III SIMPÓSIO NACIONAL DA
FORMAÇÃO DO PROFESSOR
DE MATEMÁTICA

EXPLORANDO GEOMETRIA 2D E 3D NA ESCOLA BÁSICA COM O SOFTWARE GRATUITO GEOGEBRA PARA SMARTPHONES E TABLETS

Edilson José Curvello Machado
Humberto José Bortolossi
Rogério Vaz de Almeida Junior

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

EXPLORANDO GEOMETRIA 2D E 3D NA ESCOLA BÁSICA COM O SOFTWARE GRATUITO GEOGEBRA PARA SMARTPHONES E TABLETS

Explorando geometria 2D e 3D na escola básica com o *software* gratuito Geogebra para *smartphones* e *tablets*

Capa: Pablo Diego Regino
Projeto gráfico: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

ISBN: 978-85-8337-156-4

Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

III SIMPÓSIO NACIONAL DA
FORMAÇÃO DO PROFESSOR
DE MATEMÁTICA

EXPLORANDO GEOMETRIA 2D E 3D NA ESCOLA BÁSICA COM O SOFTWARE GRATUITO GEOGEBRA PARA SMARTPHONES E TABLETS

Edilson José Curvello Machado
Humberto José Bortolossi
Rogério Vaz de Almeida Junior

1ª edição
2018
Rio de Janeiro

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Edilson dedica esta obra a sua esposa, filhos e netos.

Humberto dedica esta obra ao seu pai (*in memoriam*).

Rogério dedica esta obra aos seus pais.

Sumário

Prefácio

Estudos apontam que, em Geometria Plana, alunos da Escola Básica frequentemente confundem propriedades do desenho com propriedades do objeto geométrico representado. Assim, por exemplo, um quadrado girado deixa de ser um quadrado para esses alunos. Possivelmente, esse tipo de comportamento seja um reflexo da natureza estática de como a Geometria Plana é comumente trabalhada em sala de aula (figuras não podem ser movidas ou alteradas em uma página de um livro ou no quadro-negro).

No caso da Geometria Espacial, uma das dificuldades que o aluno enfrenta ao estudar esse assunto é a tarefa de reconstruir mentalmente uma imagem tridimensional a partir de uma figura bidimensional estática impressa na página de um livro. Como a Geometria Projetiva bem nos ensina, esse tipo de procedimento dá margem à ambiguidade, pois dois objetos diferentes podem ter uma mesma projeção plana. Para melhor entender um objeto tridimensional, é necessário observá-lo de várias posições diferentes.

Para contrapor essa abordagem estática usual no Ensino e Aprendizagem de Geometria Plana e Espacial, propomos neste trabalho um conjunto de atividades interativas com o uso de um *software* de Geometria Dinâmica, no caso, o *software* gratuito GeoGebra para *smartphones* e *tablets*. Mais precisamente, para Geometria Plana, apresentamos uma coleção de exercícios, classificados por nível de dificuldade, onde os alunos devem (1) implementar a construção do enunciado usando o GeoGebra para *smartphones* e *tablets*, (2) arrastar os pontos livres e semilivres para estudar o problema, (3) descobrir (por si mesmos) invariantes geométricos associados à configuração e, por fim, (4) tentar prová-los. Para Geometria Espacial, as atividades propostas abordam questões de Geometria Projetiva, Geometria do Tetraedro e Geometria Analítica Espacial.

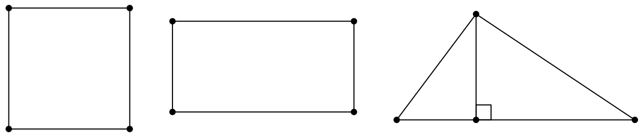
Capítulo 1

Introdução

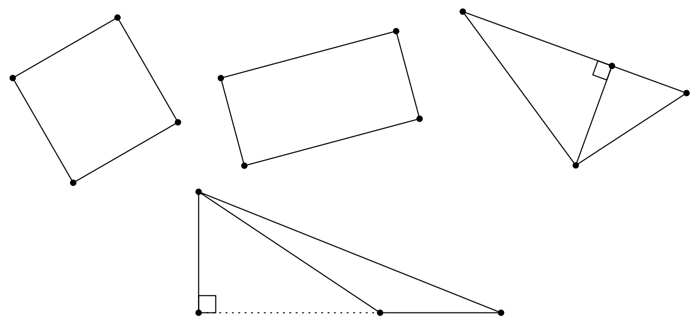
1.1 Geometria 2D

Nossa experiência em escolas confirma resultados já apontados por Gravina (1996): em geral, alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio apresentam pouca compreensão dos objetos geométricos, confundem propriedades do desenho com propriedades do objeto geométrico representado, ou seja, misturam a *componente figural* associada ao desenho com a *componente conceitual*, aquela que define o objeto por meio das suas propriedades intrínsecas.

Essa confusão entre as propriedades do desenho e aquelas do objeto geométrico tem origem nos livros didáticos e práticas de ensino de nossas escolas. Os livros escolares iniciam seus assuntos com definições verbais, nem sempre claras e precisas, onde determinada propriedade é enfatizada, acompanhadas de desenhos bem particulares do tipo "prototípicos" onde, por exemplo, quadrados e retângulos apresentam desenhados quase sempre com os lados paralelos às bordas da folha e os triângulos, na sua maioria, são acutângulos e quase sempre estão desenhados com um dos lados na "horizontal" e sua altura na "vertical" (como na figura a seguir).



Isto leva nossos alunos a não reconhecerem desenhos desses mesmos objetos em outras posições (como na figura a seguir).



Mais ainda: os exemplos e exercícios propostos são, em geral, aqueles cujas soluções são baseadas em operações aritméticas do tipo “calcule” ou em equações “determine o valor de x”, de modo que, para os alunos, a posição relativa do desenho quanto à borda da página, o traçado particular do segmento, a operação aritmética ou a equação utilizada passam a fazer parte das características do objeto, estabelecendo desequilíbrios na formação dos conceitos.

