2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

PARA QUE SERVEM OS NÚMEROS IRRACIONAIS?

ALÉM DAS FÓRMULAS DE PERÍMETRO, ÁREAS E VOLUMES

Graziele Souza Mózer
Humberto José Bortolossi

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Para que servem os números irracionais?

Além das fórmulas de perímetro, áreas e volumes

Produção do Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Para que servem os números irracionais?
Além das fórmulas de perímetros, áreas e volumes

Copyright © 2016 Graziele Souza Mózer e Humberto José Bortolossi
Direitos reservados pela Sociedade Brasileira de Matemática
A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte,
constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Sociedade Brasileira de Matemática
Presidente: Hilário Alencar
Vice- Presidente: Paolo Piccione
Diretores: João Xavier
José Espinar
Marcela de Souza
Walcy Santos

Editor Executivo
Hilário Alencar

Assessor Editorial
Tiago Costa Rocha

Comissão Organizadora
Cíntia Karla Alves Souza (IFBA)
Michel Guerra de Souza (IFES – ES)
Odimógenes Soares Lopes (IFPI) - Coordenador Geral
Priscilla Guez Rabelo (Colégio Pedro II – RJ/ANPMat)
Renata Magarinus (EE Raimundo Corrêa/ANPMat)
Wilbertt Jose de Oliveira Moura (IFPI)

Comissão Acadêmica
Antônio Cardoso do Amaral (EE Augustinho Brandão – PI/ANPMat)
Fábio Pinheiro Luz (IFPI)
João Xavier da Cruz Neto (UFPI)
Marcela Luciano de Souza (UFTM/SBM)
Odimógenes Soares Lopes (IFPI) - Coordenador Local
Raquel Oliveira Bodart (IFTM/ANPMat)
Severino Cirino de Lima Neto (NUPEMAT/UNIVASF)

Capa: Pablo Diego Regino
Projeto gráfico: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

ISBN: 978-85-8337-118-2

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

PARA QUE SERVEM OS NÚMEROS IRRACIONAIS?

ALÉM DAS FÓRMULAS DE PERÍMETRO, ÁREAS E VOLUMES

Graziele Souza Mózer
Humberto José Bortolossi

1ª edição
2016
Rio de Janeiro

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Sumário

1 Introdução **3**

2 Números Irracionais e Geoplanos **5**

3 Números Irracionais e Epiciclos **13**

4 Números Irracionais e Outras Manifestações **19**
4.1 Curvas do Espirógrafo 19
4.2 Bilhar em uma Mesa Quadrada 21
4.3 Dissecção do Retângulo em Quadrados 22

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Prefácio

No Ensino Básico, a justificativa apresentada para o estudo dos números irracionais apoia-se principalmente no fato de que tais números aparecem em fórmulas para o cálculo de perímetros, áreas e volumes e com soluções de equações. Neste trabalho mostraremos como dar um enfoque diferente aos números irracionais. Apresentaremos situações onde algo interessante e não óbvio acontece porque um determinado número é irracional. Esperamos que esta nova perspectiva que articula números irracionais com problemas em geometria seja útil aos colegas professores e aos alunos de licenciatura em Matemática interessados no ensino e na aprendizagem de números irracionais.

Capítulo 1

Introdução

Os números irracionais são apresentados aos estudantes bem cedo, geralmente no 8º ano do Ensino Fundamental, quando há a necessidade de ampliar os conjuntos numéricos para abordar certos conteúdos da Matemática: o Teorema de Pitágoras e suas aplicações, o cálculo do perímetro e da área de círculos e soluções de equações quadráticas. O assunto é normalmente retomado no 1º ano do Ensino Médio por conta do estudo das funções reais elementares que fazem parte do currículo deste ano.

Várias pesquisas têm apontado para a dificuldade de se ensinar e aprender esse assunto na escola básica e nos cursos de formação de professores de Matemática. Neste cenário, um erro frequente detectado entre os alunos é o de eles considerarem, por exemplo, que π é igual a $3{,}14$ e que $\sqrt{3}$ é igual a $1{,}73$. Afinal, ao calcularem perímetros, áreas e volumes, o que geralmente se faz, no final, é substituir π e $\sqrt{3}$ por suas aproximações mais conhecidas com uma ou duas casas decimais após a vírgula. O próprio Simon Newcomb, importante astrônomo e matemático, declarou em 1882 que: "Se a razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro fosse escrita com 35 casas decimais, isto seria suficiente para determinar toda a circunferência do universo visível com um erro não maior do que o menor comprimento visível no mais potente microscópio."Newcomb(1882). Como nos diz Havil (2012), nos dias atuais, com o avanço tecnológico, seria necessário aumentar bastante o número de casas decimais de π para que a declaração de Newcomb continuasse sendo válida. Ainda assim, segundo Havil, para a maioria das situações práticas, não são necessárias aproximações de π com muitas casas decimais. O mesmo acontece frenquentemente com outros números irracionais em questões práticas: pode-se substituí-los por uma aproximação sem maiores problemas (Havil, dá exemplos em Música e na construção de caixas acústicas).

A questão é que os alunos não se deparam com situações onde eles precisem usar o fato de que um determinado número ($\sqrt{3}$, por exemplo) é irracional.

Em vez de relacionar números irracionais com cálculos de perímetros, áreas e volumes ou soluções de equações como costumam fazer muitos livros didáticos, neste trabalho procuramos dar um enfoque diferente aos números irracionais:

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

apresentamos vários exemplos onde algo interessante e não óbvio acontece porque um determinado número é irracional. Esperamos que esta nova perspectiva que articula números irracionais com problemas em aritmética, combinatória e geometria seja útil a colegas professores do Ensino Básico e a alunos de licenciatura em Matemática interessados no ensino e na aprendizagem de números irracionais.

Capítulo 2

Números Irracionais e Geoplanos

O geoplano (*geoboard* em inglês) é uma ferramenta de manipulação para o ensino de geometria inventado pelo matemático e educador egípcio Caleb Gattegno (1911-1988). Ele é constituído por uma placa, geralmente retangular, de madeira ou isopor, com pregos fixados, em torno dos quais se enrolam elásticos coloridos de borracha, o que permite modelar polígonos cujos vértices são representados pelos pregos (Figura 2.1).

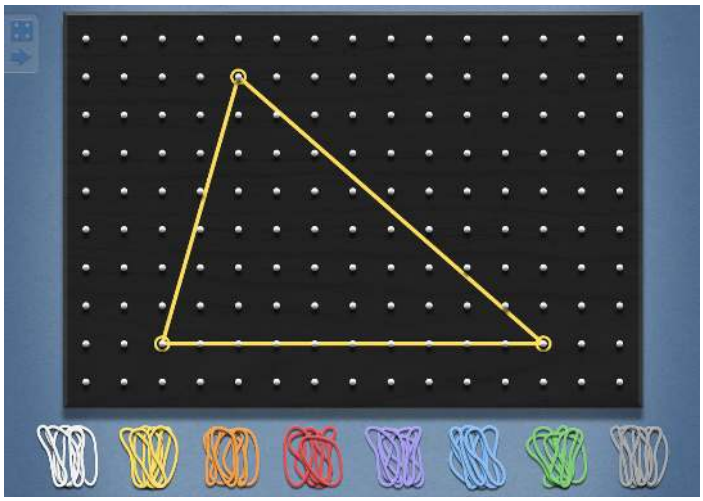
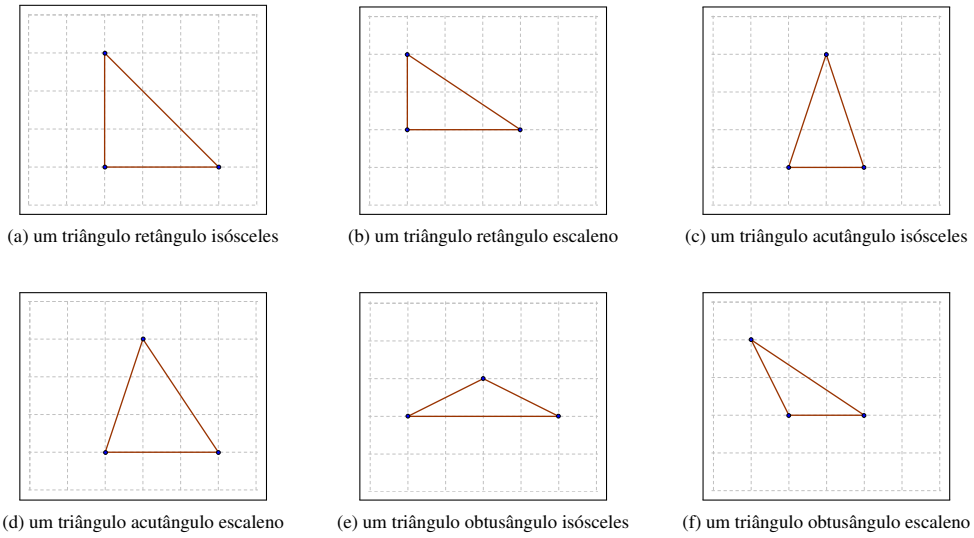


Figura 2.1: Um geoplano.
Fonte: The Math Learning Center.

