2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA: DO LIVRO DIDÁTICO AO MUNDO REAL

Vitor Amorim

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

O Ensino de Matemática Financeira: do livro didático ao mundo real

O Ensino de Matemática Financeira: do livro didático ao mundo real

Capa: Pablo Diego Regino
Projeto gráfico: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

ISBN: 978-85-8337-126-7

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

2º Simpósio de Formação do
Professor de Matemática da Região Nordeste

O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA: DO LIVRO DIDÁTICO AO MUNDO REAL

Vitor Amorim

1ª edição
2016
Rio de Janeiro

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Sumário

Prefácio

Este material constitui o texto de base para minicurso *O Ensino de Matemática Financeira: do livro didático ao mundo real*, ministrado no 2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste. O objetivo central deste minicurso é discutir o ensino de Matemática Financeira na etapa do Ensino Médio. A abordagem deste tema nos livros didáticos de Ensino Médio segue, em geral, um roteiro insuficiente (e muitas vezes desconectado da realidade) para a aprendizagem das noções básicas sobre o tema que são necessárias para o relacionamento dos alunos com o mercado financeiro. Visto que os roteiros propostos nos livros didáticos acabam sendo quase sempre um guia da prática docente, este minicurso foi construído sobre dois objetivos: primeiramente, pretende-se fazer uma análise crítica da prática tradicional do ensino da Matemática Financeira nas escolas de ensino básico do país, utilizando como base tanto a experiência dos participantes do minicurso quanto as propostas apresentadas em alguns dos livros didáticos mais adotados nas escolas do país; complementa-se a reflexão com a discussão de dois documentos curriculares oficiais no seu tratamento do tema: os PCN+ e Base Nacional Comum Curricular. O segundo objetivo do minicurso é apresentar uma breve proposta de sequência didática para o ensino da Matemática Financeira. Através de exemplos e problemas calcados em situações reais, procura-se dar uma resposta às questões levantadas na primeira parte do curso, buscando-se construir uma proposta que desenvolva as habilidades relacionadas à Matemática Financeira essenciais para o desenvolvimento da autonomia do aluno no seu relacionamento com o mercado financeiro. Em particular, a proposta apresenta temas tradicionalmente deixados de lado nos livros didáticos e na prática docente do ensino básico em geral, como a equivalência de capitais, que desenvolve no aluno a competência da análise para tomada de decisões, e os sistemas de amortização.

Agradecimentos

Agradeço à Associoção Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica (ANPMat) pelo convite e todo o apoio necessário para o desenvolvimento e a apresentação deste minicurso no 2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste. Agradeço também à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) por toda estrutura oferecida ao evento e pelo convite para a publicação deste material.

Agradeço ainda a atenção, apoio e carinho no acolhimento dos servidores e alunos do IFPI - câmpus Floriano, em especial ao professor Odimógenes Lopes, que teve o árduo trabalho de organizar um evento tão bem sucedido como foi em um curto espaço de tempo.

Por fim, agradeço à Graziele Mozer pelo apoio irrestrito durante as participações nos simpósios, no desenvolvimento do minicurso e deste material. E agradeço também ao grande amigo Cezar Teixeira pelas valiosas sugestões de exemplos e situações-problema da prática do mercado financeiro.

Introdução

O ensino de Matemática Financeira no Ensino Básico obedece, frequentemente, um roteiro padronizado descrito pelos livros didáticos mais utilizados no país. Em geral, inicia-se o tema com uma revisão dos cálculos com porcentagens, abordando acréscimos e descontos percentuais e determinação de taxas. Em seguida, introduz-se os conceitos de Capital, Juros, Taxa de Juros e Montante e então, o aluno é apresentado a dois regimes distintos de juros: os Juros Simples e os Juros Compostos; em seguida, suas fórmulas para cálculo do montante são apresentadas (às vezes sem justificativa) e exaustivamente aplicadas em exemplos e exercícios quase sempre desconectados da realidade. Alguns livros chegam a tratar rapidamente, e aparentemente como um tema complementar, de alguns problemas de equivalência de capitais e de atualização financeira.

Na idade adulta, o aluno passa a ter contato com o mercado financeiro através de empréstimos, financiamentos, investimentos, entre outras operações financeiras, e então verifica que o conceito de Juros Simples não é utilizado em parcelamentos, investimentos ou empréstimos, como sugerem vários exercícios constantes nos livros didáticos, e têm aplicação apenas em um caso bem específico, motivada por propriedades das funções afim e exponencial. E a fórmula de Juros Compostos, mesmo com uma presença maior em operações financeiras, se aplica apenas a uma parcela das situações reais enfrentadas pelos consumidores. Os sistemas de amortização mais utilizados no mercado de empréstimos e financiamentos, como os sistemas PRICE e SAC, sequer são mencionados na maioria dos livros didáticos. Além disso, habilidades importantes como determinar taxas de juros equivalentes, determinar taxas acumuladas, resolver problemas de amortização, determinar taxas de juros embutidas em financiamentos, decidir entre duas ou mais opções ao fazer uma operação financeira, fazer comparações utilizando equivalência de capitais, determinar o valor presente de um financiamento e compará-lo ao preço à vista, fazer simulações em planilhas eletrônicas, entre outras, são pouco ou nada abordadas nos exercícios propostos nesses livros.

Neste contexto, o minicurso proposto pretende fazer uma breve analisar crítica as sequências didáticas apresentadas em alguns dos livros didáticos de Ensino Médio mais utilizados do país, bem como a forma como alguns documentos curriculares oficiais tratam o tema Matemática Financeira. Em seguida, apresenta-se uma proposta de ensino para este tema que procura sanar os dois principais problemas apontados na primeira parte: a insuficiência de conteúdos e a conexão com a realidade do mercado financeiro.

Capítulo 1

O Ensino de Matemática Financeira: uma crítica

Faremos nesta parte do minicurso uma breve análise e discussão sobre a prática do ensino, os processos de aprendizagem e o contato cotidiano das pessoas com conceitos básicos da Matemática Financeira, observando a prática tradicional do ensino deste tema no ensino básico. Para isso, tomaremos como base os roteiros apresentados em alguns livros didáticos adotados pelo PNLD e amplamente utilizados nas redes de ensino do país. Além disso, propõe-se uma reflexão baseada na experiência dos participantes do minicurso, como discientes e docentes, nas aulas dos ensinos básico e superior que abordaram o tema da Matemática Financeira e na sua relação direta com o mercado financeiro. Complementa-se a reflexão com a discussão dos documentos curriculares oficiais no seu tratamento do tema.

1.1 Análise dos Livros Didáticos

Ao comparar as propostas de alguns livros didáticos com as situações com as quais o aluno vai se deparar ao tomar contato com o mundo real do mercado financeiro, as incongruências são logo encontradas nos exemplos abundantes de pagamentos de empréstimos concedidos no regime do juros simples, prática inexistente no mercado. Uma possível razão a ser apontada para essa prática seriam as vantagens didáticas de se optar por esta abordagem. Segundo essa versão, a compreensão dos Juros Compostos seria facilitada se precedida pelo ensino de Juros Simples. Mais a frente, apresentaremos outro ponto de vista nesse sentido.

Além disso, como mencionado acima, o ensino tradicional não aborda os sistemas de amortização mais utilizados em empréstimos bancários e no financiamento de automóveis, imóveis e outros bens duráveis; dificilmente são tratados problemas de tomada de decisão envolvendo equivalência de capitais, como decidir entre comprar um bem à vista ou efetuar o parcelamento mantendo o dinheiro aplicado; tampouco questões envolvendo o desenvolvimento de uma postura crítica em relação aos produtos oferecidos pelo mercado financeiro, como determinar taxas de juros embutidas em financiamentos ditos 'sem juros', são abordadas.

Os tópicos comumente abordadas nos livros didáticos de Ensino Médio são:

- Porcentagem
- Aumentos e Descontos
- Variações Sucessivas
- Juros Simples
- Juros Compostos
- Juros e Funções

Pode-se encontrar em alguns poucos livros menções e um rápido tratamento sobre os sistemas de amortização e/ou problemas envolvendo equivalência de capitais. Mas em geral, esses tópicos parecem ser tratados como complementares ou de aprofundamento.

Para embasar nossa reflexão, exibimos abaixo alguns exemplos e exercícios extraídos dos livros didáticos analisados e que aparecem com muita frequência no tratamento do tema dado pelos livros:

1. Um capital de R$ 1200,00 é aplicado em regime de juros simples, por 3 anos, à taxa de 1% ao mês. Calcule o montante obtido com essa operação.

2. Rose aplicou R$300,00 em um investimento que rende 2% ao mês no regime de juros compostos. Que valor ela terá ao final de três meses?

3. Um capital de R$ 500,00, aplicado durante 4 meses a juros compostos e a uma taxa mensal fixa, produz um montante de R$ 800,00. Qual é a taxa mensal de juros?

4. Uma dívida de R$ 750,00 foi paga 8 meses depois de contraída e os juros pagos foram de R$ 60,00. Sabendo que o cálculo foi feito usando juros simples, qual foi a taxa de juros?

Por outro lado, no relacionamento dos consumidores com mundo real do mercado financeiro, encontramos questões que nem sempre são respondidas com o conhecimento obtido no Ensino Médio:

1. Como é feito o cálculo dos rendimentos de uma aplicação na poupança ou em fundos de renda fixa? Qual o regime de juros aplicados?

2. Qual é o regime de juros aplicado para um dívida no cheque especial cuja taxa é de 14% ao mês? E se a dívida se prolongar por 3 meses e 10 dias, como é feito o cálculo relativo aos 10 dias?

3. Em um financiamento imobiliário, como é feito o cálculo das prestações, dos juros e do montante? E no caso de um automóvel?

4. Existe parcelamento sem juros? Como calcular taxas embutidas?

5. Como são calculados os juros de mora, cobrados por atrasos em pagamentos?

6. Como determinar os juros cobrados em empréstimos? Como as parcelas são calculadas?

7. Vale a pena pagar à vista, havendo a opção investir o dinheiro e ir pagando à prazo?

8. Qual é a diferença entre taxa nominal e taxa efetiva de juros? Uma taxa de 2% ao mês gera o mesmo montante que uma taxa de 24% ao ano?