Desse modo, a operação de multiplicação substitui o conceito de área e a soma substitui o conceito de perímetro, o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos “escondem-se” em equações complicadas, e o Teorema de Pitágoras acaba se reduzindo a uma pura aplicação da equação de segundo grau. Como nos aponta Gravina (1996), faltam no contexto escolar mais atividades que explorem os conceitos geométricos em si:

> *O aspecto de construção dos objetos geométricos raramente é abordado; dificilmente encontramos no livro escolar a instrução “construa”, e no entanto esta é uma das atividades que leva o aluno ao domínio de conceitos geométricos. Mais difícil ainda é encontrar questões do tipo “o que podemos dizer nesta situação?” ou “que regularidades percebemos?”, onde estratégias de investigação devem ser estabelecidas.*
> (Gravina, 1996, p. 2)

Na formação dos conceitos da Geometria, a componente figural desempenha um papel fundamental. O desenho é um suporte concreto de expressão e entendimento da componente conceitual. Se, por um lado, ele revela os conceitos e resultados que ajudam em sua compreensão, por outro, guarda características particulares que não pertencem ao conjunto das propriedades que definem o objeto geométrico problematizado. Em diversas situações de aprendizagem, os alunos devem, num mesmo problema, controlar diversas informações num mesmo desenho e deduzir aquelas propriedades importantes para sua compreensão.

> *Deduzir uma propriedade significa estabelecer uma cadeia lógica de raciocínios conectando propriedades do enunciado tomadas como pressupostos (hipóteses) às propriedades ditas decorrentes (teses). Esta cadeia de raciocínios que denominamos de argumentação lógica e dedutiva. O desenho entra aqui como materialização da configuração geométrica, guardando as relações a partir das quais decorrem as propriedades.*

(Gravina, 1996, p. 3)

Tanto no caso da formação de conceitos, quanto no caso de dedução de propriedades, podemos concluir que grande parte das dificuldades originam-se no aspecto estático do desenho: devemos explorar situações de aprendizagem que permitam "o controle do desenho para que características de contingência da representação não sejam incorporadas às propriedades matemáticas que determinam a configuração" (Gravina, 1996, p. 6).

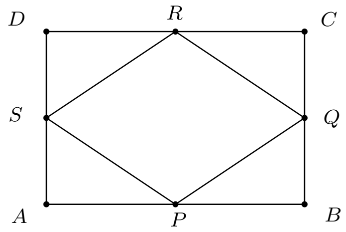
No sentido de evitar que características de representação sejam confundidas com as propriedades matemáticas dos objetos geométricos, devemos passar para um tratamento de "desenhos em movimento" onde particularidades da representação desapareçam quando impomos ao desenho movimentos de translação, rotação, entre outros.

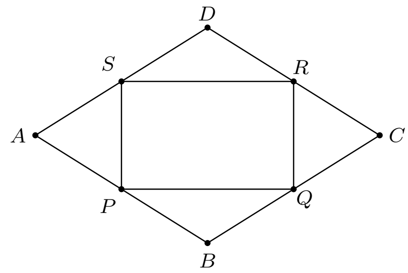
Numa sala de aula convencional, atividades com dobraduras, recortes, colagens, papel quadriculado, entre outras, até podem propiciar configurações com "desenhos em movimento" mas, a partir de um certo grau de complexidade, onde são exigidas configurações com muitos objetos, o movimento sincronizado com esses recursos torna-se difícil.

Nesse contexto, os *softwares* de Geometria Dinâmica são especialmente convenientes. De fato: uma construção geométrica feita no papel com lápis, régua e compasso ou no quadro com giz é estática e, dessa maneira, uma vez feita, ela não pode ser modificada. Para gerar outros exemplos, o professor ou o aluno deverá repetir o mesmo procedimento da construção com outros dados iniciais, o que é tedioso e toma um tempo precioso de sala de aula com uma atividade repetitiva.

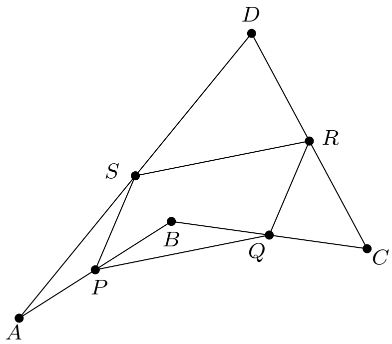
Em um *software* de Geometria Dinâmica, por outro lado, a construção é feita apenas uma única vez, com mais precisão e de tal modo que os elementos geométricos da construção podem ser alterados para gerar uma quantidade grande de exemplos. Mais ainda: ao mover os elementos geométricos da construção, as relações geométricas (pertinência, paralelismo, etc.) entre esses elementos são mantidas. Com isto, ao interagir com um *software* de Geometria Dinâmica, o aluno encontrará um ambiente propício à visualização, análise e dedução informal das relações geométricas da construção a partir do qual deduções formais e rigorosas podem ser construídas posteriormente.

É no dinamismo que está a chave da Geometria Dinâmica. Como um exemplo, considere a seguinte situação: a partir de um quadrilátero $ABCD$, marcam-se os pontos médios P, Q, R e S dos quatro lados desse quadrilátero e, então, constrói-se o quadrilátero $PQRS$. Que propriedade marcante o quadrilátero $PQRS$ possui? Com lápis, papel e régua, o aluno poderia, eventualmente, fazer um desenho bem particular para o quadrilátero $ABCD$ (como o retângulo e o losango indicados na figura a seguir) e, então, deduzir uma propriedade (por exemplo, que $PQRS$ é um losango ou retângulo) que não é válida em geral. O aluno ainda poderia fazer um desenho em posição geral, mas com um único desenho em mãos, talvez não conseguisse visualizar e analisar o problema.





Em um *software* de Geometria Dinâmica, por outro lado, uma vez feita a construção, vários exemplos podem ser gerados facilmente movimentando-se os pontos iniciais A, B, C e D (os assim denominados *pontos livres*) da construção. Ao gerar vários exemplos, o aluno perceberá que nem sempre o quadrilátero $PQRS$ é um losango ou um retângulo, como na figura anterior e, mais ainda, poderá considerar situações que não consideraria normalmente, como o caso em que o quadrilátero $ABCD$ não é convexo (como na figura a seguir).



