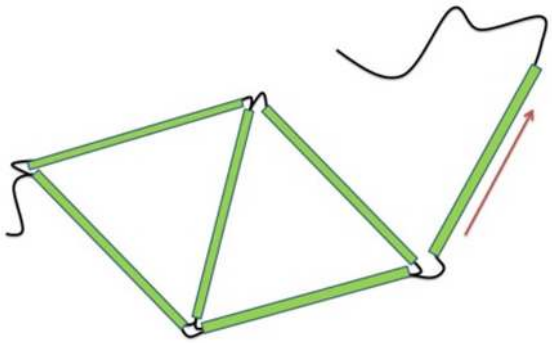


Figura 2.6: Construção do tetraedro regular



Figura 2.7: Construção do tetraedro regular

Agora, amarre os barbantes fechando a figura. De sorte, a figura formada é o tetraedro desejado. Puxe bem o barbante garantido que a estrutura fique bem fixa, veja a figura, veja a figura (2.7).

Para moldar as asas, construa em uma folha branca um losango por meio da união de dois triângulos equiláteros, como mostra a figura 2.8.

Agora, recorte vários modelos com papel jornal ou papel revista. Nas abas, cole fita dupla face ou cola branca, depois coloque uma aresta do tetraedro sobre a diagonal do losango, formada pelos lados dos dois triângulos.

Faça a união das peças, amarrando os barbantes e dando forma a um novo tetraedro.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

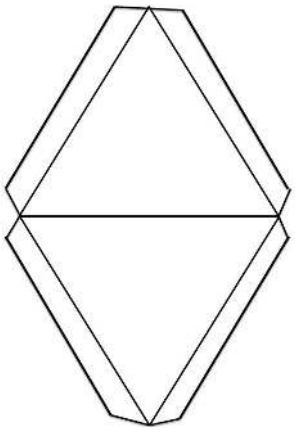


Figura 2.8: Modelo das asas das células tetraédricas Fonte: Próprio Autor

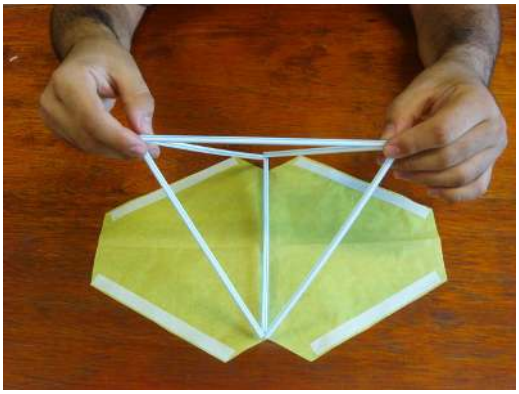


Figura 2.9: Anexando as asas Fonte: [2]

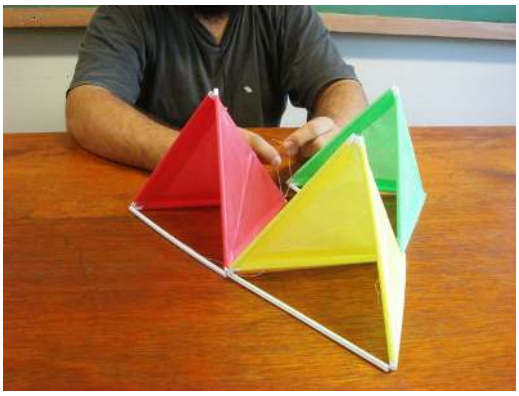


Figura 2.10: União das peças Fonte: [2]

Por fim, no tetraedro do topo, faça o cabresto da pipa, colocando um barbante

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

unindo os dois vértices de uma mesma aresta. Para dar mais resistência à pipa coloque um palito de mateira na aresta que contém o cabresto.

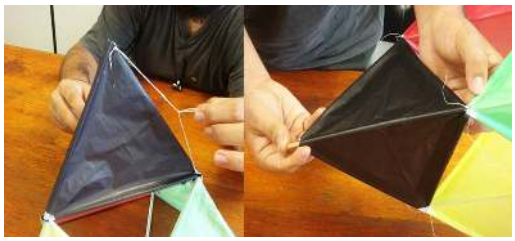


Figura 2.11: Montagem da Rabeta Fonte: [2]

Finalizado estes passos, a pipa estará pronta para ser testada.

2.5 BALANÇA DE DOIS PRATOS

MATERIAIS:

- Um retângulo de madeira
- Cano PVC com diâmetro externo entre 22 e 54 mm
- Duas tampas de latas de metal;
- Fios de cobre;
- Puxador de Gaveta (tamanho Grande);
- Parafusos, arruelas e porcas;

COMO FAZER:

1. **Base:** O retângulo de madeira será a base da balança. Esta peça pode ser uma das faces laterais de uma gaveta de armário de cozinha. No centro da base, faça um orifício com diâmetro igual ao do cano PVC.

2. **Eixo Vertical:** O eixo vertical é o cano PVC que deve ser fixado à base de madeira. Para isso, exponha em alta temperatura uma de suas extremidades, fazendo com que sua estrutura perca a rigidez, auxiliando no encaixe do cano no orifício da base.

3. **Eixo Horizontal:** O puxador de gaveta deve ser fixado no cano PVC, com atenção para anexar exatamente no ponto médio do puxador para que haja equilíbrio. O encaixe deve ser feito com o uso de um parafuso que ultrapasse as quatro paredes da intersecção dos eixos, permitindo que o eixo horizontal realize livremente o movimento do tipo gangorra. Manter o equilíbrio da balança não é algo fácil, para isso, a dica é passar o esmeril levemente nas partes inferiores do eixo vertical de forma a retirar resíduos de cada lado até manter o equilíbrio. Esta é uma etapa delicada que exige paciência.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

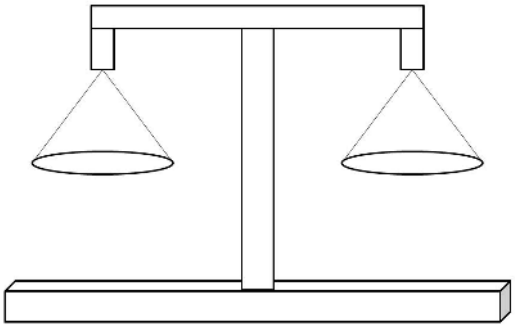


Figura 2.12: Ilustração Balança de Dois Pratos

4. **Bandejas (pratos):** Os pratos da balança são as tampas das latas de metal, que devem ser fixadas nas extremidades do eixo vertical. Dobre o fio de cobre de forma semelhante a uma parábola com vértice nas extremidades do eixo horizontal, como mostra a figura 13.

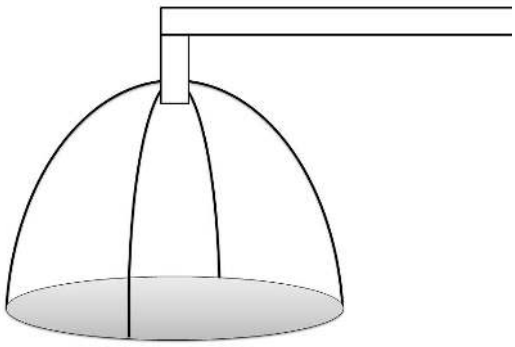


Figura 2.13: Ilustração da estrutura que sustenta o Prato da balança

É evidente que esta balança não é de grande precisão, no entanto, isso não interfere na aplicação em sala de aula. As peças de bijuterias podem ser usadas como pesos na balança.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Capítulo 3

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Conforme Delgado, Frensel e Crissaff [3] as seções cônicas foram inspirações de matemáticos como Meneamus (380-320 a.C.) discípulo de Eudóxio, na Academia de Platão que, na tentativa de solucionar a duplicação do cubo, foi o primeiro a mostrar que a hipérbole, elipse e parábola são obtidas por meio da intersecção entre o cone e um plano não paralelo a sua base, sendo mais tarde nomeadas como hipérbole, elipse e parábola pelo matemático Apolônio de Perga (262-190 a.C). No entanto, foi Pierre de Fermat que utilizou a linguagem algébrica para descrever estes lugares geométricos, descobrindo sete equações que podiam ser obtidas a partir da equação do segundo grau com duas variáveis, dada por:

$$Ax + Bxy + xy + Cy + Dx + Ey + f = 0 \tag{3.1}$$

O objetivo deste capítulo é estudar os sólidos de revolução gerados pela equação (1) nos casos em que, $A \neq 0$ou $B \neq 0$ou $C \neq 0$, para isso, primeiro serão definidos os lugares geométricos mais importantes das secções cônicas que são a parábola, elipse e hipérbole. Por conseguinte, os sólidos de revolução.

A discussão a seguir são análises das referências [3], [6], [5] e [7].

3.1 ELIPSE

Uma elipse de focos F_1e F_2é o conjunto dos pontos do plano cuja soma da distância do ponto P a cada foco é igual a $2a$e$d(F_1, F_2) = 2c$, tal que, $0 \leq c < a$, ou seja, $\varepsilon = \{P | d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$.