9. Dadas as taxas de inflação em períodos consecutivos, como calcular a taxa de inflação acumulada?

Como podemos observar, a opção pelo ensino de Matemática Financeira focado nos conceitos de Juros Simples e Compostos e nas aplicações de suas fórmulas de cálculo, é insufuciente para o desenvolvimento de habilidades nos alunos que os permitam interagir de forma autônoma e crítica com as situações apresentadas pelo mercado financeiro e que têm forte presença no dia a dia da maioria das pessoas.

1.2 Propostas Curriculares e Documentos Oficiais

Completando a análise proposta, acrecentamos à discussão o tratamento dado à Matemática Financeira nas orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) e, principalmente, na proposta da Base Nacional Comum Curricular do Ministério da Educação, considerando a relevância dos debates nacionais acerca desta proposta que estabelecerá os objetivos de aprendizagem mínimos que deverão ser desenvolvidos em todas as escolas do país.

No caso do documento PCN+ do Ensino Médio, observa-se que a Matemática Financeira está contida no eixo *Álgebra: números e funções* e é mencionada como aplicação do estudo de funções, mas não aparece no quadro de conteúdos, conforme vemos na Figura 1.1 a seguir. A única referência ao tema encontra-se no seguinte trecho do documento: *"As funções exponencial e logarítmica, por exem-*

plo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável dependente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira,...". Ou seja, o documento sugere que a Matemática Financeira não é um tópico próprio, independente do estudo de funções, o que pode sugerir uma redução ainda maior do escopo de trabalho deste tema, que já é deficitário.

1ª série	2ª série	3ª série
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; seqüências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.

Figura 1.1: Quadro de Temas PCN+ - Eixo Álgebra: números e funções

Por outro lado, a abordagem da Matemática Financeira na 2ª versão da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), divulgada em abril de 2016, apresenta um avanço considerável no tratamento do tema, inserindo-o em todas as séries do Ensino Fundamental II e em quatro das cinco unidades curriculares do Ensino Médio. Além disso, são abordandos importantes tópicos que antes eram ignorados, como parcelamentos, financiamentos, amortizações, previdência, entre outros. O documento traz ainda *Consumo e Educação Financeira* como tema integrador (a ser trabalhado de forma interdisciplinar com as demais áreas e disciplinas) e um tratamento curricular do tema em espiral, o que proporciona a retomada e o aprofundamento contínuo dos tópicos relacionados à Matemática Financeira.

Na BNCC, a Matemática Financeira está contida na unidade de conhecimento *Números e Operações*. A tabela abaixo apresenta os objetivos de aprendizgem que devem ser atingidos pelos alunos do Ensino Fundamental II, propostos pelo documento.

Ano	**Objetivos de Aprendizagem**
6º EF	Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens (1%, 5%, 15%, ... até 100%), a partir da ideia de proporcionalidade, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos da Educação Financeira, entre outros.
7º EF	Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens, compreendendo as ideias de acréscimo simples e de decréscimo simples utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto da Educação Financeira, entre outros.
8º EF	Resolver e elaborar problemas, envolvendo porcentagem, incluindo a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e determinação de taxa percentual, preferencialmente com o uso de calculadora, no contexto de aplicações financeiras.
9º EF	Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagem, porcentagem de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, relacionando representação percentual e decimal, incluindo o uso de tecnologias digitais.

Para o caso do Ensino Médio, a 2ª versão da BNCC organiza os objetivos de aprendizagem deste segmento não mais em séries, mas em cinco unidades curriculares. A tabela a seguir mostra os objetivos que devem ser atingios pelos alunos em quatro dessas cinco unidades. Observamos que, dentro da unidade de conhecimento *Números e Operações*, a Matemática Financeira não está presente apenas na unidade curricular II, como vemos a seguir.

Unidade Curricular	**Objetivos de Aprendizagem**
I EM	Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagem e juros compostos, incluindo o uso de tecnologias digitais.
III EM	Resolver e elaborar problemas, envolvendo porcentagem em situações tais como cálculos de acréscimos e decréscimos, taxa percentual e juros compostos, parcelamentos, financiamentos, dentre outros, com o uso de tecnologias digitais.
IV EM	Resolver e elaborar problemas, envolvendo porcentagem em situações tais como cálculos de acréscimos e decréscimos, taxa percentual e juros compostos, parcelamentos, financiamentos, dentre outros, com o uso de tecnologias digitais.
V EM	Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagem em situações financeiras reais, como cartão de crédito, financiamento, previdência, tabela price, amortização, dentre outros.

Diante do exposto, concluímos que o tratamento da Matemática Financeira nos documentos curriculares oficiais apresentou um grande avanço com a proposta contida na 2ª versão da BNCC. Além indicar que o tema deve ser abordado em todas as séries do Ensino Fundamental II e em quase todo o Ensino Médio, o documento propõe a abordagem de tópicos atualmente ignorados (como tabela price e amortização, por exemplo) cuja aprendizagem é fundamental para a educação financeira dos alunos e o desenvolvimento de uma postura crítica e autônoma no seu relacionamento com o mercado financeiro.

Por fim, observamos que os objetivos de aprendizagem propostos pela BNCC, se trabalhados de forma adequada em sala de aula, podem sanar os dois principais problemas do ensino de Matemática Financeira apontados neste minicurso: a insuficiência de conteúdos e a conexão com a realidade do mercado financeiro.

Capítulo 2

Uma Proposta para o Ensino de Matemática Financeira

Na segunda parte deste minicurso, será apresentada uma proposta de sequência didática que contemple as necessidades discutidas na primeira parte. Serão apresentados definições e exemplos baseados em situações reais do mercado financeiro, discutindo-se os conteúdos matemáticos e as possibilidades didáticas de traballho com cada um deles.

Em particular, a proposta aqui apresentada sugere uma forma diferente da trabalhada tradicionalmente para a introdução dos conceitos de juros simples e compostos. O conceito de Juros Compostos é apresentado anteriormente ao de Juros Simples, como aplicação do cálculo de variações pecentuais sucessivas, facilitando a dedução e a assimilação da fórmula que relaciona o montante, o capital, o prazo e a taxa de juros.

O tratamento dos Juros Simples é feito posteriormente, abordando-o de forma indissociável do seu contexto bem específico de aplicação no mercado. Tal contexto se baseia na relação da evolução dos montantes nos regimes de juros simples e compostos com as funções afim e exponencial, respectivamente. Aproveita-se este momento da sequência didática para desenvolver os conceitos de taxas de juros proporcionais e equivalentes, juntamente com suas aplicações e relações com os regimes apresentados.

Outro ponto de destaque da proposta é a resolução de problemas envolvendo amortizações, equivalência de capitais e, como forma de aplicação, situações que envolvem tomada de decisões diante de duas ou mais opções financeiras apresentadas. Na sequência, trabalha-se com as tabelas de amortização e a introdução dos dois principais sistemas de amortização utilizados no mercado financeiro: SAC e PRICE. A maioria dos financiamentos de imóveis, automóveis, bens duráveis e empréstimos bancários são feitos com base nesses dois sistemas e, portanto, sua aprendizagem deve ser um objetivo central no estudo da Matemática Fincanceira.

É importante mencionar ainda que o início dessa sequência depende de um conhecimento básico do cáclulo com porcentagens, especialmente das habilidades de compreensão do conceito de porcentagem, de relacionar uma porcentagem à sua representação decimal, do cálculo da porcentagem de um número utilizando representações decimais e de compreender e determinar aumentos e descontos percentuais de uma determinada quantia. Portanto, uma retomada desses conteúdos pode ser importante antes do início da sequência.

O objetivo principal deste capítulo do minicurso é apresentar e discutir uma proposta de sequência didática, com base nos conteúdos matemáticos envolvidos, sua forma de abordagem e sua relação direta com o mundo real do mercado financeiro. Entretanto, não serão discutidas possibilidades de metodologias de ensino para desenvolver esta sequência; tal discussão, apesar de sua importância no processo de ensino e aprendizagem, não caberia no tempo disponível para o minicurso juntamente os outros tópicos de discussão propostos.

Cabe ressaltar, entretanto, que o ensino de Matemática Financeira, por motivos óbvios, é indissociálvel do uso de tecnologias digitais, especialmente as calculadoras científicas e/ou financeiras e as planilhas eletrônicas. Existem também vários aplicativos destinados a *smartphones* e *tablets* cujas funcionalidades vão ao encontro dos objetivos da nossa proposta. Além disso, o *software* GeoGebra também pode ser utilizado pelos alunos e pelo professor para a análise e resolução de exercícios e exemplos, conforme será exemplificado no estudo dos regimes de juros simples e compostos e dos sistemas de amortização mais a frente.

A tabela abaixo contém as habilidades que são consideradas essenciais nessa proposta para serem desenvolvidas pelos alunos e que norteiam o desenvovimento do minicurso.

	Quadro de Habilidades
1	Resolver problemas envolvendo a determinaçao do valor final de uma grandeza que sofreu variação percentual e a determinação de taxas de variação percentual.
2	Resolver problemas envolvendo variações percentuais sucessivas.
3	Resolver problemas envolvendo o conceito de juros compostos.
4	Relacionar e determinar taxas de juros equivalentes e proporcionais.
5	Resolver problemas envolvendo o conceito de juros simples, compreendendo o seu contexto de aplicação no mercado financeiro e relacionar a variação de um montante nos regimes de juros simples e compostos às funções afim e exponencial, respectivamente.
6	Resolver problemas envolvendo equivalência de capitais, parcelamentos e amortizações e analisar situações financeiras que demandam tomada de decisões.
7	Construir tabelas de amortização, pricipalmente nos sistemas Price e SAC, analisar e comparar graficamente a evolução do saldo devedor, prestação, juros e amortização de um financiamento.