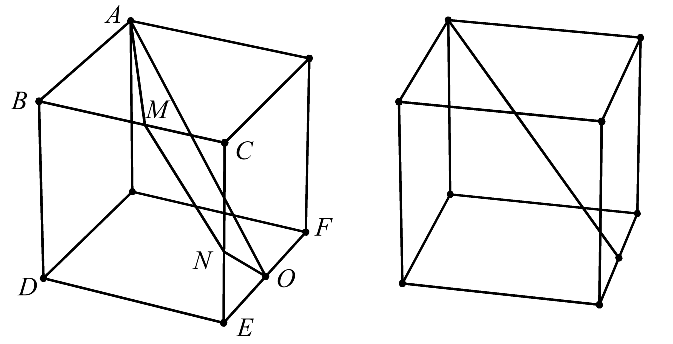
Usando um *software* de Geometria Dinâmica, o aluno experimentará mais e terá condições mais favoráveis para perceber a *propriedade invariante* do quadrilátero $PQRS$: ele é sempre um paralelogramo. Essa propriedade, ora conjecturada, pode (e deve) ser provada: como os pontos R e S são pontos médios, respectivamente, dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$, segue-se pelo teorema da base média do triângulo que $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{AC}$ e que $RS{=}\frac{AC}{2}$. Analogamente, $\overline{PQ}$ é paralelo a $\overline{AC}$ e $PQ{=}\frac{AC}{2}$. Logo, $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{PQ}$ e $RS{=}PQ$. Observando agora os triângulos ABD e CBD, podemos também concluir que $\overline{PS}$ é paralelo a $\overline{QR}$ e $PS{=}QR$. Sendo assim, o quadrilátero $PQRS$ é, de fato, um paralelogramo[a].

Como nos aponta ainda Gravina (1996), um aspecto importante do pensamento matemático é a abstração da invariância e, para o seu reconhecimento e entendimento, nada melhor que a variação oferecida pelos *softwares* de Geometria Dinâmica. A transição contínua entre estados intermediários é um recurso importante desses programas sob o ponto de vista cognitivo porque permite a construção de uma infinidade de exemplos, o que favorece a construção de conceitos e destaca os invariantes geométricos presentes na configuração.

[a]Esse resultado é atribuído ao matemático francês Pierre Varignon (1654-1722).

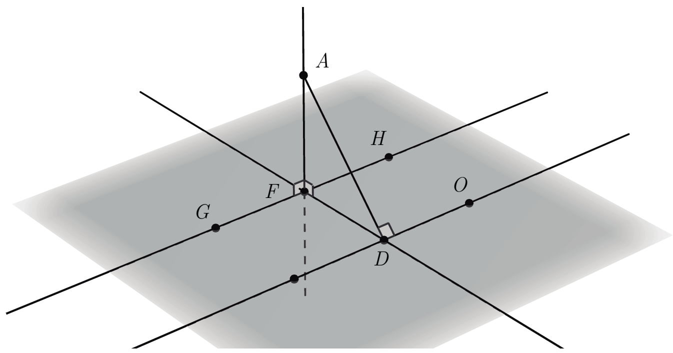
1.2 Geometria 3D

No que se refere à Geometria Espacial, uma das dificuldades que os alunos enfrentam é a tarefa de reconstruir mentalmente uma imagem tridimensional a partir de uma figura bidimensional estática impressa na página de um livro. Como a Geometria Projetiva bem nos ensina, esse tipo de procedimento dá margem à ambiguidade, pois dois objetos diferentes podem ter uma mesma projeção plana. Por exemplo, no cubo (a) na figura a seguir, se M, N e O são os pontos médios das arestas $\overline{BC}$, $\overline{CE}$ e $\overline{EF}$ respectivamente, então o segmento $\overline{AO}$ e o caminho poligonal formado pela justaposição dos segmentos $\overline{AM}$, $\overline{MN}$ e $\overline{NO}$, quando vistos de uma posição específica, possuem a mesma projeção, a saber, o desenho em (b).

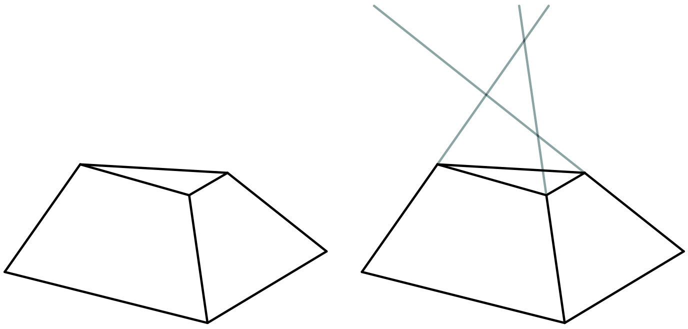


(a) (b)

Outro complicador das representações 2D de objetos 3D: ângulos frequentemente aparecem deformados. Considere, por exemplo, a figura a seguir (Volkert, 2008). Os ângulos $\widehat{AFG}$, $\widehat{AFD}$ e $\widehat{ADO}$ na configuração 3D são todos retos mas, na representação 2D correspondente, obtida por uma projeção em perspectiva, eles não são.



Mais ainda: existem representações 2D de objetos 3D que, em um primeiro momento, podem parecer adequadas mas, de fato, não o são. Um exemplo clássico é a Pirâmide de Huffman (Huffman, 1977). O desenho em (a) na figura a seguir parece ser a representação de um tronco de pirâmide de base triangular, mas, como mostra o desenho em (b), este não é o caso.



(a) (b)

Todos estes exemplos mostram que, para melhor entender um objeto tridimensional, é necessário observá-lo de várias posições diferentes. Certamente o uso de materiais concretos é um recurso didático indispensável, principalmente nas séries iniciais. Por outro lado, existem certas configurações e propriedades geométricas que são difíceis de se representar concretamente, devido a limitações de ordem técnica. Aliado ao fascínio que exerce sobre os alunos, o computador, o *tablet* e o *smartphone* colocam-se então como uma ferramenta promissora para o ensino da Geometria Espacial.

1.3 Objetivo e Descrição

Frente aos contextos apresentados nas duas seções anteriores, este trabalho tem por objetivo apresentar uma seleção de exercícios, classificados por nível de dificuldade, onde o aluno deve (1) implementar a construção sugerida no exercício em um *software* de Geometria Dinâmica, (2) estudá-la movendo os elementos "livres" da construção, (3) fazer uma conjectura para o invariante geométrico da construção e (4) provar sua conjectura.

Utilizaremos como referência o *software* de Geometria Dinâmica gratuito GeoGebra em sua versão para *tablets* e *smartphones* (disponível no seguinte endereço: <http://www.geogebra.org/>). Contudo, outros programas podem ser usados igualmente[b], pois as ferramentas necessárias para o estudo dos invariantes propostos são básicas e comuns a qualquer *software* de Geometria Dinâmica. Não é nosso objetivo aqui ensinar a usar o GeoGebra. Para o leitor iniciante, recomendamos os vídeos tutoriais disponíveis em <http://www.uff.br/geogebra/>.

