2º Simpósio da Formação do
Professor de Matemática da Região Nordeste

EQUAÇÕES CLÁSSICAS DA FÍSICA

MODELANDO O MOVIMENTO DE PARTÍCULAS

Marcos Nery

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Equações Clássicas da Física

Modelando o Movimento de Partículas

Equações clássicas da física
Modelando o movimento de partículas

Copyright © 2016 Marcos W. A. Nery
Direitos reservados pela Sociedade Brasileira de Matemática
A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Sociedade Brasileira de Matemática
Presidente: Hilário Alencar
Vice- Presidente: Paolo Piccione
Diretores: João Xavier
José Espinar
Marcela de Souza
Walcy Santos

Editor Executivo
Hilário Alencar

Assessor Editorial
Tiago Costa Rocha

Comissão Organizadora
Cíntia Karla Alves Souza (IFBA)
Michel Guerra de Souza (IFES – ES)
Odimógenes Soares Lopes (IFPI) - Coordenador Geral
Priscilla Guez Rabelo (Colégio Pedro II – RJ/ANPMat)
Renata Magarinus (EE Raimundo Corrêa/ANPMat)
Wilbertt Jose de Oliveira Moura (IFPI)

Comissão Acadêmica
Antônio Cardoso do Amaral (EE Augustinho Brandão – PI/ANPMat)
Fábio Pinheiro Luz (IFPI)
João Xavier da Cruz Neto (UFPI)
Marcela Luciano de Souza (UFTM/SBM)
Odimógenes Soares Lopes (IFPI) - Coordenador Local
Raquel Oliveira Bodart (IFTM/ANPMat)
Severino Cirino de Lima Neto (NUPEMAT/UNIVASF)

Capa: Pablo Diego Regino
Projeto gráfico: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

ISBN: 978-85-8337-125-0

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

ação do Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordest

2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

EQUAÇÕES CLÁSSICAS DA FÍSICA

MODELANDO O MOVIMENTO DE PARTÍCULAS

Marcos Nery

1ª edição
2016
Rio de Janeiro

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Dedicado a Henriquêta pela compreensão e parceria.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Sumário

o Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Resumo

Definir Física Matemática despreocupadamente seria como o conjunto de técnicas e abordagens que dão ênfase aos aspectos matemáticos da Física Teórica cujo objetivo principal é enriquecê-la com o rigor matemático mantendo a compreensão de modelos e teorias estudadas. É tarefa quase impossível descrever fenômenos naturais, sejam eles químicos, biológicos ou físicos, na sua completeza. Todavia ao desnudarmos um fenômeno buscamos compreendê-lo e, para isso, buscamos construir nossas próprias ideias, abstratas ou literais, o que denominamos modelo.

Nesse minicurso estabeleceremos alguns princípios básicos inerentes às técnicas de modelagem e mostraremos como é que eles funcionam em situações concretas. Para isso, modelos simples que representam situações reais e usuais servirão como ponto de partida para orientar e apreender a técnica seguidos por modelos mais interessantes que representam fenômenos da Física Teórica onde serão utilizados conceitos básicos de cálculo Integral na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias na obtenção de algumas equações clássicas da Física.

A teoria abordada nesse minicurso foi cuidadosamente selecionada das fontes de referências bibliográficas elencadas sem que, propositadamente, fossem padronizadas a uma só as diversas notações adotadas pelos autores.

o Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Agradecimentos

Agradeço a Deus sem O qual nada é possível.

À minha esposa Henriqueta pelo companheirismo incondicional e pela força dada em todas as minhas decisões.

Aos Professores Me. Odimógenes Soares Lopes e Me. Wilbertt José de Oliveira Moura pela confiança e pelo convite.

Aos meus pais, Seu Dedé e Dona Rosa, minhas irmãs, Ceciane, Carine e Caliane e minha filha Clarice por compreenderem minhas ausências e ainda me apoiarem.

À D. Alice minha sogra que foi sempre muito querida e amiga nas muitas horas em que eu precisei de um socorro.

À ANPMat pela realização e à SBM, Fundação Lemman, IFPI – Campus Floriano, ABE, PROFMAT e OBMEP pela realização do 2^{o} Simpósio da Formação do Professor de Matemática.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2^{o} Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

> *"Os estudantes não devem aprender pensamentos, devem aprender a pensar."*
>
> – Autor Desconhecido

O presente minicurso tem o objetivo de apresentar a docentes e alunos de Matemática que a Modelagem Matemática pode e deve ser um valioso instrumento de apresentação de conteúdos e na resolução de problemas, sejam eles de caráter físico, químico, biológico, financeiro, etc.

No primeiro momento será apresentado o sequenciamento lógico de uma Modelagem Matemática seguido por exemplos clássicos com nível de complexidade baixo. A seguir serão propostos problemas que devem ser interpretados e modelados matematicamente em busca de uma solução ótima.

No segundo momento será apresentada a modelagem de fenômenos físicos, objeto principal do minicurso, onde a dinâmica de uma partícula será estudada. Um problema clássico, embora muito elementar, chamado "*O Problema de dois corpos*" servirá como pano de fundo da modelagem de fenômenos interessantes como: Queda Livre de Corpos, O movimento vertical de um corpo em relação à Terra, A viscosidade do ar, Lançamento a grandes alturas, Movimento de projéteis, Movimentos oscilatórios, Movimento Pendular, entre outros. Após o que serão propostos outros problemas como forma de exercício.

A ênfase de todo o minicurso não se restringirá apenas na apresentação das modelagens em si mas, principalmente, em como tais conteúdos podem e devem ser aplicados em aulas do Ensino Básico.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

o Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Capítulo 2

CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

O século XVII é particularmente importante na história da Matemática. Perto do início do século, Napier revelou sua invenção dos logaritmos, Harriot e Oughtred contribuíram para a notação e a codificação da álgebra, Galileu fundou a ciência da dinâmica e Kepler anunciou suas leis do movimento planetário. Mais tarde, Desargues e Pascal inauguraram um novo campo da geometria pura, Descartes lançou a geometria analítica moderna, Fermat estabeleceu os fundamentos da teoria dos números moderna e Huygens deu contribuições de monta à teoria das probabilidades e a outros campos. e então, perto do final do século, na esteira preparada por vários matemáticos do próprio século, Newton e Leibniz contribuíram memoravelmente com a criação do Cálculo. Podemos ver então que muitos campos novos e vastos se abriram para a pesquisa Matemática durante o século XVII.

2.1 Kepler

Johann Kepler nasceu em 1571 perto da cidade de Stuttgart e estudou na universidade de Tübingen. Sua intenção inicial era tornar-se ministro luterano, mas um profundo interesse pela astronomia levou-o a mudar seus planos. Em 1594 aceitou indicação para uma cadeira na universidade de Grätz, na Áustria. Cinco anos mais tarde tornou-se assistente do famoso, mas briguento, astrônomo dinamarquês-sueco Tycho Brahe que havia se mudado para Praga como astrônomo da corte do rei Rodolfo II. Em 1601 Brahe faleceu subitamente e Kepler herdou, além do posto de seu mestre, sua vasta e muito acurada coleção de dados astronômicos sobre o movimento dos planetas.

