III SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

A DIVISÃO EUCLIDIANA E SEU RESTO DESDE OS ANOS INICIAIS

Janete Jacinta Carrer
Luisa Rodríguez Doering
Cydara Cavedon Ripoll

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

A DIVISÃO EUCLIDIANA E SEU RESTO DESDE OS ANOS INICIAIS

Capa: Pablo Diego Regino
Projeto gráfico: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

ISBN: 978-85-8337-142-7

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

III SIMPÓSIO NACIONAL DA
FORMAÇÃO DO PROFESSOR
DE MATEMÁTICA

A DIVISÃO EUCLIDIANA E SEU RESTO DESDE OS ANOS INICIAIS

Janete Jacinta Carrer
Luisa Rodríguez Doering
Cydara Cavedon Ripoll

1ª edição
2018
Rio de Janeiro

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Dedicamos esse e-book a todos os Professores de Matemática e Educadores em geral que continuam na busca de um ensino de matemática com significado.

Prefácio

O objetivo deste trabalho é ressaltar a complexidade da operação de divisão e defender a necessidade de discuti-la com licenciandos e com professores do Ensino Fundamental, focando na Divisão Euclidiana. Apresenta reflexões e problemas que contemplam os vários níveis e significados da Divisão Euclidiana e nos quais o resto tem papel fundamental e, muitas vezes, preponderante.

Este trabalho apoiou o minicurso de mesmo nome, que foi composto por 2 aulas com duração de duas horas cada, nos dias 17 e 18 de novembro de 2017 e corresponde ao nível introdutório dos cursos do III Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Rio de Janeiro- RJ - CMRJ.

Agradecimentos

Agradecemos à SBM e à ANPMAT pela oportunidade e apoio dados à escrita deste trabalho e à oferta do minicurso de mesmo nome. Agradecemos também a Rafael Rache e a Leandro Carlos Blum pelas ilustrações deste trabalho.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

As ideias de divisão entre números naturais começam a aparecer no 2º ano do Ensino Fundamental e se prolongam nos demais anos. A divisão é uma operação mais complexa que as operações até então abordadas, sendo a primeira razão a seguinte:

> Enquanto na adição, na subtração e na multiplicação temos dois valores de entrada e obtemos apenas um terceiro valor de saída, que é o resultado da operação, a divisão com naturais envolve dois valores como resultado: o quociente e o resto. [7, p104]

Além disso,

> ... considerá-la [a divisão] como inversa da multiplicação nos naturais ou nos inteiros não é apenas um problema de falta de formalismo matemático. Como a divisão devolve dois valores, mesmo sua interpretação informal como processo inverso da multiplicação não é imediata. No processo inverso, para resgatar um dos valores (dividendo ou divisor), precisamos de três informações – quociente, resto e dividendo (ou divisor). Nos naturais (assim como nos inteiros), a divisão só pode ser considerada diretamente como processo inverso da multiplicação se o resto for igual a zero. Por outro lado, **diferentemente do que acontece com a subtração, a divisão euclidiana é sempre possível em $\mathbb{N}$.** [7, p144] (grifo das autoras)

Já no segundo segmento do Ensino Fundamental, ao ampliar-se o universo numérico para o conjunto dos números racionais, geralmente (mas não sempre), muda a forma de expressar-se o resultado de uma divisão. Pode-se, agora, associar a dois números naturais (ou, mais geralmente, dois números racionais) como valores de entrada, sendo o segundo diferente de zero, apenas um número racional como resultado. Só nesse momento a divisão torna-se efetivamente a operação inversa da multiplicação.

O objetivo deste trabalho é ressaltar a complexidade da operação de divisão e defender a necessidade de discuti-la com licenciandos e com professores, levando em conta aspectos essenciais dessa operação e que são muitas vezes ignorados. Nele são apresentadas reflexões e problemas que contemplam os vários níveis e significados da Divisão Euclidiana e nos quais o resto tem papel fundamental e, muitas vezes, preponderante. Constitui-se também em um convite ao professor para refletir sobre a Divisão Euclidiana ao longo de todo o Ensino Fundamental.

A falta de registro sobre tais reflexões nos livros didáticos brasileiros e nos Manuais do Professor corrobora os pressupostos apontados por Deborah Ball sobre cursos de formação de professores a nível de graduação nos Estados Unidos, conforme ressaltado por Rangel em [6, p26] :

> a autora identifica e questiona três suposições que se manifestam de forma implícita nos modelos adotados por esses cursos: (1) os conteúdos da matemática escolar são simples e comumente entendidos; (2) portanto, não precisam ser reaprendidos no curso universitário; e (3) as disciplinas de matemática universitária são suficientes para equipar os futuros professores com um saber amplo e profundo da matemática escolar. Desta forma, Ball não atribui os resultados do estudo a qualquer "deficiência" particular dos participantes da investigação, e sim a características estruturais dos cursos de formação inicial de professor de Matemática nos Estados Unidos. Essas características estão relacionadas com uma concepção particular sobre o saber de conteúdo necessário para o ensino. Segundo essa concepção, a matemática a ser ensinada no ensino básico é "simples demais" para se constituir em objeto de cursos universitários, podendo ser alcançada apenas por meio do estudo dos conteúdos próprios da matemática universitária (que não são aqueles que o professor ensinará em sua futura prática docente). Sob essa perspectiva, não há profundidade nos conteúdos da Matemática escolar e esses não exigem um saber que seja específico da tarefa de ensinar, ou seja, um saber próprio do professor – Dessa forma, o saber de conteúdo necessário ao professor é compreendido como uma "versão simplificada" do saber de conteúdo *per se*, sendo reduzido ao conhecimento de algumas definições e à execução de procedimentos e algoritmos.

Podemos citar como exemplo precisamente a divisão. Um curso de Licenciatura pode lidar com a divisão euclidiana no conjunto dos números inteiros simplesmente enunciando o Teorema da Divisão Euclidiana, sem se preocupar em discutir com os futuros professores diferentes processos para se encontrar o quociente em uma divisão euclidiana, ou de como estimular o estudante a chegar ao algoritmo usual (que se revela muito útil para, futuramente, determinar a representação decimal de um número racional).

No Minicurso "A Divisão Euclidiana no Ensino Fundamental – e o resto?", oferecido no VII Congresso Internacional de Ensino de Matemática em outubro de 2017, focou-se na divisão nos anos iniciais do Ensino Fundamental. No presente trabalho e no Minicurso oferecido no III Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática, explora-se essa operação também no segundo segmento do Ensino Fundamental, mostrando sua utilidade mesmo quando o universo numérico do estudante já é o conjunto dos números racionais.

No que segue, iniciam-se as reflexões com a apresentação da fundamentação matemática da Divisão Euclidiana, seguida pelos significados da divisão. Baseada em trabalhos anteriores [4] , [8] e [9] é apresentada uma descrição de como a divisão é abordada em alguns livros didáticos, tanto nos anos iniciais como no segundo segmento do Ensino Fundamental, permeada também por comentários das autoras e por comparações com as orientações dos documentos oficiais. Encerra-se este trabalho com propostas de atividades que, acreditamos, auxiliam a promover a compreensão sobre a operação de Divisão Euclidiana, tanto para os anos iniciais como para o segundo segmento do Ensino Fundamental.

No apêndice, a título de completude, é apresentado um apanhado das orientações relativas à Divisão Euclidiana nos documentos Parâmetros Curriculares Nacionais e Base Nacional Comum Curricular (este último ainda não oficial).

Capítulo 2

Fundamentação Matemática

2.1 A divisão no universo numérico $\mathbb{N}$

A divisão euclidiana (ou Divisão com Resto) é a única divisão que faz sentido no universo numérico $\mathbb{N}$, que é o universo numérico trabalhado nos anos iniciais.

Nesta sessão são apresentados os resultados essenciais sobre essa operação com provas que, acreditamos, podem ser adaptadas para a escola, fazendo uso do conceito de múltiplos de um número (no caso, do divisor).

Comecemos com um exemplo para ilustrar o processo.

***Exemplo 1*:** Dividir 45 por 6.

Iniciamos fazendo uma lista dos múltiplos de 6 até atingirmos ou ultrapassarmos o valor 45:

Tabela 2.1: Os primeiros múltiplos de 6

0×6	1×6	2×6	3×6	4×6	5×6	6×6	7×6	8×6
0	6	12	18	24	30	36	42	48

Neste exemplo, o valor 45 não foi atingido pelos múltiplos de 6, mas ao ultrapassarmos tal valor, é possível identificar os dois múltiplos consecutivos de 6 que cercam o número 45:

$$7 \times 6 = 42 < 45 < 48 = 8 \times 6.$$

Além disso, não existem outros múltiplos com tal propriedade, pois

– se substituirmos 42 por qualquer outro múltiplo de 6 menor do que 42, para chegar-se ao valor 45, deveremos adicionar um valor maior do que 6, e então 45 não estará entre esse múltiplo de 6 e o múltiplo consecutivo a ele;

– se substituirmos 42 por um múltiplo de 6 maior que 42, por exemplo 48, então este já ultrapassa 45 e 45 não será cercado por tal múltiplo e o seu consecutivo.

