2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

POLIMINÓS E SEU CURIOSO UNIVERSO

Newton Luís Santos

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Poliminós e seu Curioso Universo

Poliminós e seu curioso universo

Capa: Pablo Diego Regino
Projeto gráfico: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

ISBN: 978-85-8337-116-8

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

POLIMINÓS E SEU CURIOSO UNIVERSO

Newton Luís Santos

1ª edição
2016
Rio de Janeiro

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

A todos os que se deleitam com a Matemática.

Sumário

Prefácio

Cada minicurso será composto por 4 aulas sendo 2 horários com duração duas horas distribuídas no período de **09 a 11 de dezembro de 2016** e deverá corresponder ao nível introdutório dos cursos do 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste.

Neste minicurso estaremos interessados em explorar configurações formidáveis como esta da figura abaixo:

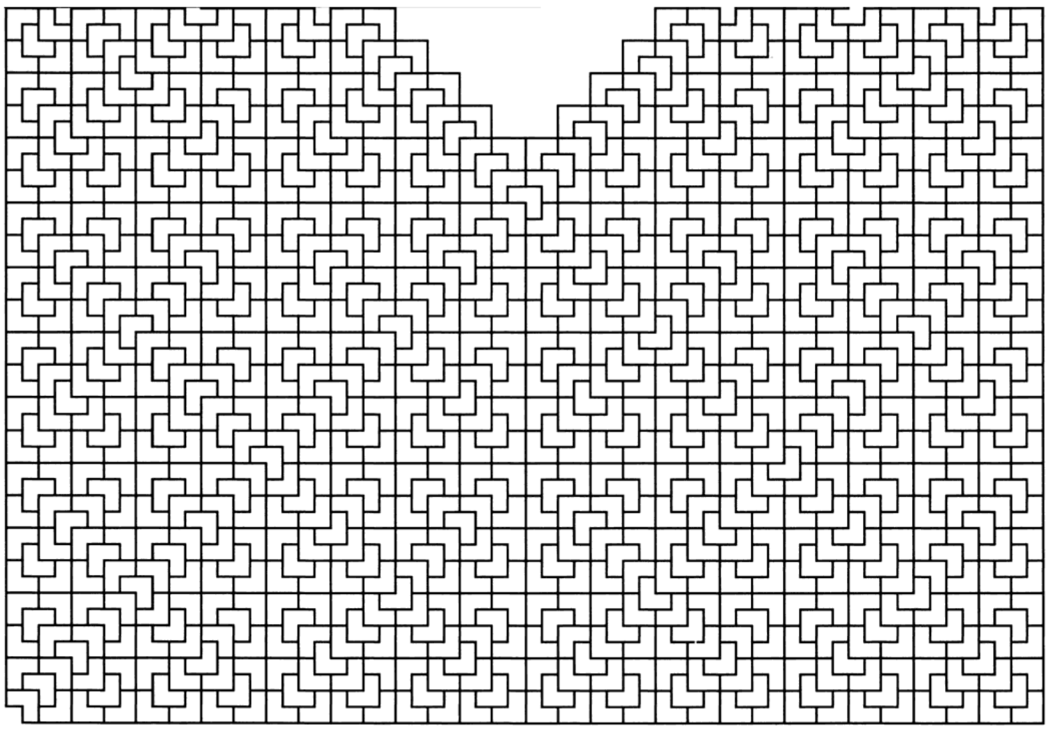


Figura 1: Preenchendo um retângulo com triminós

Agradecimentos

Por ordem cronológica, agradeço muito especialmente aos Professores e jovens que provocaram e tornaram este minicurso possível, Prof. Paulo Sérgio M. dos Santos (UFPI Parnaíba) que me convidou para atuar no polo de Capitão de Campos - PI no ano de 2015 como PO e me provocou a apresentar uma palestra para um encontro do PIC da região norte do Piauí em novembro de 2016; ao Professor Antônio Cardoso do Amaral (EE Augustinho Brandão – PI/ANPMat e membro da Comissão Acadêmica deste 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste) que acreditou no valor da atividade desenvolvida com nossas pequenas preciosidades, os jovens bolsistas do programa PIC; ao Professor João Xavier da C. Neto (UFPI Teresina e também membro da Comissão Acadêmica deste Simpósio), que me disse... agora que você se comprometeu, não tem mais volta!... a toda a equipe voltada à formação de professores PROFMAT! e, certamente, jamais de menor importância, aos jovens alunos que nos instigam com uma infinidade de problemas e questões, nos motivando a procurarmos o melhor de nós enquanto educadores.

Capítulo 1

Ladrilhamentos do plano... um aperitivo

"Por que a geometria me fascina... ou, o que os nossos professores não nos contaram."
– Anônimo dos Santos, *...pediu para se manter incógnito*

1.1 O problema e a arte de ladrilhar

... há milhões de anos a natureza brinca de preencher regiões com padrões de formas que prendem nossa admiração com formatos muitas vezes interessantíssimos, a essa arte, vamos chamar genericamente de ladrilhar, ... ela é a especialista maior nesta arte...

Figura 1.1: Natureza ladrilhando com arte 1

Figura 1.2: Natureza ladrilhando com arte 2

Figura 1.3: Natureza ladrilhando com arte 2

...tão brilhantes são os ladrilhamentos que o ser humano... um grande copiador por natureza, procurou, ele mesmo, produzir seus próprios ladrilhamentos - com bastante sucesso, convenhamos!

ou, mais recentemente

Figura 1.4: Cerâmica Marajoara e Mosaico Sumério

Figura 1.5: Ladrilhos Contemporâneos

Figura 1.6: Ladrilhos Contemporâneos

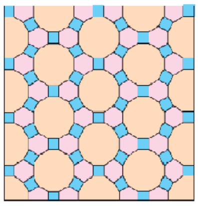
Existem inúmeras maneiras de preencher (uma região d)o plano. Contudo, quando impomos condições de simetria, reduzimos drasticamente o número de possibilidades e então, um problema matematicamente honesto que se coloca, consiste na busca de classificação destes preenchimentos. Por exemplo, se definimos **ladrilhamentos bem-comportados** como sendo aqueles que satisfazem as condições abaixo:

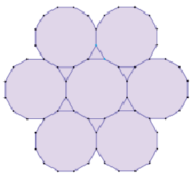
1. Os ladrilhos devem ser **polígonos regulares**, de um ou vários tipos.

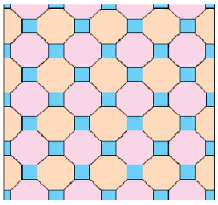
2. A interseção de dois ladrilhos, se existir, é sempre um lado (todo) ou um vértice.

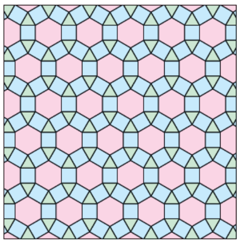
3. A distribuição dos ladrilhos que incidem em cada vértice é a mesma se percorrida em um dos sentidos: horário, ou anti-horário

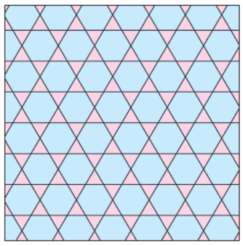
Sob as condições acima, é bem conhecida a classificação destes tipos de ladrilhamento (para um detalhamento bastante didático e acessível deste interessante tema recomendamos a leitura de [2]): o catálogo completo deste ladrilhamento está nas figuras que seguem:

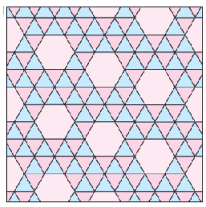

Ladrilhamento por dodecágonos hexágonos - quadrados

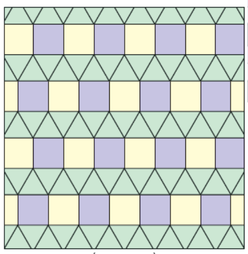

Ladrilhamento por dodecágonos e triângulos

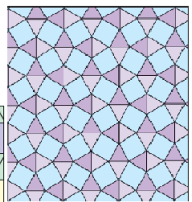

Ladrilhamento por hexágonos e quadrados


Ladrilhamento por quadrados hexágonos e triângulos


Ladrilhamento por hexágonos e triângulos







e, o que será mais importante para nós, neste minicurso... o ladrilhamento regular (ladrilhamento bem comportado formado por um único tipo de polígono)!

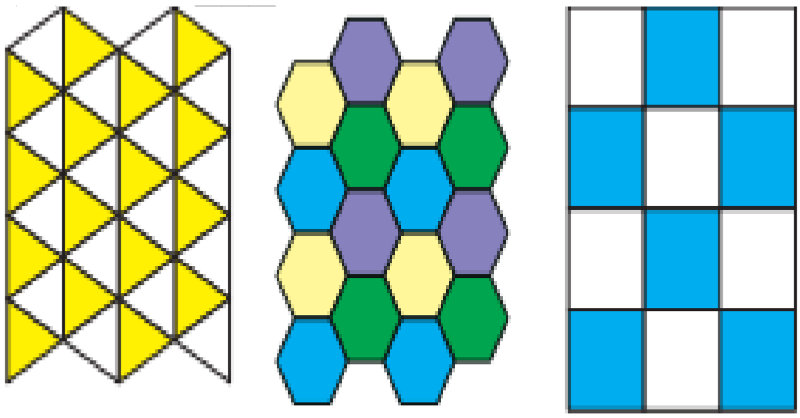


Figura 1.7: ladrilhamentos regulares

Capítulo 2

Poliminós, parentes e agregados

2.1 Poliminós

2.1.1 Primeira xícara de café - um problema

Comecemos com um problema de olimpíada [1]

Um $L-$ tetrominó é uma figura composta de 4 quadrados 1×1 na forma de L, veja figura a seguir.