Kepler procurou de maneira infatigável determinar a natureza e a posição dessas órbitas e como elas são percorridas pelos planetas. Depois de muitas tentativas, feitas quando seus poucos dados eram complementados pela imaginação, Kepler herdou a massa enorme de observações muito acuradas feitas por Tycho Brahe

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

sobre o movimento dos planetas. O problema tornou-se então o seguinte: obter um modelo do movimento dos planetas que se ajustasse exatamente a esse grande conjunto de observações. Tão seguros eram os registros de Brahe que qualquer solução que diferisse das posições observadas por ele, mesmo que apenas por um quarto de diâmetro aparente da Lua, deveria ser descartada como incorreta. Kepler precisava, então, primeiro descobrir com a imaginação alguma solução plausível, e a seguir, com laboriosa perseverança, empenhar-se em um sem número de cálculos tediosos para ou rejeitar sua suposição. Ele fez centenas de tentativas infrutíferas e preencheu resmas e resmas de papel com cálculos, num trabalho efetuado com zelo e paciência constantes durante 21 anos. Por fim, em 1609, viu-se em condições de formular suas duas primeiras leis do movimento planetário e, dez anos depois, em 1619, a terceira.

Figura 2.1: Johann Kepler

Essas leis são marcos fundamentais da história da astronomia e da Matemática. Pois, num esforço para justificá-las, Isaac Newton foi levado a criar a mecânica celeste moderna. Essas leis são:

I. Os planetas movem-se em torno do Sol em trajetórias elípticas com o Sol num dos focos.

II. O raio vetor que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

III. O quadrado do tempo para que um planeta complete sua revolução orbital é diretamente proporcional ao cubo do semieixo maior da órbita.

A descoberta empírica dessas leis, a partir da massa de dados de Brahe, constitui um dos mais notáveis trabalhos de indução jamais feitos na ciência.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

2.2 Newton

Há uma lenda segundo a qual Galileu, ao se retratar e negar o movimento da Terra publicamente, murmurou para si mesmo: "Não obstante a Terra continua a mover-se". Qualquer que seja a base dessa história, ela vem a ser como uma espécie de provérbio, no sentido de que a verdade sempre prevalecerá apesar de todas as tentativas de amordaçá-la. E foi o que se passou, pois, o ano de 1642, que assistiu à morte de Galileu no cativeiro, também assistiu ao nascimento de Newton.

Isaac Newton nasceu na aldeia de Woolsthorpe no dia de natal de 1642, ano do passamento de Galileu. Filho póstumo de um proprietário agrícola, pelos planos iniciais da família deveria abraçar a mesma atividade do pai. O jovem, porém, revelou grande habilidade para projetar miniaturas mecânicas engenhosas e deleitava-se com suas experiências. Assim, construiu um moinho de brinquedo que triturava o trigo, transformando-o em farinha, usando como força motriz um rato e construiu também um relógio de madeira movido a água. Em vista disso sua permanência na escola foi se prolongando.

Figura 2.2: Isaac Newton

E aos 18 anos de idade, ei-lo no Trinity College, Cambridge. Foi só nessa altura, devido a um livro de astrologia que lhe caiu nas mãos, que sua atenção se voltou para a Matemática. Esse novo interesse levou-o a ler primeiro os Elementos de Euclides, que achou demasiado óbvio, e depois La Géométrie de Descartes, que achou algo difícil. Leu também a Clavis de Oughtred, trabalhos de Kleper e Viète e a Arithmetica Infnitorum de Wallis. Não demorou para que ele passasse a criar sua própria Matemática, primeiro descobrindo o teorema do binômio generalizado, depois inventando o método dos fluxos, como ele chamava o atual cálculo diferencial.

Seu *Method of Fluxions*, embora escrito em 1671, só foi publicado em 1736. Para Newton, nesse trabalho, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de fluxo do fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y, então o fluxo desse fluente era denotado por $\dot{y}$ em notação moderna esse fluxo equivale a $\dfrac{dy}{dt}$, onde t representa o tempo. A despeito dessa intromissão do tempo em geometria, pode-se excluir a ideia de tempo, admitindo-se que alguma quantidade, digamos, a abscissa do ponto móvel, cresça de maneira constante. Essa taxa de crescimento constante de alguma fluente é o que ele chamava fluxo principal, podendo o fluxo de qualquer outro fluente ser comparado com esse fluxo principal. Newton indicava o fluxo de $\dot{y}$ por $\ddot{y}$ e assim por diante.

Newton introduziu também um outro conceito, chamado por ele de momento de um fluente: trata-se do incremento infinitamente pequeno sofrido por um fluente como x, por exemplo, num intervalo, de tempo infinitamente pequeno o. Assim, o momento do fluente x é dado por $\dot{x}o$. Newton salientou que podemos, em qualquer problema, desprezar, os termos que aparecem multiplicados por potências de o iguais a ou maiores que 2 e obter assim uma equação envolvendo as coordenadas x e y do ponto gerador da curva e seus fluxos $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

Obviamente, os *Principia* são a obra-prima de Newton. Nela se encontra a primeira sistematização completa da dinâmica e uma formulação completa dos principais fenômenos de movimento, terrestres e celestes. Mostrou-se o mais influente e admirado trabalho na história da ciência.

2.3 Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz, o grande gênio universal do século XVII e rival de Newton na invenção do Cálculo, nasceu em Leipzig em 1646. Bastante criança aprendeu latim e grego por conta própria; e aos 12 anos de idade já dominava todo o conhecimento corrente de Matemática, filosofia, teologia e leis publicado pelos textos da época. Por essa época, ainda menino, começou a desenvolver as primeiras ideias de sua *Characteristica Generalis*, concepção que envolvia uma Matemática universal, algo que posteriormente iria irromper na lógica simbólica de George Boole (1815-1864) e, mais tarde, em 1910, nos Principia Mathematica, grande obra de Whitehead e Russell. Quando, ostensivamente devido à sua pouca idade, foi-lhe negado o grau de doutor em leis na universidade de Leipzig, ele se mudou para Nuremberg onde escreveu um ensaio brilhante sobre o ensino de leis pelo método histórico, dedicado ao eleitor de Mainz. Devido a isso foi indicado pelo eleitor para uma comissão incumbida de recodificar alguns estatutos. Daí para a frente, pelo resto de sua vida, Leibniz esteve engajado no serviço diplomático, primeiro a serviço do eleitor de Mainz e depois, de 1676 até sua morte, a serviço da corte de Hanover.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Antes de deixar Paris e assumir o rendoso posto de bibliotecário e conselheiro do eleitor de Hanover, Leibniz já havia descoberto o Teorema Fundamental do Cálculo, desenvolvido grande parte de sua notação para o assunto e estabelecido muitas das fórmulas elementares de diferenciação.

