III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

ESTOJO DE FRAÇÕES

Aparecida Francisco da Silva
Yuriko Yamamoto Baldin
Ana Claudia Cossini Martins

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

ESTOJO DE FRAÇÕES

Capa: Pablo Diego Regino
Projeto gráfico: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

ISBN: 978-85-8337-143-4

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

III SIMPÓSIO NACIONAL DA
FORMAÇÃO DO PROFESSOR
DE MATEMÁTICA

ESTOJO DE FRAÇÕES

Aparecida Francisco da Silva
Yuriko Yamamoto Baldin
Ana Claudia Cossini Martins

1ª edição
2018
Rio de Janeiro

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Sumário

Prefácio

Este texto foi produzido como suporte para o minicurso **Estojo de Frações** desenvolvido no período de **17 a 19 de novembro de 2017** durante a realização do III Simpósio Nacional de Formação do Professor de Matemática, no Rio de Janeiro, Brasil.

Além do conteúdo desenvolvido no curso estão explicitados os pressupostos para uso em sala de aula e são apresentadas atividades para esse fim, destacando aspectos relevantes do estudo de frações. O material como proposto no primeiro capítulo foi testado em sala de aula de escolas públicas do Estado de São Paulo, a partir da publicação de Renata Goes em sua dissertação de Mestrado junto ao PPGECE da UFSCar [1]. Para o segundo capítulo está proposta uma sequência de atividades para compreensão do uso do material na introdução das operações de multiplicação e divisão, utilizando o material ampliado com transparências horizontais que permitem a exploração com significado de tais operações.

A diferença de estilo na apresentação dos capítulos evidencia a etapa da aplicação do material pelo Grupo de Estudos em Metodologia de Resolução de Problemas em desenvolvimento, numa parceria da Unesp - *Campus* de São José do Rio Preto, UFSCar, e Diretorias de Ensino Regiões de José Bonifácio e São José do Rio Preto, que é coordenado pelas autoras em parceria com os professores Clarice Pereira, Maria Regina Lima Duarte, Luiz Paulo Pinto e Marcio Noronha (Secretaria de Estado da Educação) e Flavia Souza e Evelin Meneguesso (Unesp).

Introdução

O Estojo de Frações é um material que pode ser utilizado na introdução do conceito de frações como parte/todo, frações equivalentes, comparação de frações e operações básicas com frações.

O Estojo de Frações é composto de estojo que contém uma base para encaixe das peças retangulares coloridas e manipuláveis e de transparências que podem ser sobrepostas às peças retangulares encaixadas na moldura, para se certificar sobre as frações que estão sendo trabalhadas, comparar diferentes frações etc. As medidas das demarcações em cada transparência são as mesmas para cada uma das peças correspondentes. O material foi elaborado a partir da descrição de Renata Goes em sua dissertação de mestrado, que utilizou em sua validação do material, versão em EVA. A versão utilizada nas atividades propostas neste minicurso foi fornecida pela empresa JM Assessoria Pedagógica [6].

O material inicialmente aplicado em 2014, em escolas jurisdicionadas à Diretoria de Ensino Região de José Bonifácio, após o desenvolvimento do conteúdo da forma proposta no material da Secretaria de Educação do Estado (Caderno do Professor/Aluno [2] [3]) ou em livro didático, mostrou-se conveniente não só pelo envolvimento da totalidade dos alunos das classes nas atividades propostas, incluindo aqueles que ainda não dominavam o assunto adequadamente, como também pelos resultados obtidos em avaliações posteriores do grupo de alunos.

Nos anos de 2015, 2016 e 2017 a aplicação do material para outras escolas jurisdicionadas àquela regional, bem como escolas jurisdicionadas à Diretoria de Ensino Região de São José do Rio Preto, tem mostrado que o uso de dois instrumentos (recortes em MDF colorido e transparências representando partes de um mesmo todo) facilita a transição entre o concreto (recortes de MDF) e o abstrato (transparências com indicação das partes e notação da representação de cada parte).

No primeiro capítulo do texto está proposta uma sequência didática fundamentada na Metodologia de Resolução de Problemas, com atividades e recomendações cujo objetivo é auxiliar o leitor na aplicação do material em sala de aula. As atividades propostas contemplam o reconhecimento do material e suas principais características, representação fracionária e significado de numerador e denominador, frações equivalentes, comparação, adição e subtração de frações.

No segundo capítulo, apresentamos uma sequência de atividades utilizando o Estojo de Frações (transparências com divisões horizontais e verticais), nas quais busca-se evidenciar a passagem da multiplicação de números naturais, com significado para a multiplicação e divisão de frações. Para alcançar esse objetivo, o capítulo começa com uma retomada para o significado de uma unidade fracionária em relação a um todo inteiro, principal conceito para o trabalho com significado para as operações com frações.

Para finalizar, é apresentada uma sequência de problemas de provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - Obmep [8], avaliações externas como o Saresp (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) e outras fontes, com os dados adaptados para permitir o uso do estojo por alunos que ainda não tenham desenvolvido a habilidade de trabalhar o conteúdo específico que é abordado.

Figura 1: Estojo de Frações confeccionado pela JM Assessoria Pedagógica

Agradecimentos

Agradecemos aos colegas coordenadores do Grupo de Estudos Metodologia de Resolução de Problemas pelas contribuições que enriqueceram as discussões sobre os roteiros de aplicação do material em sala de aula; certamente estas discussões muito nos auxiliaram na elaboração deste texto.
Cabe também mencionar a valiosa contribuição dos professores das Diretorias Regionais de Ensino de José Bonifácio e São José do Rio Preto pela aplicação do material em sala de aula.

Capítulo 1

Conhecendo o Estojo de Frações

Embora o estudo de frações faça parte do Currículo Oficial do Estado de São Paulo proposto para o Ensino Fundamental - Anos Iniciais e Finais, os resultados de avaliações oficiais apontam que muitos alunos concluem tal etapa da escolaridade sem a real compreensão do que seja fração, de sua representação, do significado das operações, e que tais dificuldades não são sanadas posteriormente, com alunos apresentando as mesmas dificuldades até o término do Ensino Médio. Diante desse cenário e procurando proporcionar uma aprendizagem mais significativa do tema a alunos do Ensino Fundamental - Anos Finais, em específico o 6º ano, no desenvolvimento de trabalho do Grupo de Estudos Metodologia de Resolução de Problemas - GEMRP coordenado pelas coautoras e do qual participam aproximadamente 40 professores da rede estadual de ensino, foi introduzido o **Estojo de Frações**, como proposto por Renata Goes em sua dissertação de mestrado, junto ao PPGECE/UFSCar [1] e ampliado para abordar, também, as operações de multiplicação e divisão, com transparências adequadas para o início do trabalho com as operações.

O Estojo de Frações, confeccionado em MDF [6], possui uma moldura que serve de base para encaixe de peças retangulares coloridas que representam frações do retângulo interno e conjunto de transparências.

As peças retangulares que compõem o estojo são:

- 1 peça que corresponde ao inteiro (1);
- 2 peças, cada qual correspondente a $\frac{1}{2}$ do inteiro;
- 3 peças, cada qual correspondente a $\frac{1}{3}$ do inteiro;
- 4 peças, cada qual correspondente a $\frac{1}{4}$ do inteiro;
- 5 peças, cada qual correspondente a $\frac{1}{5}$ do inteiro;
- 6 peças, cada qual correspondente a $\frac{1}{6}$ do inteiro;

- 7 peças, cada qual correspondente a $\frac{1}{7}$ do inteiro;
- 8 peças, cada qual correspondente a $\frac{1}{8}$ do inteiro;
- 9 peças, cada qual correspondente a $\frac{1}{9}$ do inteiro;
- 10 peças, cada qual correspondente a $\frac{1}{10}$ do inteiro;
- 11 peças, cada qual correspondente a $\frac{1}{11}$ do inteiro;
- 12 peças, cada qual correspondente a $\frac{1}{12}$ do inteiro.

O conjunto de transparências é composto por folhas de acetato com marcações que representam unidades fracionárias.

As transparências, colocadas sobre as peças encaixadas, servem para confirmar a notação e o significado de unidades fracionárias, assim como o papel do numerador de uma fração como contador das unidades fracionárias. Elas também são utilizadas para inferir resultados e verificar frações equivalentes, comparar frações e realizar as operações básicas.

No estojo, as peças em MDF colorido são representações concretas da parte do todo representado pelo retângulo na moldura, e as transparências são usadas para a transição entre o concreto e o abstrato.

No texto apresentaremos uma sequência didática fundamentada na Metodologia de Resolução de Problemas, com atividades e recomendações cujo objetivo é auxiliar o leitor na aplicação do material em sala de aula.

1.1 Atividades Iniciais

As atividades iniciais têm o propósito de servir para identificação dos itens que compõem o material: reconhecimento de que todas as peças de mesma cor têm o mesmo tamanho, que as peças estão representadas nas transparências, que cada transparência representa uma partição do inteiro, que todos os retângulos pequenos da transparência representam a mesma parte do todo e ainda que os retângulos de mesma cor representam a mesma parte da unidade e são acompanhadas de alguns questionamentos para levar os alunos a perceberem essas características do material.