No que se segue, usaremos os seguintes termos: *ponto livre*, *ponto semilivre* e *invariante geométrico*. Por *ponto livre* entendemos qualquer ponto da construção que pode ser arrastado para qualquer lugar. Por *ponto semilivre* entendemos um ponto que é construído sobre segmentos, semirretas, retas e círculos e cujo movimento fica restrito a esses objetos geométricos. Por *invariante geométrico* entendemos qualquer propriedade geométrica (concorrência, colinearidade, perpendicularismo, paralelismo, etc.) e também relações entre medidas de comprimento

[b]Por exemplo, o Sketchometry (disponível em: <http://www.sketchometry.org/>), o Régua e Compasso (disponível em: <http://car.rene-grothmann.de/>), etc.

de segmentos, de áreas e de ângulos (segmentos congruentes, áreas equivalentes, ângulos complementares, suplementares, etc.) que permanecem invariantes com relação ao movimento dos pontos livres e semilivres.

Nosso trabalho está dividido da seguinte maneira. No Capítulo 2, apresentamos os enunciados das construções divididos em quatro níveis. Os três primeiros níveis estão organizados por grau de dificuldade e tratam apenas de invariantes que envolvem Geometria de Posição (congruência, colinearidade, paralelismo, perpendicularidade, etc.). Essa classificação de dificuldade leva em conta a dificuldade da construção, da percepção do invariante e da complexidade da demonstração, segundo nossa opinião. O quarto nível apresenta invariantes que envolvem somas de medidas e comparações de áreas. Como fonte de pesquisa, usamos as seguintes referências: (Alencar Filho, 1983), (Asociación Fondo de Investigadores y Editores, 2012), (Dolce & Pompeo, 1993), (Morgado, Wagner & Jorge, 1973), (Muniz Neto, 2013) e (Posamentier & Salkind, 1970). No Capítulo 3, apresentamos demonstrações para os invariantes geométricos. Os enunciados das atividades relacionadas com Geometria Espacial são apresentados no Capítulo 4, e as respostas dessas atividades no Capítulo 5.

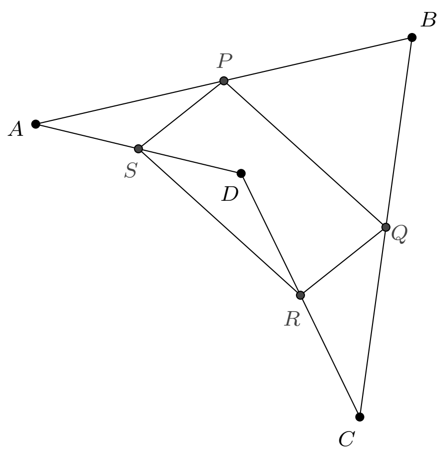
Capítulo 2

Geometria 2D: Enunciados

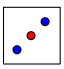
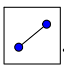
2.1 Nível 1

Invariante 1

Construa um quadrilátero $ABCD$. Em seguida, marque os pontos médios P, Q, R e S dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Construa então o quadrilátero $PQRS$.

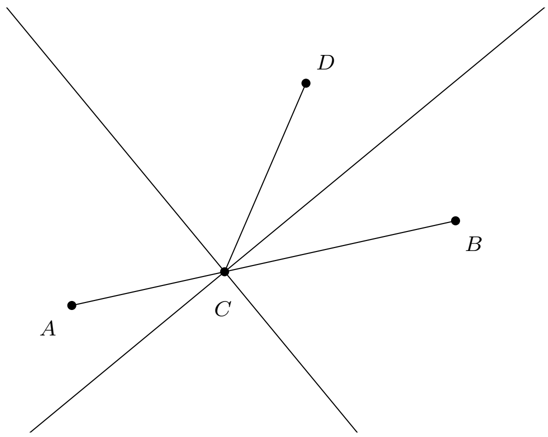


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e semilivres (caso existam) e observe o quadrilátero $PQRS$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

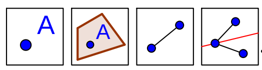
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:  .

Invariante 2

Trace um segmento $\overline{AB}$. Nesse segmento marque um ponto C. Marque então um ponto D diferente de C e, em seguida, trace o segmento $\overline{CD}$. Construa as bissetrizes dos ângulos $\widehat{ACD}$ e $\widehat{BCD}$.

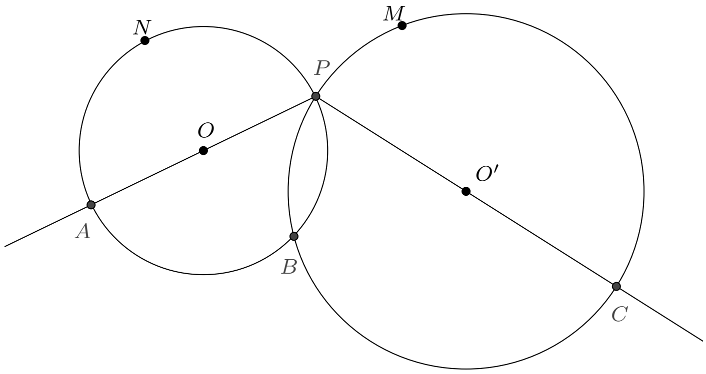


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o ângulo entre as bissetrizes dos ângulos $\widehat{ACD}$ e $\widehat{BCD}$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

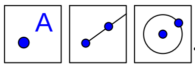
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 3

Construa dois círculos com centros nos pontos O e O' e que passam pelos pontos N e M, respectivamente. Suponha que os dois círculos intersectam-se em dois pontos distintos, digamos, P e B. Por P, trace a semirreta $\overrightarrow{PO}$ e marque o ponto A de interseção dessa semirreta com o primeiro círculo. Do mesmo modo, por P, trace a semirreta $\overrightarrow{PO'}$ e marque o ponto C de interseção dessa semirreta com o segundo círculo.