Figura 2.3: Gottfried W. Leibniz

Leibniz inventou o seu cálculo entre 1673 e 1676. Usou pela primeira vez o símbolo de integral, um S alongado, derivado da primeira letra da palavra latina *summa* (soma) em 29 de outubro de 1675. O objetivo era indicar uma soma de indivisíveis.

Algumas semanas depois ele já escrevia diferenciais e derivadas como o fazemos hoje, assim como escrevia $\int xdy$ e $\int ydx$ para integrais. Seu primeiro artigo sobre o cálculo diferencial só apareceu em 1684. Nele se define dx como um intervalo finito arbitrário e dy pela proporção

$$dy : dx = y : subtangente.$$

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Capítulo 3

O QUE É MODELAGEM?

Quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela – o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo.

Consideraremos dois tipos de modelo:

- Modelo Objeto é a representação de um objeto ou fato concreto; suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. Tal representação pode ser pictórica (um desenho, um esquema, um mapa, etc.), conceitual (fórmula matemática), ou simbólica.

- Um modelo teórico é aquele vinculado a uma teoria geral existente – será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação. Ele deve conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais).

Modelo Matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado.

Os modelos matemáticos podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações analisadas e classificados conforme o tipo de matemática utilizada:

i. Linear ou não-linear, conforme suas equações básicas tenham estas características;

ii. Estático, quando representa a forma do objeto – por exemplo, a forma geométrica de um alvéolo; ou Dinâmico quando simula variações de estágios do fenômeno – por exemplo, crescimento populacional de uma colmeia.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

iii. Educacional, quando é baseado em um número pequeno ou simples de suposições, tendo, quase sempre, soluções analíticas. O modelo presa-predador de Lotka-Volterra é um exemplo típico de tais modelos.

iv. Estocástico ou Determinístico, de acordo com o uso ou não de fatores aleatórios nas equações.

Os modelos determinísticos são baseados na suposição que se existem informações suficientes em um determinado instante ou num estágio de algum processo, então todo o futuro do sistema pode ser previsto precisamente.

Os modelos estocásticos são aqueles que descrevem a dinâmica de um sistema em termos probabilísticos.

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

As vantagens do emprego da modelagem em termos de pesquisa podem ser constatadas nos avanços obtidos em vários campos como a Física, a Química, a Biologia e a Astrofísica entre outros. A modelagem pressupõe multidisciplinariedade. E, nesse sentido, vai ao encontro das novas tendências que apontam para a remoção de fronteiras entre as diversas áreas de pesquisa.

3.1 Quais os passos da Modelagem?

De modo geral, uma atividade de Modelagem Matemática origina-se em uma situação problema e tem como característica essencial a possibilidade de compreender o cotidiano ou a relação com aspectos externos à Matemática, caracterizando-se como um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

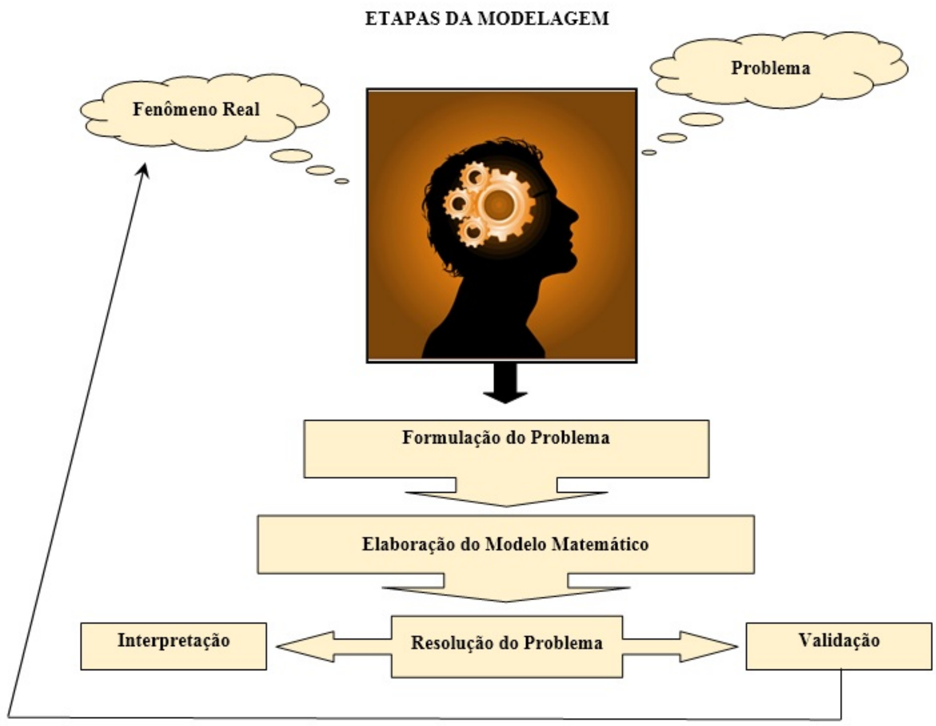

Figura 3.1: Etapas da Modelagem

i. Inicialmente faz-se uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática.

ii. Buscam-se informações sobre o fenômeno, identificam-se e selecionam-se as variáveis.

iii. Elaboram-se hipóteses, simplifica-se buscando a obtenção de uma representação matemática (modelo matemático).

iv Resolução do problema por meio de procedimentos adequados.

v Análise da solução que implica numa validação, identificando a sua aceitabilidade ou não.

Tais procedimentos, ainda que possam ser realizados de forma não linear em relação à ordem em que são apresentados, são associados ao que se denomina etapas da Modelagem Matemática.

3.2 Alguns exemplos elementares de Modelagem Matemática

3.2.1 Distâncias inacessíveis

Tales nasceu em Mileto (624 - 548 A.C) passava grande parte do tempo viajando; em uma de suas viagens para o Egito, passou a ser admirado pelo rei Amasis, por ter proposto uma estratégia para medir a altura de uma pirâmide, sem escalá-la.

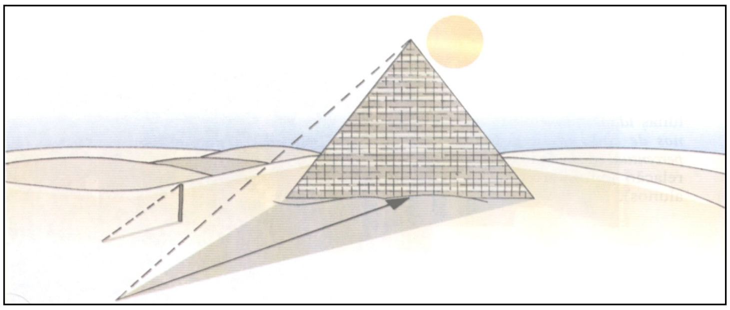

Figura 3.2: Pirâmide de Queóps

3.2.2 Transformação da Argila em Tijolos

Visitando uma indústria cerâmica na zona rural de Teresina um professor descobriu que a maior produção dessa é a de tijolos furados. Se as dimensões de cada tijolo são de 20 x 14 x 9,5 cm e a densidade da argila úmida é de 1800 a 2100 kg/m^3 quanto de argila (em kg) úmida necessitamos para fabricar uma centena de tijolos?

