III SIMPÓSIO NACIONAL DA
FORMAÇÃO DO PROFESSOR
DE MATEMÁTICA

GEOGEBRA: MODELANDO FUNÇÕES RELACIONADAS A PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DA OBMEP

Aline Guedes
Leandro Machado

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

GEOGEBRA:
MODELANDO FUNÇÕES RELACIONADAS A PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DA OBMEP

Geogebra: Modelando funções relacionadas a problemas geométricos da Obmep

Capa: Pablo Diego Regino
Projeto gráfico: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

ISBN: 978-85-8337-144-1

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

III SIMPÓSIO NACIONAL DA
FORMAÇÃO DO PROFESSOR
DE MATEMÁTICA

GEOGEBRA: MODELANDO FUNÇÕES RELACIONADAS A PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DA OBMEP

Aline Guedes
Leandro Machado

1ª edição
2018
Rio de Janeiro

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Dedicado a todos os apreciadores da Matemática.

Sumário

Prefácio

Este material constitui o texto base e as atividades desenvolvidas no minicurso *GeoGebra: Modelando funções relacionadas a problemas geométricos da Obmep*, ministrado no III Simpósio Nacional de Formação do Professor de Matemática, realizado no Rio de Janeiro. Esse minicurso foi composto por 2 aulas com duração de duas horas cada uma, distribuídas no período de 17 a 19 de novembro de 2017. Iniciamos com um breve histórico acerca da Obmep e o desenvolvimento de programas de aperfeiçoamento de alunos e professores que derivaram do seu sucesso. Posteriormente, fizemos um recorte do tema Geometria e Funções, de modo a utilizar o GeoGebra como dinamizador do estudo. No início do estudo, apresentamos dois exemplos e discutimos algumas possibilidades distintas de aproveitamento das construções em sala de aula na Educação Básica. Em seguida, estimulamos a construção dos modelos para outros problemas da Obmep com a mesma temática. Ao final, foi feita uma discussão acerca das atividades apresentadas e das possibilidades de exploração dos diversos recursos tecnológicos no Ensino Básico.

Agradecimentos

Agradecemos a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização do III Simpósio Nacional de Formação do Professor de Matemática.

Capítulo 1

Introdução

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - Obmep - é realizada desde 2005 pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa), em parceria com a Sociedade Brasileira de Matemática, e conta com apoio de órgãos federais de fomento à educação e pesquisa como a Capes e o CNPQ [1].

Ao longo destes 10 anos de existência, seu sucesso pode ser comprovado por números extremamente relevantes, como a presença em 99,57% dos municípios brasileiros e os mais de 18 milhões de estudantes inscritos para a edição de 2017[1] que, a partir desse ano, também passou a aceitar alunos da rede privada de ensino. Vale ressaltar também que outras ações surgiram em decorrência desse sucesso, como o Programa de Iniciação Científica Jr. (Pic) e o Programa de Iniciação Científica - Mestrado (Picme), a Preparação Especial para Competições Internacionais (Peci), os Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (Poti), o Portal da Matemática, os programas Clubes de Matemática, e Obmep na Escola e mesmo o Profmat, programa de mestrado destinado ao aperfeiçoamento dos professores de Matemática [1].

Com tais relevância e profundidade dentro do Ensino Público, é natural que a Obmep venha se tornar objeto de estudo [4]. Nesse sentido, entendemos ser importante para todo professor de Matemática que atua na Educação Básica conhecer mais de perto a Obmep e os objetivos propostos por ela. Desta forma, uma questão que se apresenta e que buscaremos responder neste trabalho é: *de que forma, ao nos apropriarmos de alguns conceitos-chave presentes na Obmep, podemos melhorar o ensino-aprendizagem de Matemática na Educação Básica?*

Para nossa proposta de Minicurso no III SIMPÓSIO NACIONAL DE FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, recortamos um tipo de problema recorrente nas edições da Obmep, tanto em suas primeiras fases (questões objetivas) quanto nas segundas (questões dissertativas): problemas de natureza geomé-

[1] Números obtidos na página oficial da Obmep, http://www.obmep.org.br.

trica onde existe um comportamento funcional entre dois determinados parâmetros. O exemplo é dado pela Figura 1.1.

Exemplo 1. Qual dos gráficos abaixo descreve a variação da área do polígono BCDP em função da distância x=AP?

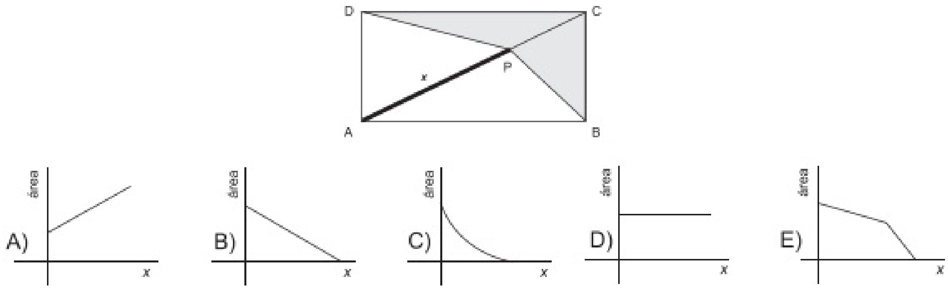


Figura 1.1: Obmep 2007, 1ª Fase, Nível 3, Questão 18

A escolha desse tipo de problema nos é relevante devido a alguns fatores-chave: a área Geometria, historicamente, é a que traz maior dificuldade aos estudantes do Ensino Básico; o tema Funções é o objeto de estudo em foco durante todo o Ensino Médio [3] e a própria especificidade desse tipo de problema permite-nos fazer uma abordagem computacional, através de um *software* como o GeoGebra, integrando o aproveitamento de tecnologias digitais ao Ensino da Matemática. Cabe ressaltar que a importância da utilização de recursos tecnológicos na Educação Básica, e em particular no Ensino de Matemática, é bastante estimulada pelo Parâmetros Curriculares Nacionais [5], bem como possui papel de destaque em pesquisas científicas da literatura acadêmica [2].

1.1 Objetivos

O objetivo geral desta proposta de Minicurso é discutir, junto aos envolvidos com a Educação Básica – alunos e professores – e com a utilização do *software* GeoGebra, a análise de problemas de natureza geométrica da Obmep, nos quais existe um comportamento funcional entre dois determinados parâmetros. Para isso, listamos os seguintes objetivos específicos:

- Apresentação de diversos problemas da Obmep que satisfazem a especificidade descrita anteriormente;

- Reflexões acerca de diferentes possibilidades de construção dos modelos no GeoGebra;
- Discussões acerca do aproveitamento de tecnologias digitais no Ensino de Matemática, em especial na Educação Básica.

1.2 Metodologia do Minicurso

Nossa proposta de Minicurso está estruturada para duas sessões de duas horas cada. Na primeira sessão, apresentaremos o problema motivacional e a construção do modelo no GeoGebra, com a solução já plotada na tela. Discutiremos o passo a passo da construção apresentada e outras possibilidades, conforme a conveniência da abordagem. Ainda, refletiremos acerca de uma estratégia de resolução teórica do exemplo, a partir de características observadas com o auxílio do modelo construído no *software*. Para finalizar esta sessão, faremos uma construção, do início, de um segundo problema-exemplo.

Na segunda sessão, os professores serão encorajados a construírem, eles próprios, os modelos referentes a outros problemas. Ao final, espera-se que também discutamos as soluções teóricas desses problemas e as possibilidades de exploração desse recurso nas salas de aula (por exemplo, a criação de *applets*).

O grupo de trabalho será composto pelos professores Aline Guedes (Doutora em Modelagem Computacional e professora-adjunta do IME-Uerj) e Leandro Machado (Mestre em Matemática e professor-assistente do CAp-Uerj), além dos professores inscritos no Minicurso.

Os materiais necessários são: laboratório de informática com projetor e quadro-branco. Caso não seja possível disponibilizar o laboratório, os participantes poderão levar seus próprios *notebooks* (preferenciais aos *tablets*).

Capítulo 2

Metodologia

A metodologia elaborada para o Minicurso está estruturada em quatro etapas: análise do problema inicial, resolução do segundo exemplo, construções propostas e discussões acerca do aproveitamento do recurso nas aulas de Matemática na Educação Básica.

2.1 Análise do Problema Inicial

O problema inicial escolhido é o problema ilustrado pela Figura 1.1, na seção anterior (Questão 18 da Primeira Fase da Obmep 2007). A escolha se deve por ser um problema de fácil reprodução no GeoGebra, de forma que mesmo os professores que não conheçam o *software* possam acompanhar as discussões.
Apresentaremos o modelo construído no GeoGebra, com duas janelas de visualização: à esquerda, a construção geométrica do problema, e à direita, o gráfico traçado pelo *software* com a resposta ao problema. O objetivo é fazer os professores despertarem para as possibilidades do *software*. A Figura 2.1 ilustra esta primeira solução:

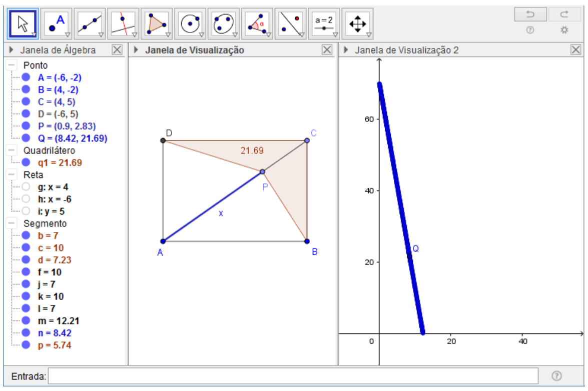


Figura 2.1: Problema inicial, Primeira Solução

O ponto Q(x,y), construído na Janela de Visualização 2, tem como coordenadas a distância x = AP e a área y do polígono BCDP. Desta forma, quando o ponto P é animado na Janela de Visualização 1 (sobre o segmento AC), o ponto Q descreve uma trajetória retilínea na Janela 2, que é a solução do problema. Esperamos que, ao visualizar essa solução, os professores participantes do Minicurso fiquem curiosos em relação à construção, especialmente sobre a parte vista na Janela de Visualização 2. Pretendemos, assim, obter a atenção dos cursistas para os processos que vêm a seguir.