O geoplano tem sido usado no ensino de perímetros, áreas, semelhança e congruência de polígonos, ângulos, transformações geométricas, simetrias e muitos outros assuntos. Entre as atividades clássicas sugeridas para o geoplano está investigar quais são os tipos de triângulos que podem ser construídos com ele. Uma versão virtual desta atividade construída com a ajuda do *software* GeoGebra (que pode, inclusive, ser executada em *tablets* e *smartphones*) está disponível no ende-

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do

reço <http://www.geogebratube.org/student/m39903?mobile=true>. (A atividade completa está disponível em <http://www.professores.uff.br/hjbortol/arquivo/2015.2/icme-13/geoboards.rtf>.) Usando um geoplano (concreto ou virtual), o leitor não terá dificuldade de verificar que é possível construir um triângulo retângulo isósceles, um triângulo retângulo escaleno, um triângulo acutângulo isósceles, um triângulo acutângulo escaleno, um triângulo obtusângulo isósceles e um triângulo obtusângulo escaleno.



(a) um triângulo retângulo isósceles (b) um triângulo retângulo escaleno (c) um triângulo acutângulo isósceles

(d) um triângulo acutângulo escaleno (e) um triângulo obtusângulo isósceles (f) um triângulo obtusângulo escaleno

Figura 2.2: Triângulos com vértices em uma malha quadrada.

Uma pergunta que surge, neste contexto, é se é possível construir um triângulo equilátero no geoplano. Note que o geoplano pode ser modelado através de uma malha quadrada, isto é, através do conjunto de pontos do plano cartesiano da forma (i, j), com i e j inteiros. Assim, em termos matemáticos, perguntar se é possível construir um triângulo equilátero no geoplano é equivalente a perguntar se existe triângulo equilátero com coordenadas inteiras. Como veremos no próximo teorema, a resposta a esta pergunta é não, porque $\sqrt{3}$ é um número irracional.

Teorema 1 *Não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras.*

Demonstração (por áreas): Suponhamos, por absurdo, que seja possível construir um triângulo equilátero ABC com coordenadas inteiras: $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ com x_A, y_A, x_B, y_B, x_C e y_C números inteiros. Sejam ℓ a medida dos lados desse triângulo equilátero, $CDEF$ o retângulo com vértices $D = (x_A, y_C)$, $E = (x_A, y_B)$ e $F = (x_C, y_B)$ e a, b, c, d, e e f as medidas dos segmentos $\overline{CF}, \overline{FB}, \overline{BE}, \overline{EA}, \overline{AD}$ e $\overline{DC}$, respectivamente (Figura 2.3).

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do

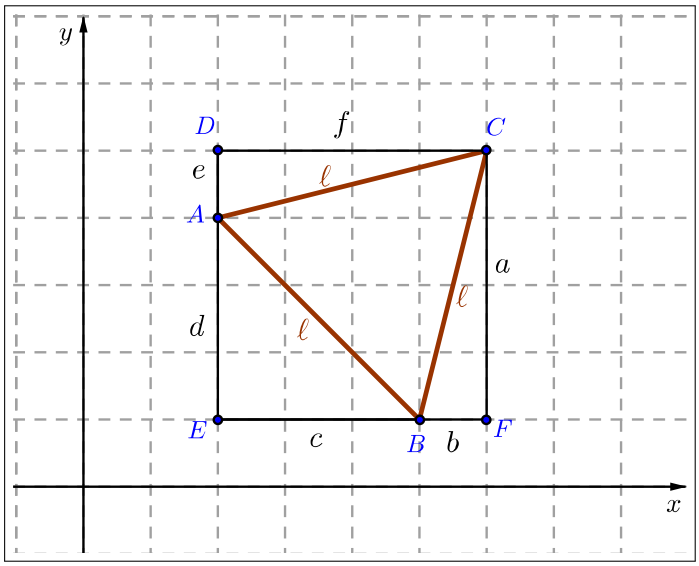


Figura 2.3: Não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras – o argumento da área.

Observe que a, b, c, d, e e f são números inteiros por se tratarem de diferenças de números inteiros (isto é, diferenças das coordenadas de A, B, C, D, E e F). Temos também que a área do retângulo $CDEF$ é um número inteiro por tratar-se de um produto de números inteiros (af). Denotemos por S_{ABC} a área do triângulo ABC. Observe que

$$S_{ABC} = S_{EDCF} - (S_{BFC} + S_{AEB} + S_{ADC}).$$

Assim, $\ell^2\sqrt{3}/4 = af - (ab/2 + cd/2 + ef/2)$, de modo que $\ell^2\sqrt{3} = 4af - 2(ab + cd + ef)$. Note que o lado direito dessa equação é um número inteiro por tratar-se de somas e produtos entre inteiros. Temos também que ℓ^2 é um número inteiro, uma vez que $\ell^2 = a^2 + b^2$. Daí, concluímos que

$$\sqrt{3} = \frac{4af - 2(ab + cd + ef)}{\ell^2}$$

é um número racional, o que é um absurdo! Portanto, não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras. ■

Uma outra maneira de demonstrar este teorema é utilizando trigonometria.

Demonstração (por trigonometria): Suponha, por absurdo, que tal triângulo equilátero exista. Sem perda de generalidade, suponha um de seus vértices na origem (ver Figura 2.4) com $0° \leqslant \beta < 90°$ e $\beta \neq 30°$.

Seja $\alpha = 60° + \beta$. Ou seja, $60° = \alpha - \beta$. Então, $\operatorname{tg} 60° = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$. Desenvolvendo os dois membros desta equação, temos que $\sqrt{3} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$. Mas,

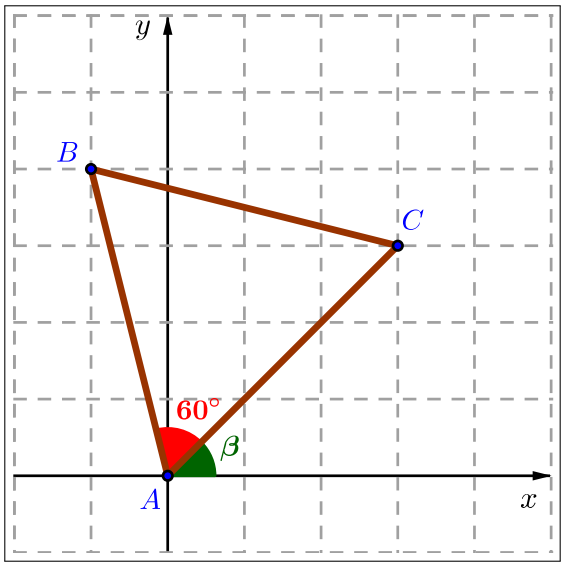


Figura 2.4: Não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras.

$\operatorname{tg}\beta = y(C)/x(C) \in \mathbb{Q}$ e $\operatorname{tg}\alpha = y(B)/x(B) \in \mathbb{Q}$. Temos, portanto uma contradição, já que $\sqrt{3}$ é irracional e $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ é racional. Assim, não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras. ■

Observação: Existem outras provas para o Teorema 1 usando diferentes técnicas (números complexos, determinantes, vetores, o Teorema de Pick). Todas utilizam o fato de que $\sqrt{3}$ é irracional.