Figura 3.3: Tijolo com Seis Furos

O tijolo de barro vazado, com seis furos, que ao sair da maromba apresenta as seguintes dimensões: 22 cm de comprimento por 15 cm de altura, por 10 cm de

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

largura, ou o meio tijolo com 12 cm de comprimento pelas mesmas medidas da largura e altura. Após o processo de queima as suas dimensões passam a 20 cm de comprimento, 14 cm de altura e 9,5 cm de largura. O volume do tijolo verde é de 3.300 cm^3 e a sua massa 2,5 Kg, ao passar pelo forno e sofrer o processo de queima, passa a ter um volume de 2.660 cm^3 e a sua massa passa a 1,5 kg.

3.2.3 Chaminés

Na Cerâmica em questão existem oito chaminés interligadas através de um canal no subsolo, controlado por dezesseis registros, e dezesseis fornos do tipo Hoffmam.

O comprimento de cada chaminé em estudo é de 18 metros, sendo 2 metros abaixo do solo, o que reforça a sua base na construção. Nessa chaminé foram utilizados aproximadamente 25.000 tijolos, 49 sacos de cimento, além de pedra e areia. O formato da chaminé é de um cone de revolução, com diâmetro na base de 3 metros e na “boca” de 1,20 metros.

3.2.4 Controle Biológico de pragas

Desejamos combater biologicamente uma praga de insetos em uma plantação sem o uso de substância agroquímicas. Fazer uma Modelagem Matemática do problema.

A estratégia a utilizar é a seguinte: controlamos a população de insetos fazendo uma plantação inicial da planta atacada com o objetivo de atrair os insetos a serem combatidos, para posteriormente serem recolhidos.

No caso possível de se obter resultados positivos, teremos determinado na verdade o fator de impacto do problema, pois, sem o uso de substâncias químicas, o curso econômico resulta ser muito confortável.

Supondo que a região de plantação seja um retângulo de lados, M e N e que a produção da plantação seja igual à área plantada. Nesse ponto estamos simplificando as hipóteses.

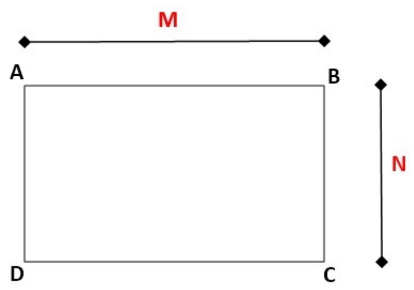

Figura 3.4: Terreno

Seja x a largura da faixa ao redor do campo retangular EFGH. Considerando um campo retangular de dimensões M = 90 e N = 45 dados em metros, com um percentual máximo de perda p = 5%, as dimensões do retângulo interior EFGH são, respectivamente, 90 – 2x e 45 – 2x metros.

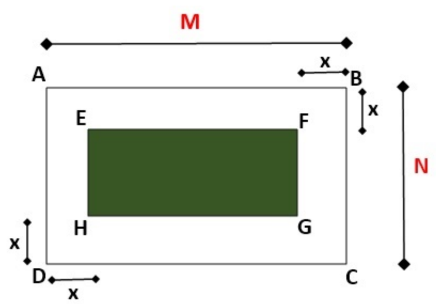

Figura 3.5: Terreno com plantação

3.2.5 Conta de Água

Encontrar a função que retorna o valor da conta de água de uma residência dada a tabela de tarifas:

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Tabela de Tarifas

Categorias	Faixa de Consumo (m^3)	Faixa (R$)	Esgoto (%)
Item 1 - Residencial Social	Até 10	11,30	50
	Acima de 10	Cobrar pela Tarifa Residencial não Social	50
Item 2 - Residencial não Social	Até 10	25,73	50
	11 a 25	(25,73 + 4,80/m^3 Excedente a 10m^3)	50
	Acima de 25	(97,73 + 8,28/m^3 Excedente a 25m^3)	50
Item 3 - Comercial / Industrial / Pública	Até 10	52,84	80
	11 a 25	(52,84 + 7,89/m^3 Excedente a 10m^3)	80
	Acima de 25	(171,19 + 9,35/m^3 Excedente a 25m^3)	80
Item 4 - Pequeno Comércio	Até 10	25,73	80
	Acima de 10	Cobrar pela Tarifa Comercial	80

Categorias	Faixa de Consumo (m^3)	Valor (R$)	Esgoto (%)
Residencial Não Social	12	35,33	50
Comercial	12	68,62	80
Industrial	12	68,62	80
Pública	12	68,62	80

Vigência a partir de: 01/07/2016

Figura 3.6: Tarifas de Água

Calcular o valor da conta de água de uma residência que consome 28 metros cúbicos de água em um mês.

Calcular a economia em reais, com a diminuição da vazão de todos os pontos de consumo em 30%.

3.2.6 Dinâmica Populacional (Modelo Malthusiano)

A taxa de crescimento de uma população $p(t)$, num instante t, é definida por $\dot{p}(t)/p(t)$.
Um dos modelos mais simples é aquele em que se supõe que a taxa de crescimento é constante igual a λ. Assim temos a seguinte equação que rege o crescimento da população neste caso:

$$\dot{p} = \lambda p$$

Um modelo dessa natureza parece razoável para descrever a população de micro-organismos que se reproduzem por mitose, e para a aplicabilidade em intervalos delimitados de tempo, pois tem solução:

$$p(t) = p(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}$$

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Capítulo 4

EXERCÍCIOS PARTE 1

Nas questões abaixo:

i. Formule e apresente o modelo matemático. Caso não esteja, coloque na forma padrão.

ii. Especificar as variáveis, número de variáveis e número de restrições (desconsiderar as restrições triviais $x \in \mathbb{R}^+$).

1) Certa empresa fabrica 2 produtos P1 e P2. O lucro por unidade de P1 é de 100 reais e o lucro unitário de P2 é de 150 reais. A empresa necessita de 2 horas para fabricar uma unidade de P1 e 3 horas para fabricar uma unidade de P2. O tempo mensal disponível para essas atividades é de 120 horas. As demandas esperadas para os dois produtos levaram a empresa a decidir que os montantes produzidos de P1 e P2 não devem ultrapassar 40 unidades de P1 e 30 unidades de P2 por mês. Construa o modelo do sistema de produção mensal com o objetivo de maximizar o lucro da empresa. (Assumir que as quantidades podem ser fracionárias)

2) Sabe-se que uma pessoa necessita, em sua alimentação diária, de um mínimo de 15 unidades de proteínas e 20 unidades de carboidratos. Suponhamos que, para satisfazer esta necessidade, ela disponha dos produtos A e B. Um Kg do produto A contém 3 unidades de proteínas, 10 unidades de carboidrato e custa R$ 2,00. Um Kg do produto B contém 6 unidades de proteínas, 5 unidades de carboidrato e custa R$ 3,00. Formule o modelo matemático das quantidade que deverão ser compradas de cada produto de modo que as exigências da alimentação sejam satisfeitas a custo mínimo?