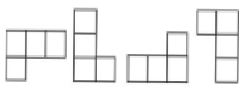


Figura 2.1: $L-$ tetrominós

(a) Diga, justificando, se um tabuleiro 8×8 pode ser ladrilhado por 16 ladrilhos da forma L-tretrominós.

(b) Se do tabuleiro 8×8 removemos um quadrado qualquer 2×2, como na figura (2.2) o tabuleiro mutilado pode ser coberto por 15 ladrilhos do tipo L-tretrominó?

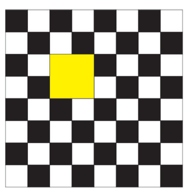
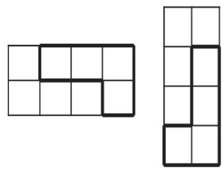


Figura 2.2: tabuleiro recortado

SOLUÇÃO
(a) A resposta é sim. Dica: observe que dois L-tretrominós cobrem perfeitamente um retângulo 2×4 do tabuleiro, veja:



(b) A resposta é não! No (2.2) temos 30 quadrados unitários de cada cor. Nessa pintura, cada L-tretrominó cobre um quadrado unitário branco e três quadrados unitários pretos ou três quadrados brancos e um quadrado unitário preto. Seja x a quantidade de L-tretrominós cobrindo um quadrado unitário branco e três quadrados unitários pretos. Assim, este tipo de L-tretrominó cobre $x + 3x$ quadrados do tabuleiro. Seja y a quantidade de L-tretrominos cobrindo três quadrados unitários brancos e um quadrado unitário preto. Assim, este tipo de L-tretrominó cobre $3y + y$ quadrados do tabuleiro. Com isto, somando cada contribuição obtemos:

$$(x + 3x) + (3y + y) = 4x + 4y = 60 \qquad \text{ou seja} \qquad x + y = 15$$

Como 30 quadrados unitários pretos devem de ser cobertos, tem-se $3x + y = 30$. Resolvendo estas equações, obtemos como solução: $x = y = 7,5$ que não é um número inteiro!!! Impossível!

2.1.2 segunda xícara de café - Poliminós... o que são? o que podemos fazer com eles?

Poliminós... enfim, o que é isto?

Poliminós são figuras geométricas conexas formadas por quadrados unitários conectados entre si por arestas comuns. Diversas questões curiosas podem ser levantadas envolvendo tais figuras! ...Algumas elementares, outras de alta complexidade, outras ainda para as quais ainda se desconhecem respostas!

O pai deste “jogo”, Solomon Wolf Golomb (30 de maio de 1932, a 1 de maio de 2016) foi um matemático norte americano, engenheiro e professor de engenharia da University of Southern California, melhor conhecido por seus trabalhos em jogos matemáticos. Inventou o jogo Cheskers em 1948 e cunhou o nome. Desenvolveu o jogo de poliminós e pentominós em 1953. Especializou-se em problemas de análise combinatória, teoria dos números, teoria dos códigos, etc. Seu jogo pentominó inspirou o jogo Tetris ®(nunca jogou? está disponível online, em [5], por exemplo).

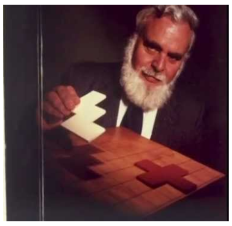


Figura 2.3: Solomon Golomb... o pai dos Poliminós

Observação: Com o objetivo de classificar estas figuras (poliminós) identificaremos duas figuras sempre que puderem ser sobrepostas através das operações: translação, rotação ou reflexão (quer dizer, identificaremos figuras que sejam congruentes, ou isométricas)

Existem 1 monominó, 1 dominó, 2 trominós, 5 tetrominós e 12 pentominós, vide figura abaixo:

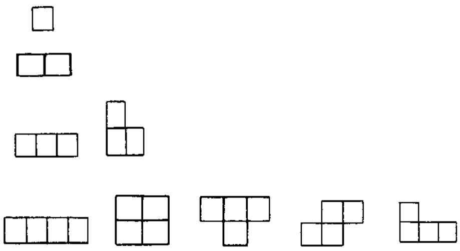


Figura 2.4: monominó, dominó,trominó e tetrominó

Exercício 1 Quantos pentominós existem? Faça uma tabela com todos eles!

Exercício 2 Mesmas perguntas do **Exercício 1** para os hexominós

Tente primeiro... se estiver muito complicado a lista completa dos pentaminós e hexaminós encontra-se no Apêndice (4.1)

Exercício - difícil Para cada número inteiro n, diga quantos poliminós de n-células existem!

2.1.3 Dominós

Iniciamos esta subseção com um problema clássico:

Um dominó é composto de 2 quadrados conectados por uma aresta comum e possui apenas um formato, o de um retângulo. Dado um tabuleiro de xadrez (ou damas) com um par de quadrados esquinas opostos retirados, como na figura (2.5) e uma caixa de dominós, cada um dos quais cobrem exatamente 2 quadrados, é possível cobrir este tabuleiro completamente com os dominós (sem deixar qualquer quadrado livre e sem sobreposição)?

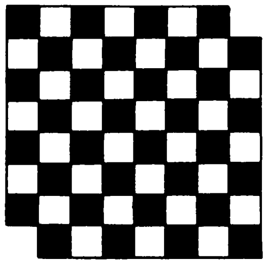


Figura 2.5: Tabuleiro menos dois quadradinhos diametralmente opostos

... pense um pouco sobre esta questão antes de ler a solução a seguir!

...pense mais um pouco...

Descobriu? A resposta é negativa!

Por quê? Vamos a uma prova: um tabuleiro típico de xadrez contém 64-casas de tons alternadas escuro-claro. Neste tabuleiro cada dominó cobrirá exatamente dois quadradinhos de tons distintos, ou seja, n dominós cobrirá um número igual de peças claras e escuras. Contudo no tabuleiro defeituoso (omitidas as duas peças) haverá um número maior de tons claros (que escuros, ou vice-versa), de modo que o tabuleiro não pode ser totalemente preenchido. Este é um típico teorema que de Geometria Combinatorial

2.1.4 Trominós

Problema: É imediato que não é possível cobrir um tabuleiro 8×8 completamente com trominós – poliminós de 3 quadrados!!! pois 64 não é divisível por 3. Ao invés disso perguntaremos: É possível cobrir o tabuleiro 8×8 com 21 trominós e um monominó (quadradinho só)?

Vamos estudar caso a caso, as possibilidades:
Primeiramente, suponha que vamos recobrir o tabuleiro com linha-trominós: 21 linha-trominós;

Estratégia:
Colorir o tabuleiro é colorido "patrioticamente" com verde-amarelo-azul (ver figura a seguir) e observamos que um trominó cobrirá um quadradinho de cada cor, independentemente de onde for colocado. Assim 21 linha-trominós cobrirão exatamente 21 quadrinhos amarelos, 21 azuis e 21 verdes.

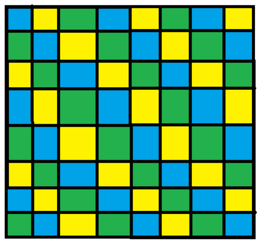


Figura 2.6: Tabuleiro patriótico: verde azul e amarelo

Contudo temos 22 quadrinhos azuis, 21 amarelos e 21 verdes
Veja: se um monominó é posto no quadrinho inferior esquerdo, teremos o restante do quadro será composto de 22-azuis, 21-amarelos e 20-verdes, de modo que nesta configuração é impossível recobrir o tabuleiro por 21 linha-trominós!
Se alguma outra quina tivesse sido coberta com o monominó, poderíamos girar o tabuleiro até que o monominó se encontrasse na posição inferior à esquerda, e a construção seria ainda impossível – todos as quatro quinas são simétricas uma à outra!
O tabuleiro pode ser movido por rotação e reflexão de modo que qualquer quina seja permutável pela outra. Se a construção é impossível em uma situação então também o é na outra simétrica a esta!
Argumentos de simetria são ferramenta muito poderosa em geometria combinatória. Por exemplos, por esta razão se o monominó é posicionado em qualquer quadradinho amarelo ou verde então a construção é impossível e o mesmo se dando no caso das peças em posições simétricas.
Assim, as únicas peças que não são excluídas por simetria são as azuis a seguir:

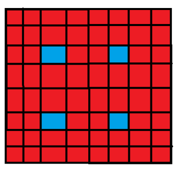


Figura 2.7: Tabuleiro vermelho e azul

cuja solução é:

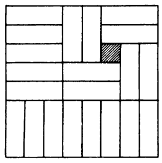
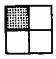


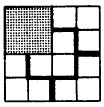
Figura 2.8: Uma solução

Quando outro tipo de trominó é considerado, o resultado é surpreendentemente diferente: não importa onde no tabuleiro de xadrez um monominó é colocado, os quadrinhos restantes poderão sempre ser cobertos por 21 L-trominós.

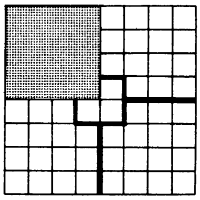
Considere inicialmente um tabuleiro 2×2. Independente de onde o monominó é colocado os outros três quadrados podem ser cobertos por um L-trominó.