O processo seguinte seria a reprodução da construção. Sendo um modelo bem simples, esperamos que todos os participantes possam seguir o passo a passo sem maiores problemas. Elaboraremos um breve roteiro com a construção e faremos com eles simultaneamente, projetando a construção no quadro-branco da sala de aula.

Em termos gerais, o **passo a passo** desta construção segue a seguir:

1. Construir o retângulo ABCD de acordo com o princípio da propriedade mantida (o retângulo não pode colapsar ao movimentarmos um de seus vértices);

2. Traçar a diagonal AC e plotar o ponto P sobre esta diagonal;

3. Construir o segmento AP e o polígono BCDP. Exibir suas medidas na tela;

4. Na Janela de Visualização 2, construir um ponto Q(x,y) de coordenadas (medida de AP, medida de BCDP) e habilitar o rastro do ponto Q;

5. Animar o ponto P e verificar o deslocamento do ponto Q, causado pelas alterações nas medidas dos segmentos AP e do polígono BCDP.

Feita a construção e, de posse da solução, proporemos um breve debate sobre tópicos-chave, que nos permitirão chegar a uma solução teórica para o problema. Alguns pontos serão descritos a seguir:

- Sem a Janela 2, mas observando o que acontece na Janela 1 é possível descobrir a linearidade no decrescimento da área do polígono BCDP?

- Em caso negativo, é possível refinar a construção de forma a ter uma melhor percepção desta linearidade?

- Que caminhos podem ser tomados para nos auxiliar na procura por uma solução teórica?

- Experimentem construir os triângulos BCP e DCP e verifiquem o que eles têm em comum;

- Construa as alturas dos triângulos BCP e DCP em relação à base CP. O que elas têm em comum?

- A partir do que foi visto anteriormente, tentem exprimir uma solução teórica para o problema.

A Figura 2.2 ilustra a solução teórica que apresentaremos a seguir:

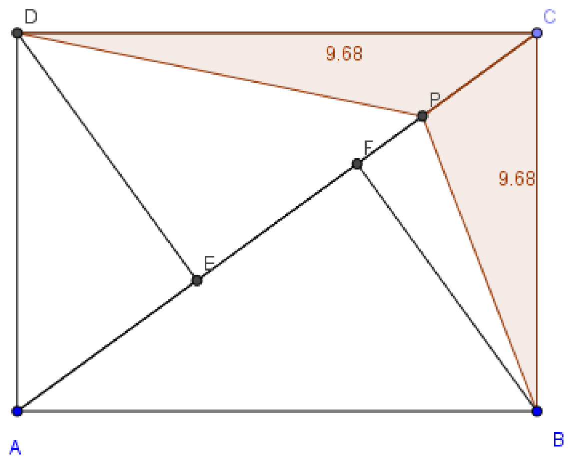


Figura 2.2: Explorando o GeoGebra em busca de uma solução teórica

A partir dessa figura, podemos fazer algumas afirmações teóricas.

- Notamos, com o auxílio do programa, que os triângulos BCP e DCP são equivalentes;
- Tomando como base o segmento comum aos dois triângulos, temos que as respectivas alturas BF e DE são congruentes;
- Justifica-se essa congruência pelo fato de esses segmentos serem alturas homólogas de triângulos congruentes, a saber, BAC e DAC;
- Assim, as áreas dos triângulos BCP e DCP variam linearmente, em função da variação da base CP;
- Como a função é, naturalmente, decrescente, a resposta desejada é o item B.

2.2 O Segundo Exemplo

Para o segundo exemplo, procuramos um problema mais recente, selecionando a questão 11 da primeira fase da Obmep 2016 ilustrado pela Figura 2.3.

Exemplo 2. Os quadrados da figura têm lados paralelos e o mesmo centro. O quadrado maior tem lado 10 e o menor tem lado x. Qual é o gráfico que expressa a área da região cinza em função de x?

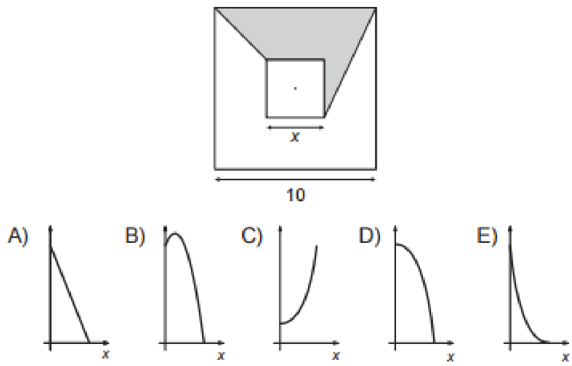


Figura 2.3: O Segundo Exemplo, Obmep 2016, 1ª Fase, Nível 3, Questão 11

Apresentaremos também um breve roteiro para a construção do modelo no GeoGebra e faremos com eles, simultaneamente, projetando a construção no quadro-branco da sala de aula. Para este exemplo, é interessante explorar a construção geométrica (Janela 1), como ilustra a Figura 2.4 antes de plotar o gráfico na Janela 2, de forma a tentarmos antecipar a solução.

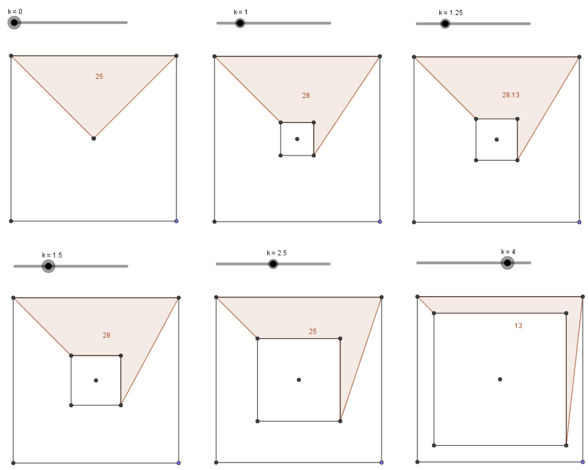


Figura 2.4: Explorando o Segundo Exemplo através do GeoGebra

Note que, apenas com a parte geométrica do modelo, já é possível inferir acerca da opção correta do problema. Senão, vejamos:

- Percebemos que quando k = 0 (x = 0), temos que a área é igual a 25;
- Ao variarmos o parâmetro k (= x/2) há, em um primeiro momento, um aumento na área hachurada;
- Existe um valor máximo para a área, a princípio quando k = 1,25 (x = 2,5);
- A partir deste momento, a área decresce até atingir 0 quando k = 5 (x = 10);
- O decrescimento não é linear. Basta notar que de k = 1,5 para k = 2,5 a variação foi de 3 unidades para baixo, enquanto de k = 2,5 para k = 4 a variação foi de 12 (se fosse linear deveria ter sido de 4,5 unidades).

A única alternativa que atende a essas considerações é a alternativa B. Na Figura 2.5, a plotagem do gráfico, na Janela de Visualização 2, confirma nossa suspeita e, mais ainda, ilustra que o gráfico pedido é um recorte de uma parábola.

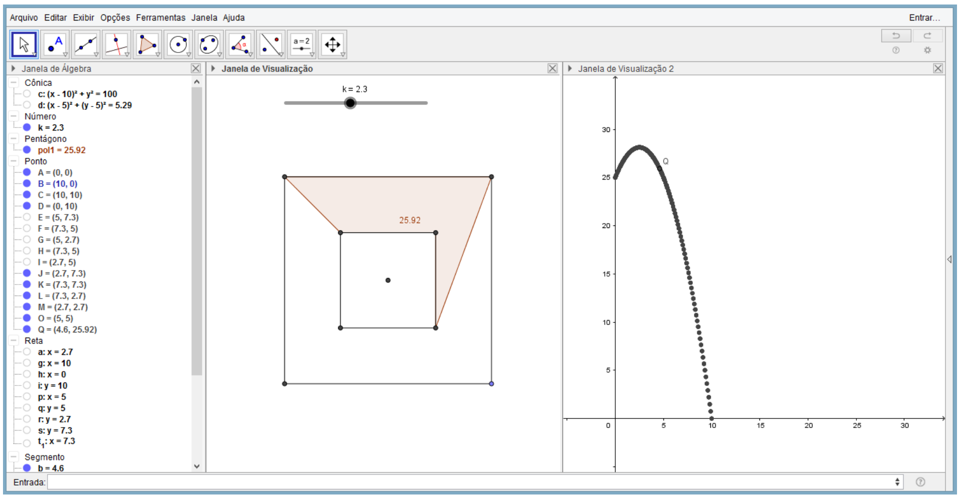


Figura 2.5: O Segundo Exemplo, uma solução

Considerando, então, que a solução é uma parábola, podemos encontrar a função dados alguns pontos. Sabemos que A = (0, 25), B = (2, 28) e C = (3, 28) pertencem a esta curva. Além disso, sabemos que o valor máximo da função ocorre quando x = 2,5 (porque o vértice é equidistante de dois pontos que têm mesma ordenada). Assim, não é difícil encontrar a lei de formação da função, a saber, $y = \frac{1}{2}(-x^2 + 5x + 50)$.