3) Um fabricante de rações quer determinar a fórmula mais econômica de uma certa ração. A composição nutritiva dos ingredientes disponíveis no mercado e os seus custos são os seguintes:

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

	Ingredientes		
Nutrientes	Soja	Milho	Cana
Cálcio	0,2%	1%	3%
Proteína	50%	9%	0%
Carbo-Hidratos	0,8%	2%	2%
Custo/quilo	15,00	20,00	8,00

Figura 4.1: Composição Nutritiva/Custos

O fabricante deve entregar 1000 quilos de ração por dia e garantir que esta contenha:

no máximo	no mínimo	de
1,2%	0,8%	Cálcio
-	22%	Proteína
20%	-	Carbo-Hidratos

Figura 4.2: Percentual Nutritivo Exigido

4) Um fazendeiro está estudando a divisão de sua propriedade nas seguintes atividades produtivas:

a) Arrendamento - Destinar certa quantidade de alqueires para a plantação de cana de açúcar, a uma usina local, que se encarrega da atividade e paga pelo aluguel da terra R$ 300,00 por alqueire por ano;

b) Pecuária - Usar outra parte para a criação de gado de corte. A recuperação das pastagens requer adubação (100 kg/alqueire) e irrigação (100.000 litros de água/alqueire) por ano. O lucro estimado nessa atividade é de R$400,00 por alqueire por ano.

c) Plantio de Soja - Usar uma terceira parte para o plantio de soja. Essa cultura requer 200 kg por alqueire de adubos e 200.000 litros de água por alqueire para irrigação por ano. O lucro estimado nessa atividade é de R$500,00 por alqueire por ano.

A disponibilidade de recursos por ano é de 12.750.000 litros de água,14.000 kg de adubo e 100 alqueires de terra. Quantos alqueires deverá destinar a cada atividade para proporcionar o melhor retorno? Construa o modelo de decisão.

5) Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a 1,50 reais cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi 1,48 reais, foram vendidos 10.200 litros. Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor arrecadado por dia com a venda do álcool, então qual é a expressão que relaciona V e x?

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Capítulo 5

O QUE É FÍSICA MATEMÁTICA?

A Física-Matemática caracteriza-se por dar ênfase a aspectos matemáticos da Física Teórica, visando enriquecê-la com maior rigor matemático, clareza de raciocínio e limpeza de argumentos e de premissas, sempre mantendo como objetivo principal a compreensão de propriedades e o conteúdo físico de modelos e teorias estudadas.

Quando tratamos de problemas ainda não solucionados (os "em aberto"), ela reúne as características de uma área de pesquisa, mas quando se destina ao estudo de situações já trabalhadas, torna-se uma disciplina que se constitui alicerce na formação de qualquer aluno de Ciências Exatas.

Nesse contexto, a modelagem matemática de processos qualifica-se como questão crucial e será amplamente utilizada nesse minicurso.

5.1 O problema dos dois corpos

O assunto aqui resume-se à análise das equações que descrevem o movimento de dois corpos que interagem gravitacionalmente. Para simplificar, vamos supor que os corpos em questão são esferas homogêneas. Sabe-se que nessas circunstâncias a interação se produz como se eles fossem pontuais. Um esquema da disposição espacial é ilustrado na figura abaixo.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

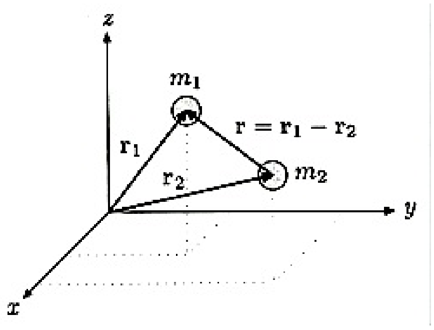

Figura 5.1: O Problema dos Dois Corpos

Sejam F_{12} e F_{21} respectivamente a força que o corpo 1 exerce sobre o corpo 2, e vice-versa. Então,

$$F_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{|r|^3}r = m_1\frac{d^2r_1}{dt^2} \tag{5.1}$$

$$F_{21} = \frac{Gm_1m_2}{|r|^3}r = m_2\frac{d^2r_2}{dt^2} \tag{5.2}$$

onde $G \approx 9,67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$ é a chamada constante de gravitação universal. Como as equações estão acopladas, vamos introduzir as novas variáveis:

Raio vetor do centro de massa do sistema: $R = \dfrac{m_1r_1 + m_2r_2}{m_1 + m_2}$
Posição relativa entre os corpos: $r = r_1 - r_2$
Em termos dessas novas variáveis podemos escrever

$$r_1 = R + \frac{m_2 r}{m_1 + m_2} \text{ e } r_2 = R - \frac{m_1 r}{m_1 + m_2}$$

Supondo que as massas não variam com o tempo temos que:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 0 \tag{5.3}$$

$$\mu\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{|r|^3}r \tag{5.4}$$

Onde $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ é denominada "‘massa reduzida do sistema".

Isso quer dizer que o centro de massa do sistema está animado de um movimento retilíneo e uniforme e, caso ele esteja inicialmente em repouso, em repouso haverá de continuar.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Por outro lado, o movimento relativo dar-se-á como se uma massa de valor igual a μ estivesse sendo acionada pela força de interação entre os corpos de massa m_1 e m_2. As equações, assim, estão separadas e, poderemos fazer algumas conjecturas.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Capítulo 6

MODELANDO FENÔMENOS FÍSICOS CLÁSSICOS

A exemplo da Geometria Euclidiana, a Mecânica Newtoniana também possui suas noções primeiras e seus axiomas para sua formalização e funcionamento enquanto ciência dedutiva. Essas noções primitivas e esses axiomas (leis físicas) são escolhidos visando obter um modelo matemático adequado e representativo dos fenômenos reais.

Vamos inicialmente introduzir as grandezas cinemáticas. Consideremos o movimento de uma partícula no espaço $\mathbb{R}^3$.

O vetor posição da partícula no instante t será designado por: $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

O vetor velocidade é a derivada $\dot{X}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ do vetor posição.

O vetor aceleração é a derivada $\ddot{X}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$ do vetor velocidade.

Supondo que uma partícula de massa m tenha seu movimento causado por um campo de forças em $\mathbb{R}^3$, designado por $F(x) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$.