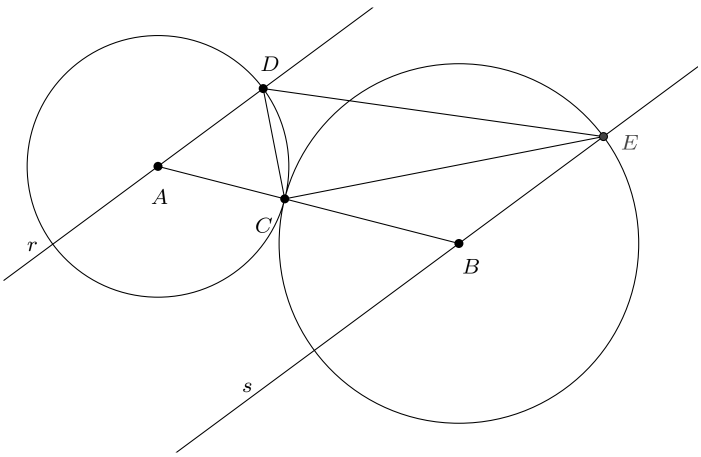


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e semilivres (caso existam) e observe os pontos A, B e C. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

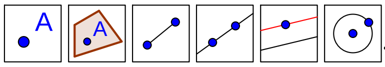
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 4

Trace um segmento $\overline{AB}$ e, nesse segmento, marque um ponto C. Com centro em A, trace o círculo passando por C e marque um ponto D nesse círculo. Agora construa um segundo círculo com centro em B passando também por C. Em seguida, construa a reta r passando por A e D. Trace, então, por B, a reta s paralela à reta r. Marque o ponto E de intersecção dessa reta s com o segundo círculo (esse ponto E deverá ser aquele que está no mesmo semiplano que o ponto D com relação à reta que contém o segmento $\overline{AB}$). Por fim, construa o triângulo DCE.

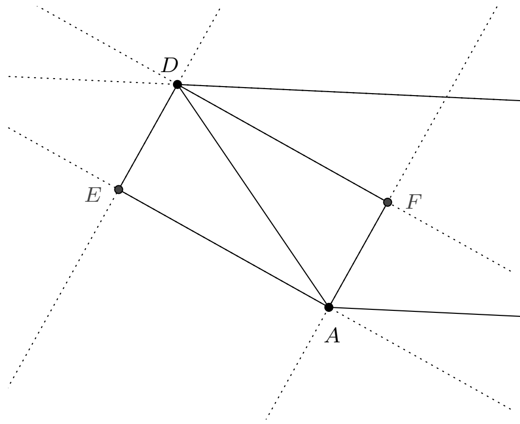


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o triângulo DCE. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

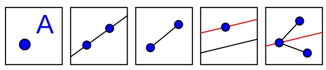
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 5

Construa um trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$. Trace, então, as bissetrizes interna e externa correspondentes ao ângulo $\widehat{BAD}$ e, também, as bissetrizes interna e externa correspondentes ao ângulo $\widehat{CDA}$ do trapézio $ABCD$. Seja E o ponto de interseção das bissetrizes externas e seja F o ponto de interseção das bissetrizes internas. Construa o quadrilátero $AFDE$.

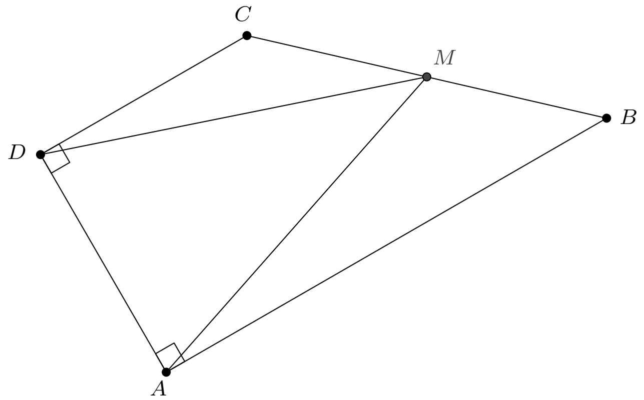


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o quadrilátero $AFDE$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

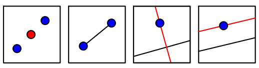
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 6

Construa um trapézio retângulo $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e lado oblíquo $\overline{BC}$. Marque, então, o ponto médio M de $\overline{BC}$. Por fim, construa o triângulo AMD.

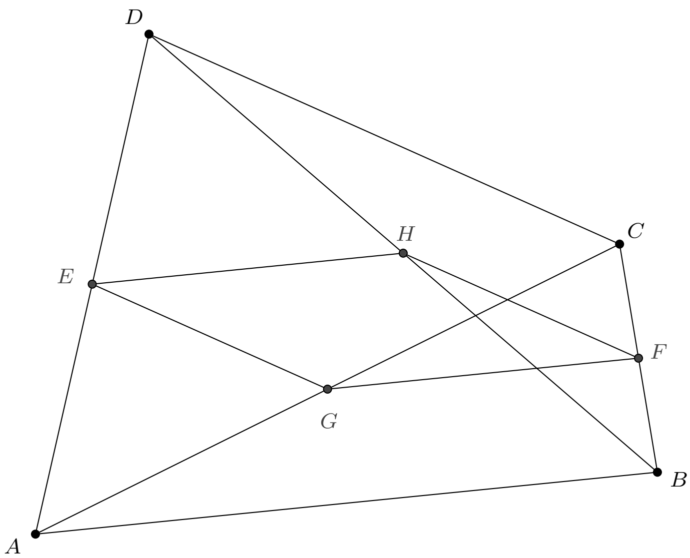


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o triângulo AMD. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

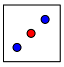
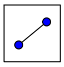
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:  .

Invariante 7

Construa um quadrilátero $ABCD$ com lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Trace as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Marque os pontos médios E e F dos lados não adjacentes $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, e os pontos médios G e H das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Construa o quadrilátero $EGFH$.

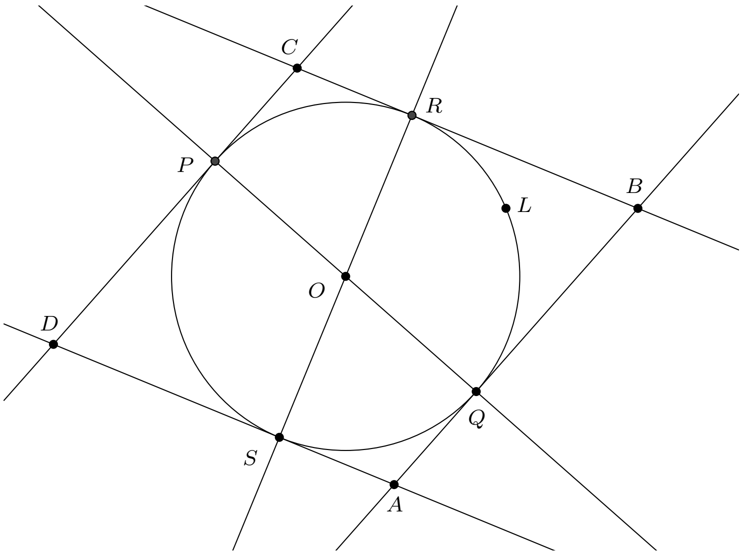


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o quadrilátero $EGFH$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

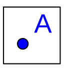
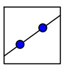
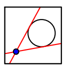
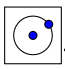
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:  .