Para iniciar as atividades recomenda-se que os alunos sejam organizados em grupos, distribuindo as carteiras em forma de U para facilitar o acesso a todos os grupos e visualização das atividades que realizarem, e que seja entregue um estojo para cada grupo de, no máximo, 4 alunos. Recomendamos deixar os alunos manipularem por alguns momentos e identificarem o que há no estojo e depois conduzir atividade de reconhecimento com questionamentos, tais como:

- *O que tem no estojo?*
- *Para que serve a moldura que se encontra no estojo?*
- *O que está escrito nas transparências? Para que servem as transparências?*
- *Compare duas peças de mesma cor. O que você observa?*
- *Experimente colocar todas as peças de mesma cor na moldura. O que acontece?*
- *Compare as peças com as figuras desenhadas na transparência e escreva o que observa.*

Após a identificação dos elementos que fazem parte do material, pode-se introduzir as atividades:

Atividade 1:
Utilizando o Estojo de Frações, responda: quais são as maneiras de se preencher a moldura que se encontra no estojo, utilizando apenas peças de uma mesma cor?

Recomendações para o professor:
Esta atividade tem como objetivo o reconhecimento da quantidade de partes em relação ao todo e introdução da nomenclatura e representação. Pode ser conduzida com toda a classe, cada aluno escolhendo a cor que quiser e colocando na lousa o que observou. Ao final, mesmo os alunos que não participaram da escrita na lousa devem ser indagados qual foi a cor escolhida, se encontrou a transparência correspondente à peça escolhida. Ainda, se sabe ler o que está representado na transparência.
Organizar as observações em uma tabela ajuda a percepção da correlação existente entre o denominador da representação fracionária na transparência e a quantidade total de peças da cor escolhida para preencher a moldura.

Atividade 2:
Coloque na moldura, a cada vez, as peças indicadas nos itens abaixo, e, a seguir, represente com notação de fração a correspondente parte do retângulo da moldura na tabela indicada abaixo.

- Uma peça do grupo de 2 peças iguais;
- Duas peças do grupo de 3 peças iguais;

- Três peças do grupo de 5 peças iguais;
- Duas peças do grupo de 7 peças iguais;
- Quatro peças do grupo de 8 peças iguais.

Tabela 1.1: Tabela para representação das frações

Item	Quant.Peças	Representação de uma unidade na transparência	Como representar o conjunto de peças colocadas
a	1		
b	2		
c	3		
d	2		
e	4		

Atividade 3:
Coloque na moldura do Estojo de Frações as 6 peças iguais que completam a moldura. A seguir responda:

(a) Qual fração do inteiro, uma única peça representa?

(b) Que fração do inteiro, 3 peças representam?

(c) Quais são as partes do inteiro que podem ser representadas por peças deste conjunto?

(d) Utilizando apenas peças do conjunto de 6 peças, quais são os números que aparecem nas representações?

Atividade 4:
Coloque na moldura do Estojo de Frações as 10 peças iguais que completam a moldura e responda às perguntas abaixo:

(a) Use a transparência correspondente às peças colocadas e escreva o que aparece em cada uma das figuras representadas na transparência.

(b) O número que aparece na parte debaixo do traço da representação na transparência é igual ao número de peças que colocou na moldura? Explique o que você pensa que possa estar acontecendo.

(c) Agora, coloque 4 peças. Como você pode representar que são 4 peças de $\frac{1}{10}$?

(d) Quais são os números que aparecem na parte de cima das representações das frações que se pode obter usando as peças deste conjunto?

Recomendações para o professor:

Professor, a condução das atividades 3 e 4 deve levar os alunos a utilizarem as transparências para identificar as situações como 2 partes de $\frac{1}{6}$ para $\frac{2}{6}$, 5 partes de $\frac{1}{10}$ para $\frac{5}{10}$ etc. preparando-os para entender que o nome da fração que está representada depende do total de peças para completar a moldura. Ou seja, o ***denominador*** *(aquele que aparece na indicação da transparência e pelo qual o inteiro foi dividida em partes iguais) é o que* ***dá o nome da parte do todo*** *que está sendo utilizado, e o* ***numerador*** *é o* ***contador de*** *(enumera) quantas partes iguais foram tomadas. Para finalizar a atividade, pode-se solicitar que os alunos reflitam sobre o que aconteceu, especialmente sobre o que o número na parte debaixo de cada representação feita indica. É importante certificar-se de que os alunos já dominam a ideia de denominação e quantificação, antes de sistematizar o significado de numerador e denominador. Se, ao finalizar as atividades 3 e 4, perceber que a sala ainda não domina a ideia de denominação e quantificação, recomenda-se utilizar a mesma sequência de perguntas com peças de outros conjuntos de peças iguais.*

O que se pretende é que o aluno perceba que a variação do número de peças colocadas na moldura do estojo não interfere na representação da unidade fracionária que está na transparência, ou seja, é para o aluno perceber que variando o número de peças na moldura não muda a representação no denominador, mesmo que ainda não tenha feito a indicação na forma fracionária $\frac{a}{b}$ e esteja apenas contando as peças de $\frac{1}{b}$.

Todo CUIDADO com a linguagem utilizada: expressões como ***"quantas partes eu pego ou tomo"*** *e* ***"quantas partes ficam na moldura"*** *podem gerar confusão e* ***NÃO devem*** *ser utilizadas nas aulas. Também há que se tomar cuidado com* ***"em quantas partes eu quebro o todo"****, quando se deve enfatizar a quantidade total de* ***PARTES IGUAIS*** *em que o todo foi dividido. Para que o aluno reconheça que o todo ficou dividido em* ***"tantas"*** *partes iguais elas devem estar todas na moldura, e a pergunta é quanto do todo é representado por uma delas, sem retirá-la do estojo, pois a ação de retirar a peça pode levar a confusões com numerador e denominador.*

1.2 Equivalência e Comparação de Frações

O próximo conjunto de atividades tem por objetivo levar os alunos a fixar a notação fracionária e introduzir o conceito de frações equivalentes.

Atividade 5:
Colocando na moldura as peças indicadas em cada um dos itens abaixo, represente a fração correspondente do retângulo:

(a) 1 peça do conjunto de duas peças iguais que completam a moldura;

(b) 2 peças do conjunto de três peças iguais que completam a moldura;

(c) 3 peças do conjunto de cinco peças iguais que completam a moldura;

(d) 2 peças do conjunto de sete peças iguais que completam a moldura;

(e) 4 peças do conjunto de oito peças iguais que completam a moldura.

Atividade 6:
Escreva como se lê cada fração representada no exercício anterior.

(a) ________________________________

(b) ________________________________

(c) ________________________________

(d) ________________________________

(e) ________________________________

Atividade 7:
Coloque a peça indicada na moldura do Estojo de Frações e verifique se é possível trocá-la por outra(as) peças (todas iguais). Veja o exemplo: 1 peça $\frac{1}{2}$ pode ser trocada por duas peças $\frac{1}{4}$. Utilize as transparências para confirmar seu resultado.

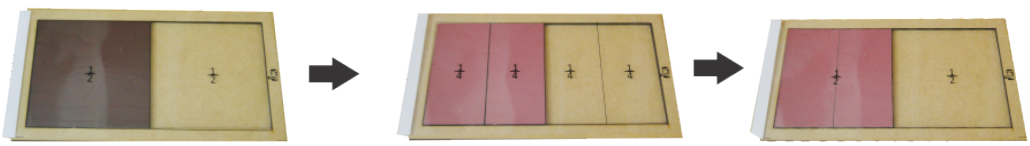

Figura 1.1: Peça $(\frac{1}{2})$ trocada por duas peças $(\frac{1}{4})$ que correspondem a $\frac{2}{4}$.

(a) 1 peça $\frac{1}{3}$:________________________________

(b) 2 peças $\frac{1}{8}$:________________________________

(c) 5 peças $\frac{1}{11}$: ________________________________

(d) 2 peças $\frac{1}{7}$: ________________________________

Atividade 8:
Utilizando as transparências e as peças do Estojo de Frações, encontre frações que representem a mesma parte que é ocupada por uma peça que representa a metade do espaço da moldura.

Atividade 9:
Coloque duas peças de $\frac{1}{8}$ juntas na moldura do estojo e utilize transparências para encontrar aquelas que representam frações correspondentes à mesma parte ocupada pelas duas peças que estão na moldura. Como podemos representar as diferentes maneiras para substituir as duas peças juntas?

Atividade 10:
Coloque uma peça $\frac{1}{3}$, duas peças $\frac{1}{6}$ e três peças $\frac{1}{9}$ na moldura do estojo. Recubra com a transparência que representa a peça $\frac{1}{3}$. Relate o que aconteceu.