Neste momento, entendemos que é importante reservar um espaço para uma discussão sobre a validade deste tipo de solução no processo ensino-aprendizagem de Funções. Algumas perguntas surgem para disparar esta proposta:

- O que vocês, enquanto professores, achariam, caso um aluno seu apresentasse exatamente esta solução?
- Entendem que é uma solução válida? Há "buracos" a serem preenchidos na solução? Em caso afirmativo, quais?
- É possível elaborar problemas que possam ser resolvidos satisfatoriamente apenas com o uso do *software*?
- De que formas esta solução pode nos levar a uma solução teórica?
- Há ganhos para o aluno em desenvolver uma solução como esta? Quais?

Entendemos que o *software* também pode ajudar na busca por uma solução teórica. Conforme ilustrado na Figura 2.6, dividindo a área hachurada em um trapézio e um triângulo temos:

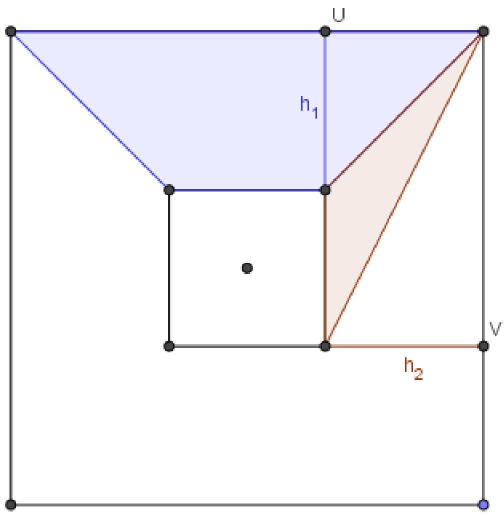


Figura 2.6: Busca de uma solução teórica para o Segundo Problema

- Trapézio de base maior 10, base menor x e altura h_1 igual a $\frac{1}{2}(10-x)$. Área igual a $\frac{1}{4}(10+x)(10-x)$;
- Triângulo de base x e altura $\frac{1}{2}(10-x)$. Área igual a $\frac{1}{2}x(10-x)$;
- Área total da figura igual a $\frac{1}{4}(100-x^2+10x-x^2) = \frac{1}{2}(50+5x-x^2)$ para $0 < x < 10$;
- É fácil mostrar que, quando $x = 0$, a área hachurada é um triângulo de área 25 e que, quando $x = 10$, não existe o polígono, de forma que $f(10) = 0$.

Acreditamos que a discussão destes dois exemplos tome todo o tempo da primeira sessão do Minicurso. Caso haja algum tempo, podemos adiantar um dos problemas da segunda sessão, onde os participantes tentarão fazer as construções sem seguir um roteiro pré-estabelecido, embora com o auxílio dos palestrantes.

2.3 Construções Propostas

Como dito anteriormente, na segunda sessão do Minicurso iremos propor a construção de modelos para diversos problemas da Obmep que tratam do tema escolhido. Neste artigo, apresentaremos algumas opções pré-selecionadas, ordenadas pelo ano de publicação, de forma decrescente. Cabe ressaltar que, para o Minicurso, apresentaremos um roteiro ordenado pelo nível de dificuldade da construção do modelo, em ordem crescente.

Segue abaixo a lista de questões pré-selecionadas:

- Obmep 2017, 1ª Fase, Nível 3, Questão 15;
- Obmep 2016, 2ª Fase, Nível 3, Questão 3;
- Obmep 2015, 1ª Fase, Nível 3, Questão 13;
- Obmep 2014, 2ª Fase, Nível 3, Questão 2;
- Obmep 2013, 1ª Fase, Nível 3, Questão 12;
- Obmep 2012, 2ª Fase, Nível 3, Questão 4;
- Obmep 2011, 2ª Fase, Nível 3, Questão 4;
- Obmep 2009, 1ª Fase, Nível 3, Questão 19;
- Obmep 2009, 2ª Fase, Nível 3, Questão 5;
- Obmep 2008, 1ª Fase, Nível 3, Questão 16

2.4 Discussões Acerca do Aproveitamento do Recurso nas Aulas de Matemática na Educação Básica

No encerramento do Minicurso, pretendemos ouvir dos professores suas reflexões acerca das atividades apresentadas e das possibilidades de exploração das mesmas junto aos alunos.

Se houver tempo hábil, poderemos mostrar como construir um *applet* no GeoGebra para publicação na Internet. Essa estratégia é interessante para que o aluno possa realizar atividades fora do espaço e/ou horário escolar.

Capítulo 3

Caderno de Atividades

3.1 Introdução

- Importância da Obmep e demais ações (Pic, Poti, Obmep na Escola e Profmat) para o desenvolvimento do Ensino de Matemática no país;
- Como as questões da Obmep podem ser trabalhadas em sala de aula?
- Recorte escolhido: problemas geométricos modelados por funções. Integração dos campos geométrico e funcional, com o aproveitamento de recurso computacional (GeoGebra).
- Debate acerca do Exemplo 1:

Exemplo 1. Qual dos gráficos abaixo descreve a variação da área do polígono BCDP em função da distância x=AP?

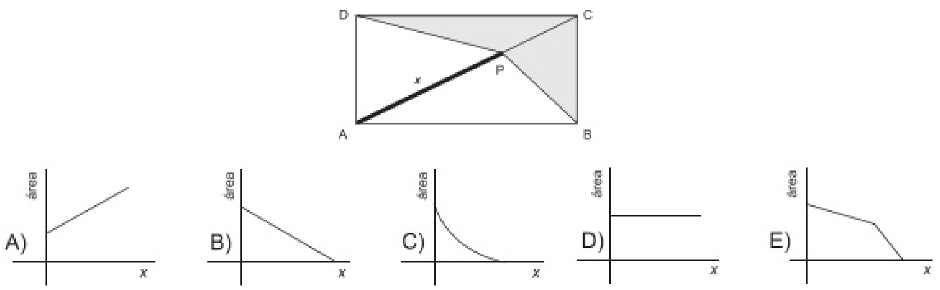


Figura 3.1: Obmep 2007, 1ª Fase, Nível 3, Questão 18

3.2 Explorando o Exemplo 1

PARTE 1: Debate acerca das possibilidades de exploração pedagógica a partir da solução apresentada no GeoGebra.

Analisando a construção apresentada pelos palestrantes, discutiremos as seguintes questões:

(a) Qual é o item que responde corretamente o problema? ____________________

(b) De posse da resposta, vamos nos preocupar agora em encontrar uma justificativa formal para ela. Sem a Janela 2, mas observando o que acontece na Janela 1 é possível descobrir a linearidade no decrescimento da área do polígono BCDP? ____________________

(c) Em caso negativo, é possível refinar a construção de forma a ter uma melhor percepção dessa linearidade? ____________________

(d) Você acredita que a construção no GeoGebra possa nos auxiliar na busca por uma solução teórica para o problema? Em caso afirmativo, de que forma? ____________________

(e) Que caminhos podem ser tomados na procura por uma solução teórica? ____________________

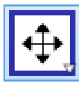
(f) Vamos construir os triângulos BCP e DCP. O que eles têm em comum? ____________________

(g) Construa as alturas dos triângulos BCP e DCP em relação à base CP. O que elas têm em comum? ____________________

(h) A partir das discussões dos últimos dois itens, exprima uma solução teórica para o problema. ____________________

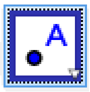
PARTE 2: Reproduzir a solução no GeoGebra.

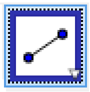
Para reproduzir a construção no GeoGebra, vamos proceder com os seguintes passos:

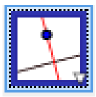
- No Menu principal, clicar em “Exibir – Janela de Visualização 2”. Aparecerá uma segunda janela gráfica no programa. Ajustá-la para exibir apenas o primeiro quadrante, usando o botão ao lado. 

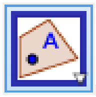
- Na Janela 1, habilitar a malha quadriculada para facilitar a construção do retângulo (botão direito do *mouse*, selecionar “Malha”). Desabilitar os eixos (no mesmo menu). Na Janela 2, desabilitar a malha e habilitar os eixos.

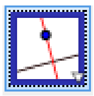
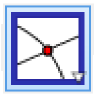
Vamos construir o retângulo na Janela 1. Um **passo a passo** segue abaixo:

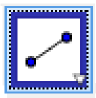
- Criar os pontos A e B, sobre uma mesma horizontal, utilizando o primeiro botão ao lado. Depois, com o segundo botão, criar o segmento AB. 

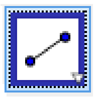
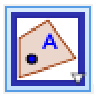


- Tirar duas perpendiculares ao segmento AB, pelos pontos A e B. 

- Marcar um ponto C sobre a perpendicular por B (ferramenta “ponto em objeto” no menu de pontos). 