Corolário 1 *Não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices com coordenadas racionais.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que exista um triângulo equilátero ABC cujos vértices possuam coordenadas racionais. Neste caso, usando as mesmas notações e seguindo os mesmos passos introduzidos na demonstração do teorema anterior, também concluiríamos que

$$\sqrt{3} = \frac{4af - 2(ab + cd + ef)}{\ell^2},$$

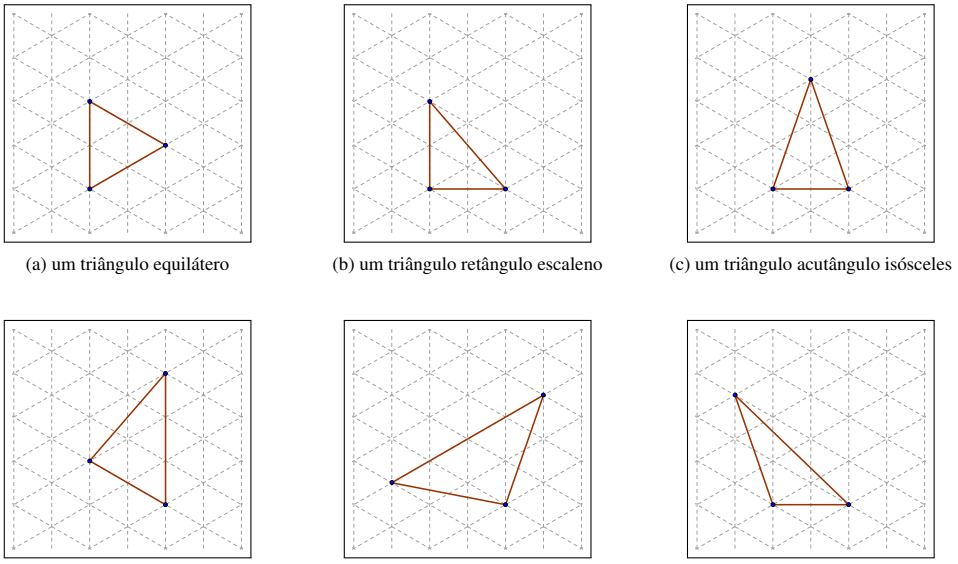
o que é um absurdo, pois $\sqrt{3}$ é um número irracional e o número $\frac{4af-2(ab+cd+ef)}{\ell^2}$ é racional (já que é o resultado de operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de números racionais). Outra forma de demonstrar este corolário é a seguinte: suponhamos, por absurdo, que exista um triângulo equilátero ABC cujos vértices possuam coordenadas racionais. Aplicando uma homotetia adequada, podemos ampliar o triângulo ABC preservando seus ângulos, a proporcionalidade de

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

seus lados e de tal modo que seus vértices possuam coordenadas inteiras. Ou seja, a partir de um triângulo equilátero com vértices de coordenadas racionais, podemos construir um novo triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras. Mas, como já sabemos, isso é um absurdo. Portanto, não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo equilátero com vértices de coordenadas racionais. ■

Outro tipo de malha que pode ser considerada no plano é a malha isométrica: a malha cujos pontos são da forma $i(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) + j(0,1) = (\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i+2j}{2})$, com i e j números inteiros, ou seja, uma malha formada por justaposições de triângulos equiláteros. Em uma malha isométrica é possível construir quase todos os tipos de triângulos, incluindo o equilátero (Figura 2.5). Observe que o único triângulo



(a) um triângulo equilátero (b) um triângulo retângulo escaleno (c) um triângulo acutângulo isósceles

(d) um triângulo acutângulo escaleno (e) um triângulo obtusângulo isósceles (f) um triângulo obtusângulo escaleno

Figura 2.5: Triângulos com vértices em uma malha isométrica.

que não aparece na Figura 2.5 é o triângulo retângulo isósceles. Como veremos no próximo teorema, isso acontece novamente porque $\sqrt{3}$ é um número irracional.

Teorema 2 *Não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que seja possível construir um triângulo retângulo isósceles ABC com vértices sobre os pontos da malha isométrica: $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, com x_A, x_B e x_C números da forma $\frac{i\sqrt{3}}{2}$, i inteiro, e com y_A, y_B e y_C números racionais. Sejam ℓ a medida dos catetos desse triângulo retângulo isósceles, $CDEF$ o retângulo com vértices $D = (x_A, y_C)$, $E = (x_A, y_B)$ e $F = (x_C, y_B)$ e a, b, c, d, e e f as medidas

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do

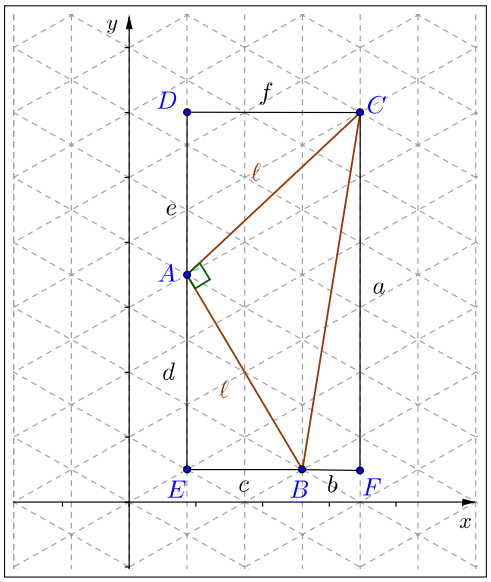


Figura 2.6: Não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica – o argumento da área.

dos segmentos $\overline{CF}, \overline{FB}, \overline{BE}, \overline{EA}, \overline{AD}$ e $\overline{DC}$, respectivamente (Figura 2.6). Na Figura 2.6 temos que a, d e e são números racionais por se tratarem de diferenças de racionais. As medidas b, c e f são números da forma $\frac{i\sqrt{3}}{2}$, com i inteiro, por se tratarem de diferenças de números desse mesmo tipo. Observe agora que a área do retângulo $CDEF$ é dada por: $S_{CDEF} = af$. Como a é racional e f é da forma $\frac{i\sqrt{3}}{2}$, então S_{CDEF} é um número da forma $r\sqrt{3}$, com r um número racional. Note também que a área do triângulo ABC é igual a $\frac{\ell^2}{2}$, e que as áreas dos triângulos ACD, ABE e BCF são números da forma $s\sqrt{3}$, com s racional. Logo, a soma das áreas desses três triângulos é da forma $t\sqrt{3}$, com t racional. Uma vez que a área do triângulo ABC é dada por $S_{ABC} = S_{CDEF} - (S_{ACD} + S_{ABE} + S_{BCF})$, segue-se então que

$$\frac{\ell^2}{2} = r\sqrt{3} - t\sqrt{3} = (r-t)\sqrt{3}. \qquad (*)$$

Perceba que $\ell^2 = c^2 + d^2 = f^2 + e^2$ é um número da forma $\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + d^2 = \frac{3i^2}{4} + d^2$, ou seja, ℓ^2, e, portanto, $\ell^2/2$ é um número racional. Por outro lado, na equação (*), temos que $(r-t)\sqrt{3}$ é um número irracional, pois $r - t$ é um número racional (não nulo, pois, caso contrário, por $(*)$, ℓ seria igual a zero, o que não é o caso), $\sqrt{3}$ é um número irracional e o produto de um número irracional por um racional não-nulo é um número irracional. Temos assim uma contradição! Portanto, não existe em $\mathbb{R}^2$ triângulo retângulo isósceles com vértices sobre as coordenadas de uma malha isométrica. ■

Corolário 2 ***(A Vingança do Triângulo Equilátero)*** *Não existe em $\mathbb{R}^2$ quadrado com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.*

Demonstração: Suponha por absurdo que exista quadrado com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica. Note que ao traçarmos uma das diagonais desse quadrado obteremos dois triângulos retângulos isósceles com vértices sobre os pontos da malha isométrica, o que é um absurdo pelo Teorema 2! Portanto, não existe em $\mathbb{R}^2$ quadrado com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica. ■

Entre as malhas que podem ser construídas usando-se justaposições de polígonos regulares, existe ainda a malha hexagonal, aquela formada por hexágonos regulares adjacentes (conforme [2]). E na malha hexagonal? É possível construir um triângulo equilátero? E um quadrado? É fácil ver que é possível construir um triângulo equilátero na malha hexagonal (Figura 2.7). Contudo, como na malha

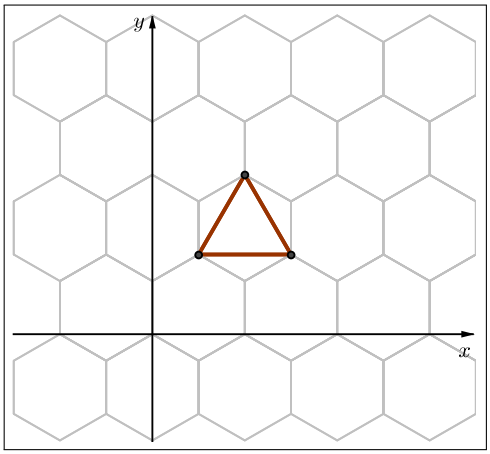


Figura 2.7: Triângulo equilátero com vértices em uma malha hexagonal.

isométrica, não é possível construir um quadrado. Com efeito: um hexágono regular de lado igual a 1 é composto por seis triângulos equiláteros de lado 1. Então, se fosse possível construir um quadrado na malha hexagonal, também seria possível construir na malha isométrica. Mas já sabemos que tal fato é impossível.
Observação: Vimos que no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ não é possível construir um triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras. E no espaço $\mathbb{R}^3$? De fato, é possível construir um triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras no espaço $\mathbb{R}^3$. O triângulo de vértices $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$ é equilátero (Figura 2.8): veja que a medida do lado $\overline{AB}$ é igual a $\|AB\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$. Igualmente, temos que as medidas dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são respectivamente iguais a $\|AC\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e $\|BC\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Assim, o triângulo ABC é equilátero.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

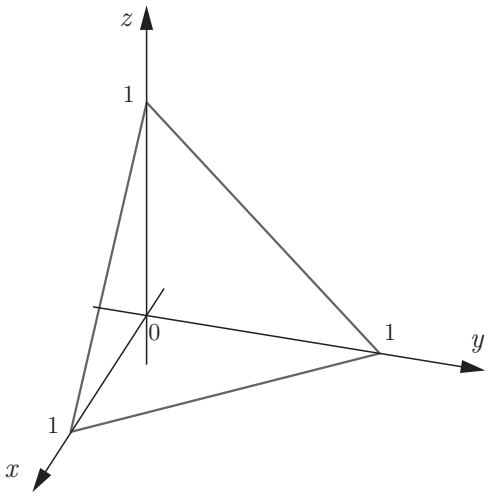


Figura 2.8: Triângulo equilátero no espaço com vértices com coordenadas inteiras.