Assim, $42 = 7 \times 6$ é o maior múltiplo de 6 que não ultrapassa 45 e 3 é o resultado da subtração $45 - 7 \times 6$.

Dizemos então que 7 é o quociente e que 3 é o resto da divisão euclidiana de 45 por 6. E os números originalmente dados, 45 e 6, são chamados, respectivamente, de dividendo e divisor dessa divisão euclidiana.

O processo descrito acima pode ser generalizado para quaisquer números naturais, o que nos leva ao seguinte resultado.

***Teorema da Divisão Euclidiana*:** Dados dois números naturais a, b sendo $b \neq 0$, sempre existem e são únicos os números naturais q e r tais que

$$a = qb + r \quad \text{e} \quad 0 \leq r < b.$$

***Definição*:** Nas condições do teorema anterior, os números q e r são chamados, respectivamente, o quociente e o resto da divisão (euclidiana) de a por b, e os números a e b são chamados, respectivamente, de dividendo e divisor dessa Divisão Euclidiana.

***Demonstração do Teorema*:**

Existência:

1º caso $a < b$: basta tomar $q = 0$ e $r = a$.

2º caso $a \geq b$: como, por hipótese $b \neq 0$, temos que $b \geq 1$. Multiplicando os termos dessa desigualdade por a (que é também não nulo, já que $a \geq b$) obtemos $ab \geq a$; ou seja, o múltiplo ab de b ou é igual a a, ou ultrapassa a. Assim, o maior múltiplo de b menor do que ou igual a a é um dos múltiplos de b da lista a seguir,

$$0b, 1b, 2b, 3b, 4b, \ldots, ab.$$

Portanto, existe um número natural q, tal que qb está nessa lista finita de múltiplos de b e satisfaz $qb \leq a$ e $(q+1)b > a$, ou seja, a está entre dois múltiplos consecutivos de b, precisamente

$$qb \leq a < (q+1)b.$$

Note que para tal q temos, $a < (q+1)b = qb + b$ e portanto $a - qb < b$. Assim, tomando $r = a - qb$ e obtemos

$$a = qb + r \quad \text{com} \quad 0 \leq r < b.$$

Unicidade:

Note que o número q determinado acima é especial, a saber, é tal que qb é o maior múltiplo de b menor ou igual a a. Vamos mostrar que se tomamos $t < q$ ou $t > q$ a diferença $R = a - tb$ ou não será menor que b ou não será positiva, de modo que a igualdade $a = tb + R$ não atende às condições especificadas no enunciado do Teorema. De fato,

$-$ Se $t < q$ então $tb < qb \leq a$. Subtraindo tb dos termos dessa desigualdade obtemos $0 < qb - b \leq a - tb$, ou ainda, $0 < (q - t)b \leq a - tb$.

Como $t < q$ temos $q - t \geq 1$ e assim, $b \leq (q - t)b \leq a - tb$. Portanto a diferença $a - tb$ não atende a condição $0 \leq qb - tb < b$.

$-$ Se $t > q$ temos $t \geq q + 1$ e, multipllicando os termos da desigualdade por b, obtemos $tb \geq (q + 1)b$ logo $qb \leq a < (q + 1)b \leq tb$, o que acarreta $a - tb \leq 0$. Portanto a diferença $a - tb$ não atende a condição $0 \leq qb - tb < b$.

Assim, o quociente que gera o menor resto é único e portanto o resto também é único. □

***Observação 1*:** Embora crucial, muitas vezes não é enfatizada, na Escola Básica, a unicidade do quociente e do resto. O Problema 1, do Capítulo 5 e o Problema 10, do Capítulo 6 , trazem situações em que a unicidade é crucial e a discussão sobre ela é oportunizada.

***Observação 2*:** Foi salientado que o quociente q gera o maior múltiplo possível, satisfazendo $bq \leq a < (q+1)b$ e o resto r é a menor sobra, ou seja, $0 \leq r < b$.

Uma questão natural que surge é:

E por que no enunciado do Teorema da Divisão Euclidiana tem-se uma restrição sobre o resto e não se tem uma restrição sobre o quociente?

Na verdade essas duas condições revelam-se equivalentes, isto é

$$qb \leq qb + r < qb + b = (q + 1)b \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq r < b.$$

Assim, uma vez demonstrada tal equivalência, qualquer uma das condições implica a outra, e então não é necessário, no enunciado do Teorema, mencionar as duas condições, bastando ressaltar apenas uma delas. Passamos então a demonstrar tal equivalência.

***Prova da equivalência entre as condições "maior quociente" e "menor sobra"*:** Suponhamos que, dados números naturais a, b sendo $b \neq 0$, tenhamos q, r tais que

$$a = qb + r \qquad (*)$$

Queremos mostrar que são equivalentes as condições " r é o menor natural possível satisfazendo $(*)$" e "q é o maior natural possível satisfazendo $(*)$." Simbolicamente:

$$0 \leq r < b \quad \Longleftrightarrow \quad qb \leq qb + r < qb + b = (q + 1)b.$$

Suponhamos $0 \leq r < b$. Então, somando o múltiplo qb de b em todos os membros dessa desigualdade, obtemos $qb \leq qb + r < qb + b = (q + 1)b$. Usando $(*)$, substituímos $a = qb + r$ na desigualdade anterior, obtendo $qb \leq a < (q + 1)b$, ou seja, se $0 \leq r < b$, então o quociente q é o maior natural possível satisfazendo $(*)$, pois o múltiplo consecutivo $(q + 1)b$ já ultrapassa a.

Reciprocamente, se q é o maior é o maior natural possível satisfazendo $(*)$, então $qb \leq a < (q + 1)b$. Usando $(*)$, substituímos o valor de a na desigualdade

acima, obtendo
$$qb \leq qb + r < (q+1)b = qb + b;$$
subtraindo qb em todos os membros da desigualdade acima, obtemos $0 \leq r < b$, ou seja, se
$$qb \leq a < (q+1)b$$
então r é a menor sobra possível. □

2.2 A divisão de números naturais em $\mathbb{Q}$

Ao ampliar-se o universo numérico para o conjunto dos números racionais, não muda a forma de expressar-se o resultado das operações de adição, subtração e multiplicação, no seguinte sentido: se operarmos com números naturais dentro do universo $\mathbb{Q}$, os resultados ainda serão números naturais. Mas o mesmo não acontece com a operação de divisão. A explicação para esse fato remete-nos às estruturas algébricas de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$: o conjunto $\mathbb{N}$, munido das operações de adição e de multiplicação, não tem a estrutura de corpo, como $\mathbb{Q}$. Uma das consequências do fato de $\mathbb{Q}$ ser um corpo é que todo número racional b diferente de zero admite um inverso multiplicativo, isto é, existe um único número racional que multiplicado por b resulta em 1. Por ser único, esse número racional pode ser denotado por b^{-1}. A operação de divisão em $\mathbb{Q}$, não mais euclidiana, é então definida da seguinte forma: dados $a, b \in \mathbb{Q}$, sendo $b \neq 0$, define-se a divisão de a por b como sendo o números racional ab^{-1}. Assim, a divisão em $\mathbb{Q}$, tem apenas um *output*. Por exemplo,
$$2 \div 3 = 2 \times 3^{-1} = \frac{2}{3}.$$
É claro que a passagem da divisão euclidiana para a divisão em $\mathbb{Q}$ deve ser enfatizada e ficar muito clara para o estudante. Mas também deve ser ressaltado ao estudante que existem situações no universo numérico $\mathbb{Q}$ nas quais a divisão euclidiana (entre números naturais) ainda se faz presente e útil (ver Problemas 11 e 12, no Capítulo 6). Em outras palavras, dentro do universo numérico $\mathbb{Q}$, às vezes o resultado da divisão de 7 por 3 resulta em quociente 2 e resto 1, outras vezes resulta em $7/3$. Este fato nem sempre é ressaltado para o aluno; além disso, o aluno nem sempre reconhece quando utilizar uma forma de expressar o resultado e quando utilizar a outra.

Capítulo 3

Significados da Divisão

No primeiro segmento do Ensino Fundamental, são explorados os significados da divisão que dizem respeito à equipartição e à medida. No significado de equipartição (divisão em partes iguais), o dividendo é uma grandeza qualquer enquanto o divisor é apenas um número natural não nulo. É o que acontece, por exemplo, quando 20m de fita são cortados em 5 partes de igual comprimento. O quociente e o resto, neste caso, são de mesma grandeza que o dividendo. É também esse significado que está evocado no exemplo a seguir.