Na elipse (3.1) os pontos F_1e F_2 são os **focos**, a reta que os contém é a **reta focal** l. Chama-se vértices da elipse os pontos V_1e V_2, tal que, $\varepsilon \cap l = \{V_1, V_2\}$.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do

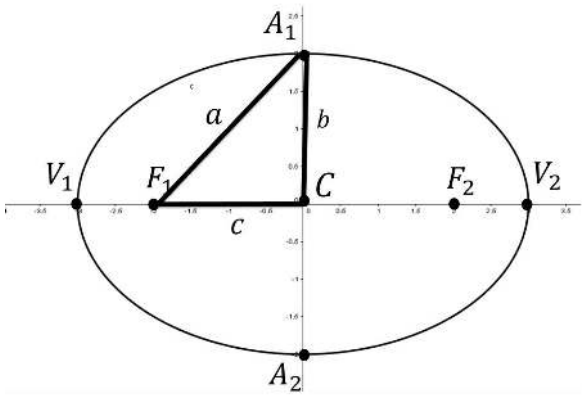


Figura 3.1: Elipse $\varepsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Observe que, $F_1F_2 \cap \varepsilon = \emptyset$, ou seja, não existem pontos pertencentes à elipse que também pertencerá ao segmento F_1F_2. De fato, $P \in F_1F_2 \Rightarrow P \notin \varepsilon$, pois$d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(F_1, F_2) = 2c$, o que é um absurdo, já que, $2c < 2a$. Por definição, $V_1 \in \varepsilon \Rightarrow d(V_1, F_1)+d(V_1, F_2) = 2a$, considerando $d(V_1, F_1) = x$, tem-se:

$$d(V_1, F_1) + d(V_1, F_2) = 2a$$

$$\Leftrightarrow x + 2c + x = 2x + 2c = 2a$$

$$\Rightarrow x = a - c$$

logo, $a-c$ é a distância entre V_1 e F_1. De modo análogo, pode-se mostrar que a distância entre V_2 e F_2 é $a - c$. Portanto, $d(V_1, F_1) + d(V_2, F_2) = d(V_1, V_2) = 2a$. Além disso, o segmento V_1V_2 é o **eixo focal** da elipse.

O centro da elipse é o ponto médio C dos segmentos V_1V_2 e F_1F_2. A reta r que passa pelo ponto médio dos focos e é perpendicular a reta que os contém, é chamada de **reta não focal.**

A elipse intersecta a reta não focal nos pontos A_1 e A_2, desta forma, $d(A_1, F_1) = d(A_1, F_2) = a$, logo pelo teorema de Pitágoras $b^2 = a^2 - c^2$. Por outro lado, o número $\alpha = \frac{c}{a}$ é a excentricidade da elipse. Esta razão permite definir se uma determinada equação satisfaz o lugar geométrico dos pontos de uma elipse ou não, para isso, basta encontrar $0 \leq \alpha < 1$.

Uma observação importante, é: A elipse é simétrica em relação à reta focal, à reta não focal e ao centro. Para demonstrar, basta considerar um ponto simétrico a P, em relação ao eixo focal e, por conseguinte, em relação ao centro, mostrando que nos dois casos, $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a = d(P', F_1) + d(P', F_2)$.

A partir deste ponto, com a definição da elipse é possível obter uma equação canônica em relação um sistema de eixos ortogonais para os casos particulares em que o eixo focal coincide com um dos eixos coordenados. Para o caso, em que a elipse é translada consulte as referências [3] e [6].

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

I caso: Elipseε com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX.

Neste caso, no eixo de x os focos e os vértices são: $F_1 = (-c, 0), F_2 = (c, 0), V_1 = (-a, 0)$ e $V_2 = (a, 0)$. No eixo y os pontos são: $A_1 = (0, b)$ e $A_2 = (0, -b)$, com $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Por definição,

$$P = (x, y) \in \varepsilon \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

, manipulando esta equação o resultado é a forma canônica da elipse de centro na origem e eixo focal OX, dada por,

$$\varepsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.2}$$

II caso: Elipse ε com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY.

Neste caso, no eixo de y os focos e os vértices são: $F_1 = (0, -c), F_2 = (0, c), V_1 = (0, -a)$ e $V_2 = (0, a)$. No eixo x os pontos são: $A_1 = (b, 0)$ e $A_2 = (-b, 0)$, com $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. De modo análogo, a equação é dada por,

$$\varepsilon : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{3.3}$$

Seja, F_1 e F_2 pontos do plano, tais que $d(F_1, F_2) = 2c > 0$ e $a > 0$, o caso em que $c = 0$, o lugar geométrico é uma circunferência, onde os focos são coincidentes no centro e $a = b$. O caso em que $a = c$, temos uma elipse degenerada representada por duas retas paralelas, tal que,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.4}$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2 \tag{3.5}$$

Como $b = a - c$, substituindo na equação (4), tem-se,

$$\Leftrightarrow (a - c)x + ay = a(a - c)$$

$$\Leftrightarrow (a - c)x + ay = a^4 - ca$$

$$\Leftrightarrow ay = a^4$$

$$\Leftrightarrow y = a$$

Logo, o lugar geométrico são duas retas paralelas, dadas por $y = a$ e $y = -a$ e denomina elipse degenerada. Ficará a cargo do leitor analisar para o caso em que $a < c$.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do

3.2 HIPÉRBOLE

Uma hipérbole de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos do plano cujo módulo da diferença da distância do ponto P a cada foco é igual a $2a$ e , tal que, $0 < a < c$, ou seja,

$$\delta = \{P| \, |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$

.

Na figura 3.2, os pontos F_1 e F_2são os focos da hipérbole, a reta que os contém é chamada de **reta focal** . Os vértices são os pontos V_1 e V_2, tais que, $\delta \cap s = \{V_1, V_2\}$.

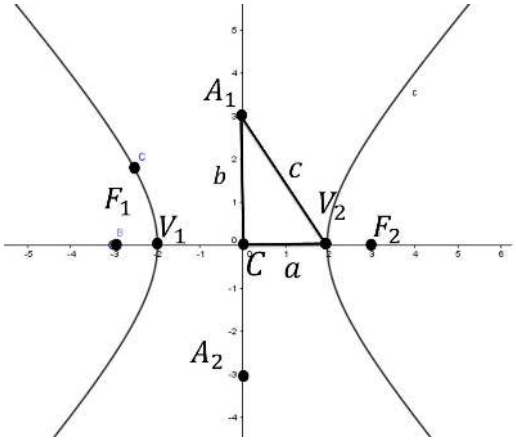


Figura 3.2: 11: Hipérbole

De fato, $P \in l - F_1F_2 \Rightarrow P \notin \delta$. Seja P pertencente semirreta de origem F_1 que não contém F_2 e $d(P, F_1) = x$, isso implica que $P \in \delta$, pois

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |x - (x + 2c)| = 2c > 2a$$

O que é um absurdo. Esta conclusão é análoga ao caso de P pertencer ao segmento de reta de origem F_2 que não contém F_1. Daí, seja $V_1 \in F_1F_2 \cap \delta$, tal que, $d\,(V_1, F_1) = x$ e $0 < x < c$, logo tem-se,

$$|d(V_1, F_1) - d\,(V_1, F_2)| = |x - (2c - x)| = 2a \tag{3.6}$$

$$\Leftrightarrow |2x - 2c| = 2a \tag{3.7}$$

Como $0 < x < c \Rightarrow -2c < 2x - 2c < 0$, da equação (5), obtém,

$$\Leftrightarrow 2c - 2x = 2a \Leftrightarrow x = c - a$$

Logo, a distância entre V_1 e F_1 é igual a $a - c$. De modo, análogo $d(V_2, F_2) = c-a$. Além disso, $d(V_1, V_2) = d(F_1, V_2)-d(F_1, V_1) = [2c-(c-a)]-(c-a) = 2a$.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Portanto, o segmento V_1V_2é denominado eixo focal e possui comprimento igual a 2a.

Assim como, na elipse o centro da hipérbole é o ponto médio C dos segmentos F_1F_2 e V_1V_2.

A reta s que passa pelo ponto C e é perpendicular à reta focal é denominada **reta não focal**. A hipérbole não intersecta a reta não focal, no entanto, considera os pontos A_1 e A_2, tal que, C é ponto médio do segmento $A_1A_2 = 2b$, e sua excentricidade é dada pela razão $\alpha = \frac{c}{a}$, tal que, $\alpha > 1$, isso permite identificar a equação que descreve a hipérbole.

O retângulo em que os pontos médios de seus lados são os vértices da hipérbole é denominado **retângulo de base**. Suas diagonais são as assíntotas de coeficiente angular $\pm\frac{b}{a}$, desta forma, as retas focal e não focal são as bissetrizes dos ângulos formados pelas assíntotas. Em caso particular, se $a = b$ a hipérbole é dita equilátera.

Como realizado com a elipse, a partir deste ponto, é possível obter a equação canônica de satisfaz os pontos da hipérbole em relação a um eixo coordenado. Será abordado apenas, o caso em que o eixo focal coincide com um dos eixos coordenados, para o caso da hipérbole transladada consulte as referências [3], [6] e [5].

I caso: Hipérbole de centro na origem e eixo focal coincidente com o eixo OX.

Para este caso, $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $V_1 = (-a, 0)$, $V_2 = (a, 0)$, $A_1 = (0, -b)$ e $A_2 = (0, b)$. Por definição, $\delta = \{P| \, |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$, o que equivale, $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$ ou $d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a$, descrevendo o respectivamente o ramo direito e o ramo esquerdo da hipérbole. De maneira análoga ao da elipse e considerando que $b = c - a$, é possível obter a equação da hipérbole dada por,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.8}$$

II caso: Hipérbole de centro na origem e eixo focal coincidente com o eixo OY.

Agora, $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $V_1 = (0, -a)$, $V_2 = (0, a)$, $A_1 = (-b, 0)$ e $A_2 = (b, 0)$. Por definição, $\delta = \{P| \, |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$. De modo análogo ao caso I, a equação é dada por,

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{3.9}$$

Para cada caso, tente encontrar a equação das assíntotas da hipérbole, além disso, como descrito na elipse, determine o lugar geométrico para o caso em que $a = c$ e $a > b$.

Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º

3.3 PARÁBOLA

Sejam r uma reta e F um ponto não pertencente a r. A parábola ρ de foco F e diretriz r é o conjunto dos pontos do plano equidistantes ao foco e a reta diretriz, ou seja, é o conjunto

$$\rho = \{P | d(P, F) = d(P, r)\}$$

Outra definição encontrada em Chung (2013) é: A parábola é o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam pelo foco e são tangentes a reta diretriz. Assim, como na elipse e na hipérbole, denomina-se eixo focal da parábola a reta que contém o foco. A reta diretriz intersecta o eixo focal no ponto B e o vértice é o ponto médio do segmento FB, além disso, $d(F, r) = 2p \Rightarrow d(V, r) = p$ e $d(F, V) = p$.

Uma observação importante é que toda parábola é simétrica em relação a sua reta focal. Para mostrar isso, basta mostrar que para todo ponto P pertencente à parábola o seu simétrico também pertence. Seja P pertencente à parábola, por definição $d(P, F) = d(P, r)$, considere P' um ponto simétrico a P, basta mostrar que $d(P', F) = d(P', r)$.

A equação canônica da parábola pode ser obtida por definição considerando casos particulares em que o eixo focal coincide com um dos eixos coordenados. O caso em que a parábola é translada fica como atividade para o leitor.

I caso: A parábola tem vértice na origem e o eixo focal coincide com o eixo X.

Neste caso, se a parábola está à direita de X, então $V = (0, 0)$, $F(p, 0)$ e a reta diretriz $r : x = -p$. Considerando um ponto $P = (x, y)$, por definição,

$$P \in \rho \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, r)$$

Daí,

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - p) + y} = |x + p|$$
$$\Leftrightarrow (x - p) + y = (x + p)$$
$$\Leftrightarrow x - 2px + p + y = x + 2px + p$$
$$\Leftrightarrow y = 4px$$

Por outro lado, se a parábola está à esquerda de X, então $V = (0, 0)$, e a reta diretriz $r : x = p$. Considerando um ponto $P = (x, y)$, por definição,

$$P \in \rho \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, r)$$

Daí,

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + p) + y} = |x - p|$$

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

$$\Leftrightarrow (x+p)+y=(x-p)$$

$$\Leftrightarrow x+2px+p+y=x-2px+p$$

$$\Leftrightarrow y=-4px$$

Note que, se a parábola está à direita o coeficiente angula é positivo e se a parábola está à esquerda o coeficiente angular é negativo.

II caso: A parábola tem vértice na origem e o eixo focal coincide com o eixo Y.

Analisando para o caso em que a parábola tem concavidade voltada para cima, então $V=(0,0)$, $F(0,p)$ e a reta diretriz $r: y=-p$. Considerando um ponto $P=(x,y)$, por definição,

$$P\in\rho \Leftrightarrow d(P,F)=d(P,r)$$

Daí,

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+(y-p)}=|y+p|$$

$$\Leftrightarrow x+(y-p)=(y-p)$$

$$\Leftrightarrow x+y-2py+p=y+2py+p$$

$$\Leftrightarrow x=4py$$

Por outro lado, se a parábola está com concavidade voltada para baixo, então $V=(0,0)$, $F(0,-p)$ e a reta diretriz $r: y=p$. Considerando um ponto $P=(x,y)$, por definição,

$$P\in\rho \Leftrightarrow d(P,F)=d(P,r)$$

Daí,

$$\Leftrightarrow \sqrt{(y+p)+x}=|y-p|$$

$$\Leftrightarrow (y+p)+x=(y-p)$$

$$\Leftrightarrow y+2py+p+x=y-2py+p$$

$$\Leftrightarrow x=-4py$$

Logo, se a concavidade está voltada para cima o coeficiente angular é positivo e será negativo para o caso da concavidade for voltada para baixo.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

3.4 SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO E A MEQGIR

O sólido de revolução é a figura gerada pelo giro de um semiplano entorno de seu eixo de simetria. A título de exemplo, tem-se o retângulo que gera o cilindro, o triângulo que gera o cone, o trapézio que gera um tronco, a elipse que gera a elipsoide, a hipérbole que gera a hiperboloide e a parábola que gera a paraboloide[5].

Como citado na sessão anterior o estudo será voltado para os sólidos gerados pelo giro da elipse, hipérbole e parábola entornam de seu eixo focal ou não focal. Estas superfícies, geram lugares geométricos dos pontos que satisfazem a equação,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + Fx + Gy + Hz + I = 0 \qquad (3.10)$$

Na qual, pelo menos um dos coeficientes A,B,C,D ou E seja diferente de zero.

Neste caso, os sólidos definidos pela equação (08), quando cortados por planos coordenados ou paralelos a um dos eixos, a curva de intersecção será uma cônica [6].

Desta forma, as equações dos sólidos podem ser encontradas pela intersecção das curvas definidas pelos cortes do plano passando pelo mesmo ponto pertencente ao sólido. No entanto, será abordado apenas a forma canônica dada pela equação,

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Com a mudança do sinal, pode-se visualizar a projeção da imagem em cada plano coordenado três tipos de figuras, as secções cônicas. Além disso, será considerado apenas os casos em que $a = b$ ou $b = c$, para o caso de ser diferente deixa de ser sólido de revolução.

3.4.1 Elipsoide de revolução

Elipsoide de revolução é um sólido gerado pela rotação de uma elipse. A equação deste sólido pode ser obtida observando as vistas de cada par de eixos.

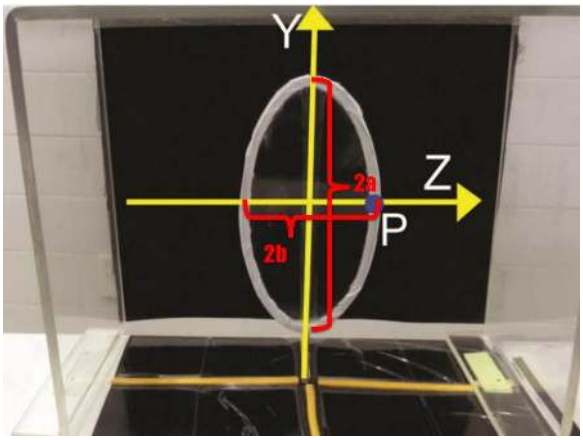


Figura 3.3: Elipse na máquina MaqGir Fonte: adaptado de SANTOS, 2014

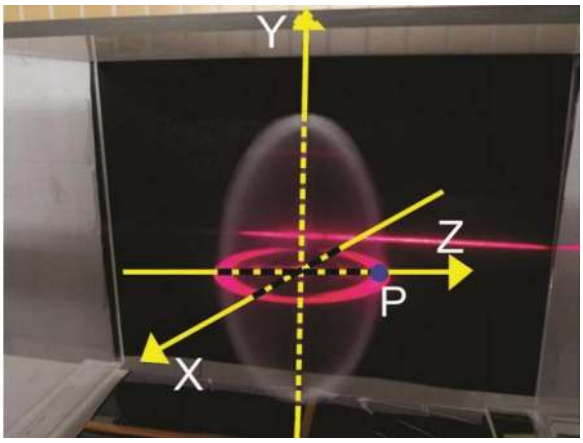


Figura 3.4: Elipsoide visualizada por meio da MaqGir Fonte: SANTOS, 2014

A elipse é fixada na máquina (3.3) gerando a o sólido representado na figura 17. Para o caso em que a elipse esteja no plano yz a equação é,

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{3.11}$$

De acordo com a figura 3.3, têm-se dois casos a considerar.

1. I: $a > b$, então a^2 é denominador de y^2 e b^2 é denominador de z^2.
2. I: $a < b$, então a^2 é denominador de z^2 e b^2 é denominador de y^2.

Em caso particular, se $a = b$ a forma geométrica deixa de ser uma elipse e passa a ser uma circunferência. Suponha que a imagem gire entorno do eixo y e o ponto $P = (x, y, z)$ pertencente simultaneamente a elipsoide, elipse e circunferência (3.4), podemos afirmar que o raio R é igual ao $|z|$ o que implica $R^2 = z^2$. Daí, substituindo na equação (09), tem-se:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{R^2}{b^2} = 1 \tag{3.12}$$

Por outro lado, no eixo xz, a visualização é de uma circunferência de raio R, logo $R^2 = x^2 + z^2$, o que implica,

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{3.13}$$

Encontrando assim, uma equação que descreve uma elipsoide de revolução.

A partir desta equação, outras análises podem ser feitas, por meio, da observação das projeções sobre os planos coordenados. Para isso, no momento em que a máquina gera o sólido, lance-se o laser contra imagem observando as intersecções, sem esquecer-se de pré-definir os eixos coordenados.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

De acordo com, [6] considerando o plano intersectando cada eixo coordenado, então este plano será definido por $k \in$, tal que, os casos são $x = k$, e $z = k$.

I. Caso $x = k$, tal que, $k \in$;

Desta forma obtém a equação

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{3.14}$$

Da equação (11), obtém-se o sistema,

$$\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \\ x = k \end{cases}$$

Se $|k| < c$, o plano $x = k$ corta o elipsoide conforme o esquema da figura 18. Note que, a intersecção é uma elipse, com semieixo maior b' e semieixo menor a'.