Recomendações para o professor:
Esta última atividade é para reconhecimento de denominador comum a várias frações. Para a finalização das atividades é importante que os alunos reconheçam se há outras transparências que contornam igualmente os grupos de peças de mesma cor e quais são os denominadores que aparecem nas transparências encontradas.
Reforçamos que é interessante levar os alunos a registrarem na lousa e expor suas opiniões, sem que o professor apresente julgamento de certo ou errado. Recomenda-se retomar o trabalho com novos questionamentos que permitam repensar, sempre que houver dúvida ou equívoco, até que todos os alunos se sintam seguros do que aprenderam.

Os exercícios anteriores têm como objetivo chegar à definição de frações equivalentes, preparando o terreno para o reconhecimento de algoritmos e formas de se obter frações equivalentes, e o estabelecimento de critérios para a comparação de frações, o que pode ser feito com atividades como as que se seguem:

Atividade 11:

(a) Obtenha frações que representem a mesma parte do inteiro que $\frac{2}{3}$.

(b) Entre as frações encontradas, o que se pode observar?

Atividade 12:
Analise a seguinte situação: João pretende pegar $\frac{1}{5}$ das balas de um pote e Rodrigo $\frac{2}{10}$ das balas do mesmo pote. O que podemos dizer em relação à quantidade de balas que cada um pretende pegar? Explique.

Atividade 13:
Jandira dividiu uma barra de chocolate em 6 partes iguais e comeu 2 delas. Se ela tivesse dividido a barra em 12 pedaços iguais, quantos pedaços de chocolate ela deveria comer para ingerir a mesma quantidade de chocolate?

Atividade 14:
Represente, na moldura do Estojo de Frações, as frações apresentadas na primeira coluna da tabela abaixo, e encontre frações equivalentes a elas. Registre seus resultados na coluna Frações Equivalentes na tabela a seguir:

Tabela 1.2: Tabela para anotações das Frações Equivalentes

Frações	Frações Equivalentes
$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{8}$	

Existem frações equivalentes a cada uma delas no material contido no Estojo?

Atividade 15:
Represente, na moldura do Estojo de Frações, todas as frações possíveis que possuem numerador 2. Para cada uma delas encontre todas as frações equivalentes, possíveis de se representar com o Estojo de Frações. Registre as frações obtidas e descreva o que observa com relação ao numerador e denominador das frações equivalentes obtidas. Ao final coloque-as em ordem crescente.

Essa última atividade é importante para trabalhar a generalização para além do que pode ser explorado com o material, e evidencia a necessidade de extrapolar seus limites. Nesse ponto, trabalhando os registros e conduzindo a discussão sobre o que aconteceu, comparando as representações das frações, formaliza-se quais são os procedimentos que se podem adotar para verificar se duas frações são equivalentes.

A sistematização dos conceitos, a formalização dos processos e sua aplicação fazem parte da aprendizagem e preparam para a necessária generalização.

Para explorar a comparação de frações podem ser realizadas outras atividades de troca de peças e comparação por superposição de transparências. O trabalho iniciase comparando as frações com numerador 1 e é seguido por questionamentos que levem os alunos a encontrar frações equivalentes a duas dadas.

Atividade 16:
Três alunos fizeram lanches dividindo seus pães de forma de diferentes maneiras:

- O sanduíche de João foi feito dividindo uma fatia em quatro partes iguais e usando duas delas:

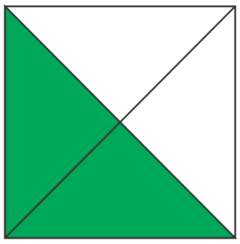

Figura 1.2: Figura dividida em 4 partes iguais.

- Maria fez seu sanduíche dividindo a fatia de pão em 3 partes iguais e usando 2 delas

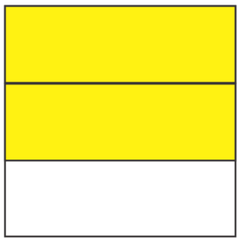

Figura 1.3: Figura dividida em 3 partes iguais.

- Ana dividiu a fatia de pão em quatro partes iguais e usou três delas

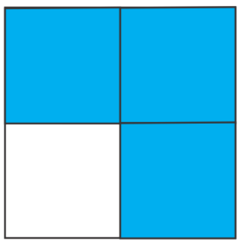

Figura 1.4: Figura dividida em 4 partes iguais.

Se uma fatia de pão é a unidade, expresse a quantidade de pão que cada uma dos alunos usou para fazer o sanduíche, utilizando a representação fracionária. Qual sanduíche tinha mais pão? Por quê?

Atividade 17: Encontre frações equivalentes a $\frac{5}{6}$ e $\frac{11}{12}$ que tenham o mesmo denominador. Qual delas é a maior?

Atividade 18:
Transforme as frações dadas em frações equivalentes, e ao fim compare-as:

a) $\dfrac{3}{4}$ e $\dfrac{5}{6}$ b) $\dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{2}{9}$

1.3 Adição e Subtração

Para realizar a adição de duas frações, inicia-se o processo retomando a representação de frações com mesmo denominador e observando que basta contar quantas unidades fracionárias estão representadas na moldura. Para ampliar, propõe-se atividades usando peças que representem diferentes unidades fracionárias, e usa-se o seguinte princípio: peças colocadas juntas na moldura representam adição dessas frações. Por exemplo, uma peça $\frac{1}{3}$ junto com uma peça $\frac{1}{4}$, representam a adição dessas frações, e o uso da transparência correspondente à unidade fracionária $\frac{1}{12}$ (que se ajusta às duas peças) é uma atividade que consolida o significado e o procedimento de adição de frações com mesmo denominador.

Atividade 19:
Tenho duas jarras: uma com $\frac{1}{3}$ de litro de leite e outra com $\frac{1}{2}$ litro de leite. Se despejarmos todo o leite em uma única jarra, quanto do litro de leite haverá na jarra?

Atividade 20:
Represente as frações indicadas na moldura do Estojo de Frações e obtenha uma forma para calcular a soma delas:

a) $\dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{5}$ b) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{6}$ d) $\dfrac{11}{12} + \dfrac{1}{4}$

A comparação com as transparências para identificação daquela que se ajusta adequadamente à fração que corresponde à diferença ajuda a estabelecer a operação de subtração (diferença) entre as frações, com redução a frações equivalentes às primeiras, com denominador comum.

Por exemplo: para obter $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$, pode-se proceder da seguinte forma:

(a) Colocamos, justapostas, na moldura cinco peças da unidade fracionária $\frac{1}{6}$;

(b) Sobrepomos a transparência de unidade fracionária $\frac{1}{4}$ e contamos três delas, ou seja $\frac{3}{4}$;

(c) Conferimos com as peças três peças de unidade fracionária $\frac{1}{4}$ justapostas sobre a transparência;

(d) Encontramos a transparência de unidade fracionária que corresponde à diferença observada, no caso, $\frac{1}{12}$.

Figura 1.5: Diferença entre $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{4}$ obtendo $\frac{1}{12}$.

Conferindo o resultado, utilizando o que foi apresentado e trabalhado até o momento:

(a) A fração $\frac{5}{6}$ é equivalente à fração $\frac{10}{12}$.

(b) A fração $\frac{3}{4}$ é equivalente à fração $\frac{9}{12}$.

(c) A diferença $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$.

Observe que o resultado obtido empiricamente apenas por sobreposição de peças e transparências retoma a sequência de procedimentos para obtenção da soma de duas frações, o que era esperado.

Resumidamente, para obter a soma de duas frações ou diferença entre elas, basta utilizar frações equivalentes a elas com mesma unidade fracionária e depois proceder à contagem das unidades fracionárias.

Atividade 21:
Compare as frações indicadas e encontre uma forma para expressar a diferença entre elas:

a) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{6}$ c) $\frac{5}{8}$ e $\frac{1}{4}$

Recomendações para o professor:
O trabalho com adição/subtração de frações, que em geral é resumido em fórmula: "achar o menor denominador comum, dividir o denominador comum pelo denominador de cada uma das fração envolvidas e multiplicar pelo numerador da correspondente fração, obtendo como resultado a fração cujo denominador é o menor denominador comum e o numerador é a soma/diferença dos/entre os resultados das multiplicações efetuadas", ou ainda: "dadas $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, *com* $b \times d \neq 0$ *e* a, b, c *e* $d \in N$, $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$, *onde* n *é o* $mmc(b,d)$ *e* $m = [(n \div b) \times a] \pm [(n \div d) \times c]$*", é realizado com significado para o aluno pela ação de obter frações equivalentes com mesmo denominador e finalizado com a contagem da soma/diferença entre os numeradores. Assim, a difícil tarefa de realizar adições e subtrações de frações por meio de fórmulas, por vezes desprovida de sentido, é substituída pela compreensão do uso de frações equivalentes e contagem, processos já trabalhados no contexto escolar ao introduzir as operações.*

Para finalizar a abordagem dos conteúdos explorados até o momento e verificar a aprendizagem dos alunos pode-se trabalhar com o jogo a seguir descrito:

1.4 Jogo com o Estojo de Frações

Com um Estojo de Frações e dois dados de seis faces, duas duplas confrontam-se e utilizam as seguintes regras:

1. Decide-se por algum critério pré-fixado a primeira dupla a jogar os dados.
2. A cada rodada a dupla retira uma peça do conjunto de peças do Estojo de Frações, ou faz uma troca por peças equivalentes a uma peça de seu conjunto.
3. Para saber qual a peça a ser retirada, a dupla da vez joga os dois dados, soma os resultados obtidos e retira do conjunto de peças de um Estojo de Frações aquela que representa a fração de numerador 1 e denominador igual à soma dos pontos obtidos nos dados. A jogada pode ser trocada pela substituição de

uma e apenas uma das peças que possui por peças cuja soma seja equivalente a ela.