Cada uma das seções a seguir refere-se à uma habilidade listada no quadro acima e apresentará, além de um breve comentário sobre o tópico envolvido, algumas definições, fórmulas, exemplos e resoluções sugeridos para que sejam trabalhados em sala de aula no desolvimento desta sequência. Entretanto, os exemplos apresentados constituem apenas algumas sugestões que foram selecionadas por serem importantes o suficiente para caberem no espaço destinado ao minicurso. O participante deve ter em mente que o desenvolvimento de cada tópico deve ser feito de forma mais detalhada e com um número maior de exemplos e exercícios do que os que são apresentados aqui.

2.1 Variação Percentual e Taxas

O primeiro tópico abordado é o estudo do cálculo de variações percentuais, trabalhando aspectos mais aprofundados do que aqueles já vistos no Ensino Fundamental. Em particular, é dado o foco no conceito de taxa de variação percentual, procurando desenvolver no aluno a habilidade de efetuar cálculos e resolver problemas envolvendo acréscimos e desconto percentuais, através da utilização do fator de variação $1 + i$, onde i é uma determinada taxa percentual.

Definição 1. *Dada uma taxa percentual i chamamos o número $1 + i$ de fator de variação percentual. Se i for positivo, $1 + i$ pode ser chamado também de fator de aumento e, para i negativo, fator de desconto.*

Exemplos e Situações-problema - Habilidade 1: Resolver problemas envolvendo a determinaçao do valor final de uma grandeza que sofreu variação percentual e a determinação de taxas de variação percentual.

Exemplo 1. *Determinar o valor final de um produto cujo valor de R$ 120,00 sofreu aumento de 7% e, em seguida, desconto de 7%.*

• Primeira variação - fator de aumento: $1,07$

$$120 \cdot 1,07 = 128,40$$

• Segunda variação - fator de desconto: $0,93$

$$128,4 \cdot 0,93 = 119,41$$

Problemas deste tipo devem ser usados para enfatizar o caráter relativo do aumento e desconto percentual, desfazendo um engano comum de achar que o aumento e o desconto sucessivo da mesma taxa resultará no valor inicial. Da mesma forma, o exemplo a seguir mostra que a taxa de variação entre dois valores depende também de qual se toma como valor final e inicial e não apenas dos valores.

Exemplo 2. *Determinar a taxa de variação percentual de um bem cujo valor foi de R$ 450,00 para R$ 530,00. Qual será a taxa de variação se o produto voltar ao valor inicial?*

• Fator de **aumento** da primeira variação: $1+i_1$

$$450\cdot(1+i_1)=530 \Rightarrow 1+i_1 \approx 1,1778 \Rightarrow i_1 \approx 17,78\%$$

• Fator de **desconto** da segunda variação: $1-i_2$

$$530\cdot(1-i_2)=450 \Rightarrow 1-i_2 \approx 0,8491 \Rightarrow i_2 \approx 15,09\%$$

2.2 Variações Percentuais Sucessivas

Desenvolvidas as noções de fator de aumento e desconto percentual e as respectivas determinações de taxas, trabalhamos em seguida com a ideia de variações percentuais sucessivas, que compreende aumentos percentuais sucessivoes aplicados a uma determinada quantia, ou descontos sucessivos ou, ainda, aumentos seguidos de descontos.

O último exemplo desta seção mostrará uma forma importante de aplicação imediata de aumentos sucessivos com taxa constante: os Juros Compostos. Resolveremos um problema envolvendo esse regime de juros sem necessarimente definir ou sequer citar seu conceito.

Utilizaremos nesta seção seguinte propriedade, que é de verificação imediata (mas que deve ser justificada com cautela para os alunos): se uma determinanda quantia sofre variações percentuais (aumento e/ou desconto) sucessivas das taxas i e j, então a taxa final de variação I em relação à quantia inicial é dada pela relação:

$$1+I=(1+i)(1+j)$$

Essa propriedade por ser estendida para mais de duas variações sucessivas.

Exemplos e Situações-problema - Habilidade 2: Resolver problemas envolvendo variações percentuais sucessivas.

Exemplo 3. *Se a taxa de inflação em um ano é de 11% e, no seguinte, é de 6,5%, qual é a taxa de inflação acumulada do biênio?*

Seja I a taxa de inflação acumulada. Então:

$$1+I=(1,11)\cdot(1,065) \Rightarrow 1+I=1,18215 \Rightarrow I=18,215\%$$

Esse tipo de problema constuma levar a mais um tipo comum de engano que é o de pensar que a taxa de inflação acumulada do biênio seria dada pela soma das duas taxas, ou seja, 17,5%.

Exemplo 4. *A tabela a seguir mostra a variação do preço do dólar durante a semana. Qual foi a taxa de variação acumulada? Houve valorização ou desvalorização ao final da semana?*

Dia	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
Variação	$-2,35\%$	$1,37\%$	$1,05\%$	$-0,13\%$	$0,21\%$

Se I é a taxa semanal, então:

$$1 + I = 0,9765 \cdot 1,0137 \cdot 1,0105 \cdot 0,9987 \cdot 1,0021 \approx 1,00107 \Rightarrow I \approx 0,107\%$$

Ou seja, houve valorização aproximada do dólar de $0,107\%$.

Exemplo 5. *Ao aplicar uma quantia de R$ 500,00, por 3 anos, em um fundo de investimento cuja taxa fixa é de 0,7% ao mês, capitalizados mensalmente sobre a quantia acumulada, qual será o valor a ser resgatado ao final do período?*

Fator de aumento acumulado nos 36 meses de aplicação:

$$1 + I = (1,007)^{36} \approx 1,2855$$

Logo,

$$V_f = 500 \cdot (1,007)^{36} \approx R\$642,73$$

O problema apresentado no exemplo 5 é comum de se encontrar nos livros didáticos na seção de Juros Compostos. De fato, o conceito envolvido na resolução do problema é o de Juros Compostos, porém, este exemplo foi colocado neste ponto da sequência (sem ter sido feita sequer a menção desse regime de juros) propositalmente, com o objetivo de introduzir os juros compostos como aplicação do tópico *Variações Percentuais Sucessivas*. Dessa forma, após um trabalho consistente com problemas de variações sucessivas, a introdução do conceito e da fórmula do regime de juros compostos pode acontecer de forma mais natural e imediata para os alunos.

2.3 Juros Compostos

O conceito de Juros Compostos é o único tópico da presente proposta que apresenta alguma semelhança com a abordagem feita nos livros didáticos. Entretanto, deve-se tomar o cuidado para não reduzir o seu estudo à uma sequência exaustiva e sem sentido de aplicações da fórmula do montante, retirando o foco do raciocínio financeiro e transferindo-o para um mero estudo algébrico. Tampouco essa fórmula deve ser apresentada sem justificativa ou sem a conexão do conceito de juros compostos com o de variações sucessivas. A definição que apresentaremos abaixo pode ser deduzida, por exemplo, a partir da generalização do exemplo 5.

Sugere-se ainda que, neste ponto da sequência, sejam propostas aos alunos uma pesquisa e uma breve apresentação do desenvolvimento histórico da ideia de juros e seus diferentes regimes (sem detahar por ora o regime de juros simples), com o objetivo de definir e consolidar o significado desses termos. Em seguia, pode-se definir formalmente o regime de juros compostos.

Definição 2. *O regime de capitalização onde a taxa é aplicada a cada período sobre o valor acumulado do capital com os juros dos períodos anteriores, é chamado de regime de juros compostos. Dessa forma, um capital C aplicado a juros compostos a uma taxa i, gera, após n períodos de aumentos sucessivos constantes, o montante M dado por:*

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Exemplos e Situações-problema - Habilidade 3: Resolver problemas envolvendo o conceito de juros compostos.

Exemplo 6. *Ao dispor de um capital de R\$10.000,00 e uma taxa de rendimento de 1% ao mês, qual é o montante obtido em um período de 5 anos de aplicação? Se o investidor tivesse a opção de dobrar um das três grandezas dadas (capital, taxa e prazo), qual geraria o maior montante?*

• No prazo de cinco anos (60 meses)

$$M = 10000 \cdot (1,01)^{60} \approx R\$18.166,97$$

• Dobrando o capital, obtemos

$$M = 20000 \cdot (1,01)^{60} \approx R\$36.333,93$$

• Se a taxa for de 2% ao mês

$$M = 10000 \cdot (1,02)^{60} \approx R\$32.810,31$$

• Com 120 dias de prazo

$$M = 10000 \cdot (1,01)^{120} \approx R\$33.003,87$$

Sendo assim, a opção mais vantajosa neste caso é dobrar o valor do capital.

Uma questão interessante que se põe neste exemplo é a seguinte: dobrar o capital é sempre a melhor opção? A resposta é não, pois depende dos dados iniciais do problema. Na figura 2.1 os gráficos mostram que dobrar o prazo passa a ser mais vantajoso a partir de 70 meses (como dado inicial), enquanto que dobrar a taxa é mais vantajoso que dobrar o capital a partir de 71 meses.

Pode-se aproveitar este exemplo para incentivar nos alunos o hábito de fazer simulações no GeoGebra e em planilhas eletrônicas, além de generalizar o problema colocando cada um dos dados iniciais como variáveis.