Durante nossas pesquisas para a realização deste trabalho descobrimos que nas décadas de 70 e 80 havia discriminação contra judeus nos exames de acesso ao Departamento de Mecânica e Matemática da Universidade Estadual de Moscou. Judeus e outros estudantes "indesejáveis"eram avaliados separadamente por exames orais, com problemas muito mais difíceis do que eram dados a outros candidatos. Havia uma lista de problemas "especiais"para esses alunos, que ficou conhecida como *Killer Problems*. Alguns problemas tinham intencionalmente perguntas ambíguas, alguns eram resolvidos com cálculos tediosos, e alguns até tinham premissas impossíveis. Havia também uma seleção de problemas especiais cuja solução era "simples"e curta, mas muito difícil de encontrar. Um dos problemas que figurava nessa seleção está relacionado com o Teorema 1(Figura 2.9).

> **Problem 8.** Is it possible to put an equilateral triangle onto a square grid so that all the vertices are in corners?

Figura 2.9: Problema selecionado para judeus para acesso ao Departamento de Mecânica e Matemática da Universidade Estadual de Moscou.
Fonte: Tanya Khovanova e Alexey Radul. Killer Problems. *The American Mathematical Monthly*, v. 119, n. 10, p. 815-823, 2012.

Esse tipo de problema foi muito importante para os examinadores, porque tais problemas ajudaram a proteger o departamento de recursos e queixas. No caso de um escândalo internacional supondo que o povo judeu estava sendo discriminado por terem que resolver problemas que eram muito difíceis, alguns desses problemas e as suas soluções de cinco linhas poderiam ser apresentadas.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Capítulo 3

Números Irracionais e Epiciclos

Dizemos que um ponto P descreve um *movimento epicíclico* se sua posição ao longo do tempo pode ser descrita pela combinação de dois movimentos circulares uniformes da seguinte maneira: o ponto P descreve um movimento circular com velocidade angular constante w_2 sobre uma circunferência C_2 de raio $r_2 > 0$ e centro S, e o ponto S, por sua vez, descreve um movimento circular com velocidade angular constante w_1 sobre uma circunferência C_1 de raio $r_1 > 0$ e centro em O. Supondo, sem perda de generalidade, que $O = (0, 0)$ e que, no instante $t = 0$, $S = (r_1, 0)$ e $P = (r_1 + r_2, 0)$, a posição $(x(t), y(t))$ do ponto P, em função do tempo t, é dada por (Figura 3.1):

$$\begin{cases} x(t) &= r_1 \cos(w_1 t) + r_2 \cos(w_2 t), \\ y(t) &= r_1 \operatorname{sen}(w_1 t) + r_2 \operatorname{sen}(w_2 t). \end{cases} \tag{3.1}$$

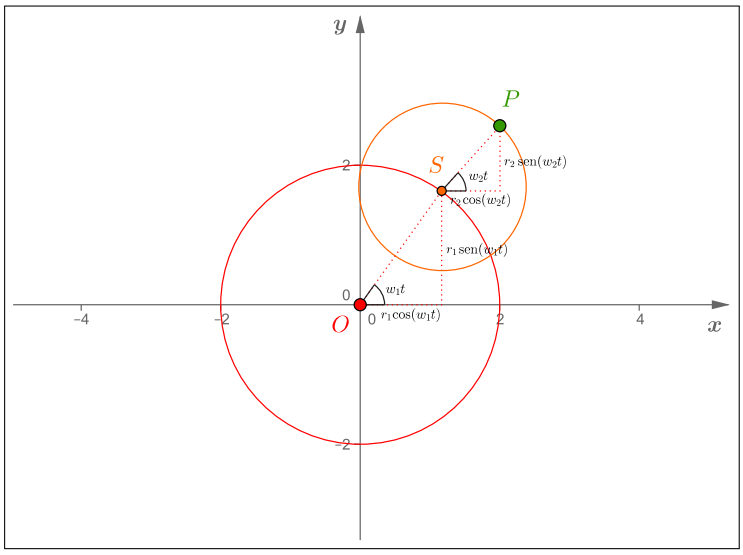
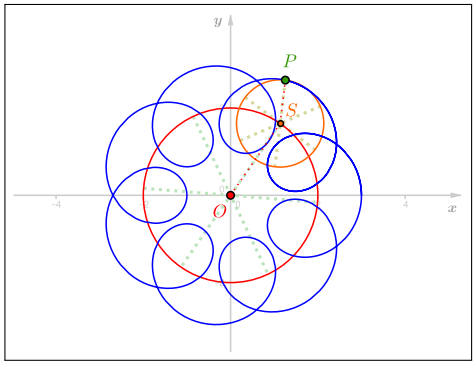


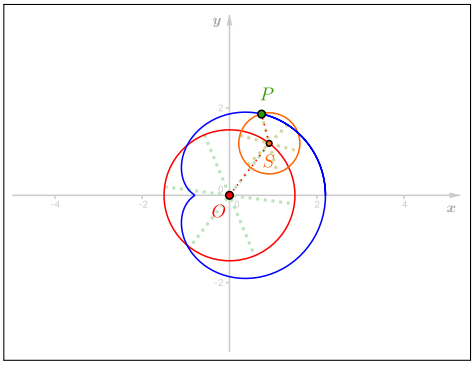
Figura 3.1: Movimentos epicíclicos.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

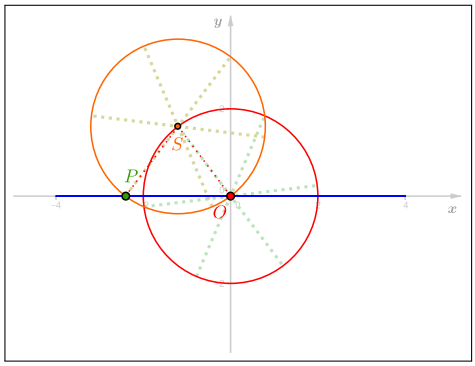
A Figura 3.2 descreve alguns exemplos de trajetórias de movimentos epicíclicos para diversos valores dos parâmetros r_1, w_1, r_2 e w_2.



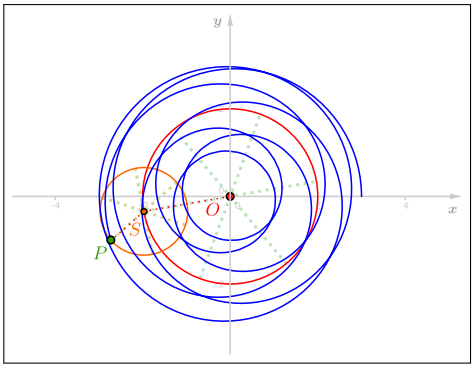
(a) $r_1 = 2; w_1 = 1; r_2 = 1; w_2 = 8$.



(b) $r_1 = 1,5; w_1 = 2; r_2 = 0,7; w_2 = 4$ (cardioide).



(c) $r_1 = 2; w_1 = 1; r_2 = 2; w_2 = -1$.



(d) $r_1 = 2; w_1 = \sqrt{2}; r_2 = 1; w_2 = 1$.

Figura 3.2: Trajetórias de alguns movimentos epicíclicos.

Uma atividade virtual, também construída no GeoGebra, é encontrada em <http://www.geogebratube.org/student/m41370?mobile=true>, onde o aluno pode trocar os valores de r_1, r_2, w_1 e w_2 e ver como funciona um movimento epicíclico.

Quando $r_1 = r_2$, $w_1 w2 < 0$, a trajetória do movimento epicíclico é chamada de rosácea porque sua forma é similar a pétalas de flores (Figura 3.3).Aqui, o estudante pode investigar como os parâmetros r_1, r_2, w_1 e w_2 determinam o número de pétalas - a atividade completa está disponível em <http://www.professores.uff.br/hjbortol/arquivo/2015.2/icme-13/epicycles.rtf>.