4. Ganha o jogo a primeira dupla que conseguir montar um inteiro com suas peças.

Uma variação para definir o ganhador é atribuir pontos às duplas, ganhando a dupla que ao final de um número pré-fixado de rodadas tiver o maior número de pontos.

A pontuação sugerida é a seguinte:

Tabela 1.3: Tabela de pontuação das peças

Peça	Pontos
1 peça que representa $\frac{1}{2}$	6 pontos
1 peça que representa $\frac{1}{3}$	5 pontos
1 peça que representa $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$	4 pontos
1 peça que representa $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{7}$	3 pontos
1 peça que representa $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{9}$	2 pontos
1 peça que representa $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{11}$	1 ponto
1 peça que representa $\frac{1}{12}$	não pontua

Capítulo 2

Explorando a Multiplicação e Divisão com o Estojo de Frações

Abaixo apresentamos uma sequência de atividades utilizando o Estojo de Frações buscando-se ampliar o significado de multiplicação do conhecimento prévio da aritmética de números inteiros.

2.1 Multiplicação de Frações com o Estojo de Frações

2.1.1 Estudo da unidade fracionária na multiplicação de unidades fracionárias

Atividade 1:
Represente na moldura do Estojo de Frações o produto $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ e obtenha o resultado.

Orientações para realização da Atividade 1:

Recordar o significado de uma unidade fracionária em relação a um todo inteiro.

Passo 1: Lembramos que $\frac{1}{3}$ de um inteiro (por exemplo, representado pela moldura do estojo) é representado pela peça tal que 3 delas preencham a moldura do estojo, isto é, o denominador 3 indica em quantas partes iguais o 1 (inteiro) fica dividido, e o numerador 1 indica que consideramos 1 dessas 3 partes, uma peça. $\frac{2}{3}$ significa então 2 peças de $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{3}$ é uma unidade fracionária onde o numerador indica a contagem desta unidade.

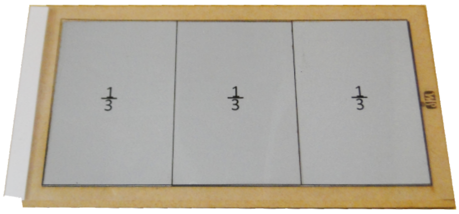

Figura 2.1: $\frac{1}{3}$ como terça parte de 1 (inteiro).

Passo 2: Podemos ainda representar o conceito de $\frac{1}{3}$ de outra maneira, usando o mesmo estojo. Usamos a transparência horizontal que cobre o mesmo inteiro (fundo do estojo), com 3 faixas de igual largura e comprimento. Isto é, 1 faixa horizontal (indicada como $\frac{1}{3}$) significa exatamente $\frac{1}{3}$, uma terça parte de 1, da mesma forma que interpretamos as faixas verticais do estojo, no capítulo anterior.

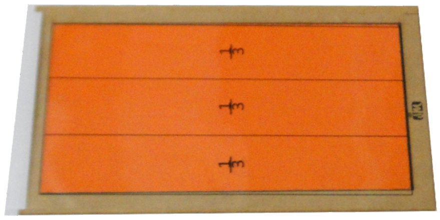

Figura 2.2: Uma faixa horizontal igualmente como $\frac{1}{3}$·

Passo 3: Colocar sobre a moldura do estojo cujo fundo inteiro (1) foi coberto com a transparência vertical de $\frac{1}{3}$, a transparência com faixas horizontais de $\frac{1}{3}$·. A moldura do estojo ficou dividida em $3 \times 3 (= 9)$ partes “iguais”, e o conceito de fração permite concluir que cada uma dessas partes significa $\frac{1}{9}$ do todo inteiro 1, que corresponde a $\frac{9}{9}$ nessa decomposição.

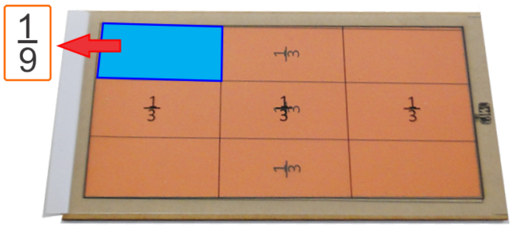

Figura 2.3: Uma unidade fracionária $\frac{1}{9}$.

Passo 4: Retirar o fundo inteiro (1), e colocar na moldura uma peça $\frac{1}{3}$. Cobrir com as transparências de $\frac{1}{3}$, primeiro com faixas verticais e, em seguida com faixas horizontais. A peça $\frac{1}{3}$ que foi colocada no estojo fica coberta por 3 unidades fracionárias $\frac{1}{9}$. Isso mostra que cada unidade fracionária $\frac{1}{9}$ é $\frac{1}{3}$ da peça. De fato: $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9}$ que é fração equivalente a $\frac{1}{3}$.

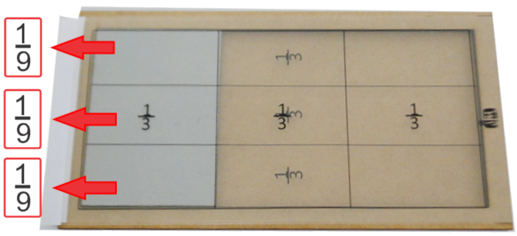

Figura 2.4: $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ é $\frac{1}{9}$.

Síntese: $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{(1+1+1)}{9}=\frac{3\times 1}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

Assim, $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ corresponde a $\frac{1}{3}\div 3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1\times 1}{3\times 3}$

$$\frac{produto\,de\,numeradores\,(contadores\,de\,unidades\,fracionárias\,na\,fração\,do\,todo)}{produto\,dos\,denominadores\,(total\,de\,unidades\,fracionárias\,do\,todo\,unidade)}$$

Recomendações para o professor:
Observe que uma faixa vertical $\frac{1}{3}$ não é figura geométrica congruente a uma faixa horizontal $\frac{1}{3}$. Isso pode estimular uma discussão sobre usar a mesma "representação simbólica" $\frac{1}{3}$.
Analogamente, uma discussão de mesma natureza pode ser feita com a representação da unidade fracionária $\frac{1}{9}$, como uma faixa vertical $\frac{1}{9}$ do Estojo e como um retângulo pequeno $\frac{1}{9}$ como nesta Atividade.

2.1.2 Multiplicação de um número inteiro por uma Fração

Atividade 2:
Represente na moldura do Estojo de Frações o produto $2 \times \frac{2}{5}$ e obtenha o resultado.

Orientações para realização da Atividade 2:

Passo 1: Na moldura do Estojo, colocar juntas 2 peças de $\frac{1}{5}$. Conferir com transparência de $\frac{1}{5}$ que as peças correspondem a $\frac{2}{5}$, e observar que $\frac{3}{5}$ correspondem ao resto que completaria o inteiro.

Passo 2: A multiplicação $2 \times \frac{2}{5}$, significa adição de dois grupos de duas peças de $\frac{1}{5}$, isto é, $\frac{2}{5} + \frac{2}{5}$. Colocamos então mais duas peças $\frac{1}{5}$ na moldura do estojo, e é fácil conferir que o resultado é a fração $\frac{4}{5}$. Isto é, 2×2 (unidades no numerador) $= 4$ unidades no numerador da fração de mesma natureza.

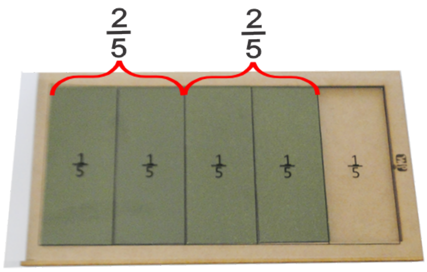

Figura 2.5: $2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$.

Síntese:
Na multiplicação de um número inteiro por fração, o resultado é dado pela fração com denominador da fração, e o numerador é o produto do fator inteiro pelo numerador da fração. A regra sintetizada na Atividade 1 se realiza também neste caso particular.

Sugestão de atividade: Apresente o resultado dos produtos abaixo.

a) $4 \times \dfrac{2}{3}$ b) $2 \times \dfrac{3}{7}$ c) $3 \times \dfrac{4}{6}$

2.1.3 Multiplicação de uma Fração por um número inteiro

Atividade 3:
Represente na moldura do Estojo de Frações o produto $\frac{3}{8} \times 3$ e obtenha o resultado.