Considere um tabuleiro 4×4.Divida-o em quartos cada um dos quais 2×2. Independente de onde o monominó é colocado os outros três quadrados podem ser cobertos por um L-trominós. Por exemplo, se for colocado no extremo superior esquerdo, ou se for colocado um monominó em posição central então... ver figura abaixo:



ou seja pode-se recobrir todo o tabuleiro, excluída uma peça! A figura abaixo indica como prossegue o processo

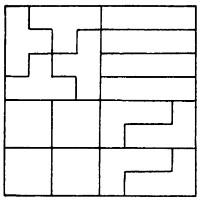


2.1.5 Tetrominós

Iniciamos esta seção com alguns teoremas desafio. Você seria capaz de demonstrá-los? No Apêndice 2 estarão as dicas de alguns deles!

Teorema 2.1.1. *Tabuleiros de xadrez sempre podem ser recobertos com linha-tetrominós, tetrominós quadrados, T-tetrominós ou L-tetrominós*

Demonstração. Dica:



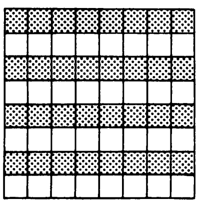
□

Teorema 2.1.2. *É impossível cobrir todo o tabuleiro ou um único eixo (linha) com tetrominós torcidos*

Teorema 2.1.3. *É impossível cobrir o tabuleiro com 15 T-tetraminós e um quadrado tetrominó.*

Teorema 2.1.4. *É impossível cobrir o tabuleiro com 15 L-tetraminós e um quadrado tetrominó.*

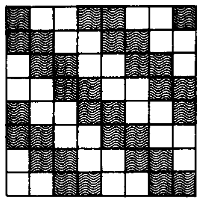
Demonstração. Dica: Pinte o tabuleiro como na figura seguinte:



□

Teorema 2.1.5. *É também impossível cobrir um tabuleiros com um quadrado tetrominó e qualquer combinação de tetrominós linha ou torcidos.*

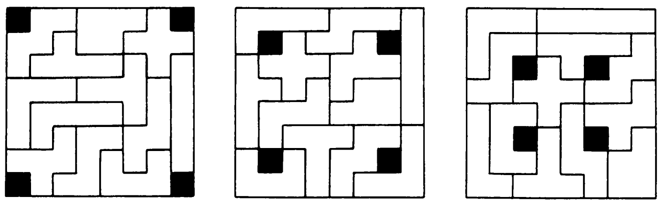
Demonstração. Dica: Pinte o tabuleiro como sugerido na figura:



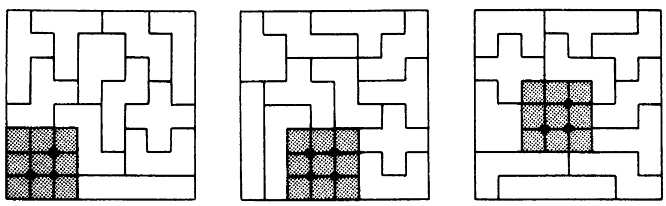
□

2.1.6 Pentominós

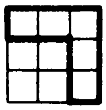
Como cobrir o tabuleiro com pentominós e quatro quadradinhos?



Quais são as possibilidades quando os quatro quadradinhos formam um quadrado tetraminó. Em quais locais podem se encontrar o centro do tetraminó



onde a parte cinzenta é da forma

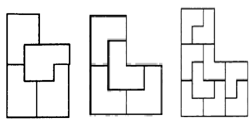


2.2 Ciclo reprodutivo dos poliminós

2.2.1 Autorreplicação

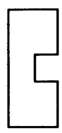
Um poliminó é **autorreplicante** se com a justaposição de um certo número de peças idênticas pode-se obter um novo poliminó semelhante em escala maior. Quais são os poliminós (sem ser monominós e dominós, que não tem graça!) de um mesmo tipo que se convertem em sim mesmos

Exemplos:



Exercício: Obtenha a lista de todos os pentominós autorreplicantes:

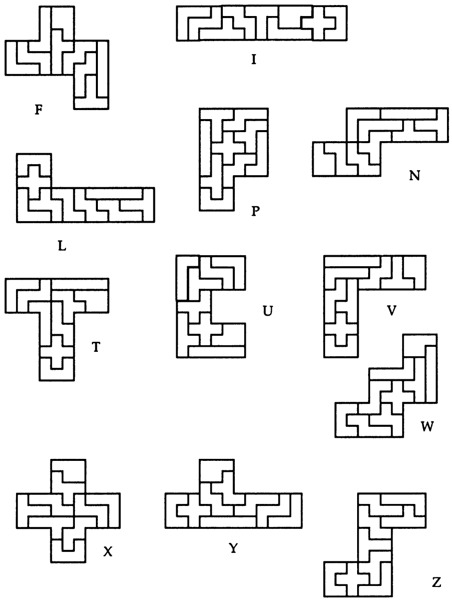
Observe, contudo, que nem todos os pentominós são autorreplicantes: o 9-minó seguinte não é autorreplicante.



Pergunta: Você saberia dar exemplos de outros poliminós que não sejam autorreplicantes? Qual é o menor número de células de um poliminó que não seja autorreplicante?

2.2.2 Heterorreplicação

Um poliminó é **heterorreplicante** se com a justaposição de um certo número de peças (não mais de mesmo tipo, mas) de mesmo número de quadradinhos pode-se obter um novo poliminó semelhante em escala maior



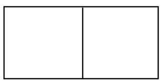
Você saberia formar outros exemplos? De ordens mais baixas ou mais altas?

2.3 Ordem de poliminós

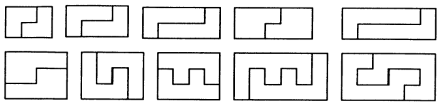
Dizemos que um poliminó P tem **ordem** n se n é o número mínimo de cópias congruentes (idênticas) que podem ser montadas (via translação, rotação e reflexão) para formar um retângulo. Para aqueles poliminós que preenchem um retângulo não definimos ordem.

Exemplos:

ORDEM 1: Um poliminó de ordem 1 é um retângulo!



ORDEM 2: Um poliminó de ordem 2 é um "meio retângulo" já que duas cópias idênticas dele irão compor um retângulo! Na prática isto significa que duas copias serão obtidas uma da outra por uma rotação de 180 graus



...outros exemplos???

o que será o poliminó de ordem 3?

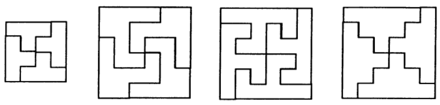
ORDEM 3:

???

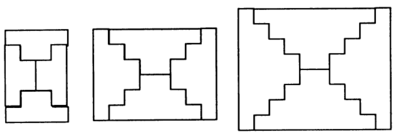
Teorema 2.3.1 (Ian Stewart)**.** *Não existem poliminós de ordem 3.*

De fato a única forma de se particionar um poliminó três copias identicas de uma figura geométrica bem-comportada é se forem 3 retangulos, o qual já sabemos tem ordem 1

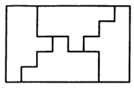
ORDEM 4: Existem várias formas de combinar poliminós para formarem retangulos...
...uma delas é através de rotações de 90 graus

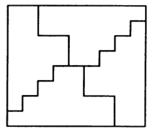


... outras formas envolvem simetrias de “quatro dobras” do retângulo nele mesmo (direita-esquerda, baixo-topo) como a seguir:



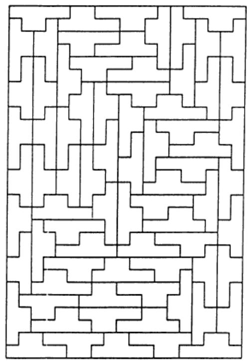
...ou também



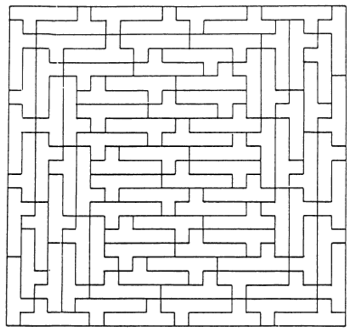


E existem construções sistemáticas para poliminós do tipo $4s$ para todo s

Exemplos:



Heptominó de ordem 76



Hexominó de ordem 92

Capítulo 3

Primos e agregados: os Politriângulos e os Polihexágonos

3.1 Os primos da família: os Politriângulos

O pai desta seção chama-se Frank Harary:

Figura 3.1: Frank Harary

Frank Harary (11 de março de 1921 a 4 de janeiro de 2005) foi uma matemático norte americano especialista em Teoria dos Grafos. De fato ele é tido como um dos pais da moderna teoria dos grafos. Harary foi um grande expositor e que formou toda uma geração de especialistas na teoria dos grafos. Expandiu a sua área para outros campos do conhecimento tais como Física, Psicologia, Sociologia e até Antropologia. Dotado de um fino senso de humor, Harary desafiava e entretinha suas platéias e audiências independentemente do nível de sofisticação matemática. Um truque particular que ele gostava de utilizar consistia em transformar teoremas em jogos.

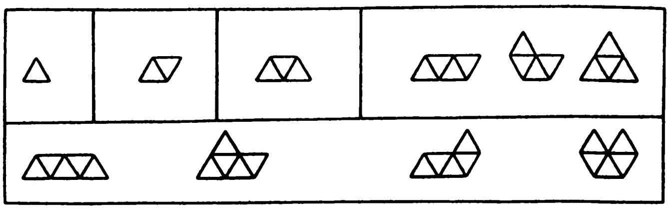
Professor Frank Harary, sugeriu considerar o ladrilhamento de regiões planas não somente por quadrados, mas também por outras figuras e, neste ladrilhamento, considerar **n-ominós** para preenchimento de regiões planas, as células para comporem estas figuras (animais) seriam outros polígonos regulares que preenchem o plano, precisamente: triângulos equiláteros e hexágonos regulares.