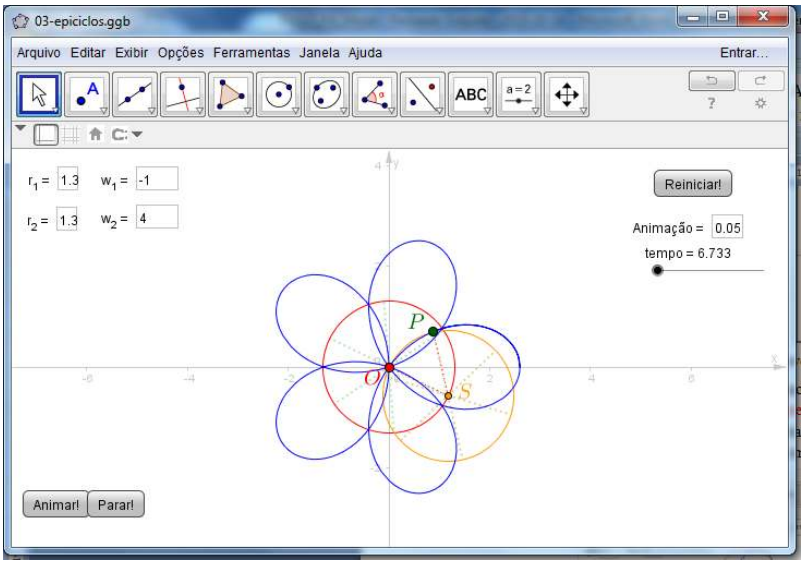


Figura 3.3: Rosácea com $r_1 = r_2 = 1.3$, $w_1 = -1$ e $w_2 = 4$.

Lembramos que uma trajetória $t \mapsto (x(t), y(t))$ é *periódica* com período $T > 0$ se para todo $t \in \mathbb{R}$, $x(t+T) = x(t)$ e $y(t+T) = y(t)$. O menor $T > 0$, se existir, tal que $x(t+T) = x(t)$ e $y(t+T) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, é denominado o *período fundamental* da trajetória. Observe que os movimentos epicíclicos (a), (b) e (c) da Figura 3.2 descrevem trajetórias periódicas: a trajetória do Item (a) tem período fundamental $T = 2\,\pi$, a do Item (b) tem período fundamental $T = \pi$ e a do Item (c) tem período fundamental $T = 2\pi$. Quando uma trajetória de um movimento epicíclico é periódica? Será que a trajetória do movimento epicíclico do Item (d) da Figura 3.2 é periódica? O teorema a seguir nos dá a resposta!

Teorema 3 *Um movimento epicíclico descrito pelas Equações 3.1 descreve uma trajetória periódica se, e somente se, $w_2 = 0$ ou a razão w_1/w_2 é um número racional caso $w_2 \neq 0$.*

Demonstração:
($\Rightarrow$) Suponha que a trajetória no movimento epicíclico descrito pelas Equações 3.1 seja periódica. Assim, existe $T > 0$ tal que $x(T+t) = x(t)$ e $y(T+t) = y(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $w_2 = 0$, nada há para se fazer. Suponha então que $w_2 \neq 0$. Fazendo $t = 0$, obtemos que $x(T) = x(0)$ e $y(T) = y(0)$, isto é,

$$r_1 \cos(w_1 T) + r_2 \cos(w_2 T) = r_1 + r_2 \quad \text{e} \quad r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(w_2 T) = 0. \tag{3.2}$$

Portanto,

$$\cos(w_1 T) = \frac{r_1 + r_2 - r_2 \cos(w_2 T)}{r_1} \tag{3.3}$$

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

e $r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) = -r_2 \operatorname{sen}(w_2 T)$. Desta última equação, segue-se que $r_1^2 \operatorname{sen}^2(w_1 T) = r_2^2 \operatorname{sen}^2(w_2 T)$, isto é,

$$r_1^2[1 - \cos^2(w_1 T)] = r_2^2[1 - \cos^2(w_2 T)]. \tag{3.4}$$

Escrevendo $a = \cos(w_2 t)$ e substituindo-se (3.3) em (3.4), concluímos que

$$r_1^2 \left[1 - \left(\frac{r_1 + r_2 - r_2 a}{r_1}\right)^2\right] = r_2^2(1 - a^2).$$

Logo, $r_1^2 - (r_1^2 + r_2^2 + r_2^2 a^2 + 2r_1 r_2 - 2r_1 r_2 a - 2r_2^2 a) = r_2^2(1 - a^2)$ e, sendo assim, $-2r_1 r_2 + 2r_1 r_2 a + 2r_2^2 a = 2r_2^2$. Como $r_2 > 0$, dividindo-se os dois lados desta última equação por $2r_2$, vemos que $-r_1 + r_1 a + r_2 a = r_2$ ou, ainda,

$$r_1(a - 1) = -r_2(a - 1).$$

Daí teremos que $r_1 = -r_2$ ou $a - 1 = 0$. Como r_1 e r_2 são positivos, segue-se que $r_1 \neq -r_2$ e, desta maneira, obrigatoriamente $a - 1$ deve ser igual a zero. Logo, $\cos(w_2 T) = 1$ e, portanto,

$$w_2 T = 2k\pi \tag{3.5}$$

para algum k inteiro diferente de zero. Substituindo-se (3.5) em (3.2), vemos que $r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) + r_2 \operatorname{sen}(2k\pi) = 0$ e, como $\operatorname{sen}(2k\pi) = 0$, segue-se que $r_1 \operatorname{sen}(w_1 T) = 0$, isto é, $\operatorname{sen}(w_1 T) = 0$. Logo, $w_1 T = q\pi$, para algum q inteiro. Assim, $w_1/w_2 = (w_1 T)/(w_2 T) = (q\pi)/(2k\pi) = q/(2k)$ é um número racional.

($\Leftarrow$) Se $w_2 = 0$, então $x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2$ e $y(t) = r_2 \operatorname{sen}(w_1 t)$. Se $w_1 = 0$, então $x(t) = r_1 + r_2$ e $y(t) = 0$. Em particular, para qualquer $T > 0$, $x(t+T) = r_1 + r_2 = x(t)$ e $y(t+T) = 0 = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é, a trajetória do movimento epicíclico é periódica. Se $w_1 \neq 0$, tomando-se $T = (2\pi/|w_1|)$, então

$$x(t+T) = r_1 \cos(w_1(t + 2\pi/|w_1|)) + r_2 = r_1 \cos(w_1 t \pm 2\pi) + r_2 = r_1 \cos(w_1 t) + r_2 = x(T)$$

e

$$y(t + T) = r_1 \operatorname{sen}(w_1(t + 2\pi/|w_1|)) = r_1 \operatorname{sen}(w_1 t \pm 2\pi) = r_1 \operatorname{sen}(w_1 t) = y(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Sendo assim, a trajetória do movimento epicíclico também é periódica se $w_1 \neq 0$. Isto encerra o caso $w_2 = 0$. Suponha então que w_2 seja diferente de zero e que w_1/w_2 seja um número racional, digamos, $w_1/w_2 = a/b$, com a e b inteiros, b com o mesmo sinal de w_2. Seja $T = 2b\pi/w_2$. Note que $T > 0$

e que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
x(t+T) &= r_1\cos(w_1(t+T)) + r_2\cos(w_2(t+T)) \;\; = \;\; r_1\cos(w_1(T+t)) + r_2\cos(w_2(T+t)) \\
&= r_1\cos(w_1T)\cos(w_1t) - r_1\operatorname{sen}(w_1t)\operatorname{sen}(w_1T) + \\
&\quad r_2\cos(w_2T)\cos(w_2t) - r_2\operatorname{sen}(w_2t)\operatorname{sen}(w_2T) \\
&= r_1\cos(w_1(2b\pi/w_2))\cos(w_1t) - r_1\operatorname{sen}(w_1t)\operatorname{sen}(w_1(2b\pi/w_2)) + \\
&\quad r_2\cos(w_2(2b\pi/w_2))\cos(w_2t) - r_2\operatorname{sen}(w_2t)\operatorname{sen}(w_2(2b\pi/w_2)) \\
&= r_1\cos(2b\pi(w_1/w_2))\cos(w_1t) - r_1\operatorname{sen}(w_1t)\operatorname{sen}(2b\pi(w_1/w_2)) + \\
&\quad r_2\cos(2b\pi(w_2/w_2))\cos(w_2t) - r_2\operatorname{sen}(w_2t)\operatorname{sen}(2b\pi(w_2/w_2)) \\
&= r_1\cos(2b\pi(a/b))\cos(w_1t) - r_1\operatorname{sen}(w_1t)\operatorname{sen}(2b\pi(a/b)) + \\
&\quad r_2\cos(2b\pi)\cos(w_2t) - r_2\operatorname{sen}(w_2t)\operatorname{sen}(2b\pi) \\
&= r_1\cos(2a\pi)\cos(w_1t) - r_1\operatorname{sen}(w_1t)\operatorname{sen}(2a\pi) + \\
&\quad r_2\cos(2b\pi)\cos(w_2t) - r_2\operatorname{sen}(w_2t)\operatorname{sen}(2b\pi) \\
&= r_1\cos(w_1t) + r_2\cos(w_2t) = x(t).
\end{aligned}$$