A *segunda lei de Newton* estabelece a conexão entre a aceleração da partícula e a força que produz o movimento:

$$m\ddot{X} = F$$

Que pode ser apresentada de modo mais geral por

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{X}\right) = F$$

Onde se supõe que a massa possa variar com o tempo.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

A *primeira lei de Newton* diz que, sem a ação de forças, uma partícula não pode mudar seu estado de repouso ou de movimento. Essa lei é uma consequência imediata da segunda pois se $F = 0$, então integrando a expressão anterior obtemos $\dot{X} = C =$ vetor constante. Logo, se no instante $t = 0$, o corpo está em repouso $\dot{X}(0) = 0$, então $\dot{X}(t) = 0$ para todo t. Se no instante $t = 0$, $\dot{X}(0) = C \neq 0$, então

$$X(t) = Ct + X(0)$$

Ou seja, a trajetória da partícula é retilínea, com velocidade constante.

A *terceira lei de Newton*, diz que, quando duas partículas exercem forças entre si, essas forças são iguais em módulo, têm direção da reta que as une e têm sentidos opostos.

6.1 Queda livre de corpos

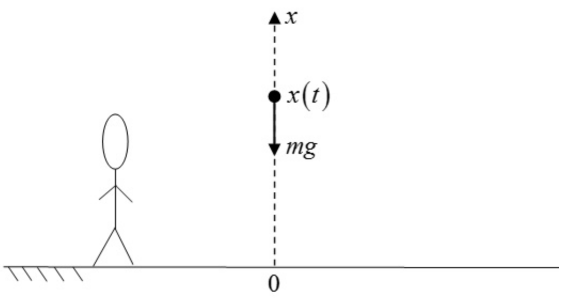

Figura 6.1: Corpo em Queda Livre

No caso específico em que um dos corpos seja a Terra e o outro muito menos massivo do que ela ($M_T \approx 6,024 \times 10^{24} kg$), a massa do segundo, em relação ao primeiro, será desprezível. Com isso $R \approx r_2$ e , como $\mu \approx m_1$, a Terra ficará "parada" enquanto que o movimento do corpo de massa m_1 vai responder à equação (5.4).

Considerando essas como nossas hipóteses de trabalho vale destacar também que:

1. O fenômeno objeto de estudo ficará restrito às "leis clássicas".
2. A Terra (bem como o corpo em questão) será considerada uma esfera perfeita e homogênea na sua constituição.
3. A origem do nosso sistema ficará atrelada ao centro de massa da Terra e ignoraremos seus movimentos.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

4. Um de nossos eixos (digamos o x) ficará na direção do movimento e no sentido do vetor de posição relativa do corpo em relação ao centro de massa da Terra.

5. A distância do corpo relativa à superfície da Terra será considerada insignificante se comparada com o raio dela ($R_T \approx 6,4 \times 10^3 km$)

6. Forças de atrito serão desconsideradas.

7. A massa dos objetos considerados permanecerá inalterada.

Sob esse conjunto de hipóteses, são suficientes duas leis (e ainda assim simplificadas) para descrever o problema: a "*lei da gravitação universal*" e a "*segunda lei de Newton*".

Podemos portanto formular:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM_T m}{R_T^2} \tag{6.1}$$

Sendo x a distância medida em relação à superfície da Terra e já tendo sido feitas as simplificações decorrentes do fato de que $x \ll R_T$.
Então, definindo $g = \dfrac{GM_T}{R_T^2}$ e estabelecendo as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = v(0) = v_0$, obtemos, como solução da equação (6.1),

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{6.2}$$

6.2 Queda de corpos considerando a resistência do ar

O senso comum nos sugere que o modelo dado pela equação (6.1) não pode descrever, de um modo geral, o movimento de objetos nas proximidades da superfície da Terra.

Portanto o que está faltando para ajustar o modelo, neste caso, é a força de viscosidade que o ar exerce sobre os objetos.

Vamos, portanto, incluir no modelo uma força de atrito atuando na direção contrária ao movimento, supondo que sua intensidade seja dada por $F_v = -\alpha v$, onde $v = \dfrac{dx}{dt}$ é a velocidade e α é uma constante que depende não somente do meio mas, também, das dimensões, da composição e do formato do objeto. Nessas circunstâncias, podemos escrever a equação do movimento

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} = -g, \tag{6.3}$$

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

onde $\beta = \dfrac{\alpha}{m}$. Sob as condições iniciais definidas anteriormente, a solução dessa equação é:

$$x_\beta = -\left(\frac{g}{\beta^2} + \frac{v_0}{\beta}\right) exp(-\beta t) + x_0 + \frac{g}{\beta^2} + \frac{v_0}{\beta} - \frac{gt}{\beta} \tag{6.4}$$

OBS: Convém observar que as equações (6.4) e (6.2) terão que coincidir no limite quando β tender a zero, já que a equação (6.3) se reduz a (6.1) quando $\beta \to 0$.

O problema dos dois corpos também nos leva às equações aplicadas a "lançamentos a grandes alturas" e a "lançamento vertical de um corpo autopropulsado" que não serão objetos de estudos desse minicurso.

6.3 Movimento de Projéteis

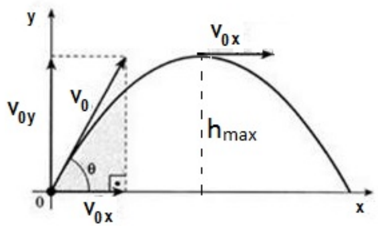

Figura 6.2: Movimento de um Projétil

O modelo a seguir é dos mais simples que se considera em balística. Vamos considerar o movimento de uma partícula de massa m num plano (x, y) perpendicular ao solo. Supondo que num instante $t = 0$ ela sai da origem com uma velocidade linear v_0 e num ângulo α (ângulo de tiro) com a horizontal.

Considerando que não há resistência do ar e a única força atuando na partícula é a da gravidade. Designando por $(x(t), y(t))$ o vetor posição da partícula, temos, pela *segunda lei de Newton*:

$$m\ddot{x} = 0 \ \ e \ \ m\ddot{y} = -mg \tag{6.5}$$

O vetor velocidade inicial é dado por $\dot{X}(0) = (\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (v_0 cos\alpha, v_o sin\alpha)$. Logo integrando (6.5) obtemos

$$\dot{x}(t) = v_0 cos\alpha \ \ e \ \ \dot{y}(t) = -gt + v_0 sin\alpha \tag{6.6}$$

Integrando (6.6) e usando o fato que a posição inicial da partícula é $(0, 0)$, obtemos

$$x(t) = (v_0 cos\alpha)\, t \ \ e \ \ y(t) = (v_0 sin\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{6.7}$$

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Das expressões (6.6) e (6.7) podemos obter várias informações sobre o problema. Por exemplo:

i A trajetória é uma parábola:

$$y = (tg\alpha)\, x - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha} x^2. \tag{6.8}$$

ii A altura e a distância horizontal máximas atingidas pelo corpo são respectivamente

$$h_{max} = \frac{v_0^2 sin^2\alpha}{2g} \;\; e \;\; d_{max} = \frac{v_0^2}{g} sin2\alpha \tag{6.9}$$

iii A duração do trajeto do corpo até colidir com o solo é

$$T = \frac{2v_0 sin\alpha}{g}$$

iv Variando-se α e mantendo v_0 constante, a distância horizontal máxima que pode ser atingida é

$$D_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

Que corresponde a um ângulo $\alpha = 45^o$.