***Exemplo 2*:** Para a gincana da escola participarão 420 alunos. Quer-se formar equipes com o mesmo número de membros.

i) É possível formar-se 7 equipes? Em caso afirmativo, quantos membros terá cada equipe?

ii) É possível formar-se 17 equipes? Justifique.

Quando se introduz o significado de medida (quantas vezes cabe), o dividendo e o divisor são grandezas de mesma espécie, e quer-se saber quantas vezes o divisor cabe no dividendo. Em outras palavras, toma-se o divisor como unidade e quer-se medir o dividendo com tal unidade. Nesse significado, o quociente é apenas um número (que expressa quantas vezes cabe a unidade no dividendo), e o resto é de mesma grandeza que o dividendo e o divisor. É pensando nesse significado que se faz uso da divisão quando, por exemplo, quer-se cortar 20m de fita em pedaços de 5m e pergunta-se o número máximo de pedaços. É também esse significado que está evocado no exemplo a seguir.

***Exemplo 3*:** Considerando o mesmo contexto e as mesmas condições do Exemplo 2, pergunta-se:

i) sabendo-se que cada equipe tem 21 membros, quantas equipes foram formadas para a gincana?

ii) É possível ter-se equipes com 17 membros? Justifique.

Os Exemplos 1 e 2 evidenciam que os significados de equipartição e de medida também podem ser aplicados a situações envolvendo a divisão euclidiana. Uma pergunta natural e pertinente que pode surgir ao leitor é

Por que os significados de equipartição e de medida são equacionados por uma mesma operação, no caso a divisão?

No *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica*, Volume I, é ressaltada uma estrutura comum a ambos os casos: tanto na equipartição como no significado de medida, tem-se um todo, o tamanho de uma parte e o número de partes, e "o todo e a parte correspondem a quantidades de mesma espécie, mas o número de partes não." [7, p108] A diferença entre equipartição e medida está no componente desta estrutura que se quer descobrir, a saber, o tamanho de uma parte ou o número de partes.

Os significados de equipartição e de medida são, basicamente, os únicos significados da divisão trabalhados até o quinto ano. No entanto, revela-se indispensável que sejam retomados e aprofundados no 6º ano e ainda nos anos seguintes, por vários motivos:

i) para seguir orientações oficiais (ver Apêndice);

ii) pela complexidade da operação de divisão, como apontado na Introdução;

iii) pelo fato de que o estudante, ao longo do segundo segmento do Ensino Fundamental, é apresentado a outros significados associados a tal operação.

De fato, os significados de equipartição e de medida não são os únicos significados da operação de divisão. Existem também situações em que dividendo e divisor são grandezas de espécies diferentes, gerando-se um quociente que pode ou não ser da mesma espécie do dividendo ou do divisor. Tais situações são aprofundadas com os estudantes quando o universo numérico já é o dos números racionais e podem ser encontradas, por exemplo, na geometria.

***Exemplo 4*:** Dados a área de um retângulo e o seu comprimento, pergunta-se qual a largura do mesmo.

***Exemplo 5*:** Dados o volume de um cubo e o comprimento do seu lado, pergunta-se qual a área do mesmo.

O Exemplo 4 é uma situação de divisão na qual o quociente é de mesma espécie que o divisor; já o Exemplo 5 traz uma situação de divisão na qual o quociente é de espécie diferente de qualquer uma das grandezas relativas ao dividendo e ao divisor.

Também em contextos de razão (comparação) entre duas grandezas pode estar envolvida a divisão. Na Base Nacional Comum Curricular, o conteúdo razão faz parte especificamente dos Objetos de Conhecimento para o 7º ano. No entanto, já nos anos iniciais, pode aparecer tal comparação fazendo uso de números naturais, como no exemplo a seguir.

***Exemplo 6*:** Com 5 copos de suco concentrado foram preparados 20 copos de suco diluído. Complete a frase a seguir, encontrada na embalagem da caixa do suco concentrado: Para cada copo de suco concentrado acrescente .... copos de água.

Também na comparação de grandezas de espécies diferentes pode-se envolver a divisão, originando como quociente uma grandeza de uma terceira espécie. É o caso, por exemplo, quando comparamos distância e tempo pela divisão da primeira quantidade pela segunda quantidade, gerando como resultado um quociente relativo a uma terceira grandeza, no caso a velocidade média.

***Exemplo 7*:** O atleta Usain Bolt foi recordista nos 100 metros rasos em dois momentos, como indica a tabela a seguir. Determine sua velocidade média (em Km/h).

Tabela 3.1: Fonte: `https://pt.wikipedia.org/wiki/100_metros_rasos`

Tempo (em seg)	Atleta	Data	Local
9,58	Usain Bolt	19 de agosto de 2009	Berlim
9,63	Usain Bolt	5 de agosto de 2012	Londres

Cabe ressaltar que nos Exemplos 4, 5, 6 e 7 não é possível identificar, entre dividendo, divisor e quociente, uma quantidade parcial nem uma quantidade total nem um número de partes.

> "A área de um retângulo não é um 'todo', do qual os comprimentos dos lados são 'partes'; e não faz sentido perguntar quantas vezes um lado 'cabe' na área. Da mesma forma, uma distância percorrida não é um 'todo', do qual o tempo gasto ou a velocidade são 'partes'; e não faz sentido perguntar quantas vezes o tempo 'cabe' na distância." [7, p112]

Por isso, no *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica*, Volume I, as situações mencionadas e ilustradas pelos exemplos 4, 5, 6 e 7 são enquadradas no que é lá chamado significado exterior da divisão:

> **significado exterior:** são dadas duas quantidades relativas a grandezas de espécies diferentes (dividendo e divisor), e determina-se uma quantidade relativa a uma grandeza que pode não ser da mesma espécie de uma das quantidades dadas (quociente). [7, p111]

Encerramos este capítulo apresentando um resumo sobre os significados da divisão euclidiana que se encontra em [7, p115].

multiplicação		**divisão**	
significado	características	significado	características
aditivo	Os fatores são a *quantidade parcial* e o *número de vezes*. O resultado é a *quantidade total*, que é de mesma espécie da quantidade parcial.	*repartição*	O dividendo é a *quantidade total*, e o divisor é o *número de partes*. O quociente é a *quantidade parcial*, que é de mesma espécie da quantidade total.
		medida	O dividendo é a *quantidade total*, e o divisor é a *quantidade parcial*, que são de mesma espécie. O quociente é o *número de partes*.
exterior	Os fatores são *quantidades que podem ou não ser de mesma espécie*. O produto é uma *quantidade de outra espécie*. Não cabe a associação dos termos a *todo* e *parte*.	*exterior*	O dividendo e o divisor são *quantidades de espécies diferentes*. O quociente é uma *quantidade que pode ou não ser da mesma espécie de uma das quantidades operadas*. Não cabe a associação dos termos a *todo* e *parte*.

Figura 3.1: Quadro-resumo dos significados associados às operações de multiplicação e de divisão

Capítulo 4

A Divisão Euclidiana nos Livros Didáticos

A operação de divisão começa a ser explorada nos livros didáticos brasileiros já no segundo ano do ensino fundamental, ainda que de maneira não formalizada, seguindo recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [ver Apêndice]. Em [4], foram analisadas 5 coleções para os anos iniciais, sendo 4 aprovadas no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) 2015 e uma no PNLD 2007. Em todas as coleções analisadas, começa-se explorando a ideia de equipartição (divisão em partes iguais) e, num segundo momento, nesse mesmo ano, explora-se também a ideia de medida (quantas vezes cabe). Estão portanto de acordo com a orientação dos PCN de serem abordados os diferentes significados da operação (para esse nível escolar) [1, p72]. Tais significados são revistos nos anos seguintes, mas é a equipartição que recebe, em geral, nas coleções analisadas, maior ênfase na abordagem da divisão. A ideia de repartição está presente nas experiências das crianças desde muito cedo, por exemplo, repartindo balas entre os amigos. Segundo os PCN [1, p45], os alunos trazem, de fato, para a escola conhecimentos e ideias construídas na sua vivência do dia a dia, e chegam à sala de aula com certo conhecimento sobre algumas noções matemáticas que devem ajudar o professor no planejamento de suas aulas visando uma melhor aprendizagem.