Orientações para realização da Atividade 3:

Recomendações para o professor:
Observamos que, em princípio, não podemos usar diretamente o argumento de multiplicação de um inteiro por uma fração como adição de grupos de mesma quantidade de ***"unidades"****, que na atividade anterior estendeu o conceito de multiplicação da aritmética de números inteiros, porque, neste caso, não estamos contando um número inteiro de parcelas de uma adição. Estamos justamente a estudar os conceitos de operações com frações, recuperando significados de conceitos aprendidos anteriormente.*

Passo 1: No exemplo a trabalhar, temos uma fração $\frac{3}{8}$ que significa 3 unidades de fração unitária $\frac{1}{8}$· No estojo teríamos 3 peças de $\frac{1}{8}$· O segundo fator 3 significa 3×1, onde o inteiro 1 é representado pelo fundo da moldura, ou ainda por $\frac{8}{8}$ (8 peças $\frac{1}{8}$, considerando a unidade fracionária $\frac{1}{8}$).

Passo 2: Interpretar o número inteiro 3 como 3×1 (moldura completa) $=$ 3 molduras completas, e em cada moldura considerar 3 peças de $\frac{1}{8}$. Em seguida transferimos as peças $\frac{3}{8}$ da segunda e terceira molduras para o primeira moldura, como na Figura 2.6 e apresentado na Figura 2.7.

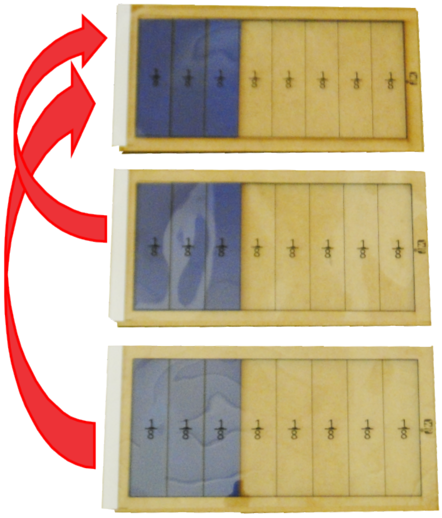

Figura 2.6: $\frac{3}{8} \times 3 = \frac{3}{8} \times (3 \times 1) = \frac{3}{8} \times (3 \times \frac{8}{8}) = \frac{3}{8} \times \left(\frac{3 \times 8}{8}\right) = \frac{3 \times (3 \times 8)}{8 \times 8} = \frac{(3 \times 3) \times 8}{8 \times 8} = \frac{3 \times 3}{8} = 3 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}$.

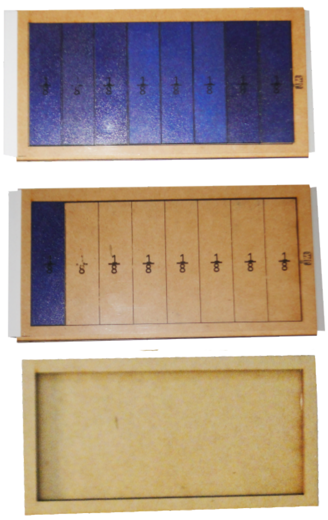

Figura 2.7: $\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} + \frac{1}{8} = 1\frac{1}{8}$.

Nesta abordagem, trabalhamos implícita e empiricamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Resultado: $\dfrac{3}{8} \times 3 = \dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{3 \times 3}{8}$.

Do resultado e da atividade com o estojo, vemos que as peças completam uma moldura $\frac{8}{8}$ e ainda sobra uma peça $\frac{1}{8}$, logo a representação mista $1\frac{1}{8}$ também é recuperada.

Recomendações para o professor:
A mesma regra de produto do numerador da fração por número inteiro e mesmo denominador da fração é verificada, o que pode ser expressa na síntese a seguir:

Síntese: $\frac{a}{b} \times p = \frac{(a \times p)}{b}$ *onde a, b e p são números inteiros e b é não nulo.*

2.1.4 Multiplicação de Fração por Fração, caso geral

Atividade 4:
Represente na moldura do Estojo de Frações o produto $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}$ e obtenha o resultado.

Orientações para realização da Atividade 4:

Vamos recuperar o que trabalhamos na Atividade 1.

Passo 1: Na moldura do estojo, colocamos 5 peças de $\frac{1}{6}$, e cobrimos com transparência de faixas verticais que confirmem a fração $\frac{5}{6}$.

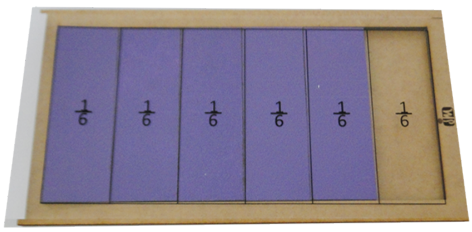

Figura 2.8: Representação de $\frac{5}{6}$.

Passo 2: Em seguida cobrir com transparência de faixas horizontais de $\frac{1}{3}$. Observar que o inteiro fica dividido em 18 retângulos iguais e identificar que $\frac{5}{6}$ é equivalente a $\frac{15}{18}$ pela contagem dos retângulos nas peças. Logo, estamos trabalhando com unidade fracionária $\frac{1}{18} = \frac{1}{3 \times 6}$ onde o denominador é o produto dos denominadores dos fatores.

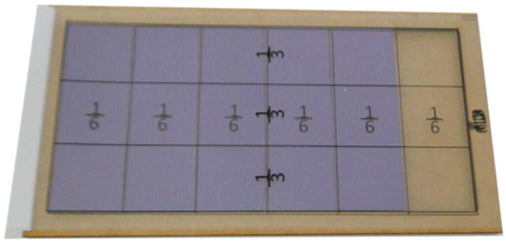

Figura 2.9: $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$.

Passo 3: Identificar, sobre a peça, a terça parte da fração $\frac{5}{6}$ como uma faixa horizontal com 5 retângulos, conforme a figura abaixo:

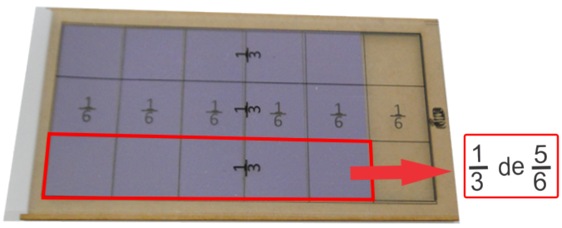

Figura 2.10: $\frac{1}{3}$ **de** $\frac{5}{6}$.

Passo 4: Identificar que $\frac{2}{3}$ de $(\frac{5}{6})$ é contar 2 partes iguais de $\frac{1}{3}$ **de** $(\frac{5}{6})$, as 2 faixas horizontais de igual tamanho da peça $\frac{5}{6}$.

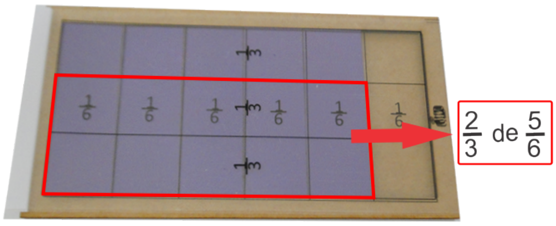

Figura 2.11: $\frac{2}{3}$ **de** $\frac{5}{6}$.

Passo 5: Contar as unidades fracionárias de $\frac{2}{3}$ **de** $\frac{5}{6}$ como $2 \times 5 = 10$ unidades $\frac{1}{18}$.

*Resultado: A fração $\frac{2}{3}$ **da fração** $\frac{5}{6}$ é obtida pela multiplicação:*

$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 6} = \frac{produto\,de\,numeradores}{produto\,de\,denominadores}$.

Síntese: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}; b,\ d \neq 0.$

Atividade 5:
Usando a configuração com a unidade fracionária $\frac{1}{18}$, como podemos mostrar que $\frac{10}{18}$ é equivalente a $\frac{5}{9}$? Utilize as transparências para confirmar.

Recomendações para o professor:
A multiplicação de frações amplia o significado da notação fracionária para o caso de parte de um todo que pode ser também uma fração de um inteiro, ou de vários inteiros, e ainda estendendo propriedades aritméticas de adição e multiplicação aprendidas no campo dos inteiros, como associatividade, comutatividade, distributiva em relação a adição e, claro o inteiro 1 como elemento neutro.

Síntese: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}; b,\ d \neq 0.$

2.2 Divisão de Frações com o Estojo de Frações

A sequência de atividades abaixo permite explorar o significado da divisão envolvendo frações utilizando o Estojo de Frações.

2.2.1 Fração como representação de uma divisão entre dois números inteiros

Atividade 6:
Utilizando dois estojos obtenha a divisão de 2 por 7.