- Por C, tirar uma perpendicular à reta BC e encontrar o ponto D, na interseção com a outra perpendicular. Para marcar D, clicar na ferramenta “interseção de dois objetos”.  

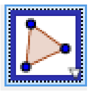
- Com o botão direito do *mouse* sobre as retas, clicar em “Exibir Objeto” para ocultar as retas. Depois, construir os segmentos BC, CD e DA. 

- Construir a diagonal AC e inserir um ponto P (botão direito para renomear) sobre ela.  

Nesse momento, o retângulo já está pronto. Você pode movimentar os pontos A, B e C (D não, porque foi construído em função dos outros) e verificar que a construção não colapsa, ou seja, o polígono ABCD não se deforma, permanecendo um retângulo. Isto exemplifica o **Princípio da Propriedade Mantida**, característica das construções dos *softwares* geométricos.

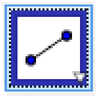
Para finalizar a construção, falta demarcar a área do polígono BCDP e plotar o gráfico na Janela 2:

- Com a ferramenta "Polígono", construir BCDP, clicando seguidamente em B, C, D, P e novamente em B para fechar o ciclo.



- Com o botão direito sobre o polígono construído, clicar em "Propriedades" ("Configurações", na versão 6 do GeoGebra) e "Exibir Rótulo – Valor ", para exibir na tela o valor numérico da área do polígono.

- Construir o segmento AP, reforçar a espessura e mudar a cor (botão direito, "Propriedades", alterar espessura no menu "Estilo" e alterar cor no menu "Cor"). Além disso, nomear como x a legenda e exibir legenda (mesmo menu "Propriedades").



- Clicar na Janela de Visualização 2 (para que o ponto Q, a ser construído, apareça nesta nova janela) e entrar com o seguinte comando na barra de entrada: Q = (n, pol1), onde n é o nome do segmento AP (olhar na Janela de Álgebra para se certificar do nome correto) e pol1 é a identificação da área do polígono BCDP (também olhar na Janela de Álgebra para se certificar do nome correto).

  OBS: É possível que o ponto Q não apareça na Janela 2. Isso porque ele pode estar fora da escala adotada. Neste caso, use o botão de *scroll* do *mouse* ou os botões "Ampliar" e "Reduzir" para ajustar a escala do gráfico.

- Movimente o ponto P na Janela 1 e verifique o ponto Q percorrer uma trajetória na Janela 2.

- Com o botão direito sobre o ponto Q, clique em "Habilitar Rastro". Com o botão direito sobre o ponto P, clique em "Animar". Verifique o rastro do ponto Q gerando o gráfico, conforme o ponto P se desloca pela diagonal AC.

Parabéns! Sua construção está pronta! Agora é só salvá-la em seu computador.

3.3 O Segundo Exemplo

Exemplo 2. Os quadrados da figura têm lados paralelos e o mesmo centro. O quadrado maior tem lado 10 e o menor tem lado x. Qual é o gráfico que expressa a área da região cinza em função de x?

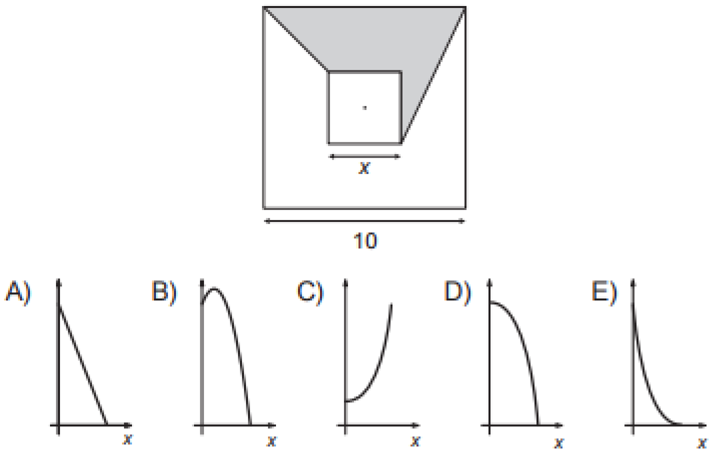
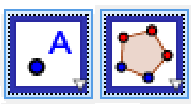


Figura 3.2: O Segundo Exemplo, Obmep 2016, 1ª Fase, Nível 3, Questão 11

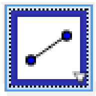
<u>PARTE 1:</u> Reproduzir a solução no GeoGebra.

Para este segundo exemplo, vamos construir uma solução no GeoGebra e, posteriormente, discutir sobre possibilidades de aproveitamento dessa solução para chegarmos a uma solução teórica:

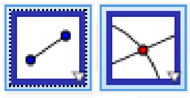
- Em um arquivo novo, habilitar a Janela de Visualização 2 (menu principal, clicar em "Exibir – Janela de Visualização 2"). Por hora, mantenha os eixos habilitados em ambas as janelas, mas a malha quadriculada apenas na Janela 1, onde faremos a construção geométrica do problema;
- Crie um quadrado de lado 10. Uma possibilidade é construir os pontos A e B sobre a malha quadriculada, aproveitando-se a escala (por exemplo, A = (0,0) e B = (10,0)) e utilizar a ferramenta "polígono regular" para construir o restante do quadrado;



- Oculte o polígono (botão direito, “Exibir Objeto”) e os eixos da Janela 1 (botão direito, “Eixos”). Depois, crie os segmentos AB, BC, CD e DA, que completam o quadrado;

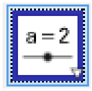


- Trace as duas diagonais do quadrado e destaque seu centro, na interseção das diagonais. Depois, oculte as diagonais, com o botão direito do *mouse* (“Exibir Objeto”). Renomeie o centro do quadrado para O;

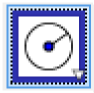


Para construir o quadrado interno, utilizaremos a ferramenta “controle deslizante”, que nos permitirá variar a distância x conforme desejamos:

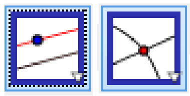
- Selecione a ferramenta “controle deslizante” e clique em qualquer lugar da Janela 1. Os parâmetros para a configuração desejada são “Número, Intervalo: 0 a 5, Incremento: 0.1”. Em “Nome”, colocar k;



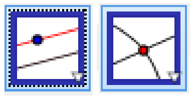
- Trace um círculo usando a ferramenta “Círculo dados Centro e Raio”. O centro do círculo é o ponto O e o raio é o parâmetro k, do nosso controle deslizante. Varie o seletor do controle deslizante e verifique como o raio do círculo varia da mesma maneira;



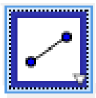
- Trace duas paralelas aos lados do quadrado pelo centro do círculo. Marque os 4 pontos de interseção entre essas paralelas e o próprio círculo. Depois, oculte as paralelas e o círculo;



- Trace quatro paralelas aos lados do quadrado, uma por cada um dos pontos encontrados anteriormente. Na interseção dessas paralelas, marque os quatro vértices do quadrado interno;

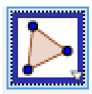


- Oculte todos os objetos (botão direito, “Exibir Objeto”) que não fazem parte da construção final (paralelas, círculo e os pontos auxiliares). Depois, use a ferramenta “segmento” para construir o quadrado interno. Renomeie os vértices do quadrado para E, F, G e H, sendo E o mais perto de A e os outros no mesmo sentido rotacional;



- Varie o seletor do controle deslizante e verifique como o lado do quadrado interno varia da mesma maneira;

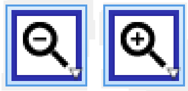
- Com a ferramenta “polígono”, crie o polígono CFGHD (lembre-se de clicar nos pontos, nesta ordem, e retornar ao ponto C para completar o polígono). Exiba a área do polígono na tela (botão direito, “Propriedades – Exibir Rótulo – Valor”);



- Movimente o seletor do controle deslizante e verifique o que acontece com a área do polígono CFGHD;

Para construir o gráfico da área do polígono CFGHD, em função do lado do quadrado interno, precisamos lembrar que o controle deslizante foi construído de forma que x = 2k. Dessa forma, segue:

- Clique na Janela de Visualização 2 (para que o ponto Q seja criado sobre ela) e insira, na Caixa de Entrada, o seguinte comando: Q = (2k, pol2), onde pol2 expressa a área do polígono CFGHD (verificar na Janela de Álgebra se o nome está correto). Ajustar a escala da Janela 2 (*scroll* do *mouse* ou botões “Ampliar” e “Reduzir”) até que o ponto Q apareça na tela;



- Movimente o seletor do controle deslizante na Janela 1 e veja o ponto Q percorrer uma trajetória na Janela 2;

- Com o botão direito do *mouse*, habilitar o rastro no ponto Q e animar o seletor k;

Parabéns! Sua construção está pronta! Agora é só salvá-la em seu computador.

<u>**PARTE 2:**</u> Debate acerca das possibilidades de exploração pedagógica a partir da solução apresentada no GeoGebra.