Combinações conexas justapostas por arestas de triângulos serão chamados **animais triangulares** e combinações conexas justapostas por arestas de hexágonos serão chamados **animais hexagonais**! Vamos produzir animais triangulares e hexagonais de n-células?

3.1.1 Politriângulos ou poliamantes?

Iremos chamar as combinações conexas, justapostas por arestas de triângulos, de politriângulos, ou politris (para os amigos), ou ainda, para os íntimos, poliamantes!

Os primeiros... com 1, 2, 3 e 4 células, chamados respectivamente de monotriz ou monoamante, diatriz ou diamante, tritriz ou triamante e tetratriz ou tetramante (os nomes travalínguas "tritriz"e "tetratriz"nos motivam fortemente a utilizar a nomenclatura n-amante ao invés de n-triz)



Diversas perguntas podem ser feitas, por exemplo:

Pergunta: É possível preencher o(s) losango(s) seguintes (3.2) com diamantes? triamantes? tetramantes? De quantas maneiras? E se for misto triamantes e tetramantes?

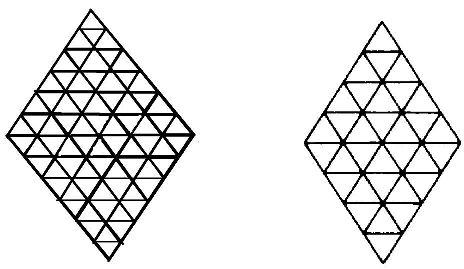


Figura 3.2: Losangos triangulados

Vamos fazer um catálogo dos hexamantes (com 6)?... temos 12 hexamantes:

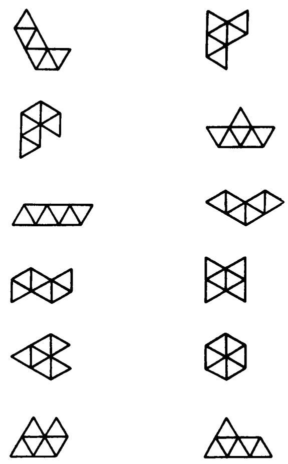
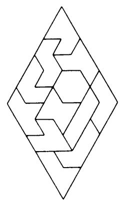


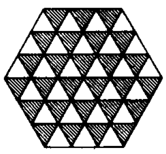
Figura 3.3: Os hexamantes

Uma pergunta: Com quais destes hexamantes é possíve cobrir o losango (3.2)?

Uma possível resposta: com todos eles, um exemplo:



Outra pergunta: É possível preencher a célula hexagonal seguinte com hexamantes? [Observação: os 2 últimos da última linha na lista (3.3) nunca poderão comparecer em número impar. Por que?]

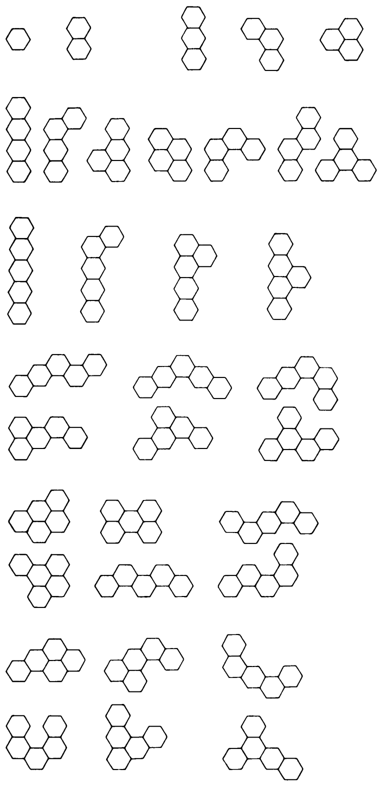


Qual o catálogo completo dos politris de 7 células? Dica: são 24 (vide 4.2)

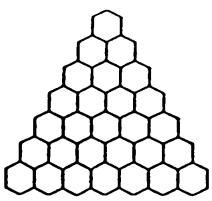
3.2 Os agregados da família: os Polihexágonos

Vamos considerar agora os primos dos poliminós, os **polihexágonos**, ou para os amigos, **polihexs**. As regiões a serem consideradas são ladrilhadas por hexágonos regulares e as figuras elementares (animais hexagonais) a serem justapostas para ladrilhar tais regiões são justaposições conexas de hexágonos regulares. A seguir os animais (dê um nome a cada um deles)

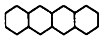
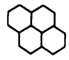
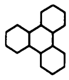
Alguns animais hexagonais (nossos polihexs)



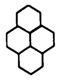
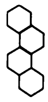
O triângulo hexagonal de lado 7 na figura a seguir contem 28 hexágonos. Algumas perguntas:



Problema 1: É possível preencher a figura com 7 cópias de um único tipo de tetrahex (é permitido girar)
Problema 2: Esta figura pode ser preenchida com combinações dos seguintes tetrahex?

 ,  e  ?

Problema 3: Com relação ao problema anterior... E se substituirmos os tetrahex por estes?

 ,  , e  ?

Problema 4: É possível preencher a figura fazendo uso de exatamente um de cada um dos sete tipos de tetrahex?

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Apêndice 1

[Lista completa de pentominós e hexominós] Segue abaixo a lista completa dos pentominós

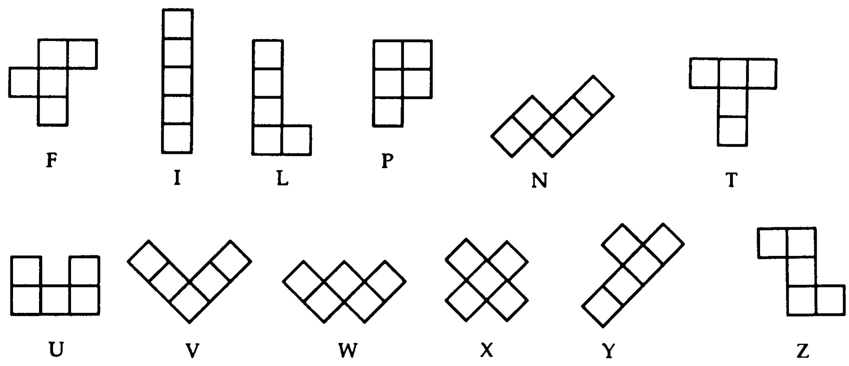


Figura 4.1: a lista FILIPINO TUVWXYZ de pentominós

E também a lista completa dos hexominós

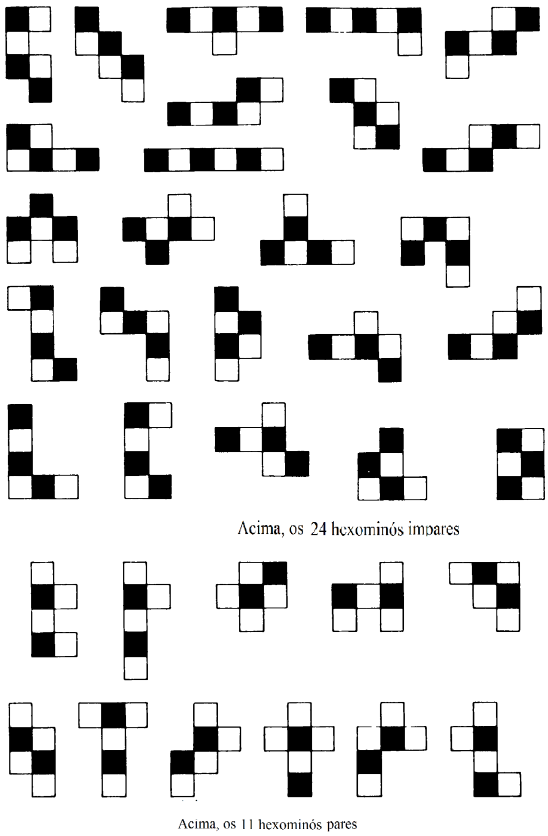


Figura 4.2: a lista dos hexominós

4.2 Apêndice 2

[Lista completa de heptamantes]

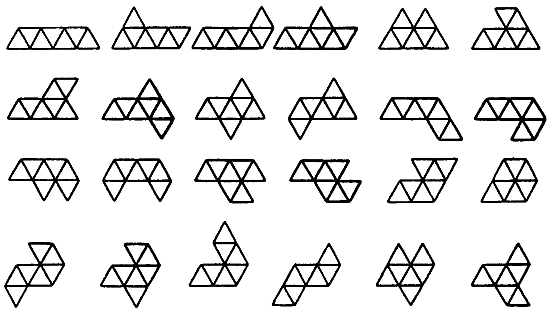
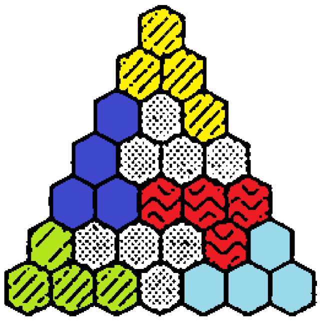


Figura 4.3: a lista dos hexominós

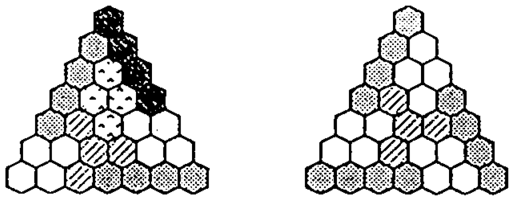
4.3 Apêndice 3

[Soluções dos problemas com os polihex]

Solução ao problema 1: Só existe um tipo de tetrahex que recobre o triângulo

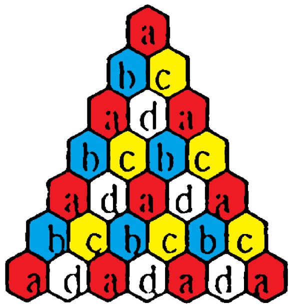


Solução ao problema 2 Há 2 possíveis soluções, uma com simetria central, a outra não:



Solução ao problema 3

Não é possível! Dica: Colorir a figura com 3 cores distintas, como segue! Quantas cores serão ocupadas de cada peça? (perceba que cada uma das formas de tetrahex utilizada neste problema irá cobrir uma célula de cada cor, não importando em que lugar foi posicionada... certo?) Agora tudo se resume a problema de contagem: quantos a's existem? quantos b's? quantos c's?