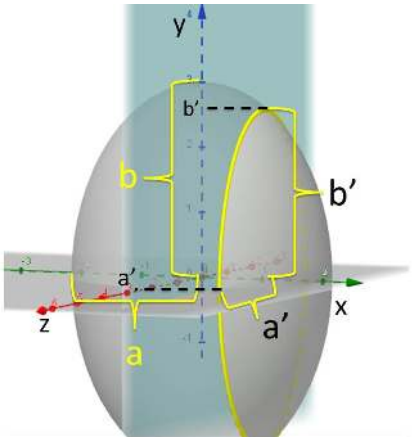


Figura 3.5: Plano $x = k$ cortando a elipsoide Fonte: Próprio Autor

Da equação (09), podem-se encontrar as equações que define os semieixos. Daí,

$$y = b\sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2}} \tag{3.15}$$

Neste caso, quando $y = b'$, tem

$$b' = b\sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2}} \tag{3.16}$$

Para analisar o semieixo menor (figura 18), na equação (11) considere $y = 0$ e $x = k$, logo,

$$z = a\sqrt{1 - \frac{k^2}{a^2}} \tag{3.17}$$

Para este caso, fazendo $z = a'$, tem

$$a' = a\sqrt{1 - \frac{k^2}{a^2}} \tag{3.18}$$

Note que, se k tende a zero, então $4a'$ tende a a e b' tende a b. Isso pode ser mostrado, calculando do limite, logo

$$\lim_{k\to 0} a' = \lim_{k\to 0} a\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}} \Rightarrow a' = a$$

De modo análogo,

$$\lim_{k\to 0} b' = \lim_{k\to 0} a\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}} \Rightarrow b' = b$$

Com isso, pode-se concluir que:

1. Os semieixos a' e b' atingem seus valores máximos quando $k = 0$.
2. Quando k cresce a' e b' decrescem.
3. Quando $k = \pm c$, o plano tangencia a elipsoide em $x = \pm c$, fazendo a' e b' se anularem.
4. Quando $k > c$ a intersecção entre o plano e a elipsoide é um conjunto vazio.

No plano $y = k$ o sistema obtido por meio da equação (11) é:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \\ x = k \end{cases} \tag{3.19}$$

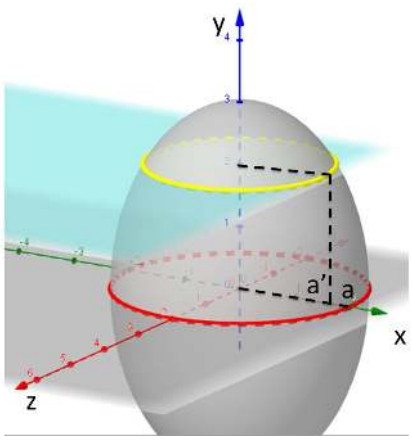


Figura 3.6: Plano y=k cortando o elipsoide Fonte: Próprio Autor

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Se $|k| < b$, o plano $y = k$ corta o elipsoide segundo uma circunferência (figura 19) cujo raio é,

$$c' = c\sqrt{1 - \frac{k^2}{b^2}} \tag{3.20}$$

Para esta relação, se k tender a zero, então c' tende a c.

$$\lim_{k\to 0} c' = \lim_{k\to 0} c\sqrt{1 - \frac{k^2}{b^2}} \Rightarrow c' = c$$

Logo, pode-se concluir que:

1. O raio c' alcança seu maior valor quando, $k = 0$.
2. Quando k cresce, c' decresce.
3. Quando $k = \pm b$, o plano tangencia a elipsoide no pondo $y = b$, anulando o raio da circunferência.
4. Quando $k > b$, a intersecção entre o plano e a elipsoide é um conjunto vazio.

A análise para $z = k$, fica como um desafio para o leitor.

3.4.2 Hiperboloide de revolução de uma folha

O hiperboloide de revolução é um sólido obtido pela rotação de um a hipérbole. Dependendo do eixo pode-se gerar um hiperboloide de revolução de uma folha ou de duas folhas.

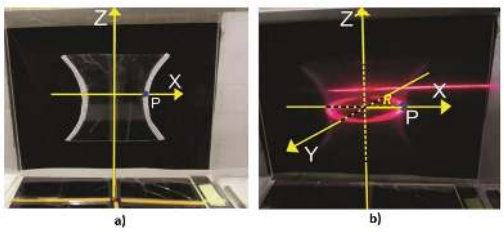


Figura 3.7: Hiperboloide visualizada por meio da MeqGir Fonte: adaptado de SANTOS, 2014

De acordo com a figura 3.7, o sólido formado é um hiperboloide de uma folha. Note que o ponto P, pertence simultaneamente à hipérbole, o hiperboloide e a circunferência, isso é válido para qualquer ponto P pertencente à superfície do hiperboloide.

Considere o caso, em que a figura plana utilizada é uma hipérbole cuja equação é dada por,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{3.21}$$

Veja a figura 3.8 tem-se o raio $R = |x|$, o que é equivalente a $R^2 = x^2$. Como a análise é realiza na intersecção entre as funções, então substitui x^2 por R^2 na equação (8). Daí,

$$\frac{R^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{3.22}$$

Por outro lado, a equação da circunferência é dada por,

$$R^2 = x^2 + y^2 \tag{3.23}$$

Substituindo a equação (22) na equação (20), obtém a equação do hiperboloide circular de uma folha de revolução dada por,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{3.24}$$

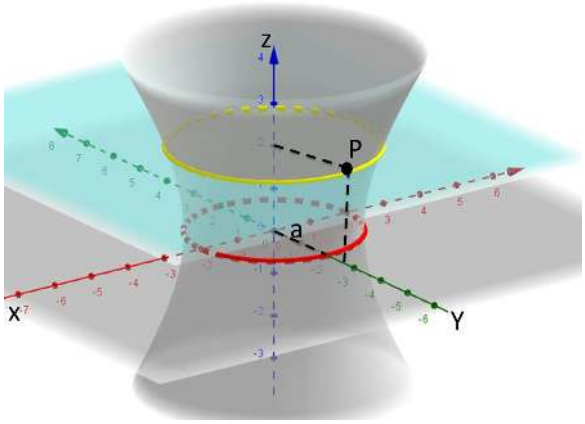


Figura 3.8: Plano z=k intersectando o hiperboloide de uma folha

Supondo o plano $z = k$ cortando o hiperboloide (3.8), a projeção será uma circunferência de raio R. Logo, manipulando a equação (23) a figura encontrada é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a equação,

$$x^2 + y^2 = a^2\left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right) \tag{3.25}$$

Observe que é a equação de uma circunferência de centro na origem e raio

$$R' = a\sqrt{\left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right)} \tag{3.26}$$

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Analisando o limite quando k tende a zero, obtém,

$$\lim_{k\to 0} R = \lim_{k\to 0} a\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}} \Rightarrow R = a \tag{3.27}$$

O que permite afirmar que,R' atingiu o seu maior valor possível.
Para o caso em que $x = k$ ou $y = k$, fica como desafio para o leitor.
De acordo com as discussões acima, tente solucionar os problemas a seguir.

1. Girando uma hipérbole contida no plano YZ, em torno do eixo Z como mostra a figura. Desenhe a superficie que você consegue visualizar. Qual a equação da superfície gerada?

2. Girando uma parábola contida no plano XZ, em torno do eixo Z, conforme a figura abaixo. Desenhe a superfície de revolução gerada. Qual a equação da superfície de revolução gerada?

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Capítulo 4

A GEOMETRIA DO TANGRAM

Neste capítulo será apresentado um curso básico de construções geométricas durante a confecção do Tangram. Baseados no sistema lógico dedutivo da matemática grega, estão organizados nesta obra os conceitos e resultados mais básicos da geometria Euclidiana Plana, consideradas como pré-requisitos para as atividades propostas. Para além do que está apresentado aqui segue como sugestão as principais referências utilizadas na construção deste capítulo [9], [13] e [5].

As notações adotadas neste capítulo são as mesmas da referência [9]. As primeiras noções são determinadas por meio de definições, no entanto, as noções primitivas de ponto, reta e plano serão adotadas sem definição, considerando que o leitor tenha conhecimento por meio da experiência, sabendo assim, distinguir os três objetos geométricos. É importante salientar que, definições e postulados são aceitos sem demonstração e as proposições só são aceitas mediante demonstração.

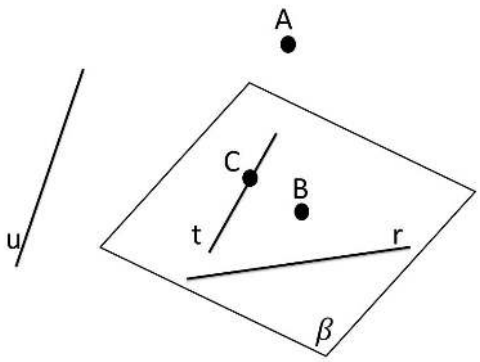


Figura 4.1: Pontos e retas no plano

Na figura 4.1, os pontos serão denotados por letras maiúsculas, as retas, por letras minúsculas, e, o plano, por letras gregas minúsculas. Dado um ponto A, só existe duas possibilidades: A pertence à reta r ou A não pertence à reta$r$. A

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

notação utilizada para o primeiro caso é $P \in r$ e no segundo $P \notin r$. Observando a figura 4.1, podemos afirmar que $A \notin r$ e $C \in t$.

Em uma reta existem infinitos pontos, e se os pontos passam todos por uma mesma reta denominam-se colineares, caso contrário, são não colineares. Além disso, três pontos não colineares sempre definem um plano. Em relação à figura 22, $r, t \subset \beta$ (lê-se a reta r e a reta t estão contidas no plano beta) e $u \not\subset \beta$ (lê-se a reta u não está contido no plano beta).

Veja na figura 4.2, temos o ponto A pertencente à reta r, dizemos que r é a reta suporte das semirreta de origem A. Por dois pontos distintos podemos passar uma única reta e definimos a distancia de A e B, como o comprimento entre do segmento de extremidades nestes pontos, denotado por $d(A, B) = \overline{AB}$, além disso, dizemos que **segmento** é esta porção situada entre$A$ e B.