Invariante 8

Construa um círculo $\mathcal{C}$ de centro O passando por um ponto L. Sobre o círculo $\mathcal{C}$, marque dois pontos P e R. Construa então as retas $\overleftrightarrow{OP}$ e $\overleftrightarrow{OR}$. Seja $Q \neq P$ o ponto de interseção entre $\mathcal{C}$ e $\overleftrightarrow{OP}$ e seja S o ponto de interseção entre $\mathcal{C}$ e $\overleftrightarrow{OR}$. Em seguida, construa as retas tangentes t_P, t_Q, t_R e t_S ao círculo nos pontos P, Q, R e S, respectivamente. Marque os pontos de interseção A entre t_S e t_Q, B entre t_Q e t_R, C entre t_R e t_P, D entre t_P e t_S. Por fim, construa o quadrilátero $ABCD$.

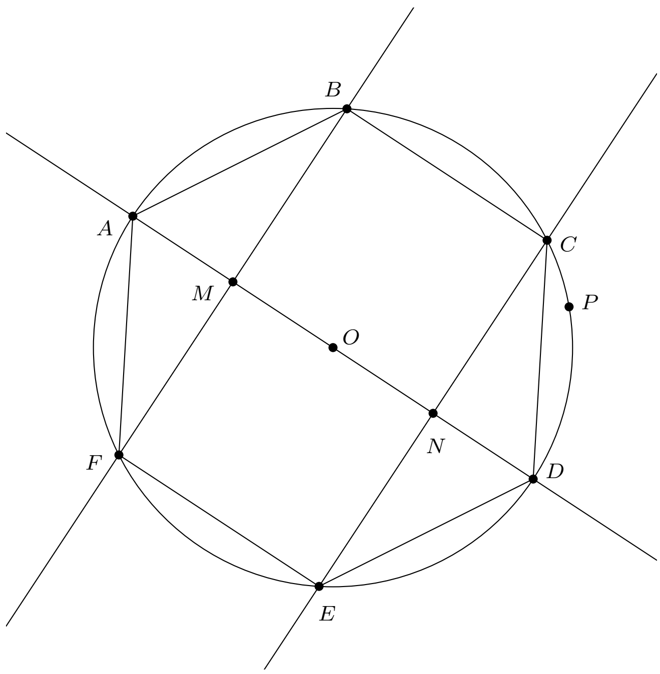


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o quadrilátero $ABCD$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

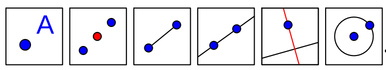
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:    .

Invariante 9

Construa um círculo $\mathcal{C}$ de centro O passando por um ponto P. Marque um ponto A sobre $\mathcal{C}$ e, então, trace a reta $\overleftrightarrow{OA}$. Seja $D \neq A$ o ponto de interseção entre $\mathcal{C}$ e $\overleftrightarrow{OA}$. Determine os pontos médios M e N de $\overline{AO}$ e $\overline{OD}$, respectivamente. Construa, por M, uma reta perpendicular a $\overline{AD}$ e marque os pontos B e F de interseção dessa reta com o círculo $\mathcal{C}$. Agora, trace, por N, uma reta perpendicular a $\overline{AD}$ e marque os pontos C e E de interseção dessa reta com o círculo $\mathcal{C}$ (o ponto C deve estar no mesmo semiplano que o ponto B com relação à reta $\overleftrightarrow{OA}$). Desenhe o hexágono $ABCDEF$.



1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o hexágono $ABCDEF$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

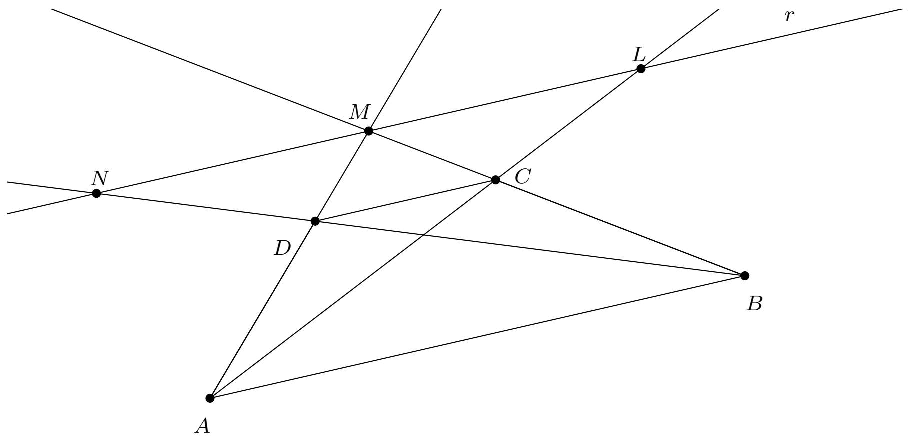
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: 

.

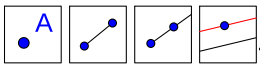
2.2 Nível 2

Invariante 1

Construa um trapézio $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, com lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Em seguida, trace as semirretas $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$. Marque o ponto M de interseção das semirretas $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$. Depois, trace, por M, a reta paralela r aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Construa, então, as semirretas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$. Por fim, marque os pontos L e N de interseção dessas semirretas com a reta r.