Na totalidade das coleções analisadas, a divisão é introduzida no 2º ano, logo após a multiplicação. No entanto, com exceção da coleção aprovada no PNLD 2007, a divisão aparece sempre com um dividendo que é múltiplo do divisor. Não há qualquer menção a resto nos primeiros exemplos de divisão, o que vai contra a orientação dos PCN, e imputa uma falta de autenticidade aos problemas supostamente contextualizados. Além disso, o aluno é levado a pensar que a divisão é análoga às operações de adição, subtração e multiplicação, no sentido de ter também um só valor como resultado, o quociente. No 3º ano (1º ciclo), nem sempre dando-se ênfase ao resto da divisão nem à restrição sobre ele, o aluno já é apresentado ao algoritmo usual da divisão. Todavia, esse (o algoritmo usual) não é o único processo para encontrar o quociente e o resto. Não é inicialmente oportunizada aos alunos uma discussão que os estimule a criar algoritmos alterativos para dividir, o que lhes possibilitaria refletir sobre a divisão e melhor compreender o processo como um todo. Por exemplo, o significado de medida oportuniza o método das subtrações sucessivas, que faz uso de estimativas e parte das relações entre a divisão e a subtração. (ver Figura 4.1)

A partir desse ano escolar, não se percebe a exploração dos termos da divisão. A divisão euclidiana é tratada, predominantemente, com ênfase no(s) algoritmo(s), sendo o resto tratado apenas como sobra.

Em [8], foram analisados 8 livros didáticos de 6º ano que retomam a Divisão Euclidiana, todos aprovados no Programa Nacional do Livro Didático. Na maioria deles é visível a falta de convenção para o termo divisão. Especificamente, não é mencionado explicitamente que, na Divisão Euclidiana, o resto deve ser menor que o divisor ou que o quociente deve ser o maior possível, ficando incompleta a caracterização da Divisão Euclidiana. Nessas coleções analizadas os exercícios propostos requerem apenas cálculos ou abordam quase que exclusivamente as ideias associadas ao quociente; além disso, a chamada relação fundamental $(a = bq+r)$ é abandonada logo após as ideias iniciais e a apresentação de exemplos. No entanto, cabe salientar que é tal relação que ampara o processo inverso, não como operação inversa da multiplicação, mas sim como processo de recuperação do divisor ou do dividendo (ver Problema 1, à página 21).

Explicação em palavras	Explicação com simbologia	
Em 845 cabem no mínimo 3 vezes a quantidade 15	845 -45	15 $\longrightarrow 3$
Como ainda sobram 800, vemos que ainda cabem 10 vezes a quantidade 15	800 -150	$\longrightarrow 10$
Como ainda sobram 650, vemos que ainda cabem 20 vezes a quantidade 15	650 -300	$\longrightarrow 20$
Como ainda sobram 350, vemos que ainda cabem 20 vezes a quantidade 15	350 -300	$\longrightarrow 20$
Como sobram 50, vemos que ainda cabem 3 vezes a quantidade 15 e o resto é 5 unidades	50 -45	$\longrightarrow 3$
	5	

$3 + 10 + 20 + 20 + 3 = 56$ é o total de vezes que o 15 cabe em 845

Figura 4.1: Exemplo de método das subtrações sucessivas

Capítulo 5

Reflexões e Sugestões para os Anos Iniciais

No que segue, trazemos algumas reflexões que buscam sensibilizar o professor sobre vários aspectos importantes da Divisão Euclidiana, geralmente não contemplados nos livros didáticos nem nos Manuais do Professor. Permeando tais reflexões, são apresentadas também sugestões de problemas que podem ser adaptados para a sala de aula e que contemplam esses aspectos.

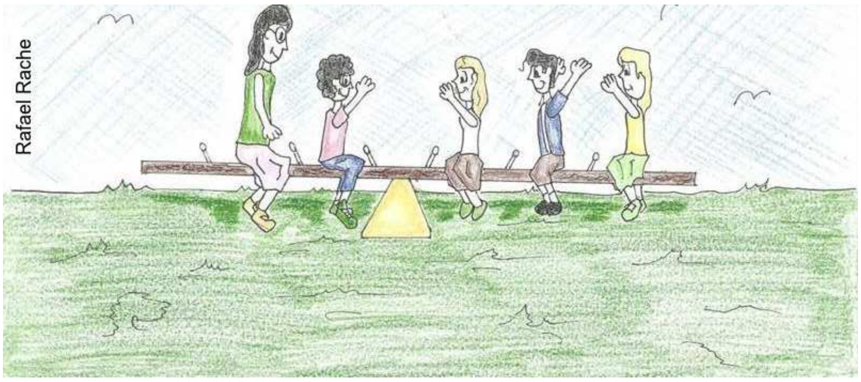

Figura 5.1: Será que, para uma criança, equipartição (repartição em partes iguais) é sempre evidente?

***Reflexão 1*:** São sinônimos os termos *repartição*, *distribuição*, *agrupamento* e *divisão*?

O dicionário de sinônimos *online* https://www.sinonimos.com.br/ nos informa que sim. No entanto, em Matemática, um dos significados da divisão é de distribuição em partes iguais (ou equipartição), e não simplesmente repartir ou distribuir. A Figura 5.1 pode ser utilizada em sala de aula como motivação para essa reflexão, objetivando uma sensibilização do estudante para o conceito de equidistribuição. De fato, em um primeiro momento, cabe ressaltar que, nessa figura, a distribuição do número de pessoas não é em partes iguais. No entanto, a gangorra está equilibrada, então existe uma equidistribuição, a saber, do peso total das pessoas nela sentadas. Com isso, quer-se ainda salientar que distribuições que não são equidistribuições fazem também parte do dia a dia das crianças, de modo que, para a criança, *divisão* não pressupõe *em partes iguais*.

Figura 5.2: Será que uma sobra igual a zero é o resto mais frequente em uma repartição que faz parte do dia a dia de uma criança?

***Reflexão 2*:** É um começo natural de discussão sobre a divisão entre números naturais tratar-se exclusivamente com dividendos que são múltiplos do divisor? São realmente as situações de resto zero as divisões que acontecem com maior frequência no dia a dia do estudante?

Na maioria dos livros didáticos dos anos iniciais analisados, toda equidistribuição exemplificada produz um resto igual a zero e, muitas vezes, o resto nem sequer é mencionado. Apesar de os documentos oficiais [1, p29] recomendarem situações contextualizadas, é evidente que essas não são as situações mais frequentes no dia a dia da criança, como sugere a Figura 5.2.

***Reflexão 3*:** Será que é claro para o estudante que, mesmo em situações de equipartição, a sobra pode ser maior do que o "divisor"?

Nos livros didáticos não são trabalhadas situações, como a da Figura 5.3, em que é utilizada a divisão em partes iguais, porém a sobra é maior do que o "divisor".

Figura 5.3: Será que em todas as situações de equipartição do dia a dia de uma criança a sobra é menor que o divisor?

Todas as reflexões até aqui apresentadas evidenciam que, em Matemática, os termos *repartição*, *distribuição* e *divisão* não são sinônimos, bem como a necessidade de uma convenção que deve ser estabelecida com o estudante sobre o termo divisão, a saber, *a Divisão Euclidiana pressupõe uma equidistribuição e uma sobra menor do que o divisor*.

O Problema 1 a seguir busca explorar essa necessidade. Ele foi adaptado de uma atividade de [5], uma coleção aprovada no PNLD 2007 e a única, entre as coleções analisadas, que, já na 2^a série (hoje 3^o ano), contempla a divisão com um resto diferente de zero. Objetiva-se nesse problema promover, nos anos iniciais, uma sensibilização para a Divisão Euclidiana, que pode ser iniciada com material concreto.

***Problema 1*:** Pedro ganhou 38 balas e quer oferecer uma quantidade igual de balas a cada um de seus 7 amigos.

i) Para ajudá-lo na distribuição, complete a segunda e a terceira colunas da Tabela 5.1 a seguir, evidenciando a operação realizada, conforme o exemplo.

O contexto do Problema 1 imita a distribuição em um jogo de cartas: distribui-se uma carta para cada participante para depois distribuir-se a segunda carta para todos. A mesma prática é aplicada pelas crianças também em outras situações.

Essa atividade não traz em si nenhuma novidade, mas diferencia-se na forma com que pode ser explorada, pois oportuniza várias discussões. Por exemplo, o professor pode estimular os alunos a registrarem na segunda e na terceira colunas,

Tabela 5.1: Distribuição das balas

Distribuição das balas	Quantidade de balas distribuídas	Quantidade de balas que sobram
1 bala para cada um dos 7 amigos	$1 \times 7 = 7$	$38 - 1 \times 7 = 31$
2 balas para cada um dos 7 amigos		
3 balas para cada um dos 7 amigos		
4 balas para cada um dos 7 amigos		
5 balas para cada um dos 7 amigos		
6 balas para cada um dos 7 amigos		
7 balas para cada um dos 7 amigos		

além do valor, as operações realizadas para obtê-lo, como na Figura 5.4, e, a partir daí, algumas questões podem direcionar para as ideias da divisão euclidiana, tais como

ii) Qual é o maior número de balas que cada amigo de Pedro pode receber? Sobram balas nessa distribuição? Quantas?

iii) A qual distribuição corresponde a menor sobra?

iv) É coincidência a distribuição com o maior número de balas por amigo ser a mesma que resulta em menor sobra?

v) É possível distribuir 6 balas para cada um dos 7 amigos? Por quê?