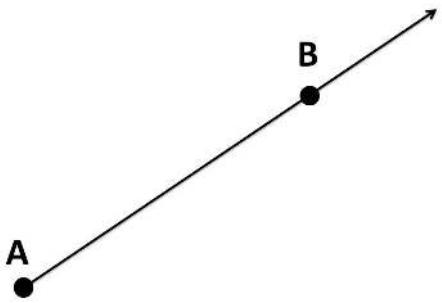


Figura 4.2: semirreta de origem A Fonte: Próprio autor

Outro objeto importante é a circunferência, definida como o lugar geométrico dos pontos equidistantes ao um mesmo ponto, ou seja, dados um ponto O e uma reta $r > 0$, o círculo de centro O e raio r é o conjunto dos pontos que estão a uma distância r do ponto O, i.e., $\overline{OP} = r$.

Este lugar geométrico é construído com facilmente com o compasso, posicionando uma de suas pontas no centro e fazendo a abertura igual a r, ao girar o compasso entorno do centro, a circunferência é definida.

Ao traçar a circunferência, definem duas regiões uma limitada e outra ilimitada, desta forma, a região limitada é formada pelos pontos P, tais que, $P \leq r$ e a região ilimitada é formada pelos pontos P, tais que, $P > r$.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

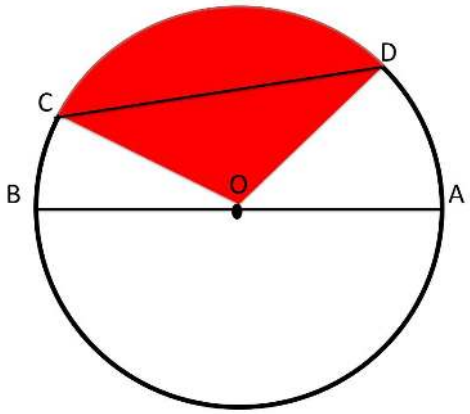


Figura 4.3: Circunferência e setor circular Fonte: Próprio autor

Observe na figura 4.3, os segmentos $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$são os raios da circunferência, o segmento $\overline{CD}$ é denominada corda, uma vez que, este é o nome dado a todo segmento que une dois pontos da circunferência, sendo a corda que passa pelo centro chamado de diâmetro da circunferência. Neste caso, o diâmetro é $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$.

A região limitada na de vermelho denomina setor circular e o segmento circular limitado por C e D sobre a circunferência é denominado arco menor . Prolongando o segmento OC e OD, o ângulo $C\hat{O}D$ permanece o mesmo, e considerando o aumento do raio outros arcos serão definidos, mas mantendo sempre o mesmo ângulo $C\hat{O}D$.

Com esta observação, você pode justificar a construção a seguir fugindo um pouco do rigor matemático, uma vez que, a justificativa pode ser feita por meio das observações de congruência, no entanto, como citado acima, o raciocínio lógico dedutivo não permite a utilização de informações que não foram apresentadas anteriormente.

Problema 1: Construa um ângulo de vértice O', com um lado situado sobre a reta r e igual ao ângulo α dado.

Mestrado Profissional em Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

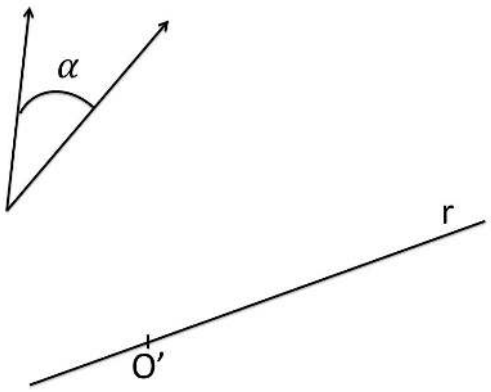


Figura 4.4:

Solução

Trace uma circunferência com centro no vértice do ângulo α, marcando nos lados do ângulo os ponto X e Y. Com a mesma abertura do compasso, faça outra circunferência com centro em O' marcando na reta$r$ o ponto Y'. Encontre o ponto X' traçando uma circunferência de centro Y' e raio XY. O ângulo $X'\widehat{O'}Y' \equiv X\widehat{O}Y$.

Problema 2: Dados os segmentos $\overline{AB} = 5$ e $\overline{DE} = 3$. Resolva com régua e compasso, as seguintes operações:

a) $\overline{AB} + \overline{DE}$

b) $\overline{AB} - \overline{DE}$

c) Divida $\overline{AB} + \overline{DE}$ em 4 partes iguais.

Solução:

a) Trace uma reta r e sobre defina o segmento $\overline{AB} = 5$, traçando uma circunferência com diâmetro sobre a reta r e centro A, logo uma das extremidades do diâmetro pode ser representado pelo ponto B. Agora, trace outra circunferência com centro em B e raio $\overline{DE} = 3$, de sorte o segmento $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{DE}$.

b) Trace uma circunferência com diâmetro sobre a reta r, centro O e raio $\overline{AB} = 5$. Marque o ponto A em uma das extremidades do diâmetro, daí $\overline{OA} = \overline{AB} = 5$. Trace outra circunferência de centro O e raio $\overline{DE} = 3$, note que, a construção encontrada será duas circunferência concêntricas, ou seja, de mesmo centro e raios diferentes e uma das extremidades (represente com o ponto E) da circunferência de raio menor pertence a $\overline{OA}$, ou seja, $E \in \overline{OA}$e $\overline{OE} = \overline{DE} = 3$, logo solução que se deseja encontrar é $\overline{EA} = \overline{AB} - \overline{DE}$.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

c) Trace uma reta r e sobre ela defina o segmento $\overline{AE}$ encontrado no item a). Trace uma reta s, passando por A. Com o auxilio do compasso, encontre o ponto $B \in s$ traçando uma circunferência C_1de raio qualquer e centro A. Com o mesmo raio da circunferência C_1 trace mais duas circunferências de modo análogo a C_1, encontrando os pontos C que será centro de C_2, D que será centro C_3e F. Trace o segmento $\overline{EF}$ e com o auxilio do esquadro trace retas paralelas a $\overline{EF}$, passando pelos pontos B, C, D. Note que, a reta r será intersectada por estes segmentos dividindo o segmento $\overline{AE}$ em quatro segmentos iguais.

Tente justificar este processo. Caso não tenha êxito, consulte [13].

Dados duas semirretas $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, um ângulo de vértice O e lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overline{OA}$ e $\overline{OA}$.

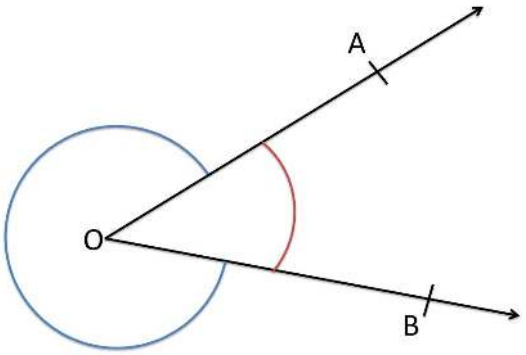


Figura 4.5: Ângulo Fonte: Próprio autor

Os ângulos são medidos em graus °, sendo que um giro completo igual a $360°$. Em casos particulares, os ângulos são denotados como agudos se $\alpha < 90°$, reto se $\alpha = 90°$, obtuso se $90° < \alpha < 180°$ e raso se $\alpha = 180°$.

Além do que já foi apresentado até este ponto, para acompanhar as propostas da construção do Tangram, é importante que o aluna aprenda quatro problemas básicos.

1. Traçar a bissetriz de um ângulo;
2. Encontrar o ponto médio;
3. Traçar retas perpendiculares;
4. Traçar retas paralelas;

No entanto, estes problemas são considerados aplicações de congruências, as discussões serão apresentadas considerando que o leitor já conheça as propriedades

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

de congruência, caso contrário, segue como sugestão a referência [9] para uma prévia leitura.

Dado um ângulo $\angle AOB$, a bissetriz deste ângulo é o segmento $\overline{OC}$ e o divide em dois ângulos iguais. Neste caos, diz-se que $\overline{OC}$bissecta $\angle AOB$.

Será considerado aqui, a bissetriz interna de um ângulo e caso exista é única.

Problema 3. Construa com régua e compasso a bissetriz do ângulo $\angle AOB$.

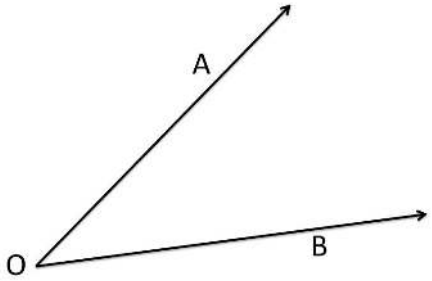


Figura 4.6: ângulo AOB

Solução:

Trace uma circunferência de centro O e raio $r < \overline{OA}$, marque os pontos $X \in \overline{OA}$ e $Y \in \overline{OB}$. Trace os círculos de raios $r > \frac{1}{2}\overline{XY}$ e centros X e Y. Marque o ponto C na intersecção das circunferências na região interna do ângulo. A semirreta $\overline{OC}$ é a bissetriz de $\angle AOB$.

Justificativa: De fato, em relação aos triângulos XOC e YOC construídos na figura 22, tem-se

$$\overline{OX} = \overline{OY} = r$$

e $\overline{XC} = \overline{YC} = s$, como OC é comum aos dois triângulos segue do caso de congruência LLL que $XOC \equiv YOC$, logo $\angle AOC = \angle COB$.

Problema 4. Construa com régua e compasso o ponto médio do segmento AB.

Solução:

Sobre uma reta r defina o segmento AB. Trace duas circunferências de raio $r > \frac{1}{2}\overline{AB}$ e centros nos ponto A e B. Marque os pontos X e Y nas intersecções das circunferências. O ponto médio é o ponto $M = \overline{XY} \cap \overline{AB}$.