Argumentos análogos mostram que $y(t+T) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostramos então que existe $T = 2b\pi/w_2 > 0$ tal que $x(t+T) = x(t)$ e $y(t+T) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sendo assim, a trajetória do movimento epicíclico é periódica. ■

Atenção: O professor deve ficar atento e alertar seus alunos de que computadores não trabalham numericamente com números irracionais. De fato, quando, por exemplo, digitamos no GeoGebra como um dos parâmetros, o que o programa faz é substituí-lo por uma aproximação decimal com no máximo 15 casas. Portanto, apesar de termos a impressão no item (d) da Figura 3.2 de que as trajetórias desenhadas no GeoGebra nunca se fecharão, em algum momento elas se fecharão devido às aproximações. Mas, como nos diz o Teorema 3, se conseguíssemos trabalhar com números irracionais em vez de aproximações, a curva nunca se fecharia. Em nossa opinião, é muito importante destacar esse fato aos estudantes.

Observação: Os gregos antigos usaram os movimentos epicíclicos para explicar os movimentos dos corpos celestes no céu. A escolha de círculos se deve ao fato deles considerarem o círculo como a curva perfeita e, sendo assim, a única digna para um corpo celeste se movimentar. Este modelo persistiu do século III a.C. (com Apolônio de Perga) até o século XV d.C. (com Johannes Kepler). A Figura 3.4 (extraída do livro Almagesto de Cláudio Ptolomeu) ilustra o modelo cinemático de Ptolomeu para o movimento dos planetas Marte, Júpiter e Saturno.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

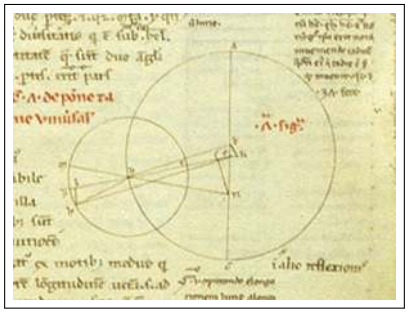


Figura 3.4: Epiciclos no livro Almagesto de Cláudio Ptolomeu.
Fonte: Museu do Vaticano.

Apesar do sistema ptolomaico conseguir modelar o movimento retrógrado dos planetas, o modelo básico da teoria dos epiciclos oferece apenas uma aproximação muito simples para o movimento real. Por exemplo, o uso do modelo básico implica que os arcos retrógrados são de mesmo tamanho e que eles estão igualmentes espaçados. Mesmo os antigos astrônomos gregos sabiam que isto não acontecia. Por este motivo, várias modificações foram sugeridas para o modelo básico a fim de incorporar estas irregularidades.

Com as Leis de Kepler e as Leis de Newton, os epiciclos caíram em desuso. Mas, como afirma [3], "*O desaparecimento dos epiciclos foi apenas temporário: mais tarde, como a Fênix, eles renasceram de suas próprias cinzas. De fato, como observado (talvez pela primeira vez) por G. V. Schiaparelli no último século, as expansões em séries de Fourier trouxeram os epiciclos de volta, em uma roupagem moderna, em mecânica celeste.*" (tradução nossa[1]). Séries de Fourier (e, por associação, os epiciclos) têm outras aplicações. Segundo [8], o trabalho científico de Matemática mais citado de todos os tempos trata justamente da Análise de Fourier; aproximadamente 3/4 dos prêmios Nobel em Física foram ganhos por trabalhos feitos usando-se ferramentas e conceitos da Análise de Fourier; o prêmio Nobel de Química de 1985 e os prêmios Nobel de Medicina de 1962, 1979 e 2003 também estão relacionados com a Análise de Fourier. Para o leitor interessado em entender a conexão entre epiciclos e séries de Fourier, recomendamos o excelente artigo [11].

Por fim, indicamos o *site* [4], o qual oferece um conjunto de atividades (acessíveis a alunos do Ensino Médio) que relacionam os epiciclos com funções trigonométricas.

[1] Citação original: "*However, the disappearance of the epicycles was only temporary: some time later, like the Phoenix, they rose again from their ashes. In fact, as remarked (perhaps for the first time) by G. V. Schiaparelli in the last century, Fourier series expansions brought the epicycles back again, in modern dress, in celestial mechanics.*".

Capítulo 4

Números Irracionais e Outras Manifestações

Enquanto que as duas atividades propostas aqui exploram manifestações de números irracionais que são acessíveis a alunos dos Ensinos Fundamental e Médio, existem outras manifestações mais sofisticadas que requerem conteúdos matemáticos do Ensino Superior: curvas do espirógrafo, bilhar no quadrado, dissecção de retângulos em quadrados, ladrilhamentos aperiódicos de Penrose e a Função de Dirichlet. Apresentaremos algumas dessas neste capítulo. Mais detalhes podem ser encontrados em [9].

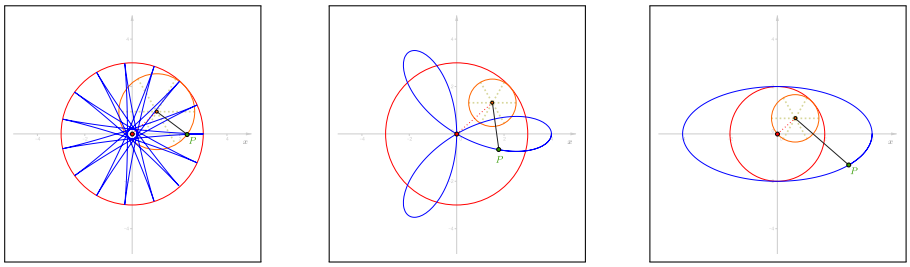
4.1 Curvas do Espirógrafo

Uma *hipotrocoide* é uma curva plana descrita pela trajetória de um ponto P fixado em um círculo C_2 de raio $r > 0$ e centro S que desliza tangencialmente *por dentro* de um outro círculo C_1 de raio $R > 0$ e centro O. Se d é a distância P até S e se supormos que $O = (0, 0)$, então é possível mostrar que a posição $(x(\theta), y(\theta))$ do ponto P em função do ângulo θ (em radianos) formado pelo eixo das abscissas e a reta OS é dada por:

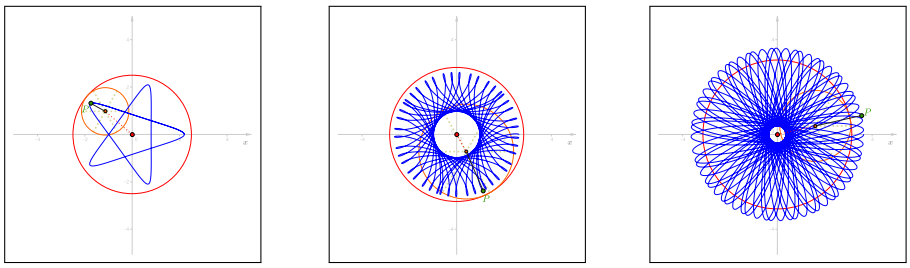
$$\begin{cases} x(\theta) &= (R-r)\cos(\theta) + d\cos\left(\dfrac{R-r}{r}\theta\right), \\ y(\theta) &= (R-r)\,\mathrm{sen}(\theta) - d\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{R-r}{r}\theta\right). \end{cases}$$

Se o círculo C_2 deslizar tangencialmente *por fora* do círculo C_1, a trajetória do ponto P descreverá uma curva que é denominada *epitrocoide*:

$$\begin{cases} x(\theta) &= (R+r)\cos(\theta) - d\cos\left(\dfrac{R+r}{r}\theta\right), \\ y(\theta) &= (R+r)\,\mathrm{sen}(\theta) - d\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{R+r}{r}\theta\right). \end{cases}$$

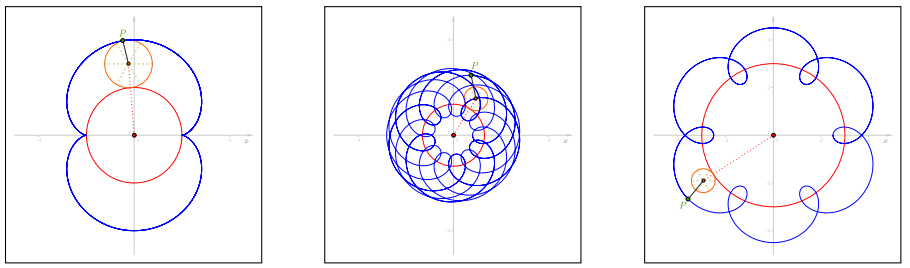


(a) $R = 3; r = 1{,}6; d = 1{,}6$. (b) $R = 3; r = 1; d = 2$. (c) $R = 2; r = 1; d = 3$.