Exemplo 7. *Qual é o tempo necessário para que um capital dobre de valor, rendendo à taxa de 11% ao ano no regime de juros compostos?*

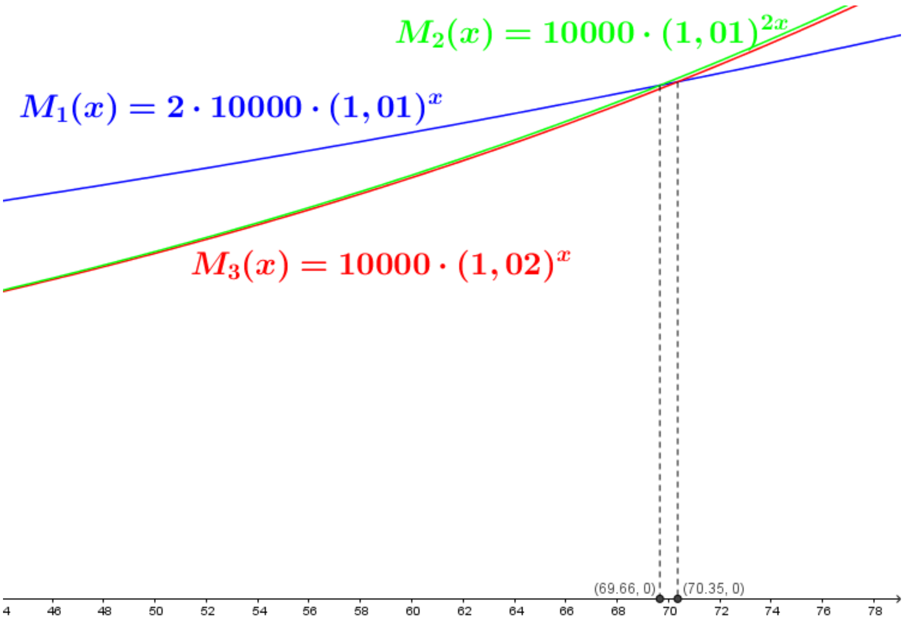

Figura 2.1: Comparação de opções - Exemplo 6

O capital C dobra de valor em n anos se

$$M = C \cdot (1,11)^n \Rightarrow 2C = C \cdot (1,11)^n \Rightarrow 2 = (1,11)^n$$

$$\Rightarrow \log 2 = n \cdot \log 1,11 \Rightarrow n \approx 6,64$$

Ou seja, são necessários aproximadamente 6 anos e 8 meses para que o capital dobre de valor nessas condições.

Observe que problemas como este estimulam a generalização de raciocínio e retomam conceitos matemáticos como equações exponenciais, logaritmos e frações de unidades de tempo.

2.4 Taxas de Juros Equivalentes e Proporcionais

Quando os alunos do ensino médio estudam Matemática Financeira, muitos exemplos e exercícios os levam a acreditar que uma taxa de juros de 2% ao mês é equivalente (ou seja, produz os mesmos rendimentos em condições iguais) à taxa de 24% ao ano, o que não é verdade conforme mostraremos a seguir. Como consequência, os termos taxa de juros *efetiva* e *nominal*, que estão diretamente relacionados a essa questão e são utilizados com muita frequência no mercado financeiro, costumam causar muita confusão entre os consumidores.

A habilidade de relacionar taxas de juros dadas em diferentes unidades de tempo, além de ter importância fundamental na compreensão de termos do mercado financeiro como taxa nominal e taxa efetiva, pode ser usada como base para a introdução e compreensão do conceito de juros simples de acordo com o seu contexto de aplicação. O último exemplo desta seção mostrará como isso pode ser feito e fará a conexão com a próxima seção que tratará desse regime de juros.

Propriedade - No regime de juros compostos, a taxa de juros i rende, após n períodos de capitalização, o mesmo montante gerado pela taxa de juros I aplicada por um período, onde I é dada por

$$1 + I = (1 + i)^n$$

As taxas i e I são chamadas de taxas equivalentes.

A verificação dessa propriedade pode ser feita de forma imediata, com o mesmo raciocínio utilizado na seção 2.2 na determinação da taxa acumulada de variações sucessivas. Por exemplo, uma taxa anual I tem sua equivalente mensal i determinada da seguinte forma:

$$1 + I = (1 + i)^{12} \Rightarrow i = \sqrt[12]{1 + I} - 1$$

Aqui entra uma informação importante sobre a prática do mercado financeiro. É comum encontrar nas propagandas financeiras frases do tipo *"taxa nominal de juros de 24% ao ano com capitalização mensal"*. Pela propriedade acima, uma taxa de 24% ao ano seria equivalente a taxa mensal i dada por:

$$i = \sqrt[12]{1,24} - 1 \Rightarrow i \approx 1,81\%$$

Porém, no mercado financeiro, a frase citada acima tem outro significado, relacionado à relação de proporcionalidade. Ou seja, uma taxa nominal de 24% ao ano com capitalização mensal corresponde a uma taxa efetiva de $24\% : 12 = 2\%$ ao mês. Assim, sua equivalente anual I é dada por:

$$1 + I = (1,02)^{12} \Rightarrow I \approx 26,82\%$$

Dessa forma, a taxa nominal de 24% ao ano capitalizada mensalmente, corresponde na verdade, a uma taxa efetiva de 26,82% ao ano. Fatos como esse, desconhecidos da maioria dos consumidores, podem ser usados para amenizar taxas de juros muito altas e atrair clientes.

Definição 3. *Se i é uma taxa relativa a um determinado período, então, no prazo de n períodos:*

(i) As taxas I e i, onde I é dada por $1 + I = (1 + i)^n$, são ditas taxas equivalentes;

(ii) As taxas i e ni são ditas taxas proporcionais.

Exemplos e Situações-problema - Habilidade 4: Relacionar e determinar taxas de juros equivalentes a proporcionais.

Exemplo 8. *Determinar a taxa efetiva anual de um investimento que rende 1% ao mês. Em seguida, determinar a taxa mensal equivalente à taxa de 12% ao ano.*

• 1º caso:

$$1 + I = (1,01)^{12} \Rightarrow I \approx 12,68\%$$

• 2º caso:

$$1,12 = (1+i)^{12} \Rightarrow i = \sqrt[12]{1,12} - 1 \approx 0,95\%$$

Exemplo 9. *A taxa nominal de juros do cheque especial de um banco é de 180% ao ano, com capitalização mensal. Determine o montante acumulado de uma dívida de R$ 1.000,00 no período de 3 meses. Em seguida, determine o mesmo montante para o caso da taxa dada ser efetiva.*

• 1º caso - Se i é a taxa efetiva mensal, temos:

$$i = \frac{180}{12} = 15\% \Rightarrow M = 1000 \cdot (1,15)^3 \approx R\$1.520,88$$

• 2º caso - Sendo i a taxa mensal, segue que:

$$1 + 1,8 = (1+i)^{12} \Rightarrow i = \sqrt[12]{2,8} - 1 \approx 8,96\%$$

$$\therefore M = 1000 \cdot (1,0896)^3 \approx R\$1.293,60$$

Exemplo 10. *Um boleto prevê juros de mora de 6% ao mês em caso de atraso no pagamento. Qual deve ser a taxa de juros cobrada no caso de um atraso de 8 dias?*

• Para o caso da taxa informada ser efetiva, teríamos, sendo i_1 a taxa diária e i_2 a taxa cobrada por oito dias de atraso:

$$1,06 = (1+i_1)^{30} \Rightarrow i_1 = \sqrt[30]{1,06} - 1 \approx 0,1944\%$$

$$\Rightarrow 1 + i_2 = (1,001944)^6 \Rightarrow i_2 = 1,566\%$$

• Se a taxa informada for nominal, com capitalização diária, então, mantendo as mesmas notações acima, obtemos:

$$i_1 = \frac{6}{30} = 0,2\% \Rightarrow 1 + i_2 = (1,002)^8 \Rightarrow i_2 = 1,611\%$$

Entretanto, na prática do mercado, o cálculo todo é feito com taxas proporcionais, da seguinte forma:

$$i_2 = \frac{6}{30} \cdot 8 = 1,6\%$$

A explicação para esse fato envolve o conceito de juros simples e será dada na próxima seção, que deixará claro o porquê do mercado financeiro optar por essa forma de cobrança. O exemplo 10 dado acima, além de apresentar uma aplicação completa dos conceitos de taxas equivalentes e proporcionais, fornece o contexto necessário para a compreensão da aplicação dos juros simples, como veremos a seguir.

2.5 Juros Simples

A introdução ao regime de juros simples e o seu desenvolvimento com exemplos e exercícios devem ser feitos em total conexão com o seu contexto de aplicação no mercado financeiro, eliminando a prática comum de trabalhar com problemas artificiais de empréstimos e investimentos a juros simples, inexistentes no mercado. Após a definição dada abaixo, apresentaremos uma propriedade gráfica que explicitará tal contexto.

Definição 4. *O regime de capitalização onde a taxa é aplicada a cada período sobre o valor do capital, é chamado de regime de juros simples. Dessa forma, um capital C aplicado a juros simples sob uma taxa i, gera, após n períodos, o montante M dado por:*

$$M = C + C \cdot i \cdot n = C \cdot (1 + in)$$

Propriedade: No regime de juros simples, a taxa de juros i rende, após n períodos de capitalização, o mesmo montante gerado pela taxa de juros ni aplicada por um período. Ou seja, os juros simples são caracterizados por taxas de juros proporcionais.

De acordo com as definições dadas, o montante gerado por um capital C aplicado à taxa de juros i pode ser dado em função do prazo de aplicação n, nos dois regimes de juros apresentados, pelas seguintes leis:

- Juros Simples: $M(n) = C + C \cdot i \cdot n$ (Função Afim)
- Juros Compostos $M(n) = C \cdot (1 + i)^n$ (Função Exponencial)

Assim, fixados um capital C e uma taxa i, a variação do montante em função do tempo no regime de juros compostos ocorre de forma exponencial, enquanto que no caso dos juros simples se dá segundo uma função afim. Na figura 2.2, podemos observar os gráficos da evolução dos montantes nos dois regimes e verificar que, para prazos menores que a unidade de tempo da taxa de juros, os juros simples

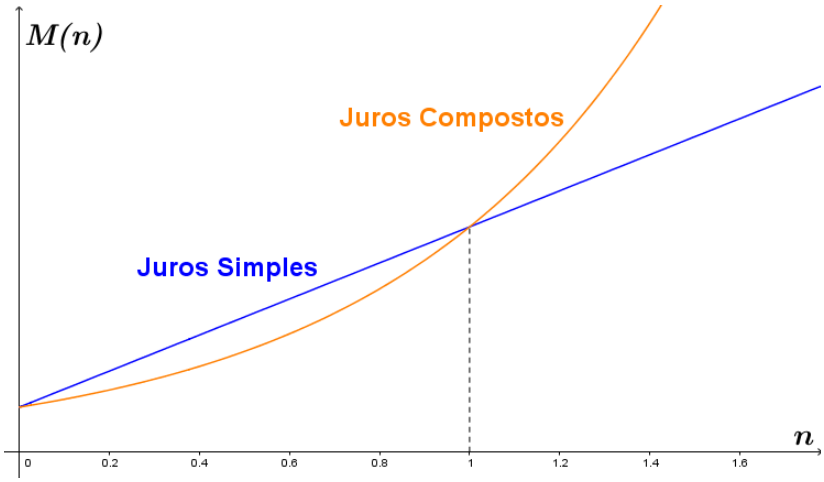

Figura 2.2: Montante em Função do Tempo - Juros Simples e Compostos

geram o maior montante. Por outro lado, para qualquer prazo maior que a unidade de tempo, os juros compostos são mais vantajosos para o credor ou investidor.