Esses itens oportunizam uma comparação entre as várias distribuições em 7 partes iguais e evidenciam a independência entre a questão "em partes iguais" e a questão "sobra", no sentido de uma não implicar a outra. Além disso, os itens (ii), (iii) e (iv) ressaltam ao estudante que é única a distribuição em que a sobra é menor que o número de amigos e que ela coincide com o maior número de balas por amigo. De fato, se olharmos a terceira coluna da tabela preenchida, vê-se que o quociente vai aumentando e o resto vai diminuindo. Este fato deve ser não só claro para o estudante, mas requer dele uma argumentação completa. Cabe observar que, com tal discussão, está-se enfatizando o pensamento matemático, baseando-se na argumentação sobre as diferentes possibilidades de repartição e sobre a escolha de qual delas será convencionado denominar-se *divisão*, a saber, a única que produz o maior número de balas por amigo e a menor sobra.

A discussão e a organização da escrita na Tabela 5.1, por exemplo como a da Figura 5.4, devem levar os alunos a concluírem que a distribuição com 5 balas para

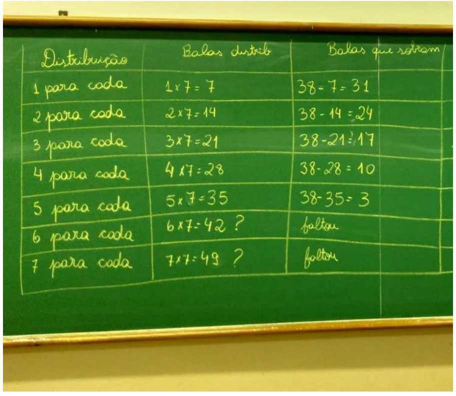

Figura 5.4: A tabela do Problema 1 preenchida durante o Minicurso

cada amigo com sobra de 3 balas é a única que tem a menor sobra possível e o maior número de balas por amigo possível, oportunizando não só a definição (essa distribuição com maior número de balas por amigo e menor sobra é chamada de Divisão Euclidiana de 38 por 7, sendo 5 denominado o quociente, 3 o resto, 7 o divisor e 38 o dividendo) como a ênfase, desde o início, na sua caracterização: **o resto na divisão euclidiana deve ser sempre menor que o divisor**.

O Problema 1, com a discussão proposta anteriormente, bem como os exemplos do Capítulo 3, seja com o significado de equidistribuição, seja com o significado de medida, acompanhados de discussão análoga, evidenciam

- a complexidade da operação nos anos iniciais: dois *outputs*, e ainda tem-se uma restrição sobre o resto;

- a necessidade de uma clareza quanto à nomenclatura, que leva a uma definição precisa do que significa a divisão euclidiana.

***Reflexão 4*:** Não tem a divisão em $\mathbb{N}$ uma vida independente da multiplicação, diferentemente do que acontece com a adição e a subtração?

Como já ressaltado na Introdução, a subtração não é uma operação em $\mathbb{N}$ no sentido estritamente matemático do termo, pois nem sempre consegue fornecer como resultado um número natural quando dois elementos de $\mathbb{N}$ quaisquer são operados. No entanto, a subtração, quando possível, aponta para o processo inverso da adição e vice-versa. Por exemplo, $5 - 3 = 2$ se e só se $3 + 2 = 5$. Já o mesmo não acontece com a divisão e a multiplicação. A divisão euclidiana é sempre possível em $\mathbb{N}$, mas a operação de multiplicação só é o processo inverso da divisão euclidiana no caso em que o resto dessa divisão é zero. Por exemplo, não se consegue explicar o processo inverso da divisão euclidiana de 38 por 7 fazendo-se uso exclusivamente da multiplicação, já que $38 = 5 \times 7 + 3$.

Na sala de aula, o mesmo contexto do Problema 1 pode oportunizar a recuperação do número total de balas, se acrescentarmos ao enunciado o item a seguir, que objetiva explorar a prova real de uma divisão euclidiana.

vi) Preencha a última coluna da tabela recuperando agora o número total de balas utilizando os dados das duas colunas anteriores.

Por exemplo, a partir da quarta linha da Tabela 5.1 acima, obtemos

Tabela 5.2: Recuperando o total de balas

Distribuição das balas	Quantidade de balas distribuídas	Quantidade de balas que sobram	Recuperando o total de balas
4 balas para cada um dos 7 amigos	$28 = 4 \times 7$	$10 = 38 - 4 \times 7$	$38 = 4 \times 7 + 10$

Com a quarta coluna da tabela 5.2 completamente preenchida como na Figura 5.5, pretende-se evidenciar que, apesar de todas as linhas da quarta coluna da tabela original recuperarem o total de balas, é apenas a igualdade

$$38 = 7 \times 5 + 3$$

que provém da divisão euclidiana. É essa igualdade que proporciona o processo inverso dessa operação, ou seja, que estabelece a "prova real da divisão euclidiana", em muitos livros didáticos chamada de "relação fundamental da divisão". Reforçamos, assim, a inadequabilidade da frase "Como na adição e subtração, a divisão é a operação da multiplicação."

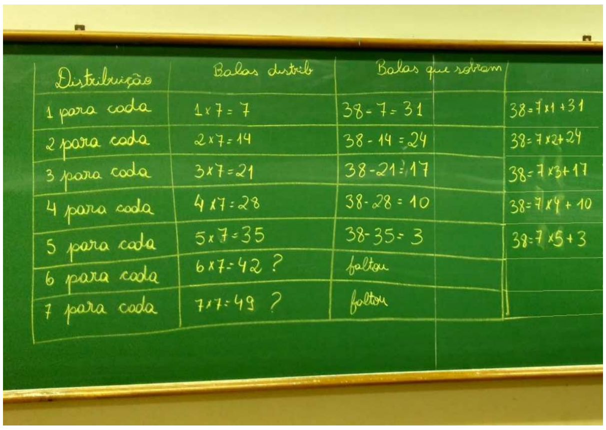

Figura 5.5: A tabela do Problema 1 (vi) preenchida durante o Minicurso

Salientamos também que tal sistematização proporciona uma introdução a expressões numéricas com significado.

O Problema 2, a seguir, envolve equipartição e contempla, em um mesmo contexto e com uma mesma divisão, situações em que a solução é ora o quociente, ora é o resto, ora é nem o quociente nem o resto, evidenciando mais um ponto delicado para o estudante, de quem é requerido o completo entendimento do processo da divisão euclidiana e a interpretação dos resultados obtidos (quociente e resto). Situações como esta não estão em geral contempladas nos livros didáticos dos anos iniciais. Atenção para a resposta não única para o item (b), que estimula a argumentação por parte do estudante.

***Problema 2*:** Haverá um passeio para os 178 alunos do 4º ano e seus 7 professores. Pretende-se alugar ônibus com capacidade para 55 passageiros. a) Se todos confirmarem presença, quantos ônibus deverão ser alugados? b) Para que todo ônibus alugado fique lotado, quantas pessoas não confirmadas é preciso ter? Neste caso, quantos ônibus devem ser alugados?

O Problema 3, a seguir, contempla o significado exterior da divisão euclidiana que envolve o princípio multiplicativo da contagem. O problema pode ser proposto após o aluno ter praticado tal princípio, e com ele quer-se também salientar que, em $\mathbb{N}$, o processo inverso da multipllicação só é a divisão (euclidiana) quando a mesma tem resto zero.

***Problema 3*:** Na gincana do sexto ano, as 12 equipes foram identificadas pelas 12 diferentes combinações dos *shorts* com as camisetas que a Escola recebeu de doação. Sabendo que foram doados, ao todo, 3 tipos diferentes de *shorts*, descubra o número de diferentes camisetas doadas.

Encerramos este capítulo salientando que foi opção das autoras não discutir com mais detalhes neste trabalho algoritmos da Divisão Euclidiana, mas não porque tal discussão seja simples, o que não é verdade. Aí há, por exemplo, mais uma questão importante a ser compreendida pelo estudante: em termos do algoritmo usual, começa-se a divisão pelas maiores ordens do dividendo, no lugar de começar-se a operar com as unidades, como nos algoritmos usuais das demais operações. Parte desta discussão é feita em [7, p130-133]

Capítulo 6

Sugestões para o Segundo Segmento do EF

No segundo segmento do Ensino Fundamental, seguindo as orientações da BNCC, deve-se retomar e aprofundar a divisão euclidiana. Os Problemas 4 e 5 a seguir têm precisamente tais objetivos. São questões simples, mas são conduzidas de forma a estimular a argumentação por parte do aluno. O problema 4 diferencia-se dos exercícios usuais nesta etapa por propor respostas para serem avaliadas pelos estudantes; além disso, os estudantes terão que tomar uma posição frente a elas.