Justificativa: De fato, em relação aos triângulos AXY e BXY, tem-se $\overline{AX} = \overline{BX}$ e $\overline{AY} = \overline{BY}$, como o lado XY é comum aos dois triângulos, seque do caso de congruência LLL, $\overline{AM} = \overline{MB}$. O que garante a proposição 3.1.

Proposição 3.1: Dado o ponto M e o segmento $\overline{AB}$, tal que, $M \in \overline{AB}$, diz-se que M é ponto médio de $\overline{AB}$, se e somente, se $\overline{AM} = \overline{MB}$.

Desafio: Repita a construção do problema 4, analisando os casos em que você deve considerar $r = \frac{1}{2}\overline{AB}$ e $r < \frac{1}{2}\overline{AB}$. Justifique o que acontece nestes dois casos.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Duas retas são ditas concorrentes, quando possuem um ponto de encontro. Em caso particular, se os ângulos formados pelas retas são de 90^o denomina-se retas perpendiculares.

Problema 5. Dados no plano, uma reta r e um ponto A, construa com régua e compasso uma reta s tal que $r \perp s$ e $A \in s$.

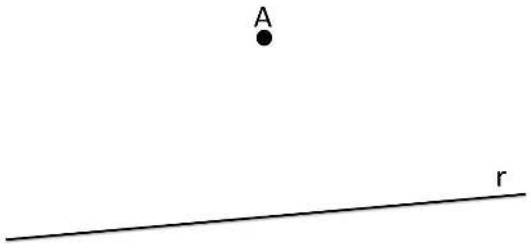


Figura 4.7:

Solução: Trace uma circunferência de centro A intersectando a reta r em dois pontos distintos B e C. Construa o ponto médio de BC e trace $s =$.

Justificativa: A justificativa é análoga ao problema 4, concluindo que $\angle BMA = \angle AMC = \alpha$, como $\angle BMA + \angle AMC = 180° \Rightarrow \alpha = 90°$. Por definição, $r \perp s$.

Desafio: Dado $A \in r$, trace $s \perp r$. Dica: *considera A ponto médio de um segmento BC.*

Duas retas são ditas paralelas, quando não possuem ponto de encontro.

Problema 6: Construa com régua e compasso uma reta s, paralela à reta r e passando pelo ponto A.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

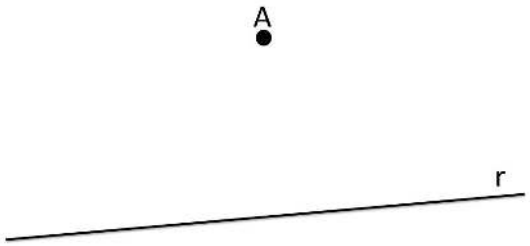


Figura 4.8:

Solução: Trace uma circunferência de centro A intersectando a reta X em dois pontos distintos, os pontos B e C. Trace o segmento AB. Construa o ângulo $\angle BAY = \angle CBA$. A reta $s \parallel r$ é a que contém o segmento AY.

Justificativa: De fato, $s \parallel r$, basta considerar uma reta $u \parallel \overline{AB}$, tal que, $D = u \cap s$ e $E = u \cap r$, formando paralelogramo $ABDE$, logo os lados são paralelos.

Desafio: Construa com régua e compasso um:

a) Quadrado.

b) Triângulo Equilátero;

c) Triângulo Isóscele;

d)Triângulo escaleno;

4.1 CONSTRUINDO O TANGRAM COM RÉGUA E COMPASSO

Além do Tangram tradicional, existem outros Tangrans com mais desafios. O passo a passo para construí-los serão descritos mais adiante.

O problema a ser resolvido é: desenhe com régua e compasso, o modelo do tangram (nome do tangram). O aluno pode ter acesso a tabela 1, pois visualizando as imagens, o alunos saberá aonde deve chegar, facilitando na suas tomadas de decisão.

Tangram Tradicional:

Faça um quadrado seguindo os passos descritos para a construção da peça da Torre de Hanói. Trace a diagonal $\overline{AC}$ em seguida marque os pontos médios E, F

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

e G dos respectivos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ (figura 25).

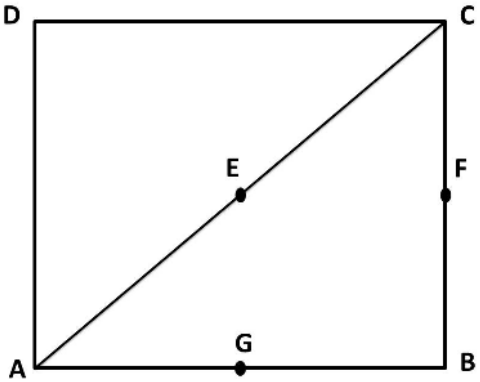


Figura 4.9:

Trace o segmento $\overline{GF}$ e marque os pontos médios H, I e J dos respectivos segmentos $\overline{GF}$, $\overline{CE}$ e $\overline{AE}$ (figura 30).

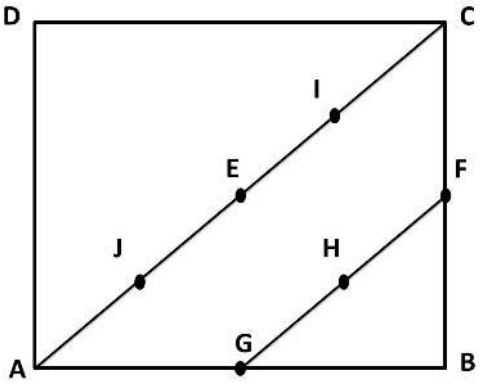


Figura 4.10:

Por fim, trace os segmentos $\overline{IH}$, $\overline{EH}$ e $\overline{JG}$.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

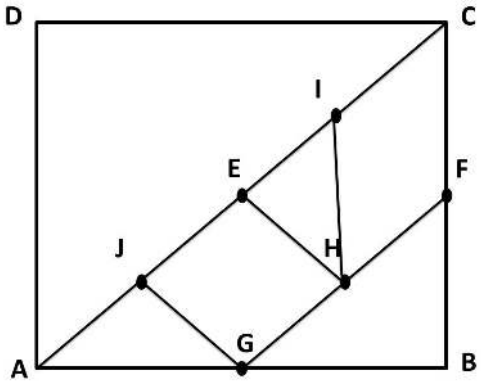


Figura 4.11:

Tangram Triangular

Comece construindo um triângulo equilátero. Marque os pontos D e E, tal que, $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EC}$.

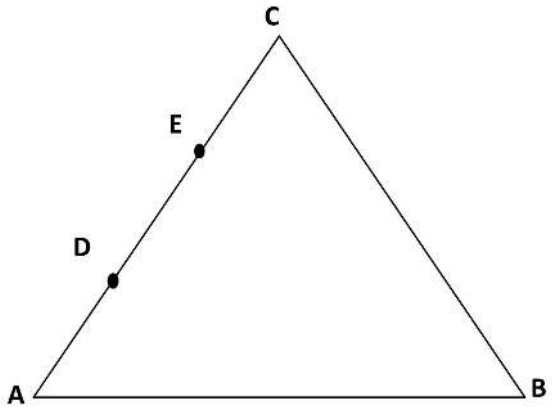


Figura 4.12:

Trace o segmento $\overline{EF}$ paralelo ao lado $\overline{BC}$ e marque o seu ponto médio G.

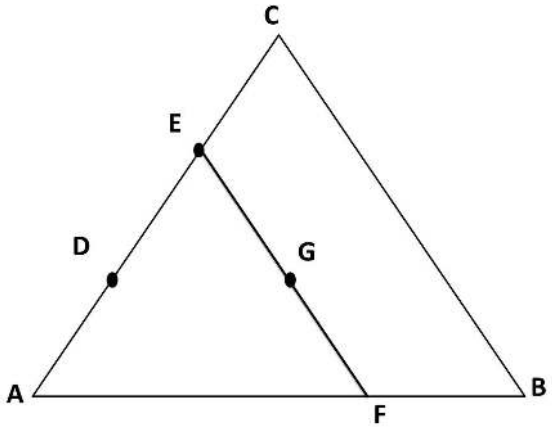


Figura 4.13:

Trace o segmento $\overline{DG} \parallel \overline{AB}$ e o segmento $\overline{DH} \parallel \overline{AC}$.

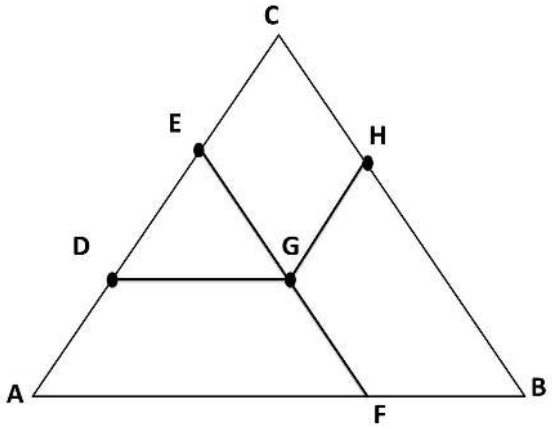


Figura 4.14:

Marque os pontos médios I, J, K e L dos respectivos segmentos $\overline{DG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{AD}$.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

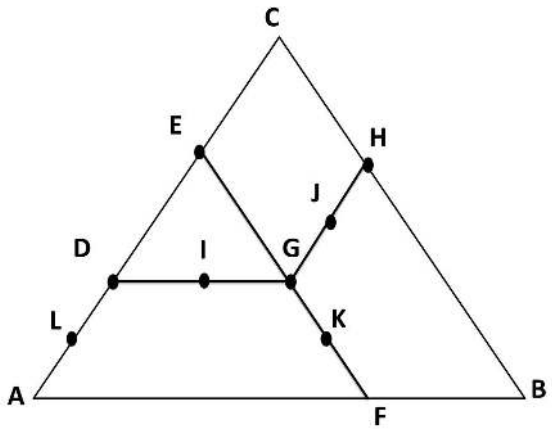


Figura 4.15:

Trace os segmentos $\overline{JM}$, $\overline{IN}$ e $\overline{LO}$ paralelos ao lado $\overline{BC}$. È importante que o segmento $\overline{IN}$, seja tracejada, já que, apenas a metade dele será importante para a construção.