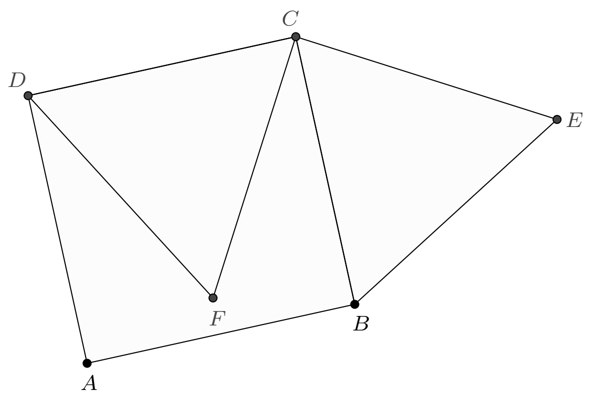


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe os pontos L, M e N. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

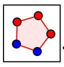
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 2

Construa um quadrado $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em seguida, construa sobre o lado $\overline{BC}$ um triângulo equilátero BCE para fora e, sobre o lado $\overline{CD}$, um triângulo equilátero CDF para dentro do quadrado.

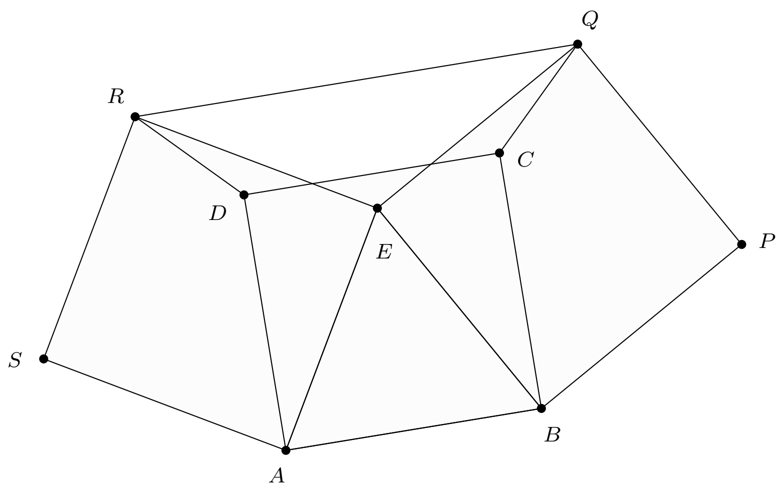


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe os pontos A, E e F. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

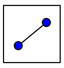
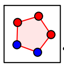
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 3

Construa o quadrado $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Agora, desenhe um triângulo equilátero ABE para dentro do quadrado. Em seguida, construa, para fora do triângulo ABE, dois quadrados: o primeiro, $AERS$, de lados $\overline{AE}$, $\overline{ER}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SA}$, e o segundo, $EBPQ$, de lados $\overline{BE}$, $\overline{EQ}$, $\overline{QP}$ e $\overline{PB}$. Por fim, trace o quadrilátero $CQRD$.

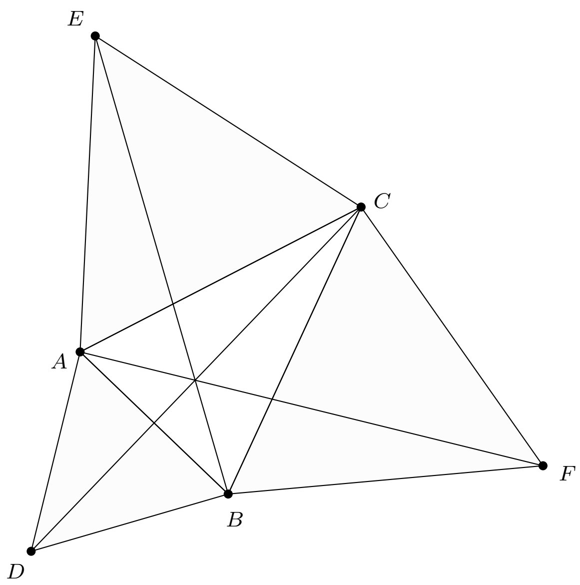


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o quadrilátero $CQRD$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

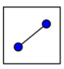
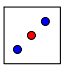
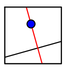
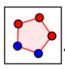
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:  .

Invariante 4

Construa um triângulo isósceles ABC de base $\overline{AB}$. Em seguida, construa três triângulos equiláteros BCF, ACE e ABD para fora desse triângulo. Por fim, construa os segmentos $\overline{BE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{CD}$.



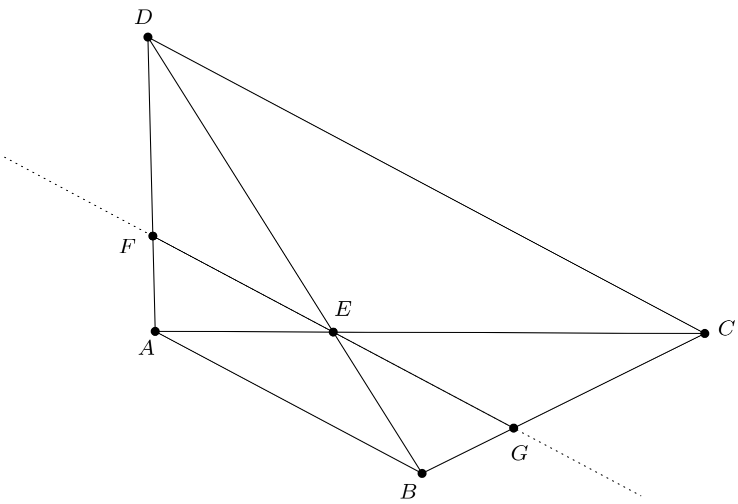
1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe os comprimentos dos segmentos $\overline{BE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{CD}$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:    .

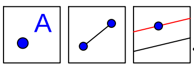
2.3 Nível 3

Invariante 1

Construa um trapézio $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ e lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Trace as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e marque o ponto $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}$. Por E trace a reta paralela ao lado $\overline{AB}$. Essa reta intersectará o lado $\overline{AD}$ em F e o lado $\overline{BC}$ em G. Considere os segmentos $\overline{FE}$ e $\overline{EG}$.

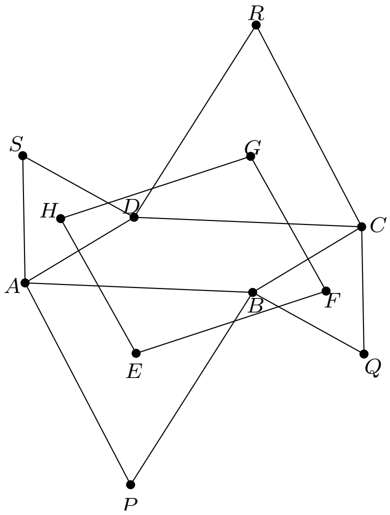


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe os comprimentos dos segmentos $\overline{FE}$ e $\overline{EG}$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

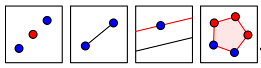
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 2

Construa um paralelogramo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em seguida, sobre cada um de seus lados, construa para fora do paralelogramo os triângulos equiláteros ABP, BCQ, CDR e DAS. Marque então os baricentros E, F, G e H dos triângulos ABP, BCQ, CDR e DAS, respectivamente. Por fim, construa o quadrilátero $EFGH$.