A partir dessa análise, voltamos à discussão sobre os juros de mora proposta no Exemplo 10. Conforme observamos anteriormente, o cáclulo dos juros de mora nessas situações é feito por taxas proporcionais. A taxa de juros constante no boleto é de 6% ao mês e o atraso no pagamento foi de 8 dias, ou seja, um prazo menor que a unidade de tempo. Dessa forma, a cobrança pelo regime de juros simples proporciona maior ganho do que por juros compostos, se fosse feita através da obtenção da taxa diária equivalente.

Outra questão natural que se coloca a partir do exemplo 10 é a seguinte: como a cobrança é feita para um ataso m meses e n dias, com $m > 0$ e $0 < n < 30$? A análise dessa situação será feita nos problemas propostos a seguir .

Exemplos e Situações-problema - Habilidade 5: Resolver problemas envolvendo o conceito de juros simples, compreendendo o seu contexto de aplicação no mercado financeiro e relacionar a variação do montante nos regimes de juros simples e compostos às funções afim e exponencial, respectivamente.

Exemplo 11. *Em um boleto cujo valor de face é de R$ 253,42, os juros de mora são de 1% ao mês. Determine o valor dos juros cobrados por 8 dias de atraso. Em seguida, escreva a lei a função que calcula o montante da dívida para n dias de atraso, com $n < 30$.*

Se J é o valor dos juros, temos:

$$J = \frac{0,01}{30} \cdot 8 \cdot 253,42 \approx R\$0,68$$

Para n dias de atraso, com $n < 30$:

$$M(n) = 253,42 + \frac{0,01}{30} \cdot n \cdot 253,42$$

Exemplo 12. *Qual será um montante de uma dívida de R$ 520,00 no cheque especial, cuja taxa de juros é de 14% ao mês, após 3 meses e 10 dias de utilização do serviço? Escreva a lei da função que determina o montante e ser pago após m meses e n dias de atraso.*

Para esse tipo de problema, são adotadas duas formas de cálculo, conhecidas como *convenção exponencial* e *convenção linear*. Na primeira, o montante todo é calculado pelo regime de juros compostos (já que o prazo é maior que a unidade de tempo da taxa), considenrando para o valor do tempo a fração $3 + \frac{10}{30}$. Essa é a forma adotada com mais frequência.

Por outro lado, na convenção linear, os juros dos 3 meses são cobrados pelo regime de juros compostos e seu valor é somado à cobrança dos 10 dias restantes por juros simples, sobre a dívida acumulada nos 3 meses. Assim, obtemos os seguintes valores para o montante:

• Convenção exponencial:

$$M = 520 \cdot (1,14)^{3+\frac{10}{30}} \approx R\$804,80$$

• Convenção linear:

$$M = 520 \cdot (1,14)^3 + [520 \cdot (1,14)^3] \cdot \frac{0,14}{30} \cdot 10$$
$$\approx 770,40 + 35,95 = 806,35$$

As leis das funções são dadas por:

• Convenção exponencial:

$$M = \begin{cases} 520 + 520 \cdot \frac{0,14}{30} \cdot n, & se \quad m = 0 \\ 520 \cdot (1,14)^{m+\frac{n}{30}}, & se \quad m > 0 \end{cases}$$

• Convenção linear:

$$M = \begin{cases} 520 + 520 \cdot \frac{0,14}{30} \cdot n, & se \quad m = 0 \\ 520 \cdot (1,14)^m + [520 \cdot (1,14)^m] \cdot \frac{0,14}{30} \cdot n, & se \quad m > 0 \end{cases}$$

2.6 Equivalência de Capitais

Na Matemática Financeira, é comum o entendimento de que o valor de um capital varia em função do tempo, pois além das possibilidades de desvalorização da moeda, inflação e consequente perda do poder de compra, considera-se também o custo de oportunidade, que trata de um potencial investimento (comercial, financeiro etc) que o detentor da quantia dispõe para aumentar seu capital.

Dessa forma, dois capitais distintos em épocas diferentes podem ter o mesmo valor quando analisados na mesma data. Por exemplo, para um investidor que dispõe de uma taxa de rendimento de 1% ao mês, a quantia de R$ 100,00 hoje tem o mesmo valor que R$ 102,01 dois meses depois, pois $100 \cdot (1,01)^2 = 102,01$.

Sob essa ótica, dois valores distintos de capitais que se igualam quando analisados à mesma época, são ditos *capitais equivalentes*.

As habilidades de analisar e comparar capitais em diferentes épocas, transportando seus valores para a mesma data, são essenciais na Matemática Financeira para a resolução de problemas envolvendo parcelamentos, amortizações e tomada de decisões, conforme veremos nos problemas apresentados nesta e na próxima seção.

No sistema de capitalização composta, utilizado em quase todas as operações do mercado financeiro, dada uma taxa i, um número n de períodos e um capital C, então, é imediato verificar que C é equivalente a $C \cdot (1+i)^n$. Analogamente, o capital $C \cdot (1+i)^{-n}$ é equivalente a C. Tal propriedade motiva a seguinte definição.

Definição 5. *No sistema de capitalização composta a uma taxa i, o valor atual de um capital C é chamado de Valor Presente (VP) e seu equivalente após n períodos de capitalização, ou seja, $C \cdot (1+i)^n$, é chamado de Valor Futuro (VF).*

Se após n períodos o valor futuro de um capital é C, então é imediato verificar que seu valor presente é $C \cdot (1+i)^{-n}$. Por isso, utilizaremos os seguintes termos:

- Fator de obtenção do Valor Futuro: $(1+i)^n$
- Fator de obtenção do Valor Presente: $(1+i)^{-n}$

Exemplos e Situações-problema - Habilidade 6: Resolver problemas envolvendo equivalência de capitais, parcelamentos e amortizações e analisar situações financeiras que demandam tomada de decisões.

Exemplo 13. *A conta de um cliente de um banco ficou negativa em R$ 800,00. Para amortizar a dívida, o cliente depositou R$ 300,00 após um mês e R$ 400,00 após dois meses. Sabendo que o juros do cheque especial nesse banco é de 15% ao mês, determine o valor necessário para o cliente quitar a dívida ao final do terceiro mês.*

Seja P o pagamento necessário para quitar a dívida. Para auxiliar a resolução deste tipo de problema, utilizaremos uma representação gráfica comum na Matemática Financeira conhecida como *diagrama de fluxo de caixa*. Trata-se de um segmento de reta horizontal representando uma linha do tempo onde os períodos são numerados e, em cada um deles, são colocadas flechas verticais representando as quantias

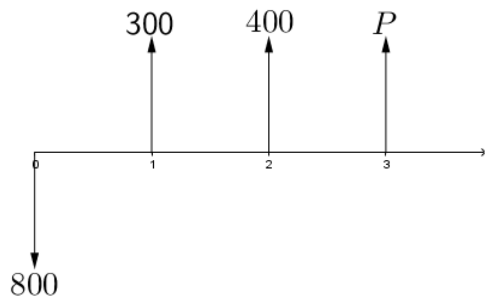

Figura 2.3: Diagrama de Fluxo de Caixa - Exemplo 13

recebidas e pagas com sentidos opostos. Na figura 2.3 encontramos o diagrama de fluxo de caixa relacionado ao problema.

Como já observado, não podemos comparar as quantias envolvidas no problema que estão em épocas diferentes. Sendo assim, escolhemos um dos períodos para fazer a análise do problema, conhecido como *data focal*, e tranposrtamos todas os capitais para essa data utilizando os fatores de obtenção de valor futuro e valor presente. Igualando os pagamentos aos recebimentos na data focal, obtemos a chamada *Equação de Equivalência de Capitais*; e então, podemos determinar o valor procurado.

Observamos que a escolha da data focal não influencia no resultado da equação. A seguir apresentamos duas soluções possíveis para o Exemplo 13, escolhendo como datas focais os períodos 3 e 1, respectivamente.

- No período 3, temos a seguinte equação de equivalência de capitais:

$$800 \cdot (1,15)^3 = 300 \cdot (1,15)^2 + 400 \cdot 1,15 + P$$

$$\Rightarrow P = 1216,70 - 396,75 - 460 = R\$359,95$$

- No período 1:

$$800 \cdot 1,15 = 300 + 400 \cdot (1,15)^{-1} + P \cdot (1,15)^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{1,3225} = 920 - 300 - 347,826 \Rightarrow P = R\$359,95$$

Exemplo 14. *Um empréstimo no valor de R\$ 1000,00 foi tomado a juros de 6,5% ao mês e será pago em três parcelas iguais, sendo a primeira um mês após a contratação (pagamento postecipado). Qual deve ser o valor de cada parcela? E quais serão os juros pagos por esse empréstimo?*

Um engano comum que pode aparecer neste tipo de problema (especialmente quando se estuda apenas juros simples e compostos na ensino médio) é o de achar que o montante total da dívida será $1000 \cdot (1,065)^3$ e que, para obter o valor das parcelas, basta dividir o valor resultante por três. Isso não é verdade, pois após o pagamento da pirmeira percela, a dívida não será mais de R$ 1000,00 e, portanto, é injusto cobrar juros sobre esse valor por três períodos. A solução desse problema passa também pela equivalência de capitais. Veja o diagrama de fluxo de caixa na figura 2.4, sendo P o valor da parcela.