6.4 Movimentos oscilatórios

Entende-se por movimento oscilatório aquele que se realiza no entorno de uma dada posição de equilíbrio (ponto no qual a resultante das forças é nula). Um dos casos mais simples, que passaremos a tratar, é o de uma mola em que uma de suas extremidades está fixada e a outra está presa a um corpo cujo movimento desejamos descrever.

A experiência comprova que o esforço necessário para esticar ou comprimir uma mola depende da extensão da deformação produzida. Para pequenas deformações (dentro dos limites elásticos do material), podemos admitir que, esticada ou comprimida, a mola exerce uma força elástica de restauração cuja intensidade é proporcional à quantidade esticada ou comprimida.

Nessas circunstâncias, vamos considerar o movimento no caso de um corpo suspenso, desprezando-se as forças de atrito e a massa da mola.

Considerando-se como origem do sistema de referência a posição do centro de massa do corpo no caso em que a mola não está nem comprimida nem distendida e denotando-se por $y(t)$ a posição do centro de massa no instante t, convencionando-se que $y(t) > 0$ se a mola está esticada e $y(t) < 0$ se está comprimida. Veja a figura abaixo.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

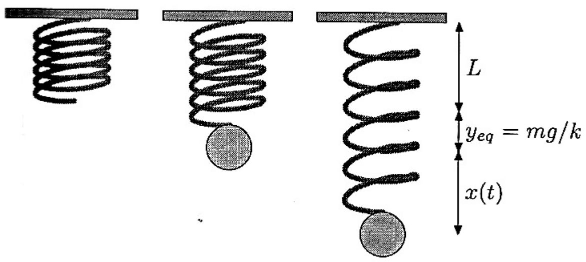

Figura 6.3: Sistema Massa-Mola

Da segunda lei de Newton obtemos:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - ky \tag{6.10}$$

onde $k > 0$ é a constante elástica da mola (constante de Hooke) que depende, dentre outras coisas, do tipo do material.

Impondo as condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y'(0) = v_0$, obtemos, como modelo para a descrição do movimento do corpo, a função $y(t)$ solução de (6.10).

Podemos simplificar a equação se considerarmos $x(t) = y(t) - \frac{mg}{k}$. Isto equivale a redefinir a origem do sistema de coordenadas situando-o agora no ponto de equilíbrio. De fato, $y(t)$ é solução de (6.10) com dados iniciais $y(0) = y_0$ e $y'(0) = v_0$ se, e somente se, $x(t)$ é solução de

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -ky \tag{6.11}$$

Com dados iniciais $x(0) = x_0 = y_0 - \frac{mg}{k}$ e $x'(0) = v_0$.
A única solução de (6.11) que satisfaz as condições dadas é:

$$x(t) = x_0 cos\omega t + \frac{v_0}{\omega} sin\omega t \tag{6.12}$$

onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é denominada frequência angular e $T = \frac{2\pi}{\omega}$ o período das oscilações. Este movimento é chamado de *harmônico simples*. Observe que (6.12) pode ser expressa na forma $x(t) = Asin(\omega t + \delta)$, com

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \text{ e } \delta = arcsin\left(\frac{x_0}{A}\right)$$

sendo A denominada amplitude do movimento.

Ainda sobre esse tópico teríamos Oscilações amortecidas, o sistema massa-elástico, oscilações forçadas e fenômenos de ressonância que não trataremos nesse minicurso.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

6.5 Movimento pendular

Todos os modelos abordados até aqui se referiam a movimentos retilíneos, isto é, movimentos em uma única dimensão. Nessas condições, as equações decorrentes se reduziam diretamente ao caso escalar. Entretanto, para a descrição das oscilações de um pêndulo, o caráter vetorial da segunda lei de Newton tem que ser destacado.

Inicialmente vamos estabelecer algumas restrições além das hipóteses de trabalho consideradas anteriormente:

1. A distância do ponto de suspensão (P) do pêndulo em relação à superfície da Terra será desprezível em relação ao raio da Terra.
2. A haste do pêndulo será considerada um fio rígido e de massa desprezível.
3. A massa pendular será considerada pontual.
4. O atrito com o ar será desprezado.

Nas figuras abaixo estão ilustradas a disposição das forças que atuam sobre a massa pendular e os vetores que serão considerados na descrição do processo oscilatório.

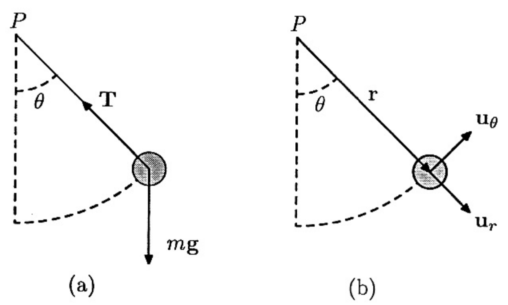

Figura 6.4: Pêndulo Simples

Pela segunda lei de Newton, podemos escrever

$$T + mg = m\frac{d^2r}{dt^2} \tag{6.13}$$

Em seu movimento oscilatório, a massa pendular se desloca sobre um arco de circunferência de raio igual ao comprimento l do fio e de centro no ponto de suspensão P, assim:

$$u_0 = (cos\theta, sin\theta) \text{ e } u_\theta = (-sin\theta, cos\theta).$$

Tomando-se a derivada em relação a θ em cada componente dos vetores acima temos

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

$$\frac{u_r}{d\theta} = u_\theta \text{ e } \frac{du_\theta}{d\theta} = -u_r.$$

Se, em dado instante t, θ representa o ângulo entre a aste do pêndulo e a reta vertical passando por P, temos

$$\begin{aligned} r &= lu_r, \\ T &= -Tu_r, \\ mg &= (mgcos\theta)u_r - (mgsin\theta)u_\theta. \end{aligned}$$

onde $T = |T|$. Observa-se também que

$$\frac{dr}{dt} = l\frac{du_r}{dt} = l\frac{du_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = lu_\theta\frac{d\theta}{dt},$$

de onde podemos concluir que

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 u_r + l\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)u_\theta.$$

Substituindo a expressão acima em (6.13), temos

$$(mgcos\theta - T) - (mgsin\theta)u_\theta = ml\left[\theta'' u_t heta - (\theta')^2 u_r\right]$$

Como os vetores u_r e $u_t heta$ são ortogonais, a equação vetorial acima se reduz às seguintes equações:

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}sin\left(\theta(t)\right) = 0 \tag{6.14}$$

$$mgcos\left(\theta(t)\right) + ml\left(\theta(t)\right)^2 = T(t) \tag{6.15}$$

A primeira equação, que descreve a variação do ângulo θ em função do tempo, é a lei do movimento propriamente dito. Portanto uma vez conhecida a solução da primeira, temos diretamente, a partir da segunda, o módulo da força de tração como função do tempo.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Capítulo 7

EXERCÍCIOS PARTE 2

6) Em certas circunstâncias, um corpo B de massa m em queda, como o paraquedista mostrado na figura abaixo, encontra resistência do ar proporcional à sua velocidade v. Use a *segunda lei de Newton* para encontrar a velocidade v do corpo em qualquer instante supondo que a direção positiva é para baixo.