Analisando a construção apresentada pelos palestrantes, discutiremos as seguintes questões:

(a) Qual é o item que responde corretamente o problema? ____________

(b) Se não utilizássemos a Janela 2, seria possível chegar à mesma conclusão sobre a resposta do problema? Em caso afirmativo, que fatos podemos utilizar para isso? ____________

(c) Como poderíamos justificar a não linearidade do crescimento e decrescimento da área do polígono CFGHD a partir de observações na Janela 1? ____________

(d) Percebendo que a curva mostrada pelo GeoGebra é uma parábola, podemos deduzir que a área do polígono CFGHD é uma função polinomial do 2º grau, em x. Assim, podemos pegar três pontos – por exemplo (0, 25), (3, 28) e (5, 25) – e encontrar a lei de formação desta função, que é dada por: ________

____

____

(e) O que você acha da solução apresentada acima? Entendem que é uma solução válida? Há "buracos" a serem preenchidos na solução? Em caso afirmativo, quais? ________________________________

____

____

(f) Há ganhos para o aluno em desenvolver uma solução como essa? Em caso afirmativo, quais? ________________________________

____

____

(g) Vamos utilizar o *software* para nos ajudar na busca de uma solução teórica: trace o segmento CG e divida o polígono CFGHD em um trapézio e um triângulo. Encontre expressões para as áreas de cada figura separadamente e, depois, encontre a expressão para a área do polígono CGGHD:

Área do trapézio CGHD: ________________________________

Área do triângulo CGF: ________________________________

Área do polígono CFGHD: ________________________________

(h) Você acredita que a manipulação do GeoGebra, na forma como proposto neste segundo exemplo, pode auxiliar no processo ensino-aprendizagem de funções? Em caso afirmativo, como? Em caso negativo, por quê? ________

____

____

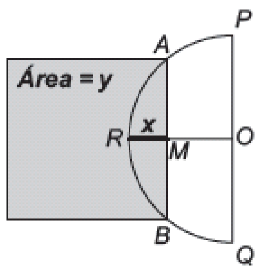
____

____

3.4 Outras Construções

Nesta parte do Minucurso, pretendemos que os participantes realizem o máximo de construções possíveis, de forma a resolver as questões selecionadas da Obmep utilizando o GeoGebra como apoio pedagógico. Ao final de cada item, estimularemos um breve debate sobre a busca por soluções teóricas.

Questão Selecionada 1. O semicírculo da figura tem centro O e diâmetro PQ = 2cm. O raio OR é perpendicular a PQ. Por um ponto qualquer M de OR, traça-se a corda AB perpendicular a OR. Sejam x o comprimento de RM e y a área do quadrado de lado AB, em cm^2?



Qual dos gráficos abaixo expressa a relação entre x e y?

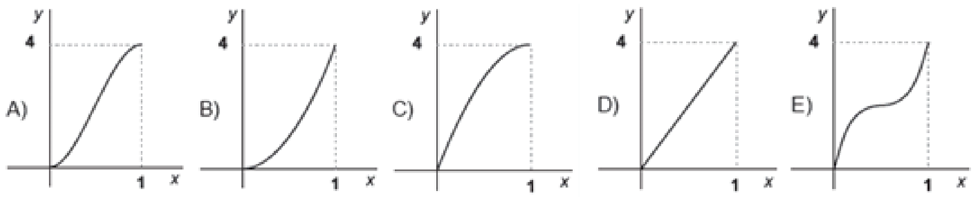
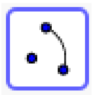


Figura 3.3: Obmep 2009, 1ª Fase, Nível 3, Questão 19

Passo a passo da construção:

- Construa os pontos O, P, Q e R, de acordo com dados do problema;
- Trace os segmentos PQ e RO, além do arco de círculo PQ (ferramenta “Arco Circular”); 
- Insira um ponto M, sobre RO e construa a corda AB, perpendicular a RO por M;
- Destaque o segmento RM (legenda: x, cor: vermelha; espessura: 5) e crie o quadrado sobre AB (ferramenta “Polígono Regular”). Exiba a área do quadrado na tela;
- Na Janela de Visualização 2, crie o ponto T, de coordenadas (l, pol1), onde “l” é o nome do segmento em vermelho (cuja legenda é x) e “pol1” é o nome do quadrado sobre AB;

- Habilite o rastro do ponto T, anime o ponto M e verifique o programa traçar o gráfico desejado.

Qual é o item que responde adequadamente o problema? ____________________

Como a manipulação da construção, no GeoGebra, pode ajudar na busca por uma solução teórica? ____

____

____

____

Questão Selecionada 2. Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD. Ela parte do ponto A, anda 20 centímetros até chegar em B, depois anda mais 10 centímetros até chegar em C e finaliza seu trajeto em D. Após andar x centímetros, a formiga está em um ponto F do contorno.

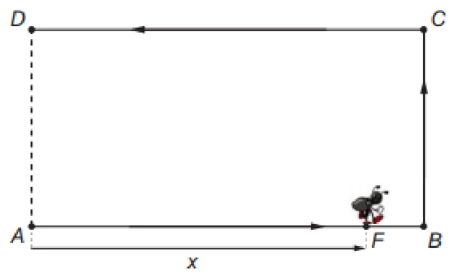


Figura 3.4: Obmep 2014, 2ª Fase, Nível 3, Questão 2

(a) Quantos centímetros a formiga anda em seu trajeto de A até D?

(b) Calcule a área do triângulo ADF quando x = 22 centímetros.

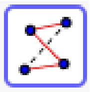
(c) Qual é a maior área possível para um triângulo ADF?

(d) Esboce, no plano cartesiano Oxy, o gráfico da função que associa ao comprimento x o valor da área do triângulo ADF.

Passo a passo da construção:

- Construa os pontos A, B, C e D de acordo com o problema (pode ser interessante tomar A = (0,0));

- Construa o caminho poligonal ABCD e um ponto F sobre ele;



- Construa o triângulo ADF e exiba sua área;

Para criar o ponto Q na Janela 2, vamos precisar exibir o comprimento da poligonal AF em três momentos distintos: quando F está entre A e B, entre B e C e entre C e D. Por conta disso, vamos utilizar o seguinte artifício:

- Crie o caminho poligonal (ou o segmento) AF e nomeie-o “a” (pode usar o comando na Caixa de Entrada);
- Crie o caminho poligonal ABF e nomeio-o “b”;
- Crie o caminho poligonal ABCF e nomeie-o “c”;

Agora, vamos criar o ponto Q na Janela 2 (clicar lá), com o comando “Se” na Caixa de Entrada:

- Se(y(F) < 0.01, (a, t1), Se(y(B) < y(F) < y(C), (b, t1), (c, t1)));
- Habilite o rastro do ponto Q, anime o ponto F e veja o programa construir o gráfico desejado.

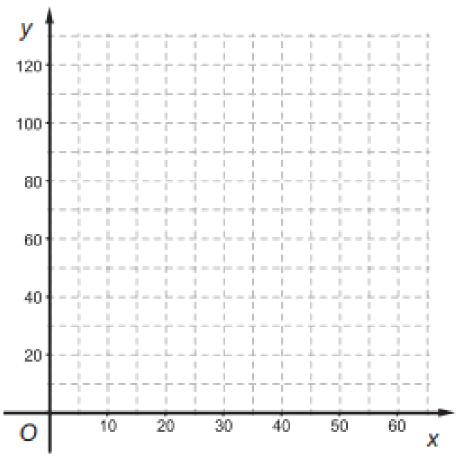
Quais são as respostas do problema?

(a) ______________________________

(b) ______________________________

(c) ______________________________

(d)



Como a manipulação da construção, no GeoGebra, pode ajudar na busca por uma solução teórica? ____________________

____

____

____

____

Questão Selecionada 3. A figura mostra um polígono ABCDE em que todos os lados, exceto AE, são horizontais ou verticais e têm os comprimentos indicados na figura.

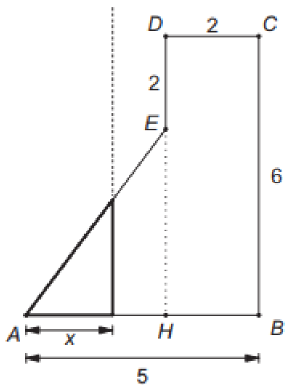


Figura 3.5: Obmep 2016, 2ª Fase, Nível 3, Questão 3

Considere, agora, uma reta vertical distante x do vértice A, com $0 < x \leq 5$. Ela divide o polígono ABCDE em dois polígonos, um situado à direita da reta e outro à esquerda.

Considere a função f que associa a cada valor de x o perímetro do polígono situado à esquerda da reta. Por exemplo, f(3) é o perímetro do triângulo AHE, enquanto f(5) é o perímetro do polígono ABCDE.

(a) Calcule f(3);

(b) Calcule f(5);

(c) Escreva as expressões de f(x) para $0 < x \leq 3$ e para $3 < x \leq 5$;

(d) Esboce o gráfico da função f.

Passo a passo da contrução:

- Construa os pontos A, B, C, D e E de acordo com as condições do problema. Pode ser interessante tomar A = (0,0), para facilitar a exibição da distância x mais à frente;
- Construa os segmentos AB e BC e um caminho poligonal AEDC, por onde se deslocará um ponto P (construa P com a ferramenta "Ponto Sobre Objeto");
- Trace a perpendicular a AB, por P. Você pode mudar o estilo desta reta (por exemplo, deixá-la tracejada) clicando com o botão direito do *mouse*, em "Propriedades – Estilo";
- Na interseção da perpendicular com o segmento AB, marque o ponto Q;
- Para construir o polígono desejado, precisaremos usar o comando "Se". Uma possibilidade é Se(x(Q)<3, Polígono(A, P, Q), se(x(Q)>3, Polígono(A,E,D,P,Q), Polígono(A, E, Q)));
- Anime o ponto P e verifique se o polígono desejado foi construído corretamente;
- Para encontrar o perímetro do polígono basta digitar, na caixa de entrada, o comando Perímetro(pol1), onde "pol1" é o nome do polígono construído;
- Crie o segmento AQ e destaque-o (cor: vermelho, espessura: 5, legenda: x). Exiba a legenda na tela;
- Na Janela 2, construir o ponto R, de coordenadas (n, a), onde "n" é o nome do segmento AQ e "a" é o perímetro do polígono;
- Habilitar o rastro do ponto R e animar o ponto P para que o programa exiba o gráfico desejado.