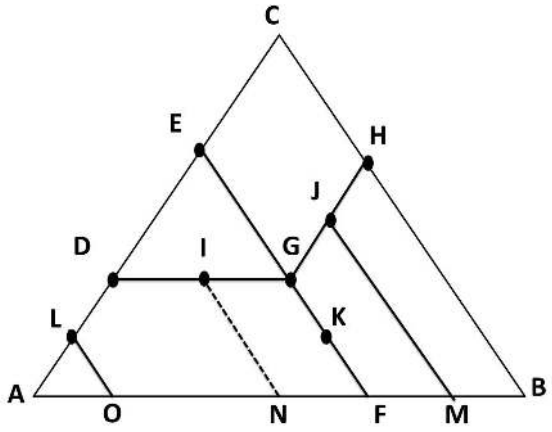


Figura 4.16:

Marque o ponto médio P do segmento $\overline{IN}$ e em seguida trace os segmentos $\overline{PK} \parallel \overline{AB}$ e $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$. Por fim, trace o segmento $\overline{IP}$.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

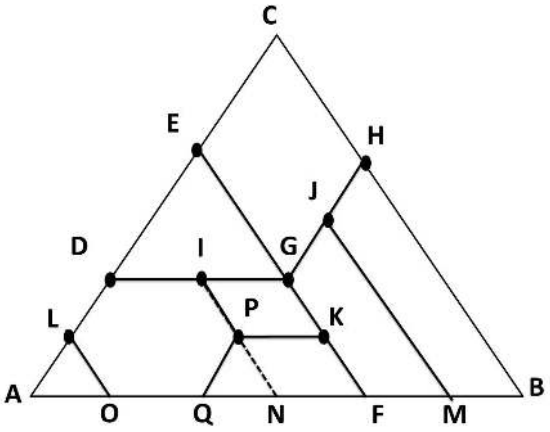


Figura 4.17:

Em forma de coração

Construa o quadrado $ABCD$ e marque os pontos médios E, F e G dos respectivos segmentos $\overline{BC}$, $\overline{DC}$ e $\overline{AD}$.

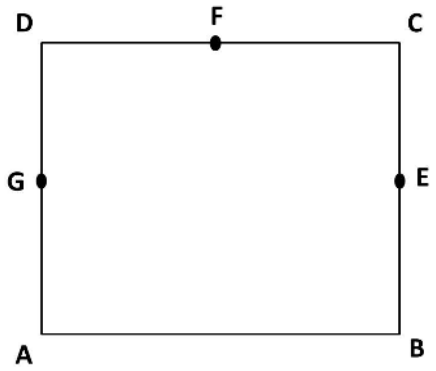


Figura 4.18:

Trace o segmento $\overline{GF}$ e os segmentos $\overline{FH} \perp \overline{GE}$, em seguida marque o ponto H na intersecção dos segmentos $\overline{GE}$ e $\overline{FH}$.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

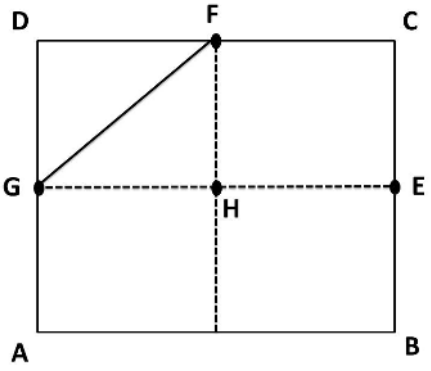


Figura 4.19:

Trace duas semicircunferências sobre os lados $\overline{DC}$ e $\overline{CB}$ com diâmetro igual a medida do lados do quadrado $ABCD$.

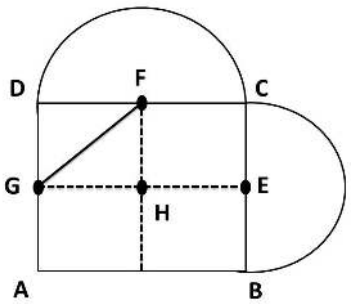


Figura 4.20:

Prolongue os segmentos $\overline{GE}$ e $\overline{FH}$ até intersectar as semicircunferências nos pontos I e J.

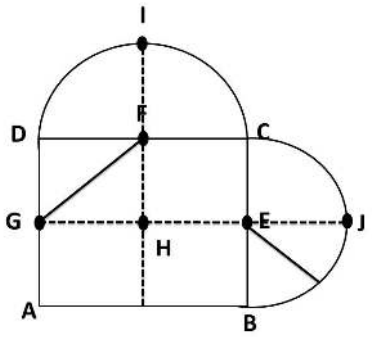


Figura 4.21:

Trace a bissetriz dos ângulos $\angle EBJ$. Por fim, trace os segmentos $\overline{IH}$, $\overline{HJ}$ e $\overline{AH}$.

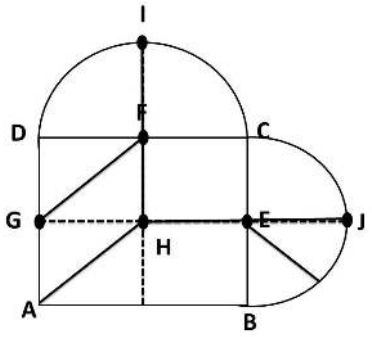


Figura 4.22:

Tangram de Fletcher

Construa um quadrado $ABCD$, trace suas diagonais e marque os pontos médios E, F, G e H dos lados.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

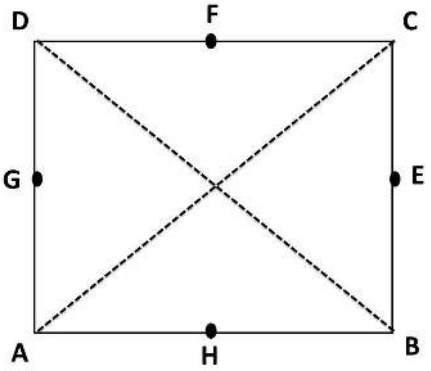


Figura 4.23:

Marque o ponto I no encontro das diagonais, e os pontos médios J e K dos respectivos segmentos $\overline{DI}$ e $\overline{CI}$, além disso, Trace o segmento $\overline{FH}$.

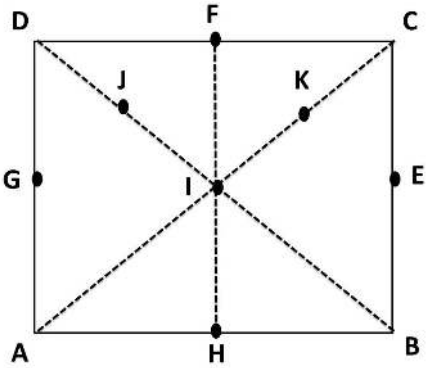


Figura 4.24:

Destaque os segmentos $\overline{GH}$, $\overline{DI}$, $\overline{IC}$, $\overline{IE}$, $\overline{IH}$, $\overline{FK}$ e $\overline{JF}$.

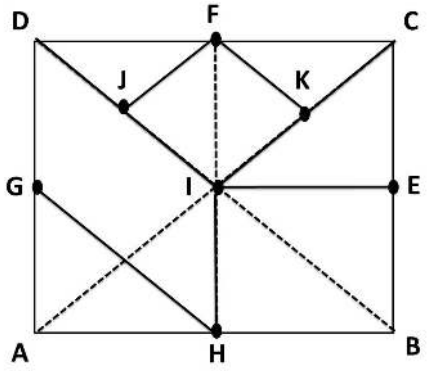


Figura 4.25:

Tangram Oval

Trace uma circunferência de centro O e diâmetro $\overline{AB}$de medida qualquer.

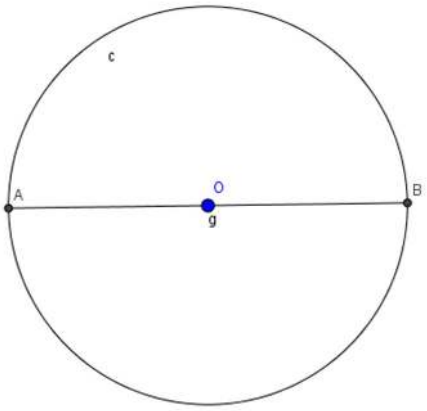


Figura 4.26:

Trace uma reta perpendicular a $\overline{AB}$ passando pelo centro O, em seguida trace os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

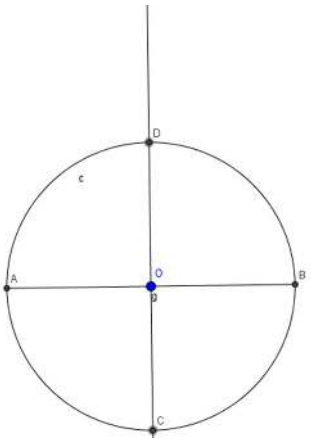


Figura 4.27:

Trace duas circunferências de raio $\overline{AB}$, centro A e centro B.