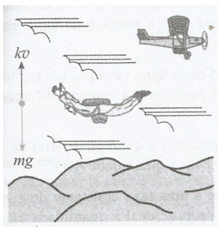

Figura 7.1: Corpo Caindo com Resistência

7) Pela *lei da gravitação universal de Newton*, a aceleração de queda livre a de um corpo, tal como o satélite mostrado na figura abaixo caindo de uma grande altura, não é a constante g. Em vez disso, a aceleração a é inversamente proporcional ao quadrado da distância r entre o centro da Terra e o corpo.

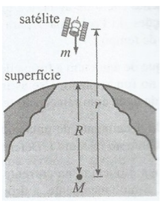

Figura 7.2: Satélite

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

a) Use o fato de que na superfície da Terra $r = R$ para demonstrar a constante de proporcionalidade.

b) Use a *segunda lei de Newton* e a parte (a) para encontrar a distância r.

8) Uma droga é injetada na corrente sanguínea de um paciente a uma taxa constante de r gramas por segundo. Simultaneamente, a droga é removida a uma taxa proporcional à quantidade $x(t)$ de droga presente no instante t. Determine a equação que governa $x(t)$.

9) Um projétil atirado de uma arma tem peso $w = mg$ e velocidade v tangente à trajetória de seu movimento. Desprezando a resistência do ar e todas as outras forças exceto seu peso, encontre o sistema de equações que descreve o movimento.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Referências Bibliográficas

[1] BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. São Paulo: Contexto, 2002.

[2] EVES, Howard. Introdução à história da matemática; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

[3] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. NEVES, Aloisio Freiria. Equações Diferenciais Aplicadas. Rio de Janeiro: IMPA, 1997.

[4] GONDAR, J. Lópes. CIPOLATTI, R. Iniciação à Física Matemática – Modelagem de Processos e Métodos de Solução. 1^a Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[5] ZILL, Dennis G. Equações diferenciais com aplicações em modelagem. São Paulo: Thomson, 2003.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2 Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

SBM

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Medio Vol. 4 - Exercicios e Soluções* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Um Convite à Matemática* - D.C de Morais Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 1 - Números Reais - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 3 - Introdução à Análise - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 4 - Combinatória - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 5 - Teoria dos Números - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 6 - Polinômios - A. Caminha
- *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)
- *Como Resolver Problemas Matemáticos* - T. Tao
- *Geometria em Sala de Aula* - A. C. P. Hellmeister (Comitê Editorial da RPM)
- *Números Primos, amigos que causam problemas* - P. Ribenboim
- *Manual de Redação Matemática* - D.C de Morais Filho

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2 Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

SBM

COLEÇÃO PROFMAT

- *Introdução à Álgebra Linear* - A. Hefez e C.S. Fernandez
- *Tópicos de Teoria dos Números* - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha
- *Polinômios e Equações Algébricas* - A. Hefez e M.L. Villela
- *Tópicos de Historia de Matemática* - T. Roque e J. Bosco Pitombeira
- *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática* - V. Giraldo, P. Caetano e F. Mattos
- *Temas e Problemas Elementares* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Números e Funções Reais* - E. L. Lima
- *Aritmética* - A. Hefez
- *Geometria* - A. Caminha
- *Avaliação Educacional* - M. Rabelo
- *Geometria Analítica* - J. Delgado, K. Frensel e L. Crissaff
- *Matemática Discreta* - A. Morgado e P. C. P. Carvalho
- *Matemática e Atualidade - Volume 1* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Fundamentos de Cálculo* - A. C. Muniz Neto
- *Matemática e Atualidade - Volume 2* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear* - A. Hefez e C. de Souza Fernandez
- *Exercícios Resolvidos de Aritmética* - A. Hefez

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D. G. de Figueiredo
- *Números Racionais e Irracionais* - I. Niven
- *Tópicos Especiais em Álgebra* - J. F. S. Andrade

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L. N. de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M. P. do Carmo
- *Matemática Discreta* - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- *Álgebra Linear: Um segundo Curso* - H. P. Bueno
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa* - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.
- *Elementos de Topologia Geral* - E. L. Lima
- *A Construção dos Números* - J. Ferreira
- *Introdução à Geometria Projetiva* - A. Barros e P. Andrade
- *Análise Vetorial Clássica* - F. Acker
- *Funções, Limites e Continuidade* - P. Ribenboim
- *Fundamentos de Análise Funcional* - G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira
- *Teoria dos Números Transcendentes* - D. Marques
- *Introdução à Geometria Hiperbólica - O modelo de Poincaré* - P. Andrade
- *Álgebra Linear: Teoria e Aplicações* - T. P. de Araújo
- *Introdução à Análise Matemática na Reta* - C. I. Doering

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2 Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

SBM

- *Topologia e Análise no Espaço Rn* - R. Freire de Lima
- *Equações Ordinárias e Aplicações* - B. Scárdua

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H. Bolfarine e M. Sandoval
- *Discretização de Equações Diferenciais Parciais* - J. Cuminato e M. Meneguette
- *Fenômenos de Transferência – com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia volume 1: Fundamentos* - J. Pontes e N. Mangiavacchi

COLEÇÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª* - E. Mega e R. Watanabe
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª* - C. Moreira e E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues
- *21 Aulas de Matemática Olímpica* - C. Y. Sh
- *Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções* - K. I. M. Oliveira e A. J. C. Fernández
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Fundamental* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Médio* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 17ª a 24ª* - C. G. T. de A. Moreira, C. Y. Shine, E. L. R. Motta, E. Tengan e N. C. Saldanha

COLEÇÃO FRONTEIRAS DA MATEMÁTICA

- *Fundamentos da Teoria Ergódica* - M.Viana e K. Oliveira
- *Tópicos de Geometria Diferencial* - A. C. Muniz Neto
- *Formas Diferenciais e Aplicações* - M. Perdigão do Carmo

COLEÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume I Números Naturais* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo
- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume II Números Inteiros* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo

APOIO:

ANPMat

INSTITUTO FEDERAL
Piauí
Campus Floriano

ISBN 978-85-8337-125-0

9 788583 371250 >