Quais são as respostas do problema?

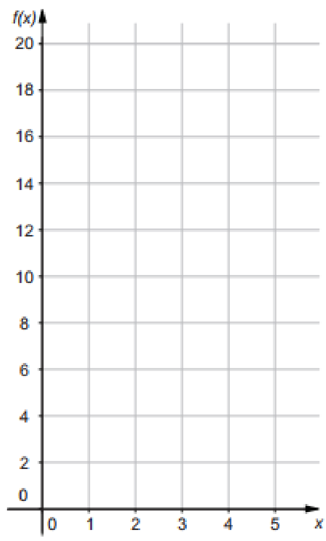
(a) f(3)= ______________________________

(b) f(5)= ______________________________

(c) f(x)= ______________________________

____

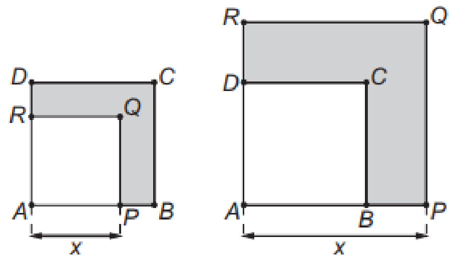
(d) Esboce o gráfico ao lado:



Como a manipulação da construção, no GeoGebra, pode ajudar na busca por uma solução teórica? ______________________________

____

Questão Selecionada 4. Um quadrado ABCD tem área 1. Um ponto P desloca-se ao longo da semirreta AB, partindo do ponto A para a direita, conforme mostra a figura.



Se S é a área da região compreendida entre os quadrados ABCD e APQR, destacada em cinza, qual é o gráfico que melhor representa a variação de S em função de x?

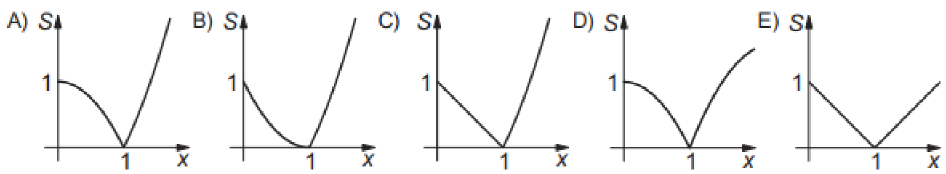


Figura 3.6: Obmep 2015, 1ª Fase, Nível 3, Questão 13

Passo a passo da construção:

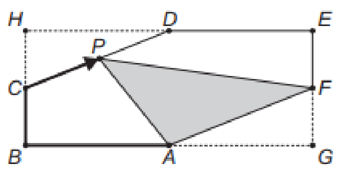
- Construa os pontos A, B, C, D de acordo com o problema (pode ser interessante tomar A = (0,0));
- Construa a semirreta AB e um ponto P sobre ela;
- Construa o quadrado APQR (utilizar a ferramenta "polígono regular"). Oculte a área deste polígono, mantendo apenas os pontos Q e R (renomear para estes) e os lados do novo quadrado;;
- Use o comando "Se" para exibir o polígono que exprime a diferença entre as áreas dos quadrados. Uma possibilidade é Se(x(P) < 1, Polígono(P, B, C, D, R, Q), Se(x(P) > 1, Polígono(B, P, Q, R, D, C)));

- Anime o ponto P e verifique se o polígono foi construído corretamente;
- Na Janela 2, construir o ponto Q, de coordenadas (x(P), pol2), onde "pol2" é a área do polígono desejado;
- Habilitar o rastro do ponto Q e animar o ponto P para que o programa exiba o gráfico desejado.

Qual é o item que responde adequadamente o problema? ____________________

Como a manipulação da construção, no GeoGebra, pode ajudar na busca por uma solução teórica? ____
____
____
____

Questão Selecionada 5. Na figura abaixo, BHEG é um retângulo com BG > BH e A, C, D, F são pontos médios de seus respectivos lados. Um ponto P desloca-se ao longo da poligonal ABCDEF, partindo de A até o ponto F.



Qual é o gráfico que melhor representa a área R(x) do triângulo APF em função da distância x percorrida pelo ponto P ao longo dessa poligonal?

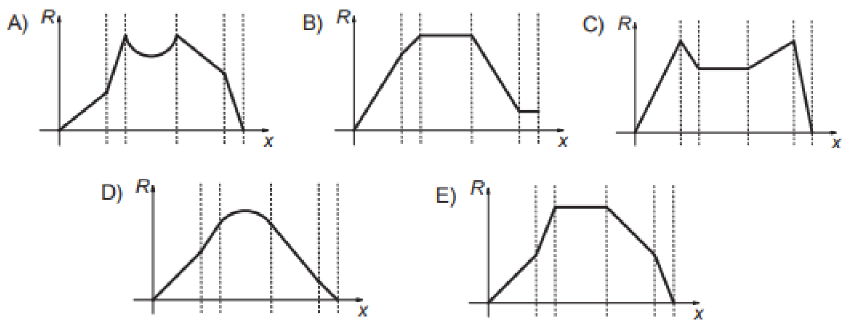


Figura 3.7: Obmep 2017, 1ª Fase, Nível 3, Questão 15

Passo a passo da construção:

- Construir o retângulo BHEG, com BG > BH. Para garantir essa desigualdade, podemos traçar um círculo de centro B = (0, 0) e raio BH e criar uma semirreta cuja extremidade inicial esteja na interseção do círculo com o eixo horizontal. O ponto G será marcado sobre esta semirreta;
- Construir os pontos A, C, D e F, médios dos lados do retângulo;
- Construir a poligonal ABCDEF e um ponto P sobre ela;
- Construir o triângulo APF e exibir sua área na tela;
- Para criar o ponto Q na Janela 2, vamos utilizar da mesma estratégia de criar vários caminhos poligonais como na Questão 2. Depois, utilize o comando "Se" na caixa de entrada.

Qual é o item que responde adequadamente o problema? ____________________

Como a manipulação da construção, no GeoGebra, pode ajudar na busca por uma solução teórica? ____________________

Questão Selecionada 6. Na figura, os lados do triângulo DEF são paralelos aos lados do triângulo retângulo ABC. Os pontos H, D, F e G estão alinhados e $0 \leq x \leq 5$.

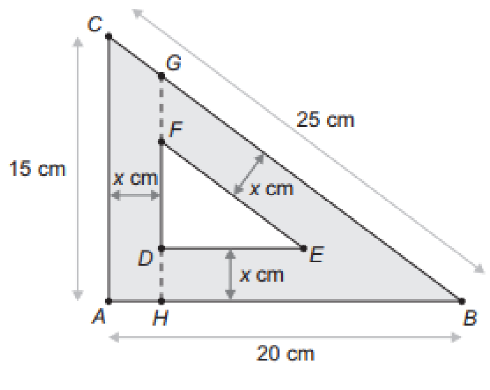


Figura 3.8: Obmep 2011, 2ª Fase, Nível 3, Questão 4

(a) Calcule o comprimento de GH em função de x.

(b) Mostre que CG = FG = $\frac{5x}{4}$ cm.

(c) Faça o gráfico da área A do triângulo DEF em função de x.

Passo a passo da construção:

- Construir os pontos A, B e C e os segmentos que formam o triângulo, conforme os dados do problema;
- Construir um controle deslizante k, variando entre 0 e 5;
- Trace um círculo de centro em A e raio k. Encontre o ponto H na interseção deste círculo com o segmento AB. Trace uma paralela a AC por H e marque G na interseção desta paralela com BC;
- Repita o processo para encontrarmos a outra reta suporte do triângulo interno: marque o ponto I na interseção do círculo com o segmento AC e trace uma paralela a AB por I. Oculte o círculo e o ponto I;
- Para encontrar a última reta suporte, trace uma perpendicular a BC por C, um círculo de centro C e raio k e marque o ponto J na interseção do círculo com a perpendicular;
- Trace uma paralela a BC por J e encontre a terceira reta-suporte do triângulo interno. Assinale os pontos D, E e F, nas interseções das retas-suporte. Oculte todos os elementos auxiliares da construção;
- Vamos usar o comando “Se” para criar o polígono DEF. Uma possibilidade é Se(k < 0.01, Polígono(A, B, C), Polígono(D, E, F)). Exiba a área do polígono na tela;
- Para responder ao item b, destaque os segmentos CF e FG na construção (um vermelho, outro azul, espessura 5, colocar valor e comparar com 5x/4 – texto na tela);
- Clicar na Janela 2 e construir, na Caixa de Entrada, o ponto Q, de coordenadas (k, pol1);
- Habilitar o rastro do ponto Q, animar o seletor k e verificar o programa traçando o gráfico na tela.

Quais são as respostas do problema?