Orientações para realização da Atividade 6:

Recomendações para o professor:
Recordamos que, na aritmética de inteiros, estudamos a divisão de dois inteiros, por exemplo, $8 \div 2$ por meio de uma ideia de ***"repartir"*** *um conjunto de 8 unidades em 2 partes iguais e contar quantas unidades tem cada parte. No caso, teremos como resposta 4 unidades em cada parte, tal que somadas totalizam a quantidade inicial 8. Esta ideia traz a divisão como uma operação inversa da multiplicação $2 \times 4 = 8 = 4+4$ (2 parcelas iguais a 4). Dentre as ideias centrais da operação de divisão de números inteiros, essa que acabamos de recordar ajuda a associá-la ao conceito de fração.*

Para os passos a seguir, vamos usar dois estojos, por isso é adequado trabalhar em duplas.

Passo 1: Recordamos que $\frac{2}{7}$ é o resultado de $\frac{1}{7} + \frac{1}{7}$, isto é adição de 2 unidades fracionárias $\frac{1}{7}$. Tomemos **duas** molduras e em cada uma delas coloquemos **uma** peça $\frac{1}{7}$.

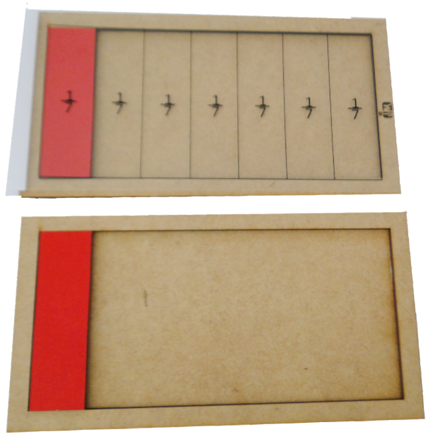

Figura 2.12: Duas molduras com $\frac{1}{7}$ em cada um delas.

Passo 2: Levamos a peça $\frac{1}{7}$ da segunda moldura para junto da peça $\frac{1}{7}$ na primeira moldura, obtendo $\frac{2}{7}$.

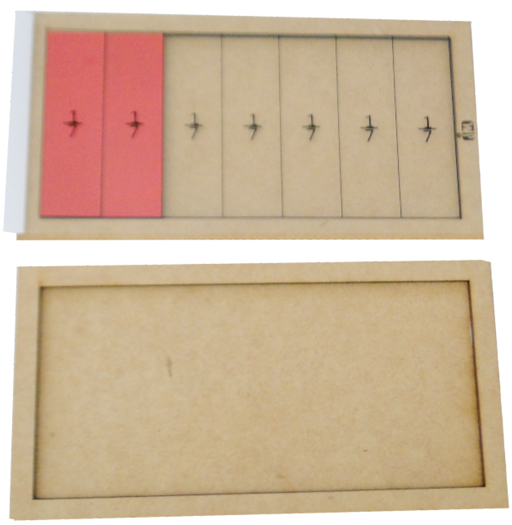

Figura 2.13: $\frac{2}{7}$.

Passo 3: Tomemos 6 grupos de 2 peças $\frac{1}{7}$ cada e vamos adicionando um grupo de cada vez na moldura dos estojos, começando na primeira.

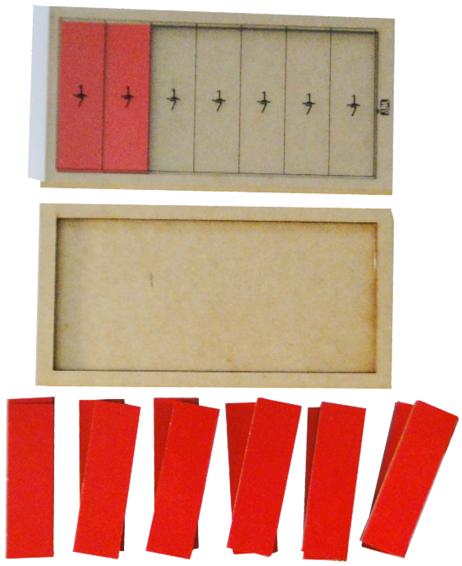

Figura 2.14: 7 grupos de $\frac{2}{7}$.

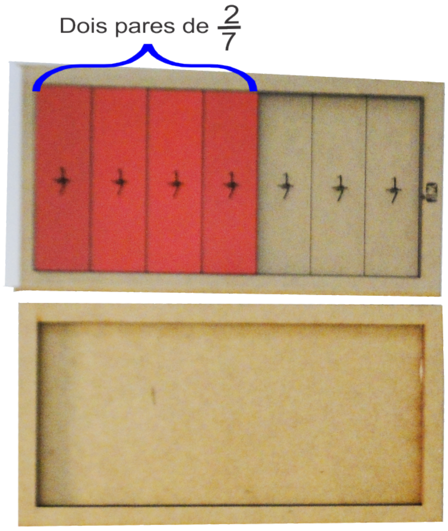

Figura 2.15: $\frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$.

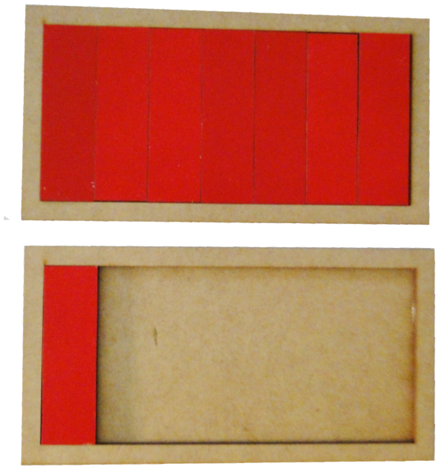

Figura 2.16: $\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{7}{7}+\frac{1}{7}=1+\frac{1}{7}=4\times\frac{2}{7}\cdot$

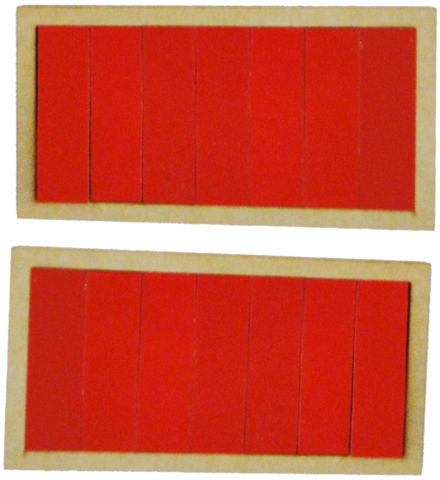

Figura 2.17: $7\times\frac{2}{7}=\frac{14}{7}=2\cdot$

Resultado: A atividade comprova que juntando 7 grupos de $\frac{2}{7}$, completamos 2 inteiros, isto é, $\frac{2}{7}$ é sétima parte de 2, o que denotamos $7\times\frac{2}{7}=2$, ou, equivalentemente, $2\div 7=\frac{2}{7}\cdot$

Atividade 7:
Como podemos proceder para representar com o Estojo a fração $\frac{3}{5}$ como $3 \div 5$? E $\frac{8}{5}$, como $8 \div 5$?

Uma atividade manipulativa com peças do Estojo para 8 dividido por 5, não é imediata e envolve cuidadoso resgate dos conceitos trabalhados até o momento.

Na primeira situação, a interpretação de fração é essencial em problemas contextualizados que necessitam da interpretação de divisão entre inteiros para resolver. Na segunda, podemos estender a compreensão da divisão com resto (no caso, temos o resto $3 < 5$).

$8 \div 5 = \dfrac{8}{5} = \dfrac{5}{5} + \dfrac{3}{5} = 1\dfrac{3}{5}$, agregando significado ao resto (resto < divisor) de uma divisão como fração, assim expandindo a aritmética de inteiros ao conjunto de números fracionários.

2.2.2 Divisão de um número inteiro por Fração, recuperando a ideia de divisão como medida de capacidade

Atividade 8:
Utilizando o Estojo de Frações obtenha o resultado de $1 \div \frac{1}{6}$

Orientações para realização da Atividade 8:

Recomendações para o professor:
Utilizando como exemplo $(8 \div 2)$, recordamos da aritmética que a operação de divisão é estudada também no contexto de medida de capacidade, no sentido de ***"quantificar o número de vezes em que o divisor 2 cabe no dividendo 8"****, usada em problemas do tipo: "Se tenho 8 cadernos e desejo distribuir 2 cadernos para cada criança, quantas crianças receberão os cadernos?". A resposta 4 (crianças) da operação $8 \div 2$, significa que $4 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$. Dentro da linguagem da matemática, dizemos que vale a propriedade comutativa da multiplicação de inteiros, $4 \times 2 = 2 \times 4 = 8$, mas a sutil interpretação do contexto nas aplicações requer trabalho de classe e do professor.*

Passo 1: $\frac{1}{6}$ é sexta parte do todo inteiro (fundo da moldura do estojo).

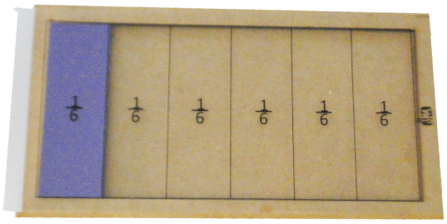

Figura 2.18: Figura do estojo com a peça de $\frac{1}{6}$ e transparência

Quantas peças $\frac{1}{6}$ é possível colocar na moldura do estojo? **É imediata a resposta 6.**

De fato, se dividimos a unidade 1 em **6** partes para obter $\frac{1}{6}$, temos $\mathbf{6} \times \frac{1}{6} = 1$, e logo, $1 \div \frac{1}{6} = \mathbf{6}\cdot$

O aparecimento do denominador da fração, que é divisor, como o numerador da resposta é imediato.