Solução ao problema 4: Não é possível! Apenas uma dica: estude as possíveis posições (não equivalente) para o tetrahex em forma de trifólio (simbolo da radiologia!) e verifique em cada uma delas a impossibilidade!

4.4 Apêndice 4

[Folhas para atividades!]
Neste apéndice, as fichas para realização das atividades propostas!

Figura 4.4: ficha quadriculada para atividades

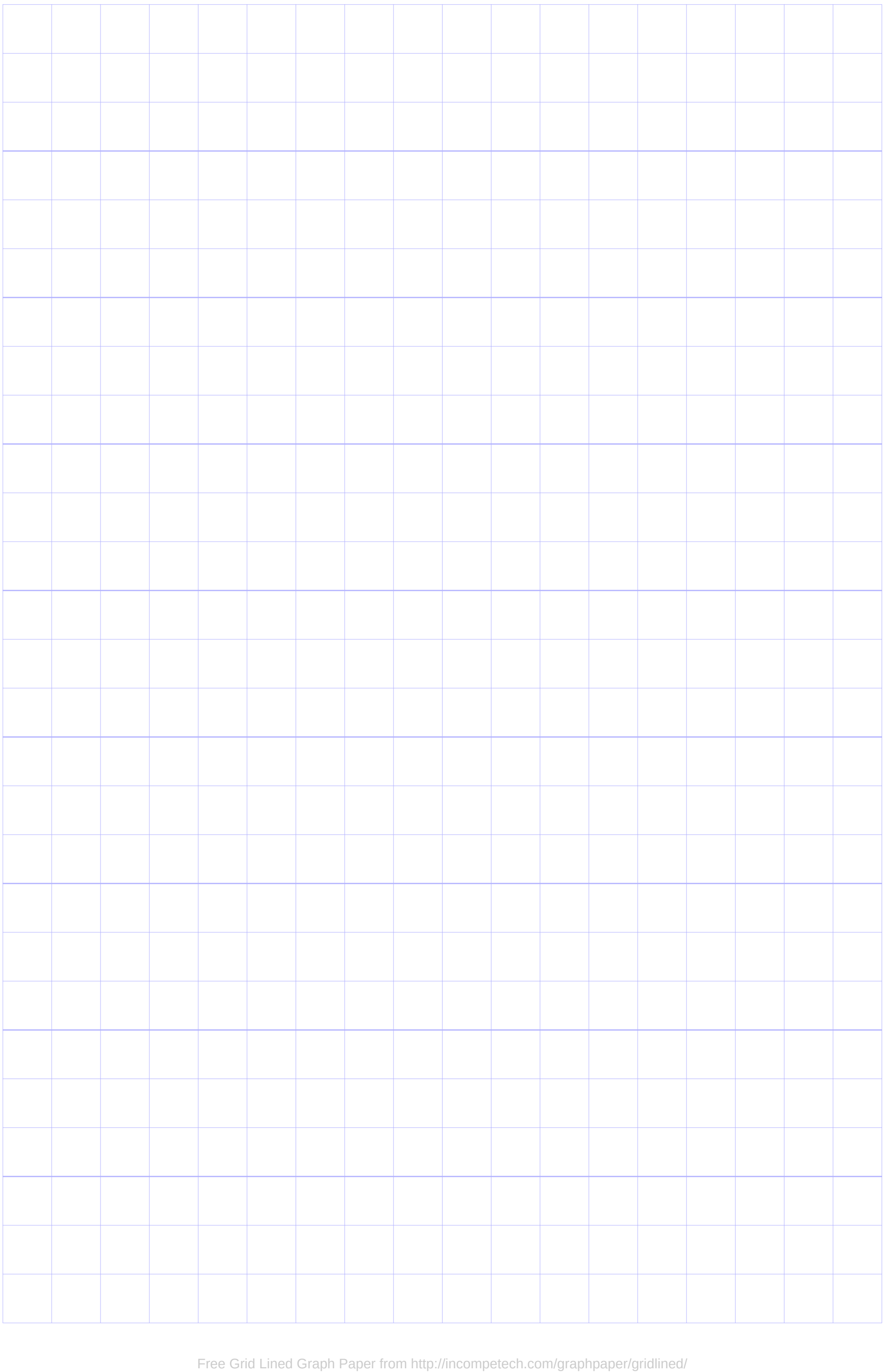


Figura 4.5: ficha quadriculada para atividades

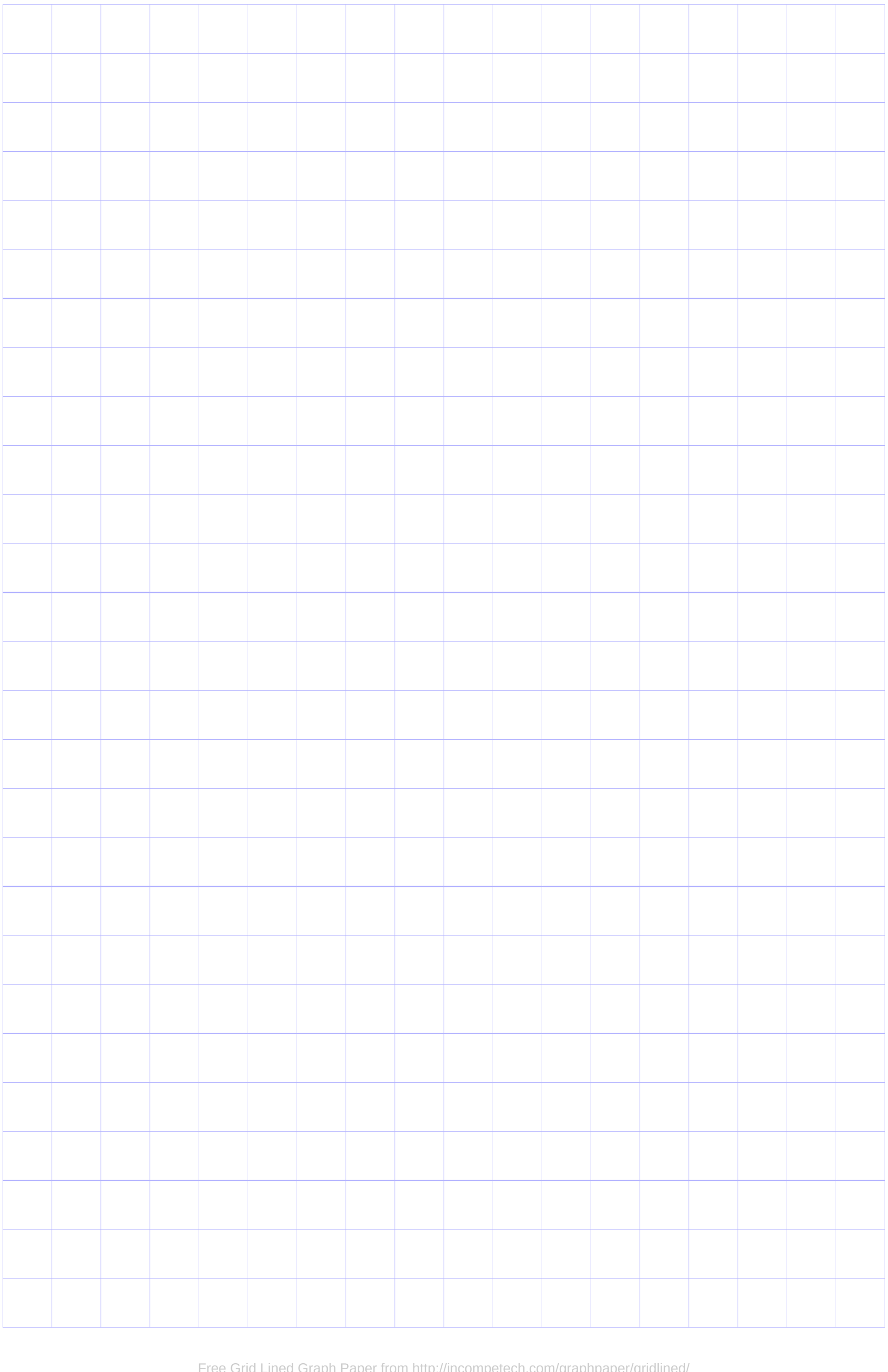


Figura 4.6: ficha quadriculada para atividades

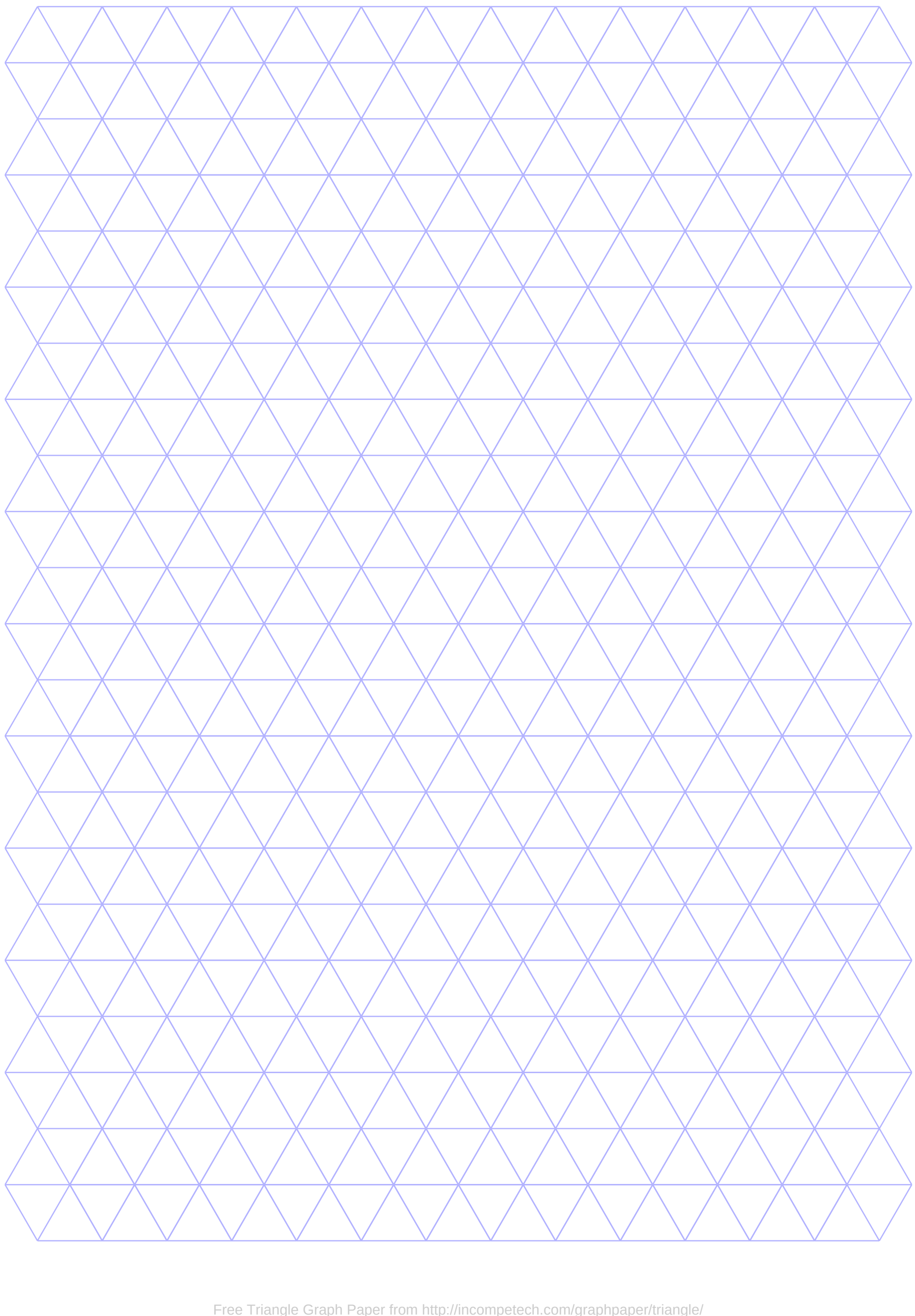