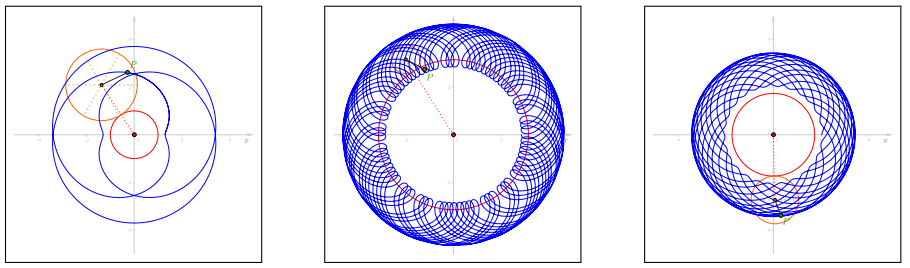


(d) $R = 2{,}5; r = 1; d = 0{,}7$. (e) $R = 2\sqrt{2}; r = 2; d = 1{,}8$. (f) $R = \pi; r = 1{,}5; d = 2$.

Figura 4.1: Exemplos de *hipotrocoides*.



(a) $R = 2; r = 1; d = 1$. (b) $R = 1{,}3; r = 0{,}5; d = 1$. (c) $R = 3; r = 0{,}5; d = 1$.



(d) $R = 1; r = 1{,}5; d = 1{,}2$. (e) $R = \pi; r = 0{,}6; d = 0{,}9$. (f) $R = \sqrt{3}; r = 1; d = 0{,}7$.

Figura 4.2: Exemplos de *epitrocoides*.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Quando, numa hipotrocoide, tivermos $d = r$, ou seja, quando o ponto P pertencer à fronteira do círculo C_2, a curva recebe o nome especial de *hipocicloide* (a Figura 4.1 (a) é um exemplo de hipocicloide). Se o mesmo ocorrer em uma epitrocoide, a curva correspondente será chamada de *epicicloide* (a Figura 4.2 (a) é um exemplo de epicicloide).

Um resultado muito interessante neste contexto, semelhante ao obtido para os epiciclos no Capítulo 3, é o seguinte: **hipotrocoides e epitrocoides são curvas periódicas se, e somente se, a razão R/r entre os raios dos círculos é um número racional**. A prova deste resultado pode ser obtida seguindo basicamente o mesmo procedimento adotado para provar o Teorema 3 do Capítulo 3.

Hipotrocoides e epitrocoides com $d < r$ podem ser desenhadas com um *espirógrafo*, um brinquedo de desenho geométrico, composto de engrenagens e anéis dentados de plástico, que foi desenvolvido pelo britânico Denys Fisher e vendido pela primeira vez em 1965.

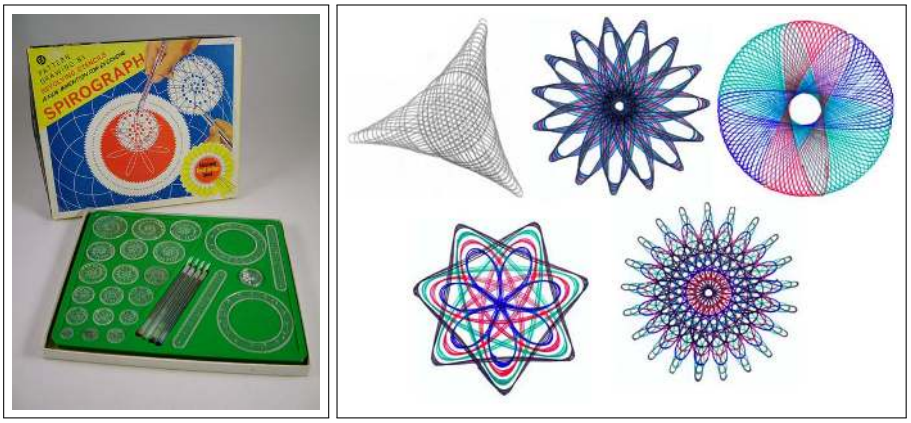
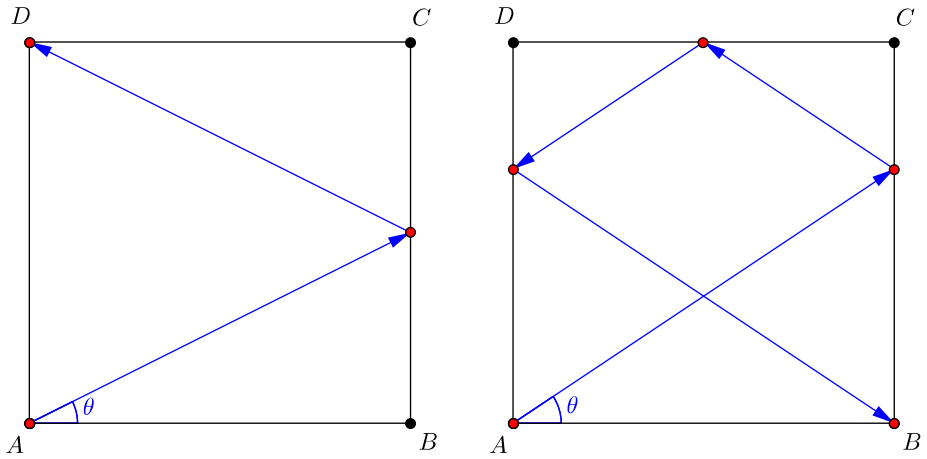


Figura 4.3: Espirógrafo e suas curvas.
Fonte: Steve Berry (imagem da esquerda) e Wikimedia Commons (imagem da direita).

4.2 Bilhar em uma Mesa Quadrada

Suponha uma mesa de bilhar hipotética, quadrada, com 1m de lado e com apenas quatro caçapas, uma em cada um dos quatro vértices A, B, C e D do quadrado. Nessa mesa, a tacada inicial é sempre feita a partir do vértice A, a bola move-se sem atrito e, ao tocar um dos lados da mesa, a bola é refletida com ângulo igual ao de incidência (a menos que ela saia por uma das caçapas).

A pergunta que fazemos é: na tacada inicial, qual deve ser o ângulo θ que a trajetória da bola deve fazer com a lateral AB da mesa para que a bola seja encaçapada? A Figura 4.4 exibe várias trajetórias da bola para diferentes valores de θ.



(a) $\theta = \text{arctg}(1/2)$. (b) $\theta = \text{arctg}(2/3)$.

(c) $\theta = \text{arctg}(1/7)$. (d) $\theta = \text{arctg}(\sqrt{2})$.

Figura 4.4: Exemplos de tacadas na mesa de bilhar quadrada.

É possível demonstrar que, seguindo as regras descritas anteriormente, **a bola vai encaçapar se, e somente se, tg(θ) é um número racional**. Assim, por exemplo, a trajetória da bola do Item (d) da Figura 4.4 nunca vai atingir uma das caçapas, pois $\text{tg}(\theta) = \sqrt{2}$ é um número irracional. A demonstração desse resultado pode ser encontrada no artigo [14].

4.3 Dissecção do Retângulo em Quadrados

Nesta seção apresentaremos como números irracionais relacionam-se com o problema da dissecção de retângulos em quadrados. O problema é o seguinte: dado um retângulo, é sempre possível decompô-lo em quadrados, ou seja, é sempre

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

possível encontrar quadrados que cubram esse retângulo sem cruzamentos[1]? A resposta foi dada pelo matemático alemão Max Dehn em 1903: **um retângulo pode ser decomposto em quadrados, se, e somente se, a razão das medidas dos seus lados é um número racional**. É fácil demonstrar que se a razão das medidas dos lados de um retângulo é um número racional, então ele pode ser decomposto em quadrados. De fato: suponha um retângulo de dimensões $a \times b$ tal que a/b seja racional. Então, existem inteiros positivos p e q tais que $a/b = p/q$. Em particular, note que $a/p = b/q$. Divida agora o lado de medida a em p segmentos de mesmo tamanho e o lado de medida b em q segmentos de mesmo tamanho. Estas subdivisões dos lados do retângulo $a \times b$ induz uma subdivisão do próprio retângulo em retângulos menores, todos de tamanho $(a/p) \times (b/q)$. Como $a/p = b/q$, esses retângulos são, na verdade, quadrados. Assim, conseguimos provar que qualquer retângulo cuja razão entre seus lados é racional pode ser decomposto em quadrados. A demonstração da recíproca é mais sofisticada. Ao leitor interessado indicamos as referências [1] e [7].