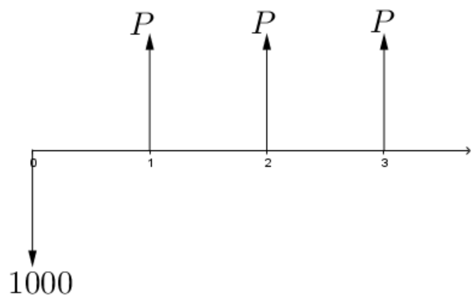

Figura 2.4: Diagrama de Fluxo de Caixa - Exemplo 14

Equacionando os valores no perídoo 3, obtemos:

$$1000 \cdot (1,065)^3 = P \cdot (1,065)^2 + P \cdot 1,065 + P$$

$$\Rightarrow P(1,134225 + 1,065 + 1) = 1207,95 \Rightarrow P \approx 377,58$$

Assim, o valor J dos juros será dado por:

$$J = 3P - 1000 \approx R\$132,74$$

Exemplo 15. *Uma pessoa pretente investir uma parte da sua renda para a aposentadoria. Entre as pesquisas e simulações de investimentos feitas, uma das opções consideradas era a de investir mensalmente R$ 1.200,00 em um fundo com taxa efetiva de ganho de 0,9% ao mês. Qual será o valor acumulado por essa pessoa após 20 anos de investimento?*

O investimento consiste em 240 depósitos de R$ 1.200,00 e deseja-se saber o valor total acumulado ao final do período 240. Ou seja, se M é o montante final, temos:

$$M = 1200 \cdot (1,009)^{240} + 1200 \cdot (1,009)^{239} + ... + 1200 \cdot 1,009$$

Repare que a expressão dada no segundo membro é soma dos 240 primeiros termos de uma PG de razão $(1,009)^{-1}$. Logo,

$$M = 1200 \cdot (1,009)^{240} \cdot \frac{(1,009)^{-240} - 1}{(1,009)^{-1} - 1} \approx R\$1.020.806,64$$

Exemplo 16. *Um produto é anunciado com o valor de R$ 240,00 e pode ter seu valor parcelado em quatro vezes de R$ 60,00 "sem juros". Mas o vendedor anuncia também que para o pagamento à vista há um desconto de 10%. Qual é a taxa de juros implícita no pagamento parcelado?*

A experessão "sem juros"foi colocada entre aspas no enunciado propositalmente, pois ela não é verdadeira. De fato, se o produto à vista é vendido com um desconto de 10%, ou seja, pelo valor de $0,9 \cdot 240 = R\$216,00$ e o pagamento a prazo custa no total R$ 240,00, então há uma cobrança de juros pelo pagamento parcelado. Podemos determinar a taxa i dos juros cobrados utilizando a equivalência de capitais, como feito nos exemplos anteriores. Veja o diagrama na figura 2.5.

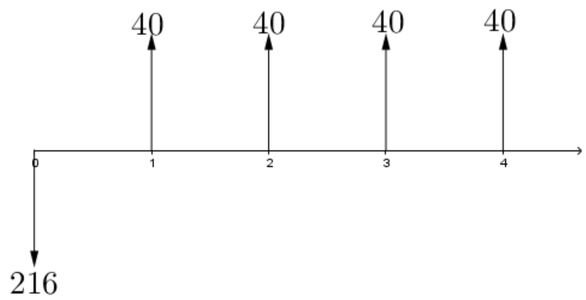

Figura 2.5: Diagrama de Fluxo de Caixa - Exemplo 16

Equacionando os valores no períodos 4, temos:

$$216 \cdot (1+i)^4 = 40 \cdot (1+i)^3 + 40 \cdot (1+i)^2 + 40 \cdot (1+i) + 40$$

Observe que a determinação da taxa i envolve a resolução de uma equação de 4º grau e que esse grau poderia ser ainda maior, dependendo do número de parcelas. Entretanto, isso não deve ser um obstáculo para trabalhar com problemas como esse em sala de aula. Além da importância do problema em questão, que aparece com frequência no dia a dia do mercado fianceiro (principalmente em compras parceladas), sua solução fornece uma ótima oportunidade para o trabalho com tecnologias digitais no ensino de Matemática Fiananceira que, como dito anteriormente, não pode prescindir do uso e calculadoras (científicas e/ou financeiras), planilhas eletrônicas e outros *softwares* e aplicativos para dispositivos móveis que podem ser utilizados.

Para o caso em questão, uma das opções é usar a função financeira *RATE* ou TAXA em planilhas eletrônicas ou aplicativos de calculadores financeiras. Para o caso das palnilhas eletrônicas a função TAXA solicita a inserção de seis dados (para este problema, apenas três bastam):

- **nper**: número de parcelas;

- **pgto**: valor de cada parcela (com o valor negativo);
- **vp**: valor presente;
- **vf (opcional)**: O valor futuro, ou o saldo, que você deseja obter depois do último pagamento. Se omitido, será considerado 0;
- **tipo (opcional)**: 0 para pagamento postecipado e 1 para pagamento antecipado. Se omitido, será considerado 0;
- **estimativa (opcional)**: A sua estimativa para a taxa. Se omitido, será considerado 10%.

No Excel (em português), a função TAXA aparece da seguinte forma:

=TAXA(nper;pgto;VP;[vf];[tipo];[estimativa])

Assim, para solucinar o problema do Exemplo 16, basta digitarmos em qualquer célula da planilha o comando =TAXA(4;-60;216), para obter a taxa juros $i \approx 4,35\%$ ao mês, que é a taxa do parcelamento descrito no problema.

Exemplo 17. *Há duas opções de pagamento na compra de um telefone celular: três prestações mensais de R\$ 400,00 cada ou seis prestações mensais de R\$ 204,00 cada. Supondo que o dinheiro vale 1% ao mês, determine a opção financeiramente mais vantajosa.*

Este problema tem como objetivo principal o desenvolvimento da habilidade de tomada de decisões financeiras. A ideia é a de que havendo duas ou mais opções de pagamento e a consciência do custo de oportunidade (ou seja, de um rendimento potencial que o dono do dinheiro tem à sua disposição), pode-se comparar as duas séries de pagamentos na mesma época e, assim, determinar a mais vantajosa. No exemplo em questão, o custo de oportunidade é de 1% ao mês. Vamos analisar o montante das duas formas de pagamento no período 3. As figuras 2.6 e 2.7 mostram os diagramas para os dois casos.

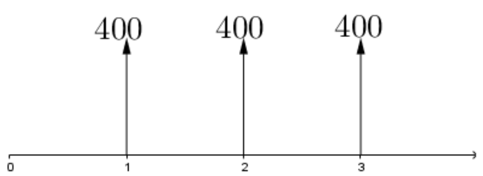

Figura 2.6: Diagrama de Fluxo de Caixa - Exemplo 17

Para a primeira opção de pagamento, temos, no período 3:

$$M_1 = 400 \cdot (1,01)^2 + 400 \cdot 1,01 + 400 \Rightarrow M_1 = R\$1212,04$$

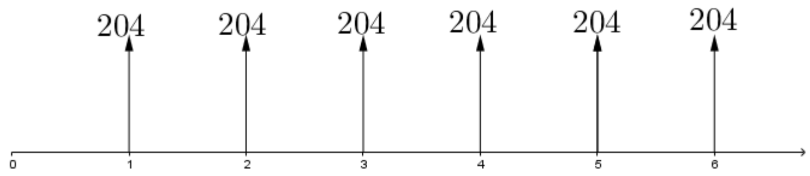

Figura 2.7: Diagrama de Fluxo de Caixa - Exemplo 17

Para a segunda opção, também no período 3:

$$M_2 = 204\cdot(1,01)^2+204\cdot 1,01+204+204\cdot(1,01)^{-1}+204\cdot 1,01^{-2}+204\cdot 1,01^{-3}$$

$$\Rightarrow M_2 \approx R\$1218,10$$

Logo, a primeira opção é mais vantajosa.

Exemplo 18. *Há três opções de pagamento para um determinado bem:*

(a) À vista, com 4% de desconto.

(b) Em duas prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra.

(c) Em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Determine a opção mais vantajosa, supondo que o dinheiro vale 3% ao mês. Em seguida, determine a melhor opção para o caso do comprador não dispor do dinheiro para comprar o bem à vista.

Seja C o valor do bem no ato do compra, sem o desconto. Então temos:

(a) Na opção à vista, o valor pago à época 0 é dado por:

$$M_1 = 0,96\cdot C$$

(b) Na segunda opção temos, no mesmo período:

$$M_1 = 0,96\cdot C = P\cdot(1,03)^{-1} + P\cdot(1,03)^{-2} \Rightarrow 1,91347\cdot P \approx 0,96\cdot C$$

$$\Rightarrow P \approx 0,501706\cdot C \Rightarrow M_2 = 2P \approx 1,0034\cdot C$$

(c) Finalmente temos, para a terceira opção:

$$M_1 = 0,96\cdot C = P' + P'\cdot(1,03)^{-1} + P'\cdot(1,03)^{-2} \Rightarrow 2,91347\cdot P' \approx 0,96\cdot C$$

$$\Rightarrow P' \approx 0,329504\cdot C \Rightarrow M_3 = 3P' \approx 0,9885\cdot C$$

Portanto, o valor pago pelo bem no período 0 equivale a 96% do seu valor inicial para a opção (a), 100,34% para a opção (b) e 98,85% para a opção (c). Logo, o pagamento à vista é mais vantajoso e, não havendo esta opção, a melhor escolha é a (c).

2.7 Sistemas de Amortização

As compras parceladas e os empréstimos oferecidos pelo mercado financeiro estão entre as operações fiananceiras mais realizadas pela população. Independente da profissão ou das condições financeiras, a maioria das pessoas precisa lidar em algum momento da vida com um pagamento parcelado, seja pela contração de um empréstimo em um instituição fiananceira, ou pelo financiamento de um imóvel, automóvel, eletrodoméstico, móvel ou outros bens. Assim, uma sequência didática para o ensino de Matemática Financeira que tenha como um dos objetivos a formação crítica e autônoma do aluno para a vida em sociedade, deve necessariamente abordar essas formas de parcelamento, considerando a abordagem adequada para cada etapa de ensino.