Figura 4.7: ficha triangulada para atividades

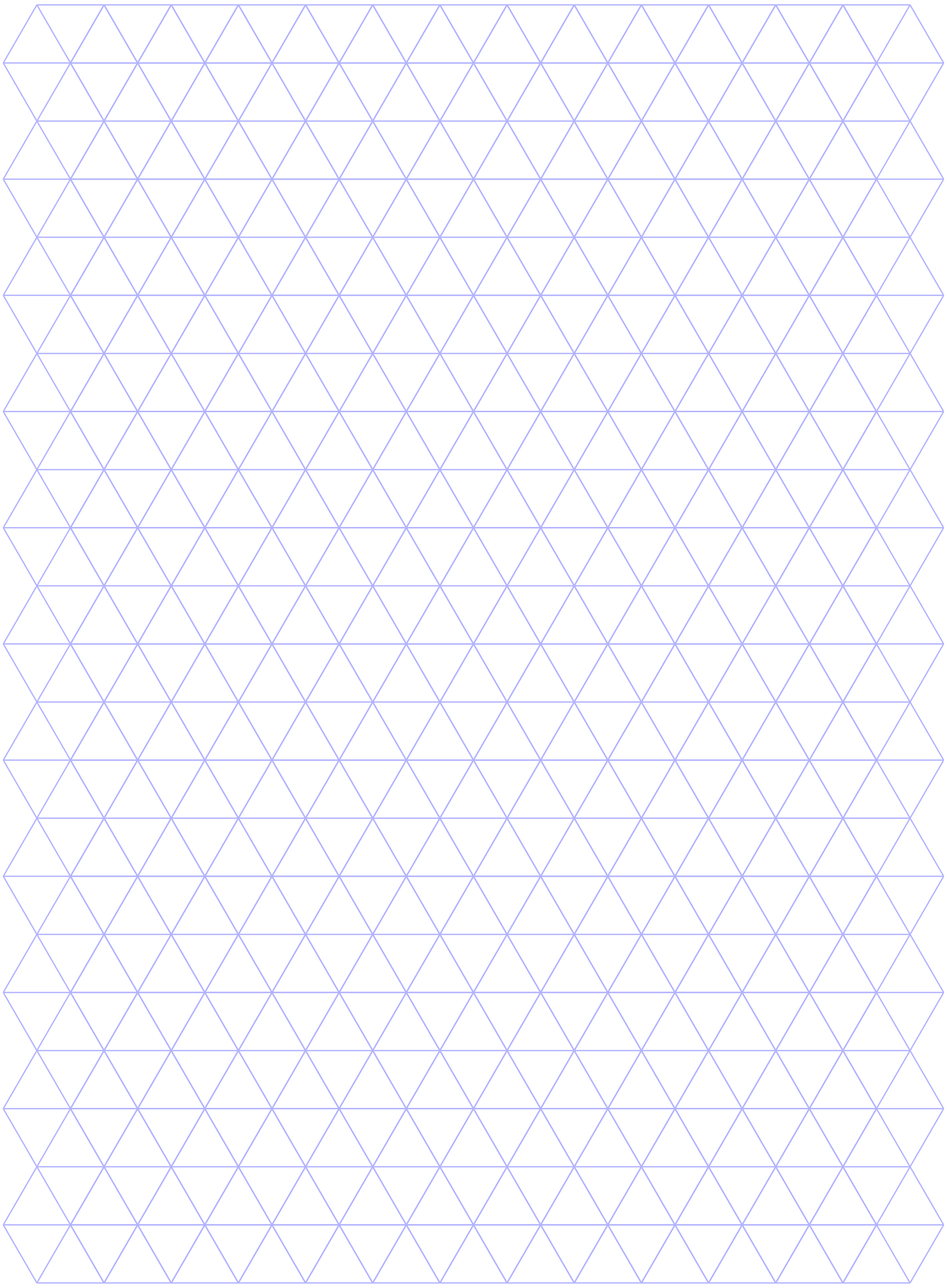


Figura 4.8: ficha triangulada para atividades

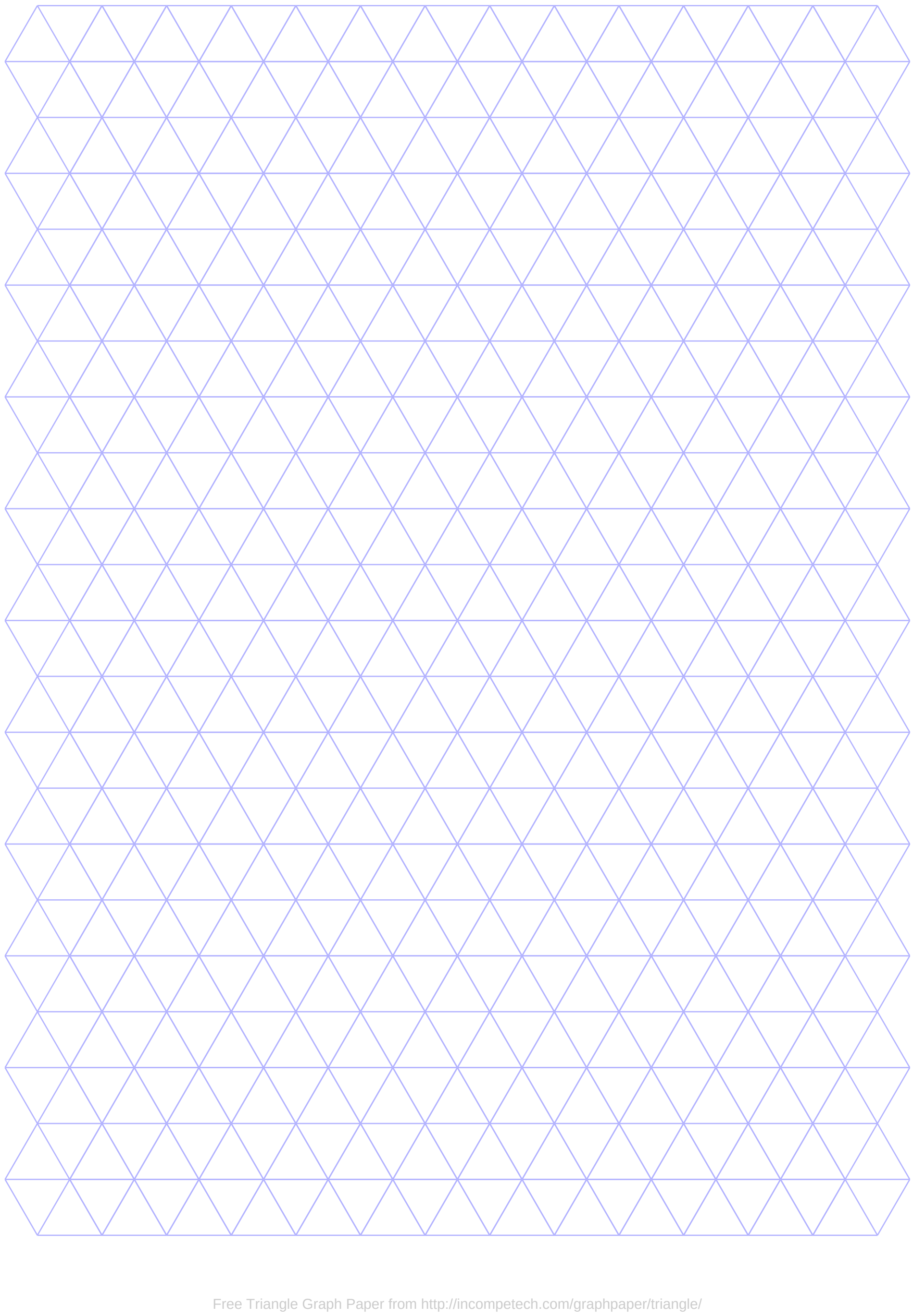


Figura 4.9: ficha triangulada para atividades

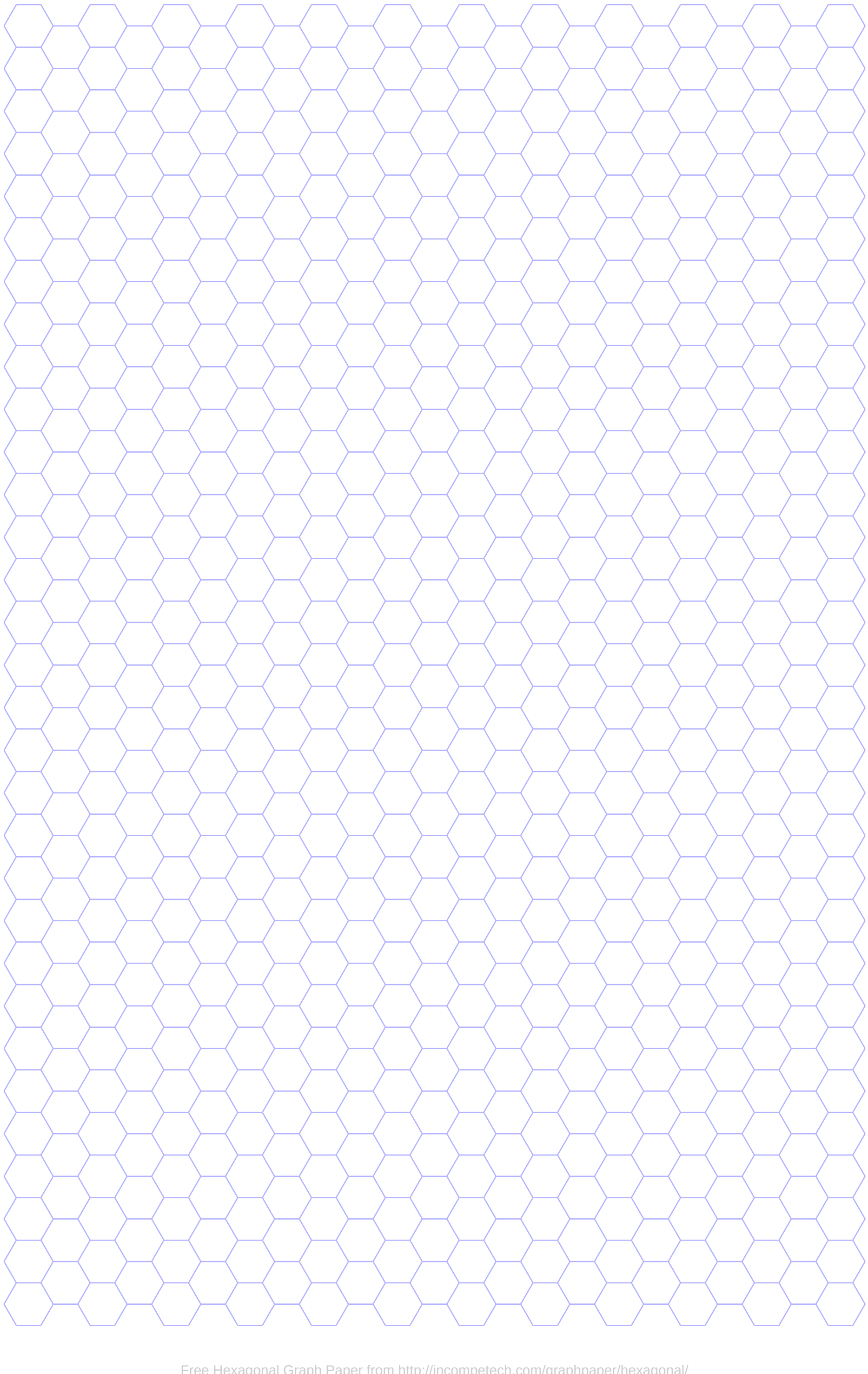
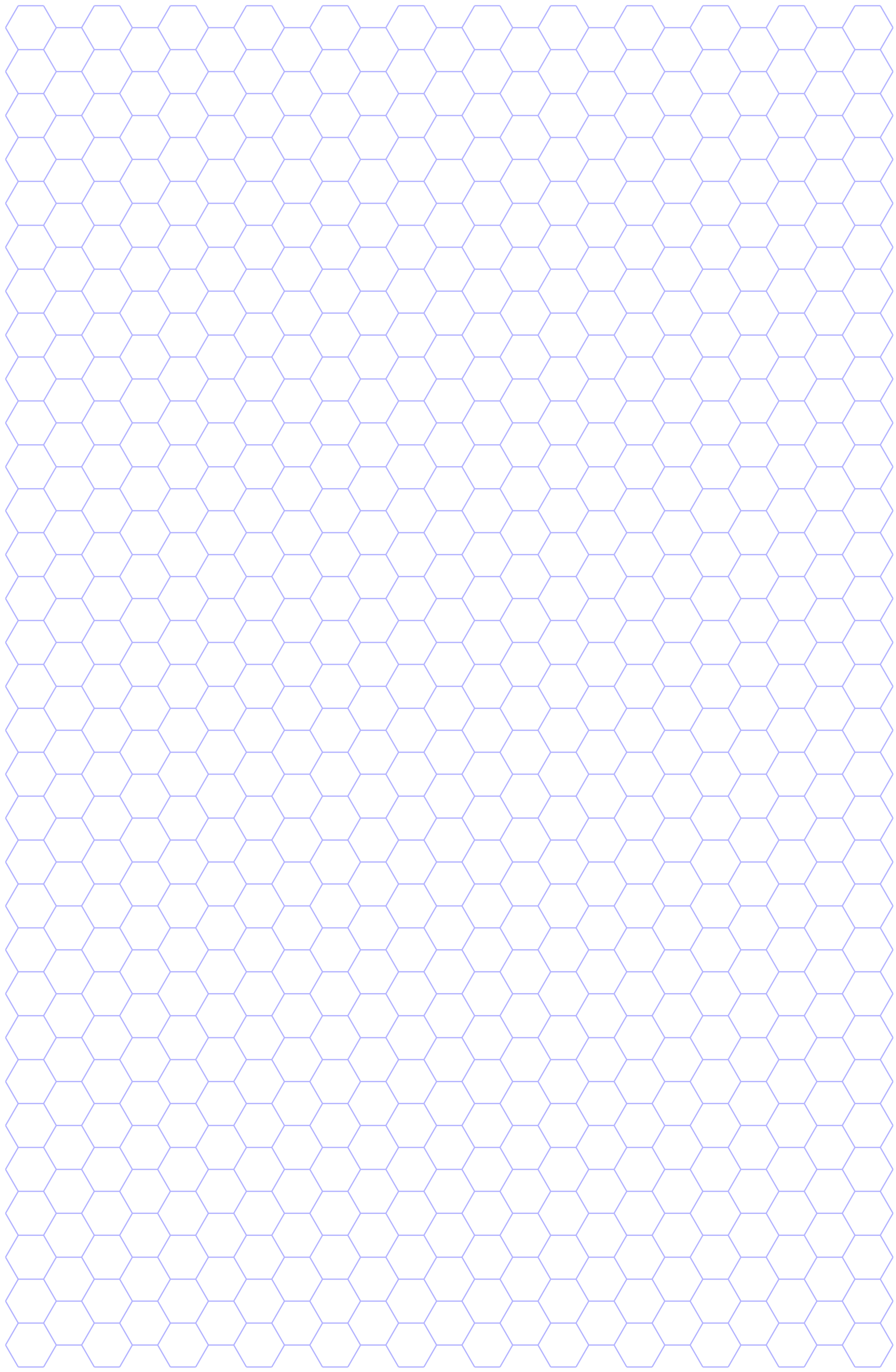