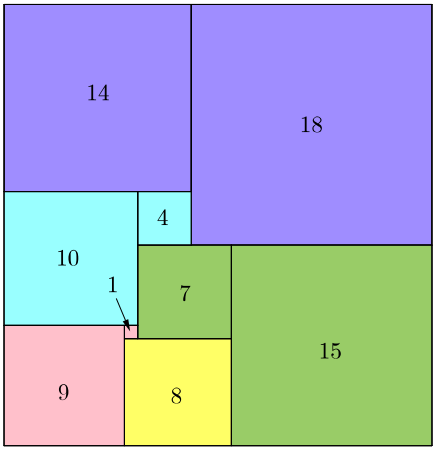


Figura 4.5: Retângulo perfeito de Zbigniew Moroń.

Uma variante do problema de dissecção dos retângulos é considerar decomposições por quadrados de tamanhos diferentes: um retângulo é dito *perfeito* se este pode ser descomposto com um número finito de quadrados não sobrepostos de tamanhos diferentes. Em 1925, o matemático polonês Zbigniew Moroń publicou o primeiro retângulo perfeito (Figura 4.5)[2]. Ele possui dimensões 33×32 e pode ser ladrilhado com nove quadrados diferentes. Os números no interior do quadrado indicam a medida do lado do quadrado.

[1] *Cobrir* significa que todo ponto do retângulo pertence a pelo menos um quadrado; *sem cruzamentos* significa que toda intersecção de dois quadrados tem área nula.

[2] Este retângulo perfeito apareceu na Questão 6 da Segunda Fase da Prova da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005.

Surpreendentemente, a condição da razão das medidas dos lados de um retângulo ser racional é suficiente para que ele seja perfeito. A demonstração desse fato pode ser encontrada no artigo [6]. Para mais informações sobre dissecções de retângulos em quadrados, recomendamos o *site* <http://www.squaring.net/>.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

Referências Bibliográficas

[1] AIGNER, M.; ZIEGLER, G. M. *Proofs from the Book*. Berlim Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.

[2] ALVES, S.; DALCIN, M. *Mosaicos no Plano*. Revista do Professor de Matemática, p. 3-12, 1999.

[3] BOCCALETTI, D. *From The Epicycles of The Greeks to Kepler's Ellipse – The Breakdown of The Circle Paradigm*. Cosmology Through Time – Ancient and Modern Cosmology in The Mediterranean Area, Monte Porzio Catone (Rome), Italy, 2001. Disponível em: < http://arxiv.org/pdf/physics/0107009/ >. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.

[4] BORTOLOSSI, H. J. *Epiciclos e Interpolação Trigonométrica*, 2013. Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/epiciclos/ >. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.

[5] BORTOLOSSI, H. J. *Jogo da Classificação dos Triângulos*, 2013. Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/jct/ >. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.

[6] BROOKS, R. L.; SMITH, C. A. B.; STONE, A. H.; TUTTE, W. T. *The Dissection of Rectangles into Squares*. Duke Mathematical Journal, v. 7, n. 1, p. 312-340, 1940.

[7] HAVIL, J. *The Irrationals: A Story of the Numbers You Can't Count On*. New Jersey: Princeton University Press, 2012.

[8] KAMMLER, D. W. *A First Course in Fourier Analysis*. New York: Cambridge University Press, 2007.

[9] MOZER, G.S. *Para que Servem os Números Irracionais? Manifestações em Aritmética, Combinatória e Geometria*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, 2013.

[10] NEWCOMB, S. *Logarithmic and Other Mathematical Tables: With Examples of Their Use and Hints on The Art of Computation*. Cambridge:Harvard University, 1882.

[11] PAWLEY, M. G. *Closed Plane Curves Described by Finite and Infinite Sums of Rotating Vectors*. Journal of The Franklin Institute, v. 307, n. 3, p. 155-173, 1979.

[12] POMMER, W. M. *A Construção de Significados dos Números Irracionais no Ensino Básico: Uma Proposta de Abordagem Envolvendo Os Eixos Constituintes dos Números Reais*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2012.

[13] RIPOLL, C. C. *Mal Ditas Frases Encontradas em Livros Didáticos de Matemática para A Escola Básica*. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011. <http://www.mat.ufrgs.br/~fundamentos1/Mal_ditas.pdf>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.

[14] SARAIVA, António, *Bilhares de Inteiros*. Boletim da SPM 57, p. 1-31, 2007. Disponível em: <http://www.atractor.pt/mat/bilhar/bilhar.pdf>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.

Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2º Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste

SBM

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Medio Vol. 4 - Exercicios e Soluções* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Um Convite à Matemática* - D.C de Morais Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 1 - Números Reais - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 3 - Introdução à Análise - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 4 - Combinatória - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 5 - Teoria dos Números - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 6 - Polinômios - A. Caminha
- *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)
- *Como Resolver Problemas Matemáticos* - T. Tao
- *Geometria em Sala de Aula* - A. C. P. Hellmeister (Comitê Editorial da RPM)
- *Números Primos, amigos que causam problemas* - P. Ribenboim
- *Manual de Redação Matemática* - D.C de Morais Filho

COLEÇÃO PROFMAT

- *Introdução à Álgebra Linear* - A. Hefez e C.S. Fernandez
- *Tópicos de Teoria dos Números* - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha
- *Polinômios e Equações Algébricas* - A. Hefez e M.L. Villela
- *Tópicos de Historia de Matemática* - T. Roque e J. Bosco Pitombeira
- *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática* - V. Giraldo, P. Caetano e F. Matto*s*
- *Temas e Problemas Elementares* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Números e Funções Reais* - E. L. Lima
- *Aritmética* - A. Hefez
- *Geometria* - A. Caminha
- *Avaliação Educacional* - M. Rabelo
- *Geometria Analítica* - J. Delgado, K. Frensel e L. Crissaff
- *Matemática Discreta* - A. Morgado e P. C. P. Carvalho
- *Matemática e Atualidade - Volume 1* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Fundamentos de Cálculo* - A. C. Muniz Neto
- *Matemática e Atualidade - Volume 2* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear* - A. Hefez e C. de Souza Fernandez
- *Exercícios Resolvidos de Aritmética* - A. Hefez

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D. G. de Figueiredo
- *Números Racionais e Irracionais* - I. Niven
- *Tópicos Especiais em Álgebra* - J. F. S. Andrade

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L. N. de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M. P. do Carmo
- *Matemática Discreta* - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- *Álgebra Linear: Um segundo Curso* - H. P. Bueno
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa* - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.
- *Elementos de Topologia Geral* - E. L. Lima
- *A Construção dos Números* - J. Ferreira
- *Introdução à Geometria Projetiva* - A. Barros e P. Andrade
- *Análise Vetorial Clássica* - F. Acker
- *Funções, Limites e Continuidade* - P. Ribenboim
- *Fundamentos de Análise Funcional* - G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira
- *Teoria dos Números Transcendentes* - D. Marques
- *Introdução à Geometria Hiperbólica - O modelo de Poincaré* - P. Andrade
- *Álgebra Linear: Teoria e Aplicações* - T. P. de Araújo
- *Introdução à Análise Matemática na Reta* - C. I. Doering

- *Topologia e Análise no Espaço Rn* - R. Freire de Lima
- *Equações Ordinárias e Aplicações* - B. Scárdua

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H. Bolfarine e M. Sandoval
- *Discretização de Equações Diferenciais Parciais* - J. Cuminato e M. Meneguette
- *Fenômenos de Transferência – com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia volume 1: Fundamentos* - J. Pontes e N. Mangiavacchi

COLEÇÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª* - E. Mega e R. Watanabe
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª* - C. Moreira e E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues
- *21 Aulas de Matemática Olímpica* - C. Y. Sh
- *Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções* - K. I. M. Oliveira e A. J. C. Fernández
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Fundamental* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Médio* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 17ª a 24ª* - C. G. T. de A. Moreira, C. Y. Shine, E. L. R. Motta, E. Tengan e N. C. Saldanha

COLEÇÃO FRONTEIRAS DA MATEMÁTICA

- *Fundamentos da Teoria Ergódica* - M.Viana e K. Oliveira
- *Tópicos de Geometria Diferencial* - A. C. Muniz Neto
- *Formas Diferenciais e Aplicações* - M. Perdigão do Carmo

COLEÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume I Números Naturais* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo
- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume II Números Inteiros* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo

Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste - IFPI - Campus Floriano - 2

APOIO:





ISBN 978-85-8337-118-2