(a) GH= ____________________

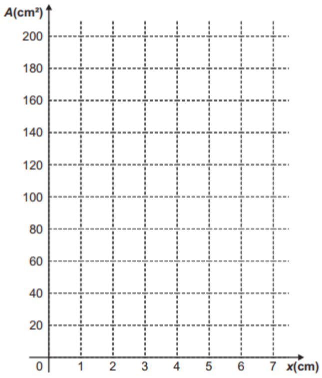
(b) ____________________

____

____

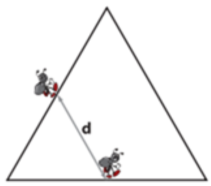
____

(c) ____________________

(d) 

Como a manipulação da construção, no GeoGebra, pode ajudar na busca por uma solução teórica? ______________________________

Questão Selecionada 7. Duas formiguinhas partiram ao mesmo tempo e em direções diferentes de um mesmo vértice de um triângulo equilátero de lado 2cm. Elas andaram sobre os lados do triângulo à velocidade de 1cm/s, até retornar ao vértice original.



Qual dos gráficos abaixo descreve a distância d entre as duas formiguinhas em função do tempo?

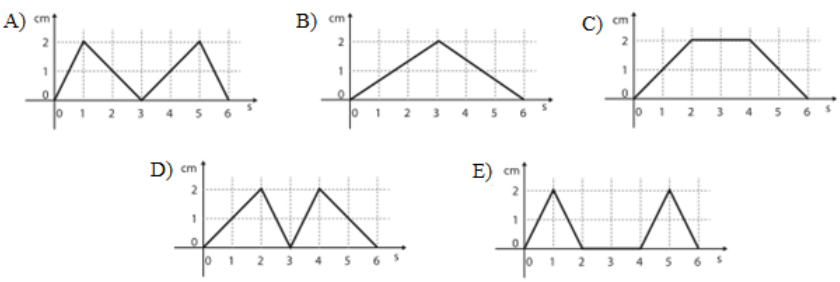
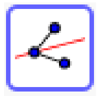


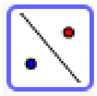
Figura 3.9: Obmep 2013, 1ª Fase, Nível 3, Questão 12

Passo a passo da construção:

- Construir um triângulo equilátero ABC de lado 2 unidades (arbitraremos o segmento AB paralelo ao eixo horizontal);
- Construir a bissetriz do ângulo Â (note que as posições das formigas são simétricas, em relação a esta bissetriz);



- Construir, na Caixa de Entrada, o caminho poligonal fechado ACBA e um ponto F_1 sobre esta poligonal (F_1 representará a formiga 1);
- Usar a ferramenta "Reflexão em Relação a uma Reta" para encontrar o ponto F_2, reflexão de F_2 pela bissetriz de Â. Oculte a bissetriz;



- Crie o segmento d = F_1F_2 (vermelho, espessura 5) e exiba seu valor na tela;

Para criar o ponto Q, antes precisaremos recorrer à criação de três caminhos poligonais, a saber:

- a = caminho poligonal (A, F_1);
- b = caminho poligonal (A, C, F_1);
- c = caminho poligonal (A, C, B, F_1);
- Clique na Janela 2, para que o ponto Q seja criado nela e entre com o comando "Se". Uma possibilidade é Se(x(A) < x(F_1) < x(C) e y(A)< y(F_1) < y(C), (a, d), Se(x(C) < x(F_1) < x(B) e y(A) < y(F_1) < y(C), (b, d), (c, d)));
- Habilitar o rastro do ponto Q, animar o ponto F_1 e verificar o programa traçando o gráfico na tela.

Qual é o item que responde adequadamente o problema? ________________

Como a manipulação da construção, no GeoGebra, pode ajudar na busca por uma solução teórica?

____

____

____

____

Questão Selecionada 8. Dois triângulos isósceles com catetos de medida 2 são posicionados como mostra a Figura 1. A seguir, o triângulo da esquerda é deslocado para a direita. Nas figuras 2 e 3, x indica a distância entre os vértices A e B dos dois triângulos.

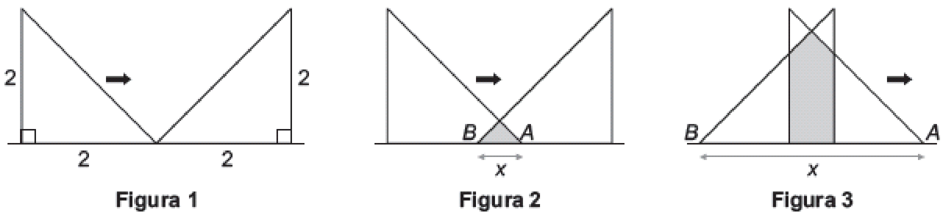


Figura 3.10: Obmep 2009, 2ª Fase, Nível 3, Questão 5

Para cada x no intervalo [0,4], seja f(x) a área da região comum aos dois triângulos (em cinza nas figuras).

(a) Calcule f(1) e f(3);

(b) Encontre as expressões de f nos intervalos [0,2] e [2,4] e esboce o seu gráfico;

(c) Qual a área máxima da região comum aos dois triângulos?

Passo a passo da construção:

- Vamos iniciar com o triângulo fixo, o da direita, que nomearemos BCD, sendo C o vértice do ângulo reto. Construa este triângulo com as medidas dadas no problema. Pode ser interessante posicionar o ponto B em (2, 0);
- Construa o ponto B', reflexão de B em relação a C e o segmento BB', por onde andará o vértice A do outro triângulo;
- Construa o ponto A sobre o segmento BB' e o segundo triângulo a partir dele, que nomearemos AEF, sendo D o vértice do ângulo reto (lembre-se de criar a reta BC e tomar o ponto D sobre esta reta, para não colapsar a construção quando o ponto A se deslocar);
- Deslize o ponto A sobre o segmento BC e marque os pontos P, R e S, das interseções dos dois triângulos;
- Com o comando "Se", construa o polígono que corresponde à interseção entre os dois triângulos. Uma possibilidade é Se($2 < x(A) \leq 4$, Polígono(A, B, P), Polígono(E, R, P, S, C)). Exiba a área deste polígono na tela;

- Construa e destaque (vermelho, espessura 5) o segmento AB. Legende-o como x e exiba a legenda na tela;
- Na Janela 2 (clicar lá), construa o ponto Q, de coordenadas (s, pol1), onde "s" é o nome do segmento AB e "pol1" é o nome do polígono construído;
- Habilite o rastro do ponto Q, anime o ponto A e verifique o programa traçando o gráfico na tela.

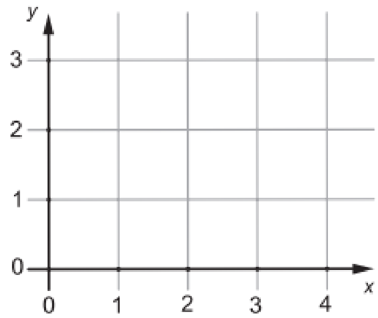
Quais são as respostas do problema?

(a) f(1) = ____________f(3) = ____________

(b) f(x)= ________________________

(c) Área Máxima: ________________

Como a manipulação da construção, no GeoGebra, pode ajudar na busca por uma solução teórica? ____________________



Questão Selecionada 9. Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas. O segmento AB é perpendicular a essas retas e o ponto P, nesse segmento, é tal que AP = 2 e BP = 1. O ponto X pertence à reta r e a medida do segmento BX é indicada por x. O ponto Y pertence à reta s e o triângulo XPY é retângulo em P.

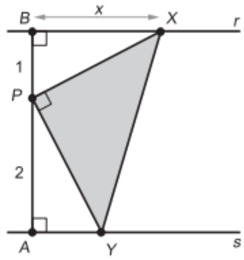


Figura 3.11: Obmep 2012, 2ª Fase, Nível 3, Questão 4

(a) Explique por que os triângulos PAY e XBP são semelhantes;

(b) Calcule a área do triângulo XPY em função de x;

(c) Para quais valores de x a área do triângulo XPY é igual a 5/2?

(d) Determine o valor de x para o qual a área do triângulo XPY é mínima e calcule o valor dessa área.

Passo a passo da construção:

- Construir os pontos A, B e P, o segmento AB e as semirretas r e s (como há simetria, basta analisar o que acontece do lado direito de AB) conforme os dados do problema;
- Construa um ponto X sobre r, o segmento XP e trace a perpendicular a XP por P, de forma a marcar o ponto Y sobre a reta s;
- Construa o triângulo XPY e exiba sua área na tela;
- Destaque o segmento BX (vermelho, espessura 5) e legende-o como x;
- Na Janela 2, crie o ponto Q, de coordenadas (l, t1), onde "l" é o nome do segmento legendado com x e t1 é o nome do triângulo XPY;
- Habilite o rastro do ponto Q, anime o ponto X e verifique o gráfico traçado na tela.

Quais são as respostas do problema?

(a) ____

____

(b) f(x) = ____

(c) A área é igual a 5/2 quando ______________________________

(d) A área mínima é igual a ______________quando ______________

Como a manipulação da construção, no GeoGebra, pode ajudar na busca por uma solução teórica? ______________________________

____

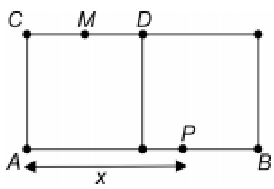
____

____

____

____

Questão Selecionada 10. Na figura vemos dois quadrados, sendo M o ponto médio de CD. Uma formiguinha parte de um ponto qualquer P do segmento AB e quer chegar ao ponto M andando apenas sobre os lados dos quadrados pelo menor caminho possível.