Entretanto, ainda que a matemática envolvida nessas operações seja de nível básico, o que se observa na prática tradicional do ensino de Matemática Financeira e na maioria dos materiais didáticos do país é que esse tópico dificilmente é abordado nas salas de aula do ensino básico. Felizmente, como vimos no Capítulo 1, a 2ª versão da BNCC divulgada em 2016 aponta para uma mudança nesse cenário.

Apesar dessa seção ser a última da presente proposta (por questões de coerência didática), os sistemas de amortização devem ser um tópico central em uma sequência de ensino de Matemática Financeira, independente de limitações estruturais e/ou possibilidades de aprofundamento. Para exemplificar possíveis limitações, ainda que o professor trabalhe em uma escola sem estrutura de computadores e não disponha de planilhas eletrônicas para fazer as tabelas de amortização, aplicativos de celular como o GeoGebra e calculadoras financeiras podem ajudar.

Sobre os aprofundamentos, o obejtivo mínimo desse estudo deve ser a compreensão dos sistemais de amortização mais utilizados no mercado financeiro: PRICE e SAC. Quase todas as operações financeiras envolvendo parcelamentos são feitas nesses dois sistemas. Assim, se o aluno compreender como se constrói uma tabela de amortização em ambos os sistemas, já terá desenvolvido um conhecimento satisfatório para lidar com eles no dia a dia do mercado financeiro. Por essa ótica, a demonstração da fórmula que determina o valor da parcela no sistema PRICE (que depende da maturidade matemática dos alunos) e o estudo de outos sistemas de amortização, podem ser consideremos como objetivos secundários que dependerão de cada contexto escolar.

De qualquer forma, os exemplos que serão propostos a seguir e a forma de abordagem proposta podem ser adaptados, para mais ou para menos, de acordo com as condições, mas nunca deixando de abordar esses tópicos.

2.7.1 Amortizações

Quando se paga por um bem fiananciado ou um empréstimo de forma parcelada, cada parcela tem, em geral, duas funções: amortizar parte da dívida contraída e pagar juros referentes ao período anterior. Assim, o que precisa ser decidido ao elaborar um sistema de pagamento parcelado é de que forma (e em que quantia) se dará a amortização da dívida em cada pagamento. No exemplo a seguir, essa forma está explícita no enunciado.

Exemplos e Situações-problema - Habilidade 7: Construir tabelas de amortização, pricipalmente nos sistemas Price e SAC, analisar e comparar graficamente a evolução do saldo devedor, prestação, juros e amortização de um financiamento.

Exemplo 19. *Um empréstimo de R$ 2000,00 foi tomado a uma taxa de juros de 8% ao mês e será pago em 6 prestações. O pagamento será postecipado, onde as três primeiras devem amortizar, cada uma, 10% da dívida e as três últimas devem amortizar, respectivamente, 20%, 20% e 30% da dívida. Contruir uma tabela com as amortizações, os juros, as prestações e o saldo devedor em cada período.*

Observamos que a cada período, os juros são cobrados sobre o saldo devedor do período anterior, que por sua vez é obtido subtraindo-se da dívida a amortização de cada período. As prestações, como já mencionado, são compostas pela soma dos juros com as amortizações.

Período	**Amortização**	**Juros**	**Prestação**	**Saldo Devedor**
0				2000
1	200	160	360	1800
2	200	144	344	1600
3	200	128	328	1400
4	400	112	512	1000
5	400	80	480	600
6	600	48	648	0
Total	2000	672	2672	

2.7.2 Sistema SAC

O Sistema de Amortização Constante (SAC) é um sistema utilizado principalmente no financiamento de imóveis, mas possui outras aplicações também. Sua principal característica, como suegere seu nome, é a de que a amortização da dívida é constante em todos os períodos. Assim, sendo A o valor da amortização, o parcelamento de uma quantia D_0 em n prestações no sistema SAC, deve satisfazer

$$n \cdot A = D_0 \Rightarrow A = \frac{D_0}{n}$$

Além disso, sendo i a taxa de juros do fianciamento, se J_k, P_k e D_k representam, respectivamente, os juros, a prestação e o saldo devedor no período k, então, é imediato verificar que:

$$J_k = i \cdot D_{k-1} \qquad P_k = A + J_k \qquad D_k = D_0 - k \cdot A$$

Exemplo 20. *Construir uma tabela de amortização no sistema SAC para um financiamento de R$ 15.000,00 em 12 prestações mensais a uma taxa de juros de 7,8% ao mês.*

Pelos dados do financiamento, temos $A = \frac{15000}{12} = 1250,00$. Assim, podemos construir a tabela pedida:

Período	Amortização	Juros	Prestação	Saldo Devedor
0				15000,00
1	1250,00	1170,00	2420,00	13750,00
2	1250,00	1072,50	2322,50	12500,00
3	1250,00	975,00	2225,00	11250,00
4	1250,00	877,50	2127,50	10000,00
5	1250,00	780,00	2030,00	8750,00
6	1250,00	682,50	1932,50	7500,00
7	1250,00	585,00	1835,00	6250,00
8	1250,00	487,50	1737,50	5000,00
9	1250,00	390,00	1640,00	3750,00
10	1250,00	292,50	1542,50	2500,00
11	1250,00	195,00	1445,00	1250,00
12	1250,00	97,50	1347,50	0,00
Total	15000,00	7605,00	22605,00	

2.7.3 Sistema Price

O sisttema PRICE de amortização (nome dado em homenagem ao seu desenvolvedor Richard Price), conhecido também por sistema francês de amortização, é bastante utilizado no mercado fianceiro no financiamento de automóveis, móveis, eletrodomésticos, empréstimos, entre outras aplicações.

Sua principal característica é apresentar prestações constantes. Assim, sabendo que os juros são calculados sempre sobre o saldo devedor do mês anterior, para determinar o valor mensal de amortização, basta que saibamos o valor constante das prestações, pois a amortização será a diferença entre prestações e juros. Ou seja, nosso problema se resume a determinar o valor das prestações, que será dado pelo Teorema abaixo e cuja demonstração se baseia nas propriedades de uma PG.

Teorema 1. *No sistema PRICE de amortização, o financiamento do capital C à taxa de juros i pelo prazo de n períodos, com pagamento postecipado, tem prestação constante P dada por*

$$P = C \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Demonstração. Comparando as prestações e no perído 0, obtemos:

$$C = P \cdot (1+i)^{-1} + P \cdot (1+i)^{-2} + ... + P \cdot (1+i)^{-n}$$

Como o segundo membro é dado pela soma dos n primeiros termos de uma PG de razão $(1+i)^{-1}$, segue que

$$C = P \cdot (1+i)^{-1} \cdot \frac{(1+i)^{-n}-1}{(1+i)^{-1}-1} \Rightarrow C = P \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{(1+i)^{-n}-1}{(1+i)^{-1}-1}$$

$$\Rightarrow C = P \cdot \frac{(1+i)^{-n}-1}{-i} \Rightarrow P = C \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$\Rightarrow P = C \cdot \frac{i \cdot (1+i)^{n}}{(1+i)^{n}-1}$$

$\square$

De posse da fórmula do Teorema 1, podemos terminar os outros elementos da tabela de amortização. Se J_k, A_k e D_k representam, respectivamente, os juros, a amortização e o saldo devedor no período k, então, é imediato verificar que:

$$J_k = i \cdot D_{k-1} \qquad A_k = P - J_k \qquad D_k = D_{k-1} - A_k$$

Observamos que é possível determinar uma fórmula para D_k que não depende de A_k, Porém, para os objetivos propostos, isso não é necessário.

Exemplo 21. *Construir uma tabela de amortização no sistema PRICE com os mesmos dados do Exemplo 20, ou seja,* $C = R\$15.000,00$*,* $n = 12$ *e* $i = 7,8\%$ *ao mês.*

Do Teorema 1, seque que:

$$P = 15000 \cdot \frac{0,078 \cdot (1,078)^{12}}{(1,078)^{12}-1} \approx R\$1.969,85$$

Assim, podemos construir a tabela pedida:

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0				15000,00
1	1969,85	1170,00	799,85	14200,15
2	1969,85	1107,61	862,24	13337,92
3	1969,85	1040,36	929,49	12408,42
4	1969,85	967,86	1001,99	11406,43
5	1969,85	889,70	1080,15	10326,29
6	1969,85	805,45	1164,40	9161,89
7	1969,85	714,63	1255,22	7906,67
8	1969,85	616,72	1353,13	6553,54
9	1969,85	511,18	1458,67	5094,87
10	1969,85	397,40	1572,45	3522,42
11	1969,85	274,75	1695,10	1827,32
12	1969,85	142,53	1827,32	0,00
Total	23638,18	8638,18	15000,00	

Uma prática interessente que deve ser incentivada em sala de aula é a de comparar dois financiamentos com as mesmas condições iniciais nos sistemas SAC e PRICE, como é o caso dos Exemplos 20 e 21. Apenas observando as tabelas de amortização, já podemos observar diferenças importantes para este caso: o valor dos juros foi maior no sistema PRICE; as prestações no SAC são maiores até o quinto mês de pagamento e menores a partir daí; no começo do financiamento a tabela SAC amortiza uma parte maior da dívida do que a PRICE, entre outras comparações.

Além da análise das tabelas, outras comparações podem ser feitas através de gráficos de evolução das prestações, juros, amortizações e saldo devedor nos dois sistemas. Faremos isso nos exemplos a seguir utilizando o software GeoGebra.

Exemplo 22. *Construir dois gráficos mostrando a evolução das prestações, juros e amortizações dos financiamentos dados nos Exemplos 20 e 21.*

Os referidos gráficos estão nas figuras nas figuras 2.8 e 2.9.