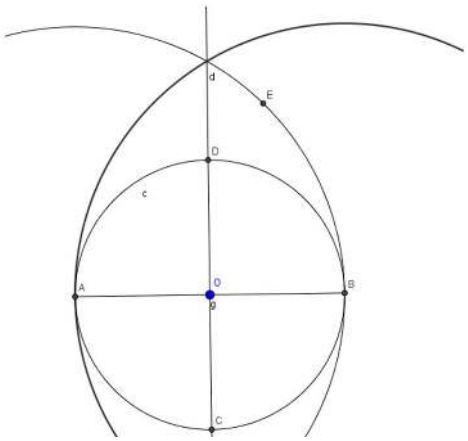


Figura 4.28:

Prolongue o segmento $\overline{AD}$ até tocar a circunferência, definindo E como esse ponto de encontro.

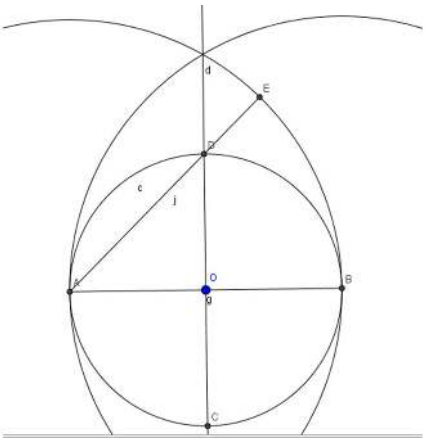


Figura 4.29:

Trace a circunferência de centro D e raio $\overline{DE}$, além disso trace o segmento $\overline{CI} = \overline{DE}$.

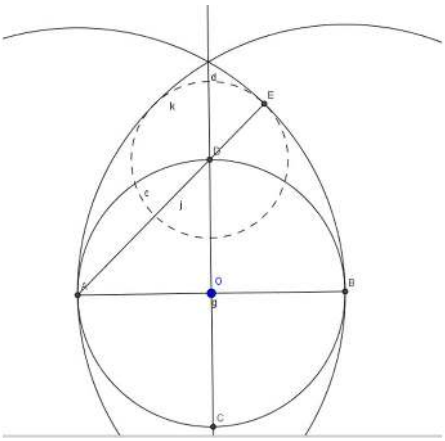


Figura 4.30:

Trace a circunferência de centro I e raio $\overline{CI}$, marcando as intersecções com o segmento $\overline{AB}$.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

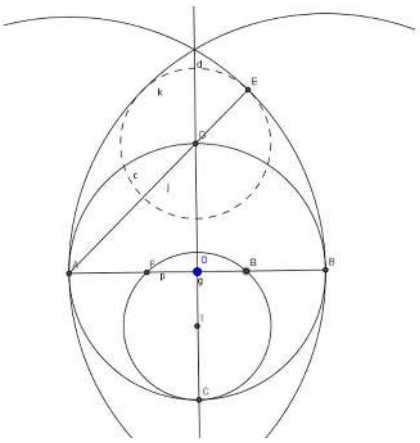


Figura 4.31:

Trace o segmento $\overline{FI}$ e $\overline{FG}$, além disso, prolongue o seguimento $\overline{BD}$ até tocar a circunferência.

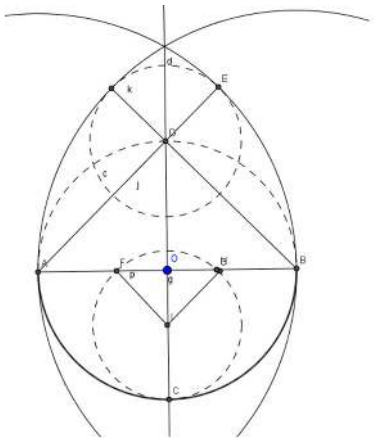


Figura 4.32:

Pronto, compare a figura 53 com a imagem na tabela 1 e recorte as peças do Tangram. Além de desenvolver o raciocínio lógico dedutivo, desenvolver a capacidade de se comunicar por meio da linguagem matemática, descrevendo estratégias e justificando suas respostas.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica. Brasília: MEC/SEB, 2013

[2] BORTOLOSSI, H. J. A PIPA TETRAÉDRICA DE ALEXANDER GRAHAM BELL. 2009. Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/pgb/pgb-html/pgb-br.html> , acesso em: 29 de nov 2016.

[3] DELGADO, J. ; FRENSEL, K. ; CRISSAFF, L. Geometria Analítica. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[4] DOLLAGHAN, Kelsey Campell. Uma máquina voadora fracassada de Alexander Graham Bell foi revivida na forma de uma estrutura flutuante. 16 de agosto de 2013. Disponível em : http://gizmodo.uol.com.br/maquina-voadora-graham-bell/

[5] DOLCE, O; POMPEU, J. N. Fundamentos da Matemática Elementar- Geometria Espacial: posição e métrica. 7ed. v.10. 2013

[6] EFMOV, N. Elementos de Geometria Analítica. Belo Horizonte-MG, 1972.

[7] IEZZI, G. , 1939. Fundamentos da matemática elementar, 7: geometría analítica. 5.ed São Paulo: Atual, 2005.

[8] LORENZATO, Sergio. Para aprender matemática. Autores associados, Campias-SP, 2006.

[9] MUNIZ NETO, A. C. Geometria. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[10] SCOPIM, Valéria. A torre de Hanói e o Jogo de Xadrez-Uma proposta de ensino de matemática aliada ao lúdico. UTPR, Madeireira-PR, 2014.

[11] SILVA, M. F.; ODY, M. C. O uso do tangram como quebra-cabeça para uma aprendizagem significativa sobre multiplicação de polinômios. XXEREMAT-Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul. Bagé-RS, nov, 2014.

[12] SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; Materiais manipulativos para o ensino de figura planas. São Paulo: Edições Mathema. 2012.

[13] WAGNER, E. Uma introdução às construções geométricas. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 87p.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2 Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

SBM

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Medio Vol. 4 - Exercicios e Soluções* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Um Convite à Matemática* - D.C de Morais Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 1 - Números Reais - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 3 - Introdução à Análise - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 4 - Combinatória - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 5 - Teoria dos Números - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 6 - Polinômios - A. Caminha
- *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)
- *Como Resolver Problemas Matemáticos* - T. Tao
- *Geometria em Sala de Aula* - A. C. P. Hellmeister (Comitê Editorial da RPM)
- *Números Primos, amigos que causam problemas* - P. Ribenboim
- *Manual de Redação Matemática* - D.C de Morais Filho

COLEÇÃO PROFMAT

- *Introdução à Álgebra Linear* - A. Hefez e C.S. Fernandez
- *Tópicos de Teoria dos Números* - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha
- *Polinômios e Equações Algébricas* - A. Hefez e M.L. Villela
- *Tópicos de Historia de Matemática* - T. Roque e J. Bosco Pitombeira
- *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática* - V. Giraldo, P. Caetano e F. Matto*s*
- *Temas e Problemas Elementares* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Números e Funções Reais* - E. L. Lima
- *Aritmética* - A. Hefez
- *Geometria* - A. Caminha
- *Avaliação Educacional* - M. Rabelo
- *Geometria Analítica* - J. Delgado, K. Frensel e L. Crissaff
- *Matemática Discreta* - A. Morgado e P. C. P. Carvalho
- *Matemática e Atualidade - Volume 1* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Fundamentos de Cálculo* - A. C. Muniz Neto
- *Matemática e Atualidade - Volume 2* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear* - A. Hefez e C. de Souza Fernandez
- *Exercícios Resolvidos de Aritmética* - A. Hefez

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D. G. de Figueiredo
- *Números Racionais e Irracionais* - I. Niven
- *Tópicos Especiais em Álgebra* - J. F. S. Andrade

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L. N. de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M. P. do Carmo
- *Matemática Discreta* - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- *Álgebra Linear: Um segundo Curso* - H. P. Bueno
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa* - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.
- *Elementos de Topologia Geral* - E. L. Lima
- *A Construção dos Números* - J. Ferreira
- *Introdução à Geometria Projetiva* - A. Barros e P. Andrade
- *Análise Vetorial Clássica* - F. Acker
- *Funções, Limites e Continuidade* - P. Ribenboim
- *Fundamentos de Análise Funcional* - G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira
- *Teoria dos Números Transcendentes* - D. Marques
- *Introdução à Geometria Hiperbólica - O modelo de Poincaré* - P. Andrade
- *Álgebra Linear: Teoria e Aplicações* - T. P. de Araújo
- *Introdução à Análise Matemática na Reta* - C. I. Doering

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2 Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

- *Topologia e Análise no Espaço Rn* - R. Freire de Lima
- *Equações Ordinárias e Aplicações* - B. Scárdua

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H. Bolfarine e M. Sandoval
- *Discretização de Equações Diferenciais Parciais* - J. Cuminato e M. Meneguette
- *Fenômenos de Transferência – com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia volume 1: Fundamentos* - J. Pontes e N. Mangiavacchi

COLEÇÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª* - E. Mega e R. Watanabe
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª* - C. Moreira e E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues
- *21 Aulas de Matemática Olímpica* - C. Y. Sh
- *Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções* - K. I. M. Oliveira e A. J. C. Fernández
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Fundamental* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Médio* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 17ª a 24ª* - C. G. T. de A. Moreira, C. Y. Shine, E. L. R. Motta, E. Tengan e N. C. Saldanha
- *10 matemáticos 100 problemas* - E. Wagner (Organização)

COLEÇÃO FRONTEIRAS DA MATEMÁTICA

- *Fundamentos da Teoria Ergódica* - M.Viana e K. Oliveira
- *Tópicos de Geometria Diferencial* - A. C. Muniz Neto
- *Formas Diferenciais e Aplicações* - M. Perdigão do Carmo

COLEÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume I Números Naturais* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo
- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume II Números Inteiros* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo

APOIO:





ISBN 978-85-8337-127-4