Vamos aplicar esse resultado no caso mais geral.

Atividade 9:
Utilizando o Estojo de Frações obtenha o resultado de $3 \div \frac{2}{5}$

Orientações para realização da Atividade 9:

Passo 1: O dividendo 3 significa 3 inteiros, isto é, podemos tomar 3 molduras dos estojos para estudar a divisão de 3 por $\frac{2}{5}\cdot$ Tome 3 molduras, cada uma delas é preenchida como $\frac{5}{5}$ quando usamos a unidade fracionária $\frac{1}{5}\cdot$ Ao todo, temos $\frac{15}{5}$ como 3 inteiros.

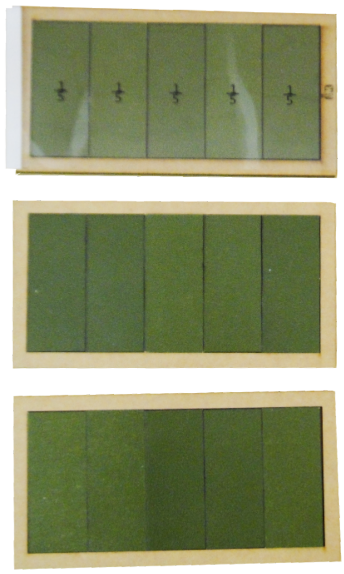

Figura 2.19: 3 inteiros como $\frac{15}{5}$

Passo 2: Como $\frac{2}{5}$ corresponde a 2 peças de $\frac{1}{5}$, retirar da primeira moldura 2 peças e colocá-las juntas fora da moldura.

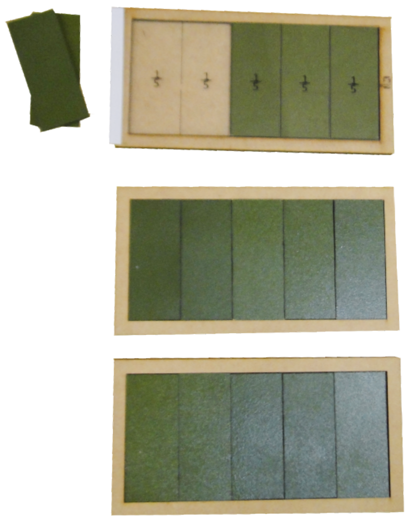

Figura 2.20: $\frac{15}{5} - \frac{2}{5} = \frac{13}{5}$.

Passo 3: De duas em duas, ir retirando as peças $\frac{1}{5}$ das molduras, colocando-as agrupadas a cada vez, fora.

Figura 2.21: 15 (peças) divididas em grupos de 2 (peças) resultou 7 grupos e sobrou uma peça $\frac{1}{5}$, que é metade do grupo de 2.

Resultado: $3 \div \frac{2}{5} = \frac{15}{5} \div \frac{2}{5} = 15 \div 2 = \frac{15}{2} = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{3 \times denominador}{numerador}$

Recomendações para o professor:

Obter a fração equivalente ao primeiro fator que é um inteiro, usando a unidade fracionária do segundo fator, implica o produto pelo inverso do segundo fator, como consequência do que aprendemos no exemplo anterior. As subtrações sucessivas de grupos de 2, a partir do total de 15 peças, para calcular quantas vezes 2 cabe em 15, resgata o conceito de divisão de números inteiros do ensino fundamental, presente no algoritmo de divisão por meio de subtrações sucessivas. Em outras palavras, usando a unidade fracionária como unidade de medida na contagem, resgatamos o conceito de divisão nesse contexto e explicamos a regra de multiplicar pelo inverso da fração.

2.2.3 Divisão de uma Fração por um número inteiro

Atividade 10:
Utilizando o Estojo de Frações, obtenha o resultado de $\frac{4}{7} \div 3$

Orientações para realização da Atividade 10:

Passo 1: Tome um Estojo e coloque na moldura 4 peças $\frac{1}{7}$, cubra com a transparência de $\frac{1}{7}$ para confirmar, em seguida, cubra com a transparência de faixas horizontais de $\frac{1}{3}$·

Figura 2.22: Moldura com $\frac{4}{7}$ e transparências de $\frac{1}{7}$ vertical e $\frac{1}{3}$ horizontal.

Passo 2: O inteiro representado pela fundo da moldura fica dividido em 21 retângulos $(7 \times 3 = 21)$ que representam a unidade fracionária $\frac{1}{21}$· As peças $\frac{4}{7}$ ficam cobertas por 12 retângulos. A terça parte de $\frac{4}{7}$ é então $\frac{4}{7} \div 3 = \frac{1}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{3 \times 7} = \frac{4}{21}$, cujo numerador corresponde a 12 (unidades de $\frac{1}{21}$) $\div 3 = 4$ $(unidades\, de\ \frac{1}{21})$, dentro de um todo que foi dividido em 21 unidades de $\frac{1}{21}$·

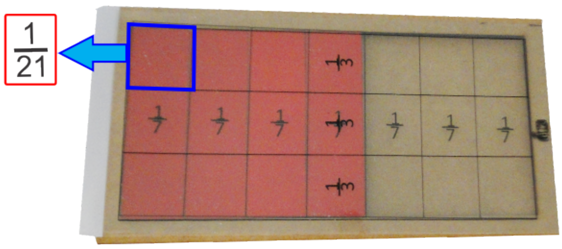

Figura 2.23: $\frac{1}{21}$ do estojo.

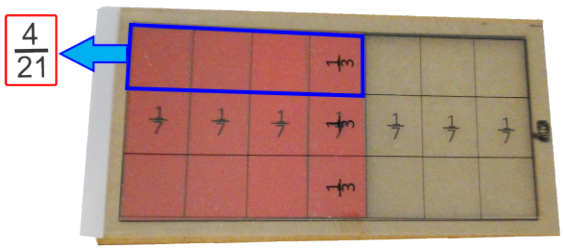

Figura 2.24: $\frac{4}{21}$ do estojo.

Recomendações para o professor:
Os conceitos iniciais de fração estão mantidos, e vale a regra do produto do primeiro fator pelo inverso do segundo.

2.2.4 Divisão de Fração por Fração

Atividade 11:
Utilizando o Estojo de Frações obtenha o resultado de $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$.

Orientações para realização da Atividade 11:

Passo 1: Na moldura, colocar $\frac{2}{3}$, conferido com a transparência de $\frac{1}{3}$.

Passo 2: Sobrepor a transparência horizontal de $\frac{1}{5}$. Confirmar que $\frac{2}{3}$ equivale a 10 unidades fracionárias de $\frac{1}{15}$ (retângulos em que o inteiro representado na moldura fica dividido).

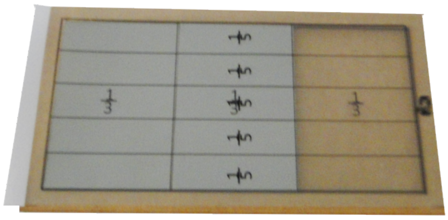

Figura 2.25: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$

Passo 3: Tomar outro Estojo e colocar na moldura $\frac{4}{5}$ conferido com transparência de $\frac{1}{5}$.

Passo 4: Colocar a transparência horizontal de $\frac{1}{3}$ sobre o inteiro representado na moldura e confirmar que $\frac{4}{5}$ equivale a 12 unidades fracionárias $\frac{1}{15}$ (retângulos em que o inteiro representado na moldura fica dividido).

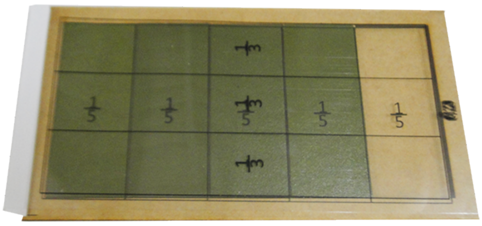

Figura 2.26: $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$

Passo 5: Observar e concluir que a divisão $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{10}{15} \div \frac{12}{15}$, significa uma divisão entre 10 e 12 contados em mesma unidade. Logo é igual a $\frac{10}{12} = \frac{2\times 5}{3\times 4} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$.

Recomendações para o professor:

A divisão de uma fração por outra fração é equivalente ao produto da primeira pela fração inversa da segunda. O princípio de trabalhar com frações equivalentes reduzindo a operações entre frações de mesmo denominador (unidade fracionária) permite retomar os conceitos da aritmética com os numeradores correspondentes.