***Problema 4*:** A professora Queridinha, que trabalha na EMEF Madre Felicidade, levou 222 balas para serem distribuídas igualmente entre os 12 alunos de sua turma. Logo os alunos se mobilizaram para ajudar a fazer a distribuição. Surgiram diferentes propostas:

– Joãozinho propôs que cada aluno recebesse 17 balas;

– Cláudia sugeriu que cada aluno recebesse 16 balas;

– Fernando propôs que cada aluno recebesse 15 balas.

– Mariana propôs que cada aluno recebesse 19 balas.

a) As propostas acima distribuem as balas em partes iguais entre os 12 alunos da turma?

b) As propostas acima são todas possíveis/viáveis?

c) Quantas balas sobrarão na distribuição feita por Joãozinho, Cláudia, Fernando e Mariana? Complete a tabela a seguir.

Tabela 6.1: Sobras nas propostas

Joãozinho: sobrarão ______ balas	Cláudia: sobrarão ______ balas	Fernando: sobrarão ______ balas	Mariana: sobrarão ______ balas

d) Qual a sua proposta de divisão das 222 balas entre os 12 alunos dessa turma?

e) A sua proposta é melhor que as demais? Em que ela se diferencia das demais? E por que essa diferença é importante, na sua opinião?

f) Podemos escrever a proposta de Joãozinho como uma expressão numérica. Veja que havia 222 balas para serem divididas entre os 12 alunos da turma e ele sugeriu que cada um deveria ganhar 17 balas e ainda sobrariam 18 balas.

Teremos então a expressão $222 = 12 \times 17 + 18$ (confira!)

Agora escreva as demais propostas em forma de expressão numérica:

i) expressão numérica relativa à proposta de Cláudia:

ii) expressão numérica relativa à proposta de Fernando:

iii) expressão numérica relativa à proposta de Mariana:

iv) expressão numérica relativa à sua proposta:

No Problema 4 o objetivo com o item (a) é ressaltar ao estudante a equipartição; já o item (b) busca ressaltar ao estudante que existe uma limitação para a equipartição: a última distribuição não é viável. O objetivo com o item (c) é ressaltar a existência de diferentes sobras em uma equipartição e a impossibilidade de completar a distribuição de Mariana. Com o item (e) objetiva-se estimular a comparação e a argumentação, mesmo que os argumentos sejam subjetivos. Não espera-se aqui que seja eleita pela turma a “melhor resposta”. Com o item (f) pretende-se obter expressões numéricas contextualizadas e com significado para o aluno, no caso uma repartição.

Para o 6º ano, propomos, com o Problema 5, também um aprofundamento da divisão euclidiana valorizando o papel desempenhado pelo resto, contemplando situações cíclicas. Ele tem por objetivo que o aluno perceba o processo cíclico, não sendo necessário, portanto, completar a tabela para todas as áreas, bastando fazer uso do resto da divisão do número da área sob análise por 3. Pretende-se com ele também levar o aluno a fazer uso do cálculo como argumento e não como resposta para o problema.

***Problema 5*:** Uma empresa de coleta de lixo dividiu a cidade em 150 áreas para realizar a coleta de lixo nas casas.

Abaixo segue uma tabela de distribuição para a coleta de 3 vezes na semana

Tabela 6.2: Distribuição da coleta de lixo

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
$\times$	1	$\times$	2	$\times$	3	$\times$
$\times$	4	$\times$	5	$\times$	6	$\times$
$\times$	7	$\times$	8	$\times$	9	$\times$
$\times$	10	$\times$	11	$\times$	12	$\times$
$\times$	13	$\times$	14	$\times$	15	$\times$
$\times$	16	$\times$	17	$\times$	18	$\times$
$\times$	...	$\times$	...	$\times$	...	$\times$

Pergunta-se:

a) Em que dia da semana a área 30 deve esperar o caminhão do lixo? E as áreas 45 e 60? O que esses três números têm em comum?

b) Você mora na área 120 e gostaria que o caminhão fizesse a coleta na segunda-feira. Pela distribuição indicada na tabela, isso é possível? Por quê?

c) Você mora na área 80 e gostaria que o caminhão fizesse a coleta na segunda-feira. Pela distribuição indicada na tabela, isso é possível? Por quê?

d) As áreas 40, 55 e 70 recebem a visita do caminhão de lixo no mesmo dia da semana? Por quê?

e) Você percebe alguma relação entre a tabela de distribuição e a operação de divisão?

f) Eu resido em uma área cujo recolhimento do lixo acontece nas quartas-feiras. Minha amiga mora em uma área cujo número é 10 unidades a mais que o número da minha. Dentro do cronograma de coleta dado, é possível determinar o dia de coleta de sua área?

A discussão relativa aos itens (d) e (e) deve ser no sentido de encaminhar o raciocínio de modo a enfatizar o resto da divisão por 3. O último item oportuniza o questionamento sobre a possibilidade de generalização (a coleta de qualquer área será sempre em um mesmo dia da semana?) e é um convite ao aluno para trabalhar com o pensamento genérico.

O Problema 5 permite muitos desdobramentos, mais simples ou menos simples. Por exemplo, talvez o professor ache mais interessante começar com apenas dois dias da semana de distribuição, o que permite que o aluno trabalhe em um primeiro momento apenas com números pares e ímpares no lugar da divisão euclidiana por 2. Já o Problema 6, a seguir, admite mais de uma resposta possível e requer que o aluno crie ele próprio uma estratégia.

***Problema 6*:** Construa, na tabela a seguir, uma proposta de cronograma para a coleta do lixo de modo a atender as seguintes condições:

- o número de áreas atendidas em cada dia de coleta é o mesmo
- a área 18 recebe a visita do caminhão do lixo nas quartas-feiras

Tabela 6.3: Proposta de Cronograma

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado

Os problemas a seguir podem também ser abordados no 6º ano. Os problemas 7 e 8 dizem respeito ao significado de medida (contínua e discreta, respectivamente), o Problema 9 a uma situação de comparação (razão) na qual está envolvida a divisão euclidiana, e o Problema 10 explora o pensamento genérico do aluno, mesmo que a argumentação seja por meio de desenhos.

***Problema 7*: Marcelo foi até a venda para comprar tela de cerca e descobriu que ela é vendida em rolos individuais de 50m. Responda às questões abaixo:

a) Quantos metros ele poderá cercar se comprar 6 rolos de tela ?

b) Se ele quiser cercar um terreno com 420m de perímetro, quantos rolos ele precisará comprar?

c) Com 12 rolos de tela é possível cercar 8 áreas de terrenos retangulares de 95m de perímetro? Se a resposta for negativa, quantos metros faltam para ele poder concluir o trabalho e quantos rolos de tela de cerca Marcelo deverá comprar?

d) Marcelo tem em seu depósito 25m de tela e precisa cercar uma área de 380m de perímetro. Quantos rolos precisará comprar?

***Problema 8*:** Uma indústria de fósforos produz caixas com 40 palitos. Se a produção diária é de 64.267 palitos, responda:

a) Quantas caixas são produzidas em um dia?

b) Sobram palitos ao final de um dia de produção? Quantos?

c) Em três dias, quantas caixas podem ser produzidas?

d) Quantos palitos sobram ao final de três dias de produção?

e) Quantas caixas são necessárias para acondicionar a produção de dois dias?

***Problema 9*:** Com 5 copos de suco concentrado foram preparados 20 copos de suco diluído. Complete a frase a seguir, encontrada na embalagem da caixa de suco concentrado: Para cada copo de suco concentrado acrescente .... copos de água.

***Problema 10*:** Um certo número natural, ao ser dividido por 20, deixa resto 15.

i) É possível determinar o resto da divisão desse número por 4?

ii) É possível determinar o resto da divisão do dobro desse número por 20?

O Problema 10 (i) pode ser resolvido apenas com desenhos pelos alunos, caso a linguagem algébrica ainda não lhes seja familiar, sem a perda do pensamento genérico. De fato, não é possível determinar quantos agrupamentos de 20 unidades temos, sabemos apenas que sobram 15 unidades na divisão por 20 desse número desconhecido (Figura 6.1). Apesar disso, espera-se que o estudante de 6º ano perceba que, para reagrupar a quantidade total em grupos de 4 unidades, cada agrupamento de 20 unidades gera 5 agrupamentos de 4 unidades, com nenhuma sobra (Figura 6.2), faltando apenas reagrupar em grupos de 4 unidades as 15 unidades que haviam originalmente sobrado na divisão por 20. Ora, a divisão de 15 por 4 tem resto igual a 3 (Figura 6.3).