Figura 4.10: ficha de hexagonos para atividades



Free Hexagonal Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/hexagonal/

Figura 4.11: ficha de hexagonos para atividades

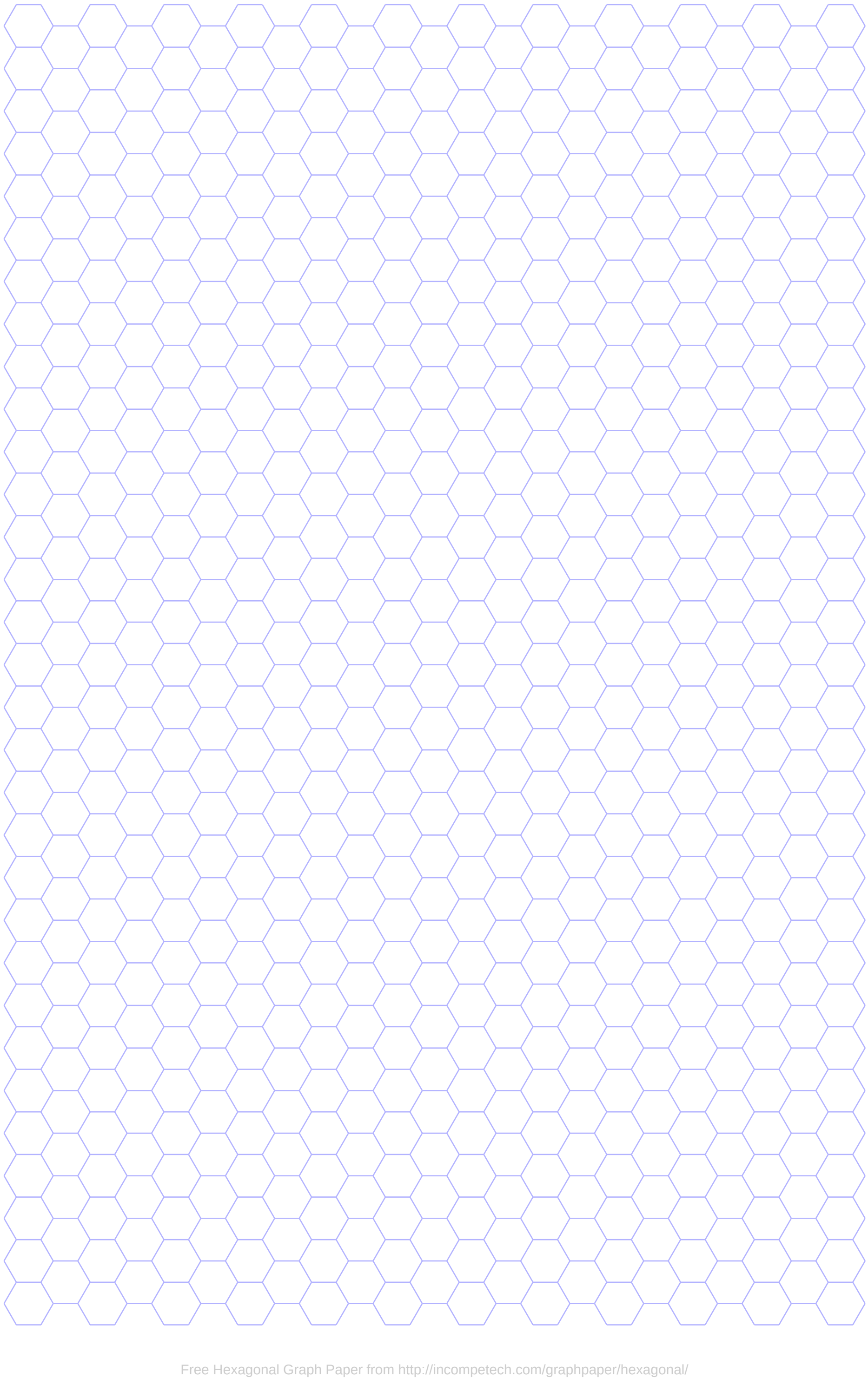


Figura 4.12: ficha de hexagonos para atividades

Referências Bibliográficas

[1] Competição Matemática do Rio Grande do Norte. Disponível em

`<http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br/?page_id=23&ano=2013>.`

Acesso em 02 de dezembro de 2016

[2] DIAS, C.C., SAMPAIO, J.C.V. Desafio Geométrico, Módulo 1. *Matem@atica na Pr@atica, Curso de Especialização para Professores do Ensino Médio de Matemática*, edition, pp. 90, 2010. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/ sampaio/DesafioGeometricoModuloI.pdf>. Acesso em 02 de dezembro de 2016

[3] GOLOMB, Solomon W. Polyominoes - puzzle, patterns, problems and packings. *Princeton University Press*, 2^{nd} edition, pp. 184, 1994.

[4] MARTIN, George E. Polyominoes - a guide to puzzles and problems in tiling. *The Mathematical Association of America*, pp. 186, 1996.

[5] Disponível em <http://tetris.com/play-tetris/>. Acesso em 02 de dezembro de 2016.

SBM

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Medio Vol. 4 - Exercicios e Soluções* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Um Convite à Matemática* - D.C de Morais Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 1 - Números Reais - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 3 - Introdução à Análise - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 4 - Combinatória - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 5 - Teoria dos Números - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 6 - Polinômios - A. Caminha
- *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)
- *Como Resolver Problemas Matemáticos* - T. Tao
- *Geometria em Sala de Aula* - A. C. P. Hellmeister (Comitê Editorial da RPM)
- *Números Primos, amigos que causam problemas* - P. Ribenboim
- *Manual de Redação Matemática* - D.C de Morais Filho

COLEÇÃO PROFMAT

- *Introdução à Álgebra Linear* - A. Hefez e C.S. Fernandez
- *Tópicos de Teoria dos Números* - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha
- *Polinômios e Equações Algébricas* - A. Hefez e M.L. Villela
- *Tópicos de Historia de Matemática* - T. Roque e J. Bosco Pitombeira
- *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática* - V. Giraldo, P. Caetano e F. Mattos
- *Temas e Problemas Elementares* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Números e Funções Reais* - E. L. Lima
- *Aritmética* - A. Hefez
- *Geometria* - A. Caminha
- *Avaliação Educacional* - M. Rabelo
- *Geometria Analítica* - J. Delgado, K. Frensel e L. Crissaff
- *Matemática Discreta* - A. Morgado e P. C. P. Carvalho
- *Matemática e Atualidade - Volume 1* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Fundamentos de Cálculo* - A. C. Muniz Neto
- *Matemática e Atualidade - Volume 2* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear* - A. Hefez e C. de Souza Fernandez
- *Exercícios Resolvidos de Aritmética* - A. Hefez

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D. G. de Figueiredo
- *Números Racionais e Irracionais* - I. Niven
- *Tópicos Especiais em Álgebra* - J. F. S. Andrade

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L. N. de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M. P. do Carmo
- *Matemática Discreta* - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- *Álgebra Linear: Um segundo Curso* - H. P. Bueno
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa* - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.
- *Elementos de Topologia Geral* - E. L. Lima
- *A Construção dos Números* - J. Ferreira
- *Introdução à Geometria Projetiva* - A. Barros e P. Andrade
- *Análise Vetorial Clássica* - F. Acker
- *Funções, Limites e Continuidade* - P. Ribenboim
- *Fundamentos de Análise Funcional* - G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira
- *Teoria dos Números Transcendentes* - D. Marques
- *Introdução à Geometria Hiperbólica - O modelo de Poincaré* - P. Andrade
- *Álgebra Linear: Teoria e Aplicações* - T. P. de Araújo
- *Introdução à Análise Matemática na Reta* - C. I. Doering

- *Topologia e Análise no Espaço Rn* - R. Freire de Lima
- *Equações Ordinárias e Aplicações* - B. Scárdua

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H. Bolfarine e M. Sandoval
- *Discretização de Equações Diferenciais Parciais* - J. Cuminato e M. Meneguette
- *Fenômenos de Transferência – com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia volume 1: Fundamentos* - J. Pontes e N. Mangiavacchi

COLEÇÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª* - E. Mega e R. Watanabe
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª* - C. Moreira e E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues
- *21 Aulas de Matemática Olímpica* - C. Y. Sh
- *Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções* - K. I. M. Oliveira e A. J. C. Fernández
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Fundamental* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Médio* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 17ª a 24ª* - C. G. T. de A. Moreira, C. Y. Shine, E. L. R. Motta, E. Tengan e N. C. Saldanha

COLEÇÃO FRONTEIRAS DA MATEMÁTICA

- *Fundamentos da Teoria Ergódica* - M.Viana e K. Oliveira
- *Tópicos de Geometria Diferencial* - A. C. Muniz Neto
- *Formas Diferenciais e Aplicações* - M. Perdigão do Carmo

COLEÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume I Números Naturais* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo
- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume II Números Inteiros* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo

APOIO:

ANPMat

INSTITUTO FEDERAL
Piauí
Campus Floriano

ISBN 978-85-8337-116-8

9 788583 371168 >