Capítulo 3

Problemas Exploratórios

Abaixo apresentamos sugestões de problemas contextualizados com aplicações do conceito de fração em excertos da Obmep, Avaliações Externas e outros:

1. Um paciente necessita tomar 3 comprimidos de um certo remédio por dia. Sabendo-se que cada frasco do remédio contém 45 comprimidos, responda:
   (a) Se tomar 7 dias seguidos, qual é a fração das comprimidos de um vidro que será tomada?
   (b) Um frasco de remédio será suficiente para ser tomado por quinze dias?

2. A mãe de Roberto fez um bolo e cortou-o em 8 pedaços iguais. Roberto e seus dois irmãos comeram um pedaço cada. Que fração do bolo foi comida? Se apenas Roberto e um de seus irmãos comessem um pedaço cada, no café da manhã, no lanche da tarde e depois do jantar, que fração do bolo sobraria?

3. Alberto, Beatriz, Carlos, Dulce e Eduardo ainda dormiam quando sua mãe saiu e deixou uma vasilha com jabuticabas e a instrução para que fossem divididas igualmente entre eles. Alberto acordou primeiro, pegou $\frac{1}{5}$ das jabuticabas e saiu. Beatriz acordou depois, sem perceber que Alberto já saíra, pegou $\frac{1}{5}$ das jabuticabas restantes e também saiu. Os outros três irmãos acordaram juntos, perceberam que Alberto e Beatriz já haviam saído e dividiram as jabuticabas restantes igualmente entre eles.
   (a) Que fração do total de jabuticabas coube a Beatriz?
   (b) Quem ficou com a menor quantidade de jabuticabas? Quem ficou com a maior quantidade de jabuticabas?
   (c) Ao final da divisão, nenhum dos irmãos ficou com mais do que 20 jabuticabas. Quantas jabuticabas havia na vasilha?

4. O pai de Alberto comprou uma lavadora de roupas que custa R$ 750,00, para ser paga em 6 prestações mensais iguais. Ele registrou o valor da dívida como um número negativo -750 (reais) na planilha de orçamento da família. Responda:

(a) Que fração da dívida representa cada prestação?

(b) Qual é a fração que representa a dívida das 4 primeiras prestações?

(c) Que fração da dívida resta a ser paga após serem pagas as 4 primeiras prestações?

(d) Quanto falta a ser pago depois de serem pagas as 4 primeiras prestações?

5. Maria ganhou $\frac{3}{4}$ de uma pizza. Ela cortou em pedaços de modo que cada pedaço fosse $\frac{3}{8}$ da pizza. Em quantos pedaços ela cortou? Desenhe uma pizza de formato circular e ilustre o problema.

6. Diana comprou uma lata de óleo de cozinha com 2 litros. Ela gasta $\frac{1}{12}$ de litro por dia. Quantos dias durará a lata de óleo?

7. Todos os meses, Laura gasta $\frac{1}{3}$ do seu salário, deposita $\frac{3}{8}$ do restante na caderneta de poupança, e ela reparte o resto do salário igualmente entre sua mãe, e seus dois irmãos. Que fração do salário da Laura recebe cada um deles? Se o salário da Laura for R$ 2700,00, quanto a mãe de Laura recebe em um mês?

8. Sérgio usou $\frac{2}{3}$ de seu terreno para plantar tomates e ainda outro $\frac{1}{9}$ do terreno para plantar alface. O resto do terreno foi dividido em pequenos canteiros, cada qual sendo $\frac{1}{18}$ do seu terreno. Quantos canteiros resultaram? Se o terreno dele mede $72m^2$, quanto mede a área de cada canteiro?

Referências Bibliográficas

[1] Repositório Institucional UFSCar <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/4472> Acesso em 26 de Outubro de 2017.

[2] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Caderno do Professor. Matemática, Ensino Fundamental, São Paulo: SEE, 2012.

[3] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação; São Paulo– 1. ed. atual. 72pp.

[4] ISODA, M., OLFOS, R. *El Enfoque de Resolución de Problemas: en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso, 2009.

[5] ISODA, M.; MENA, A. & ARCAVI, A., eds. *El Estudio de Clases*. Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso, 2007.

[6] J.M. Assessoria Pedagógica Ltda <http://www.jmpedagogica.com.br/produtos/estojo-de-fracoes.html> Acesso em 26 de Outubro de 2017.

[7] KHEONG, F. H. et al. *My Pals are Here!*, Singapore: Marshall Cavendish International, 2009.

[8] Portal da Obmep <http://www.obmep.org.br/provas.htm> Acesso em 31 de Outubro de 2017.

[9] SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Escola de Tempo Integral. Oficina de Experiências Matemáticas Ciclos I e II. São Paulo: 2008.

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Medio Vol. 4 - Exercicios e Soluções* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Um Convite à Matemática* - D.C de Morais Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 1 - Números Reais - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 3 - Introdução à Análise - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 4 - Combinatória - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 5 - Teoria dos Números - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 6 - Polinômios - A. Caminha
- *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)
- *Como Resolver Problemas Matemáticos* - T. Tao
- *Geometria em Sala de Aula* - A. C. P. Hellmeister (Comitê Editorial da RPM)
- *Números Primos, amigos que causam problemas* - P. Ribenboim
- *Introdução à Teoria dos Conjuntos* - G. P. Novaes
- *Manual de Redação Matemática* - D. C. de Morais Filho
- *Introdução à Teoria dos Conjuntos* - G. Pires Novaes

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

(continuação dos títulos publicados)

COLEÇÃO PROFMAT

- *Introdução à Álgebra Linear* - A. Hefez e C.S. Fernandez
- *Tópicos de Teoria dos Números* - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha
- *Polinômios e Equações Algébricas* - A. Hefez e M.L. Villela
- *Tópicos de Historia de Matemática* - T. Roque e J. Bosco Pitombeira
- *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática* - V. Giraldo, P. Caetano e F. Mattos
- *Temas e Problemas Elementares* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Números e Funções Reais* - E. L. Lima
- *Aritmética* - A. Hefez
- *Geometria* - A. Caminha
- *Avaliação Educacional* - M. Rabelo
- *Geometria Analítica* - J. Delgado, K. Frensel e L. Crissaff
- *Matemática Discreta* - A. Morgado e P. C. P. Carvalho
- *Matemática e Atualidade - Volume 1* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Fundamentos de Cálculo* - A. C. Muniz Neto
- *Matemática e Atualidade - Volume 2* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear* - A. Hefez e C. de Souza Fernandez
- *Exercícios Resolvidos de Aritmética* - A. Hefez

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D. G. de Figueiredo
- *Números Racionais e Irracionais* - I. Niven
- *Tópicos Especiais em Álgebra* - J. F. S. Andrade

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L. N. de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M. P. do Carmo
- *Matemática Discreta* - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- *Álgebra Linear: Um segundo Curso* - H. P. Bueno
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa* - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.
- *Elementos de Topologia Geral* - E. L. Lima
- *A Construção dos Números* - J. Ferreira
- *Introdução à Geometria Projetiva* - A. Barros e P. Andrade
- *Análise Vetorial Clássica* - F. Acker
- *Funções, Limites e Continuidade* - P. Ribenboim
- *Fundamentos de Análise Funcional* - G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira
- *Teoria dos Números Transcendentes* - D. Marques
- *Introdução à Geometria Hiperbólica - O modelo de Poincaré* - P. Andrade

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

(continuação dos títulos publicados)

- *Álgebra Linear: Teoria e Aplicações* - T. P. de Araújo
- *Introdução à Análise Matemática na Reta* - C. I. Doering
- *Topologia e Análise no Espaço Rn* - R. Freire de Lima
- *Equações Ordinárias e Aplicações* - B. Scárdua
- *Cálculo Avançado* - R. Cipolatti
- *Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e superficies* - A. Lymberopoulos e I. Terek Couto

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H. Bolfarine e M. Sandoval
- *Discretização de Equações Diferenciais Parciais* - J. Cuminato e M. Meneguette
- *Fenômenos de Transferência – com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia volume 1: Fundamentos* - J. Pontes e N. Mangiavacchi

COLEÇÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª* - E. Mega e R. Watanabe
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª* - C. Moreira e E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues
- *21 Aulas de Matemática Olímpica* - C. Y. Sh
- *Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções* - K. I. M. Oliveira e A. J. C. Fernández
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Fundamental* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Médio* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 17ª a 24ª* - C. G. T. de A. Moreira, C. Y. Shine, E. L. R. Motta, E. Tengan e N. C. Saldanha
- *10 matemáticos 100 problemas* - E. Wagner (Organização)

COLEÇÃO FRONTEIRAS DA MATEMÁTICA

- *Fundamentos da Teoria Ergódica* - M.Viana e K. Oliveira
- *Tópicos de Geometria Diferencial* - A. C. Muniz Neto
- *Formas Diferenciais e Aplicações* - M. Perdigão do Carmo
- *Topologia das Variedades* - W. de Melo

COLEÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume I Números Naturais* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo
- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume II Números Inteiros* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo

COLEÇÃO COLETÂNEAS DE MATEMÁTICA

- *Teorema Vivo* - C. Villani

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

ISBN 978-85-8337-143-4