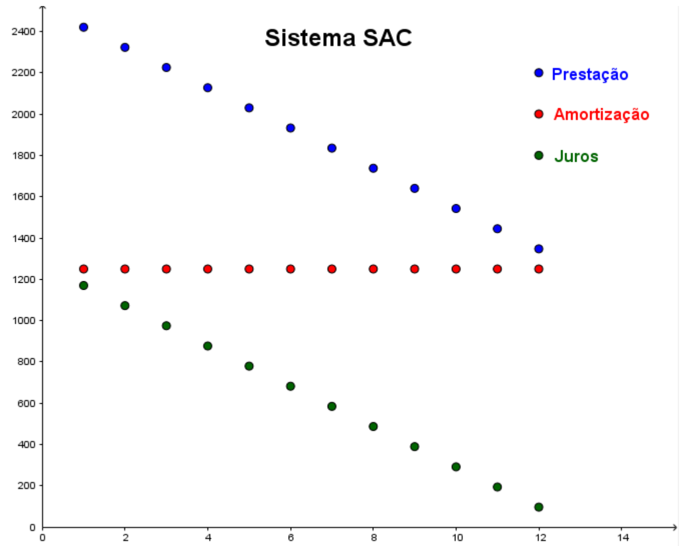

Figura 2.8: Prestações, Juros e Amortização no Sistema SAC - Exemplo 20

Entre os diferenças dos dois gráficos, destacamos a variação em linha reta das colunas da tabela SAC. De fato, podemos observar que a evolução das três grandezas nesse sistema se dá em progressão aritmética, característica que pode ser trabalhada com os alunos.

Já na tabela PRICE, isso não ocorre com os juros e a as amortizações que são, respectivamente, decrescente e crescente sem descrever uma linha reta. Uma questão interessante de aprofundamento seria verificar quais as leis das funções que os descrevem.

Por fim, observamos que as amortizações no sistema PRICE começam menores que os juros (o que não acontece neste exemplo no SAC), ou seja, as primeiras

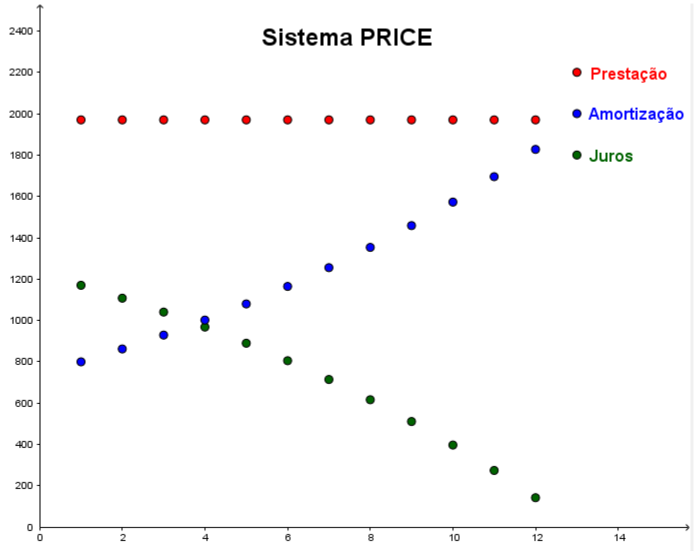

Figura 2.9: Prestações, Juros e Amortização no Sistema PRICE - Exemplo 21

parcelas são usadas mais para pagar juros do que amortizar a dívida em si. Além dessas observações, outras análises e tipos de gráficos podem ser feitos para enriquecer o exemplo.

Exemplo 23. *Construir um gráfico comparativo da evolução do saldo devedor dos financiamentos dados nos Exemplos 20 e 21.*

O gráfico segue na figura 2.10.

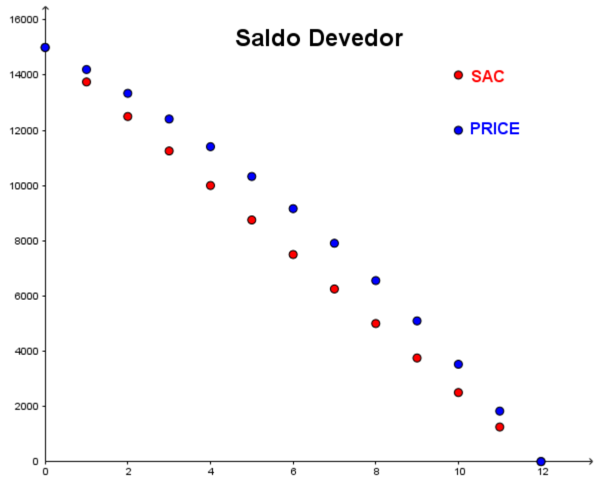

Figura 2.10: Saldo Devedor nos Sistemas SAC e PRICE - Exemplos 20 e 21

Observe que a evolução no sistema SAC segue uma linha reta, pois também se dá em progressão aritmética, como os juros, as amortizações e as prestações. Outra questão importante é a de que o saldo devedor no sistema PRICE decai mais lentamente e, em todos os períodos, é maior ou igual ao saldo no sistema SAC, razao pela qual os total de juros foi maior na tabela PRICE.

Referências Bibliográficas

[1] ASSAF, A. Matemática Financeira e suas Aplicações. 6. Ed. São Paulo: Atlas, 2001.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio. Brasília. Ministério da Educação e Cultura, 1999.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. 2ª versão. Brasília. Ministério da Educação e Cultura, 2016.

[4] BARROSO, J. M. Conexões com a Matemática. São Paulo: Moderna, 2012.

[5] DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações - Volume 1. 3 ed. São Paulo: Ática, 2004.

[6] IEZZI, G. et al. Matemática: Ciência e aplicações - Volume 1, Ensino Médio. 5 ed. São Paulo: Atual, 2010.

[7] LIMA, E. et al. A Matemática do Ensino Médio - Volume 2. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[8] MORGADO, A.C.; WAGNER, E.; ZANI, S.C. Progressões e Matemática Financeira. 5 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[9] SAMANEZ, C.P. Matemática Financeira. São Paulo: Makron Books, 1994.

SBM

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Medio Vol. 4 - Exercicios e Soluções* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Um Convite à Matemática* - D.C de Morais Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 1 - Números Reais - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 3 - Introdução à Análise - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 4 - Combinatória - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 5 - Teoria dos Números - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 6 - Polinômios - A. Caminha
- *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)
- *Como Resolver Problemas Matemáticos* - T. Tao
- *Geometria em Sala de Aula* - A. C. P. Hellmeister (Comitê Editorial da RPM)
- *Números Primos, amigos que causam problemas* - P. Ribenboim
- *Manual de Redação Matemática* - D.C de Morais Filho

SBM

COLEÇÃO PROFMAT

- *Introdução à Álgebra Linear* - A. Hefez e C.S. Fernandez
- *Tópicos de Teoria dos Números* - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha
- *Polinômios e Equações Algébricas* - A. Hefez e M.L. Villela
- *Tópicos de Historia de Matemática* - T. Roque e J. Bosco Pitombeira
- *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática* - V. Giraldo, P. Caetano e F. Mattos
- *Temas e Problemas Elementares* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Números e Funções Reais* - E. L. Lima
- *Aritmética* - A. Hefez
- *Geometria* - A. Caminha
- *Avaliação Educacional* - M. Rabelo
- *Geometria Analítica* - J. Delgado, K. Frensel e L. Crissaff
- *Matemática Discreta* - A. Morgado e P. C. P. Carvalho
- *Matemática e Atualidade - Volume 1* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Fundamentos de Cálculo* - A. C. Muniz Neto
- *Matemática e Atualidade - Volume 2* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear* - A. Hefez e C. de Souza Fernandez
- *Exercícios Resolvidos de Aritmética* - A. Hefez

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D. G. de Figueiredo
- *Números Racionais e Irracionais* - I. Niven
- *Tópicos Especiais em Álgebra* - J. F. S. Andrade

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L. N. de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M. P. do Carmo
- *Matemática Discreta* - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- *Álgebra Linear: Um segundo Curso* - H. P. Bueno
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa* - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.
- *Elementos de Topologia Geral* - E. L. Lima
- *A Construção dos Números* - J. Ferreira
- *Introdução à Geometria Projetiva* - A. Barros e P. Andrade
- *Análise Vetorial Clássica* - F. Acker
- *Funções, Limites e Continuidade* - P. Ribenboim
- *Fundamentos de Análise Funcional* - G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira
- *Teoria dos Números Transcendentes* - D. Marques
- *Introdução à Geometria Hiperbólica - O modelo de Poincaré* - P. Andrade
- *Álgebra Linear: Teoria e Aplicações* - T. P. de Araújo
- *Introdução à Análise Matemática na Reta* - C. I. Doering

- *Topologia e Análise no Espaço Rn* - R. Freire de Lima
- *Equações Ordinárias e Aplicações* - B. Scárdua

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H. Bolfarine e M. Sandoval
- *Discretização de Equações Diferenciais Parciais* - J. Cuminato e M. Meneguette
- *Fenômenos de Transferência – com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia volume 1: Fundamentos* - J. Pontes e N. Mangiavacchi

COLEÇÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª* - E. Mega e R. Watanabe
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª* - C. Moreira e E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues
- *21 Aulas de Matemática Olímpica* - C. Y. Sh
- *Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções* - K. I. M. Oliveira e A. J. C. Fernández
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Fundamental* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Médio* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 17ª a 24ª* - C. G. T. de A. Moreira, C. Y. Shine, E. L. R. Motta, E. Tengan e N. C. Saldanha
- *10 matemáticos 100 problemas* - E. Wagner (Organização)

COLEÇÃO FRONTEIRAS DA MATEMÁTICA

- *Fundamentos da Teoria Ergódica* - M.Viana e K. Oliveira
- *Tópicos de Geometria Diferencial* - A. C. Muniz Neto
- *Formas Diferenciais e Aplicações* - M. Perdigão do Carmo

COLEÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume I Números Naturais* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo
- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume II Números Inteiros* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo

APOIO:

ANPMat

INSTITUTO FEDERAL
Piauí
Campus Floriano

ISBN 978-85-8337-126-7

9 788583 371267 >