Qual dos gráficos abaixo melhor representa a distância y que a formiguinha vai percorrer em função da distância x = AP?

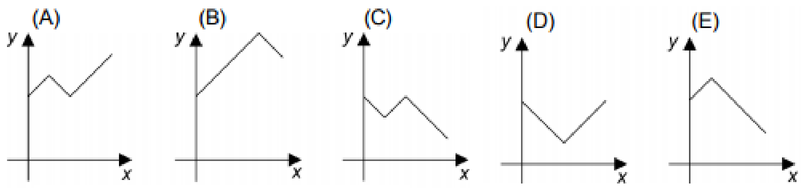


Figura 3.12: Obmep 2008, 1ª Fase, Nível 3, Questão 16

Passo a passo da construção:

- Construir os quadrados conforme os dados do problema. Nomeie E como o ponto médio de AB, e F como o vértice superior direito. Marque também o ponto M, médio de CD;
- Trace o segmento AB e tome um ponto P sobre ele;
- Crie dois caminhos poligonais: a = PACM e b = PEDM;
- Na Caixa de Entrada, use o comando "Mínimo" para encontrar c, mínimo entre a e b;
- Na Janela 2, construa o ponto Q, de coordenadas (x, c);
- Habilite o rastro do ponto Q, anime o ponto P e verifique o gráfico traçado na tela.

Qual é o item que responde adequadamente o problema? ____________________

Como a manipulação da construção, no GeoGebra, pode ajudar na busca por uma solução teórica? ____

____

____

____

____

Capítulo 4

Conclusões

A Obmep é um *case* de sucesso no país. Há diversas reportagens mostrando práticas de sucesso em todos os lugares do país. Além disso, o sucesso do programa ajudou a expandir outras iniciativas no Ensino de Matemática, em especial os programas de aperfeiçoamento e treinamento de alunos e professores. Diante desse cenário, é fundamental que os professores e futuros professores que atuam (atuarão) no Ensino de Matemática na Educação Básica conheçam as provas da Obmep e estilos de questões, de forma a aproveitá-las em suas sequências didáticas.

Nesta proposta de Minicurso, escolhemos fazer um recorte em cima de questões geométricas com apelo funcional, para que pudéssemos explorar o conteúdo a partir de uma abordagem computacional, com o auxílio do GeoGebra, *software* livre com potencial de ajudar em todos os campos da Matemática.

Espera-se que, ao fim do Minicurso, os professores participantes tenham adquirido conhecimento para construir modelos para outras questões que exploram a temática discutida. Cabe ressaltar também que, embora o foco esteja em professores que atuam no Ensino Médio (em especial no 1º ano), é completamente viável que os professores do Ensino Fundamental também participem. Aliás, esses professores podem adaptar as questões, mascarando o comportamento funcional e solicitando que os alunos calculem determinados valores pontuais. Por exemplo, podemos adaptar o nosso exemplo inicial e apresentar a seguinte questão, aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental:

Sendo ABCD um retângulo com AB = 20 e BC = 15, determine a área do quadrilátero BCDP quando AP = 5.

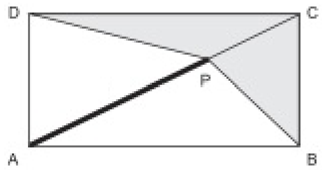


Figura 4.1: Exemplo Inicial Adaptado Para Ensino Fundamental

É possível, inclusive, que os professores do Ensino Fundamental explorem as soluções computacionais com seus alunos, ajudando-os a identificar propriedades que os levarão à solução teórica.

Por fim, pretendemos que os professores participantes do Minicurso exponham suas considerações sobre a "validade" de tais soluções e reflitam sobre novas abordagens a serem exploradas em aulas com o apoio computacional. Com novas ferramentas, certamente há oportunidade de analisar os problemas de uma forma diferente. Não se pode ignorar as vantagens que tais abordagens podem oferecer ao processo ensino-aprendizagem. Além disso, lembramos que com essas novas ferramentas, outros tipos de problemas podem ser inseridos no processo.

Referências Bibliográficas

[1] Impa. Página Oficial da Obmep. Disponível em www.obmep.org.br. Último acesso em 23/10/2017.

[2] GIRALDO, V., CAETANO, P e MATTOS, F. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*, Coleção Profmat. SBM, 2013.

[3] LIMA, E. L., CARVALHO, P.C., WAGNER, E. e MORGADO, A. *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 1, Coleção do Professor de Matemática, SBM. 1996.

[4] MACHADO, L. Uma Análise Crítica das Provas da Segunda Fase da OBMEP 2014. Dissertação para obtenção do grau de Mestre (Profmat- Impa). Rio de Janeiro, 2015.

[5] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio - Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 1997. Disponível em portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Último acesso em 23/08/2017.

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

(continuação dos títulos publicados)

- *Álgebra Linear: Teoria e Aplicações* - T. P. de Araújo
- *Introdução à Análise Matemática na Reta* - C. I. Doering
- *Topologia e Análise no Espaço Rn* - R. Freire de Lima
- *Equações Ordinárias e Aplicações* - B. Scárdua
- *Cálculo Avançado* - R. Cipolatti
- *Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e superficies* - A. Lymberopoulos e I. Terek Couto

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H. Bolfarine e M. Sandoval
- *Discretização de Equações Diferenciais Parciais* - J. Cuminato e M. Meneguette
- *Fenômenos de Transferência – com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia volume 1: Fundamentos* - J. Pontes e N. Mangiavacchi

COLEÇÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª* - E. Mega e R. Watanabe
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª* - C. Moreira e E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues
- *21 Aulas de Matemática Olímpica* - C. Y. Sh
- *Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções* - K. I. M. Oliveira e A. J. C. Fernández
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Fundamental* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Médio* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 17ª a 24ª* - C. G. T. de A. Moreira, C. Y. Shine, E. L. R. Motta, E. Tengan e N. C. Saldanha
- *10 matemáticos 100 problemas* - E. Wagner (Organização)

COLEÇÃO FRONTEIRAS DA MATEMÁTICA

- *Fundamentos da Teoria Ergódica* - M.Viana e K. Oliveira
- *Tópicos de Geometria Diferencial* - A. C. Muniz Neto
- *Formas Diferenciais e Aplicações* - M. Perdigão do Carmo
- *Topologia das Variedades* - W. de Melo

COLEÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume I Números Naturais* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo
- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume II Números Inteiros* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo

COLEÇÃO COLETÂNEAS DE MATEMÁTICA

- *Teorema Vivo* - C. Villani

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

(continuação dos títulos publicados)

COLEÇÃO PROFMAT

- *Introdução à Álgebra Linear* - A. Hefez e C.S. Fernandez
- *Tópicos de Teoria dos Números* - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha
- *Polinômios e Equações Algébricas* - A. Hefez e M.L. Villela
- *Tópicos de Historia de Matemática* - T. Roque e J. Bosco Pitombeira
- *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática* - V. Giraldo, P. Caetano e F. Mattos
- *Temas e Problemas Elementares* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Números e Funções Reais* - E. L. Lima
- *Aritmética* - A. Hefez
- *Geometria* - A. Caminha
- *Avaliação Educacional* - M. Rabelo
- *Geometria Analítica* - J. Delgado, K. Frensel e L. Crissaff
- *Matemática Discreta* - A. Morgado e P. C. P. Carvalho
- *Matemática e Atualidade - Volume 1* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Fundamentos de Cálculo* - A. C. Muniz Neto
- *Matemática e Atualidade - Volume 2* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear* - A. Hefez e C. de Souza Fernandez
- *Exercícios Resolvidos de Aritmética* - A. Hefez

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D. G. de Figueiredo
- *Números Racionais e Irracionais* - I. Niven
- *Tópicos Especiais em Álgebra* - J. F. S. Andrade

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L. N. de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M. P. do Carmo
- *Matemática Discreta* - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- *Álgebra Linear: Um segundo Curso* - H. P. Bueno
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa* - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.
- *Elementos de Topologia Geral* - E. L. Lima
- *A Construção dos Números* - J. Ferreira
- *Introdução à Geometria Projetiva* - A. Barros e P. Andrade
- *Análise Vetorial Clássica* - F. Acker
- *Funções, Limites e Continuidade* - P. Ribenboim
- *Fundamentos de Análise Funcional* - G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira
- *Teoria dos Números Transcendentes* - D. Marques
- *Introdução à Geometria Hiperbólica - O modelo de Poincaré* - P. Andrade

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Medio Vol. 4 - Exercicios e Soluções* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Um Convite à Matemática* - D.C de Morais Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 1 - Números Reais - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 3 - Introdução à Análise - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 4 - Combinatória - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 5 - Teoria dos Números - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 6 - Polinômios - A. Caminha
- *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)
- *Como Resolver Problemas Matemáticos* - T. Tao
- *Geometria em Sala de Aula* - A. C. P. Hellmeister (Comitê Editorial da RPM)
- *Números Primos, amigos que causam problemas* - P. Ribenboim
- *Introdução à Teoria dos Conjuntos* - G. P. Novaes
- *Manual de Redação Matemática* - D. C. de Morais Filho
- *Introdução à Teoria dos Conjuntos* - G. Pires Novaes

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

ISBN 978-85-8337-144-1
9 788583 371441