Se proposto o mesmo problema a alunos que já tiveram uma iniciação à linguagem algébrica (7º ano, por exemplo), pode-se salientar, com a resolução algébrica, a unicidade do quociente e do resto da divisão euclidiana. De fato, denotando por n a quantidade original, o dado “ao ser dividido por 20, deixa resto 15” pode ser reescrito na forma

$$n = 20q + 15.$$

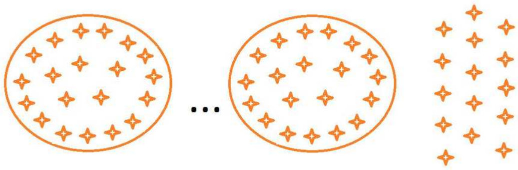

Figura 6.1: Um certo número natural, ao ser dividido por 20, deixa resto 15

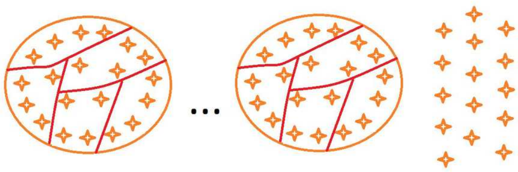

Figura 6.2: Cada agrupamento de 20 unidades gera 5 agrupamentos de 4 unidades, gerando-se nesse processo nenhuma sobra

Ora, tal expressão pode ser reescrita de muitas formas, sugerindo agrupamentos de 4 unidades, tais como

$n = 4 \times 5 \times q + 4 \times 1 + 11 = 4(5q + 1) + 11$

$n = 4 \times 5 \times q + 4 \times 2 + 7 = 4(5q + 2) + 7$

$n = 4 \times 5 \times q + 4 \times 3 + 3 = 4(5q + 3) + 3,$

mas só a última expressa o resto da divisão de n por 4 porque ela é a única que fornece uma sobra menor do que 4, portanto, pela unicidade do quociente e do resto provada no Teorema da Divisão Euclidiana, é ela que expressa a Divisão Euclidiana de n por 4. O item (ii) tem uma resolução análoga, e serve também para salientar que desde cedo é possível evidenciar que nem todo relacionamento entre duas grandezas é proporcional: de fato, a sobra em uma repartição do dobro de n em grupos de 20 unidades cada pode ser igual ao dobro de 15, mas o resto da divisão euclidiana do dobro de n por 20 certamente não poderá ser o dobro de 15.

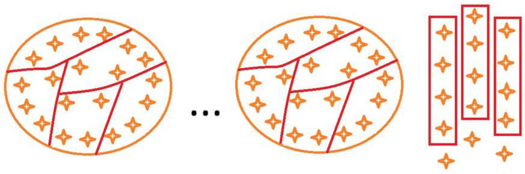

Figura 6.3: Basta reagrupar em grupos de 4 unidades as 15 unidades que haviam sobrado na divisão por 20

Ao ampliar-se o universo numérico para o conjunto dos números racionais, geralmente, mas não sempre, muda a forma de expressar-se o resultado de uma divisão dependendo do contexto em que a mesma está inserida. Os problemas a seguir procuram evidenciar que, mesmo quando o universo numérico já foi ampliado para os números racionais (e que portanto o resultado de uma divisão pode ser expresso por um único número racional), ainda há situações nas quais a divisão euclidiana é a forma requerida para expressar-se o resultado.

Problema 11**:** Determine a parte inteira de 37/9.

Segundo a BNCC, problema análogo já pode também ser proposto no 5º ano por ocasião do estudo de frações mistas. A divisão euclidiana (de 37 por 9, no caso) fica evidente na resolução a seguir:

$$\frac{37}{9} = \frac{(4 \times 9 + 1)}{9} = \frac{(4 \times 9)}{9} + \frac{1}{9} = 4 + \frac{1}{9},$$

e como $1/9 < 1$, concluímos: em 37/9 cabem precisamente 4 inteiros e não cabem 5 inteiros. Assim, a parte inteira de 37/9 é igual a 4.

Também na representação decimal de um número racional faz-se uso reiteradas vezes da divisão euclidiana.

Problema 12**:** : Determine a representação decimal de 37/9.

Na resolução do Problema 11 já foi determinada a parte inteira de 37/9, a partir da igualdade $37/9 = 4 + 1/9$. Para determinar-se a representação decimal de 37/9, procura-se então determinar quantos décimos cabem na sobra não inteira 1/9. Novamente aparece a divisão euclidiana (de 10 por 9, no caso) no seguinte raciocínio:

$$\begin{aligned}\frac{1}{9} &= \frac{1}{10} \times \frac{10 \times 1}{9} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{9} = \frac{1}{10} \times \frac{(1 \times 9 + 1)}{9} \\ &= \frac{1}{10} \times \left(1 + \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{9} < 1$, tem-se

$$\frac{1}{10} \times \frac{1}{9} < \frac{1}{10},$$

de modo que da igualdade

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{9}$$

conclui-se que em $\frac{1}{9}$ cabe $\frac{1}{10}$ e não cabem $\frac{2}{10}$, de modo que

$$\frac{37}{9} = 4 + \frac{1}{10} + \frac{1}{90}. \qquad (*)$$

Portanto, a representação decimal de 37/9, até o momento, tem a forma

$$37/9 = 4{,}1\ldots,$$

sendo que as demais casas decimais podem ser determinadas de maneira análoga, começando-se por determinar quantos centésimos cabem na “sobra” 1/90 explicitada em $(*)$.

Capítulo 7

Considerações Finais

Este trabalho teve por objetivo ressaltar a complexidade da operação de divisão, que começa nos anos iniciais com a divisão euclidiana e depois é abordada em um universo numérico maior que permite diferente resposta.

Todas as considerações aqui apresentadas reforçam a convicção das autoras sobre a especial atenção que o professor deve dedicar tanto à introdução e aprofundamento da divisão euclidiana até o 6º ano como à divisão por ocasião do estudo dos números racionais, esta última não abordada com detalhe neste trabalho.

A oferta do Minicurso de mesmo nome no III Simpósio Nacional de Formação de Professores da ANPMat também evidenciou a importância de discutir esse tema com professores do Ensino Fundamental. Finalizamos este trabalho com algumas ponderações dos participantes do Minicurso.

"Quando vocês perguntaram no início se os termos repartição, distribuição, e divisão são sinônimos, eu pensei que sim, mas agora, depois da projeção destas imagens e reflexões, reconheço que não!"

"A discussão proposta por vocês no Problema 1 é construtiva e dá significado para a divisão, no lugar de só procedimentos."

"A discussão proposta por vocês no Problema 1 é mais honesta para o aluno."

E, sobre o Problema 9, que objetiva desenvolver a argumentação e o pensamento genérico:

"Quando vocês perguntaram a que nível tal problema poderia ser proposto, pensei que só na Universidade; depois da resolução por meio de desenhos, percebo que pode ser proposto bem antes."

Capítulo 8

Apêndice: Os documentos oficiais

No que segue faz-se um apanhado sobre o que dizem os documentos oficiais sobre a Divisão (Euclidiana) até o 6º ano do Ensino Fundamental, permeado com alguns comentários das autoras.

Nos PCN [2, p81], ressalta-se a importância das situações-problema na compreensão dos conceitos envolvendo números e as operações entre eles, e observa-se que a preocupação com o conceito e formalização da divisão ocorre no 1º ciclo (até o 3º ano), 2º ciclo (4º e 5º ano) e 3º ciclo (6º e 7º ano), com culminância no final do 2º e início do 3º ciclo.

Nesse documento é sugerido que, no 1º ciclo, os cálculos envolvendo divisão sejam feitos apenas "por meio de estratégias pessoais" e, no 2º ciclo, que a "resolução de operações com números naturais seja feita por meio de estratégias pessoais e do uso de técnicas operatórias convencionais, com compreensão dos processos nelas envolvidos" [1, p51 e 59]. Não é explicitado se no 1º e 2º ciclo referem-se ou não à divisão euclidiana, mas cabe salientar que ela é a única divisão que faz sentido no universo numérico $\mathbb{N}$.

Para o 3º ciclo é citado como objetivo resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais [2, p64], não se chamando atenção para a diferença existente na abordagem da divisão em $\mathbb{Q}$.

É destacada também a importância de "um trabalho conjunto de problemas envolvendo a multiplicação e a divisão, uma vez que há estreitas conexões entre as situações que as envolvem" e é sugerido que, a partir de situações de multiplicação é possível formular situações que envolvem a divisão, "reforçando a estreita relação entre ambas" [1, p72]. Cabe ressaltar que a falta de maiores explicações sobre tais "estreitas relações" pode sugerir que a divisão seja encarada como operação inversa da multiplicação, o que não está correto, conforme enfatizado no texto.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é recomendado que se inicie a abordagaem da divisão no 2º ano com as ideias de metade e terça parte, o que pode ser constatado na Habilidade a seguir.

(EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais. [3, p339]

Faz-se alusão explícita à Divisão Euclidiana nas Habilidades do 3º ano:

(EF03MA08) Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais. [3, p243]

(EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes. [3, p243].

No 4º ano, a Divisão Euclidiana não é explicitada na habilidade.

(EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos [3, p247], mas ela fica sugerida na habilidade.

(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades [3, p247].

Uma menção explícita a tal operação deveria ser feita também nesse ano escolar, como um alerta ao professor, levando ainda em conta que a habilidade.

(EF04MA13) “Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e divisão, para aplicá-las na resolução de problemas” [3, p247] pode sugerir a alguns leitores que a relação de inversibilidade cabe para qualquer divisão nesse ano escolar, quando na verdade a relação entre a multiplicação e a divisão euclidiana envolve também a adição:

$$\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor} + \text{resto}$$

No 5º ano a BNCC sugere, com a Habilidade a seguir, que fração é o resultado de uma divisão, mas não explicita qual, perdendo a oportunidade de alertar para o fato de que agora o resultado de uma divisão pode ser um só, o seu quociente.

(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso. [3, p251]

No 6º ano é recomendada uma retomada das operações elementares com números naturais, “com e sem o uso de calculadora”, sem qualquer alusão ao resto da divisão euclidiana.

(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora [3, p257].

Alertamos para o fato de que a Divisão Euclidiana deveria receber maior atenção no 6º ano, etapa em que o aluno ainda precisa “revisitar” esse conteúdo, objetivando seu aprofundamento e sua plena compreensão (abordando-se, por exemplo, situações em que o resto tem papel relevante), de acordo coom a orientação geral, tanto dos PCN [2, p64] que recomendam explorar o conceito e a formalização da divisão ainda no 3º ciclo (6º e 7º ano), como também da [3, p255] de oportunizar-se, a cada ano escolar, não só uma retomada como também um aprofundamento do conteúdo.

É já no 6º ano que se inicia a divisão de números racionais, com a Habilidade: (EF06MA06) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes [3, p257].

Novamente não se percebe uma ênfase ao fato de que nesse novo universo numérico a divisão de dois números naturais pode ter agora um único resultado, o quociente.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em 20 de maio de 2017.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos*. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148pp Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em 20 de maio de 2017.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Base Nacional Comum Curricular*. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em 13 de junho de 2017.

[4] DOERING, L.; RIPOLL, C.C.; SOPPELSA, J.J.C. The Euclidean Division in the First School Years. *II International Conference on Mathematics Textbook Research and Development* , Rio de Janeiro, 2017.

[5] ISOLANI, C. M. M. et al. *Coleção Construindo o Conhecimento – Matemática", 2ª série*. São Paulo: IBEP, 2005.

[6] RANGEL, L. G. *Teoria de Sistemas - Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo - Estabelecendo Relações em Um Estudo Colaborativo*. Tese de Doutorado. COPPE - UFRJ, 2015. Disponível em: http://www.cos.ufrj.br/uploadfile/1430757169.pdf. Acesso em: 29 de nov. 2017.

[7] RIPOLL, C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V. *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica*, Vol. 1. Coleção Matemática para o Ensino, SBM, 2016.

[8] SOPPELSA, J. J.C. *Divisão euclidiana: um olhar para o resto*. Dissertação de Mestrado. Porto Alegre – RS, 2016, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Disponível em: http://hdl.handle.net/10183/148203. Acesso em: 20 de mai. 2017.

[9] SOPPELSA, J.J.C.; DOERING, L. R.; RIPOLL, C. C.. A divisão euclidiana no ensino fundamental - e o resto?. *In*: Congresso Internacional de Ensino da Matemática (7. : 2017 : Canoas, RS). Anais do VII CIEM [recurso eletrônico], Canoas: Ulbra, 2017.

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E. L. Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E. L. Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E. L. Lima
- *Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios* - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E. L. Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
- *Construções Geométricas* - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P. C. P. Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J. L. M. Barbosa
- *Isometrias* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Matemática e Ensino* - E. L. Lima
- *Temas e Problemas* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A. Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E. L. Lima
- *A Matemática do Ensino Medio Vol. 4 - Exercicios e Soluções* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções* - S. Lima Netto
- *Um Convite à Matemática* - D.C de Morais Filho
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 1 - Números Reais - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 3 - Introdução à Análise - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 4 - Combinatória - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 5 - Teoria dos Números - A. Caminha
- *Tópicos de Matemática Elementar* - Volume 6 - Polinômios - A. Caminha
- *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)
- *Como Resolver Problemas Matemáticos* - T. Tao
- *Geometria em Sala de Aula* - A. C. P. Hellmeister (Comitê Editorial da RPM)
- *Números Primos, amigos que causam problemas* - P. Ribenboim
- *Introdução à Teoria dos Conjuntos* - G. P. Novaes
- *Manual de Redação Matemática* - D. C. de Morais Filho
- *Introdução à Teoria dos Conjuntos* - G. Pires Novaes

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

(continuação dos títulos publicados)

COLEÇÃO PROFMAT

- *Introdução à Álgebra Linear* - A. Hefez e C.S. Fernandez
- *Tópicos de Teoria dos Números* - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha
- *Polinômios e Equações Algébricas* - A. Hefez e M.L. Villela
- *Tópicos de Historia de Matemática* - T. Roque e J. Bosco Pitombeira
- *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática* - V. Giraldo, P. Caetano e F. Mattos
- *Temas e Problemas Elementares* - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
- *Números e Funções Reais* - E. L. Lima
- *Aritmética* - A. Hefez
- *Geometria* - A. Caminha
- *Avaliação Educacional* - M. Rabelo
- *Geometria Analítica* - J. Delgado, K. Frensel e L. Crissaff
- *Matemática Discreta* - A. Morgado e P. C. P. Carvalho
- *Matemática e Atualidade - Volume 1* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Fundamentos de Cálculo* - A. C. Muniz Neto
- *Matemática e Atualidade - Volume 2* - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin
- *Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear* - A. Hefez e C. de Souza Fernandez
- *Exercícios Resolvidos de Aritmética* - A. Hefez

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D. G. de Figueiredo
- *Números Racionais e Irracionais* - I. Niven
- *Tópicos Especiais em Álgebra* - J. F. S. Andrade

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L. N. de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia* - E. C. de Oliveira e M. Tygel
- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* - M. P. do Carmo
- *Matemática Discreta* - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi
- *Álgebra Linear: Um segundo Curso* - H. P. Bueno
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa* - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.
- *Elementos de Topologia Geral* - E. L. Lima
- *A Construção dos Números* - J. Ferreira
- *Introdução à Geometria Projetiva* - A. Barros e P. Andrade
- *Análise Vetorial Clássica* - F. Acker
- *Funções, Limites e Continuidade* - P. Ribenboim
- *Fundamentos de Análise Funcional* - G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira
- *Teoria dos Números Transcendentes* - D. Marques
- *Introdução à Geometria Hiperbólica - O modelo de Poincaré* - P. Andrade

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

(continuação dos títulos publicados)

- *Álgebra Linear: Teoria e Aplicações* - T. P. de Araújo
- *Introdução à Análise Matemática na Reta* - C. I. Doering
- *Topologia e Análise no Espaço Rn* - R. Freire de Lima
- *Equações Ordinárias e Aplicações* - B. Scárdua
- *Cálculo Avançado* - R. Cipolatti
- *Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e superficies* - A. Lymberopoulos e I. Terek Couto

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H. Bolfarine e M. Sandoval
- *Discretização de Equações Diferenciais Parciais* - J. Cuminato e M. Meneguette
- *Fenômenos de Transferência – com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia volume 1: Fundamentos* - J. Pontes e N. Mangiavacchi

COLEÇÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª* - E. Mega e R. Watanabe
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª* - C. Moreira e E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues
- *21 Aulas de Matemática Olímpica* - C. Y. Sh
- *Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções* - K. I. M. Oliveira e A. J. C. Fernández
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Fundamental* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Médio* - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 17ª a 24ª* - C. G. T. de A. Moreira, C. Y. Shine, E. L. R. Motta, E. Tengan e N. C. Saldanha
- *10 matemáticos 100 problemas* - E. Wagner (Organização)

COLEÇÃO FRONTEIRAS DA MATEMÁTICA

- *Fundamentos da Teoria Ergódica* - M.Viana e K. Oliveira
- *Tópicos de Geometria Diferencial* - A. C. Muniz Neto
- *Formas Diferenciais e Aplicações* - M. Perdigão do Carmo
- *Topologia das Variedades* - W. de Melo

COLEÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume I Números Naturais* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo
- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume II Números Inteiros* - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo

COLEÇÃO COLETÂNEAS DE MATEMÁTICA

- *Teorema Vivo* - C. Villani

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

ISBN 978-85-8337-142-7

9 788583 371427 >