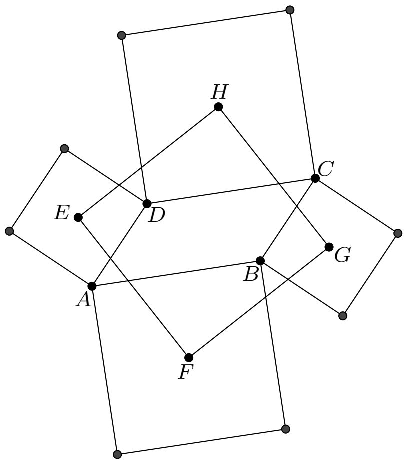


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o quadrilátero $EFGH$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

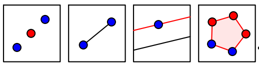
Invariante 3

Construa um paralelogramo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em cada um de seus lados, construa quadrados para fora do paralelogramo. Marque, então, os centros E, F, G e H desses quadrados e, por fim, desenhe o quadrilátero $EFGH$.



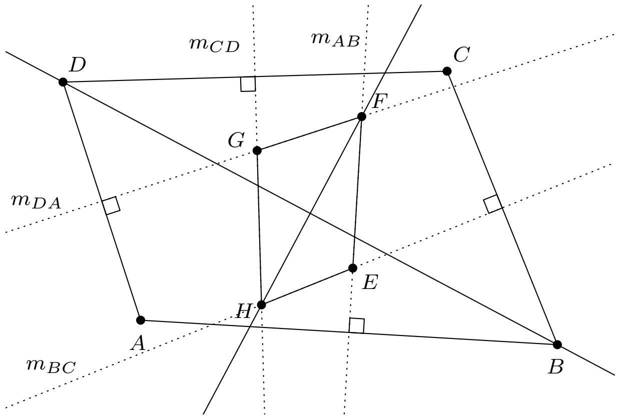
1. Quais são os pontos livres dessa construção?

2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o quadrilátero $EFGH$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

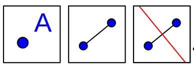
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 4

Construa o quadrilátero $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Trace suas respectivas mediatrizes m_{AB}, m_{BC}, m_{CD} e m_{DA}. Suponha que: $m_{AB} \cap m_{BC} = \{E\}$; $m_{AB} \cap m_{AD} = \{F\}$; $m_{CD} \cap m_{AD} = \{G\}$ e $m_{CD} \cap m_{BC} = \{H\}$. Construa o quadrilátero $EFGH$ e trace sua diagonal $\overleftrightarrow{FH}$. Por fim, trace a diagonal $\overleftrightarrow{BD}$ do quadrilátero $ABCD$.



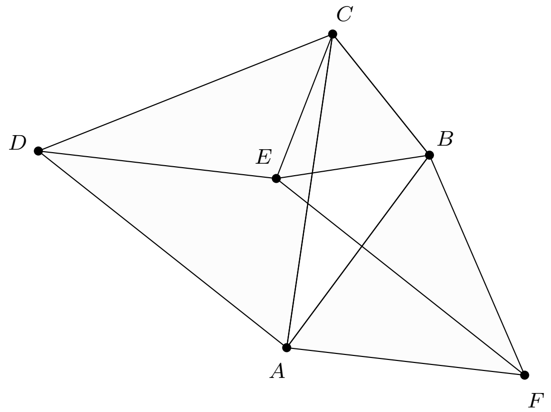
1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o ângulo formado pelas diagonais $\overline{FH}$ e $\overline{BD}$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: 

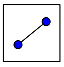
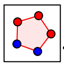
.

Invariante 5

Construa um triângulo ABC. Sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, construa triângulos equiláteros ABF e ACD para fora do triângulo ABC. Sobre o lado $\overline{BC}$, por sua vez, construa o triângulo equilátero BCE para dentro do triângulo ABC. Por fim, trace o quadrilátero $ADEF$.

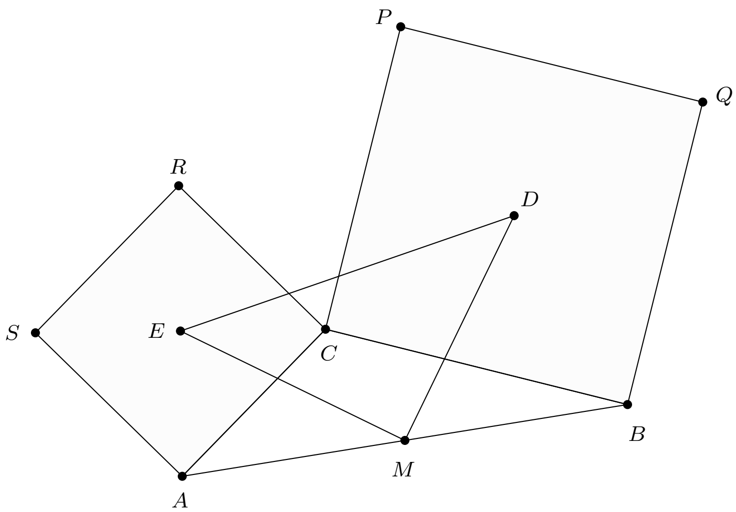


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o quadrilátero $ADEF$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

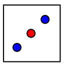
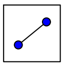
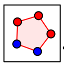
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:  .

Invariante 6

Construa um triângulo ABC. Sobre o lado $\overline{BC}$, construa para fora do triângulo desse triângulo o quadrado $BCPQ$ com lados $\overline{BC}$, $\overline{CP}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{QB}$. Agora, sobre o lado $\overline{AC}$ desse triângulo, construa para fora do triângulo o quadrado $ACRS$ com lados $\overline{AC}$, $\overline{CR}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SA}$. Determine os centros D e E dos quadrados $BCPQ$ e $ACRS$, respectivamente, e, então, marque o ponto médio M do lado $\overline{AB}$. Por fim, construa o triângulo DEM.

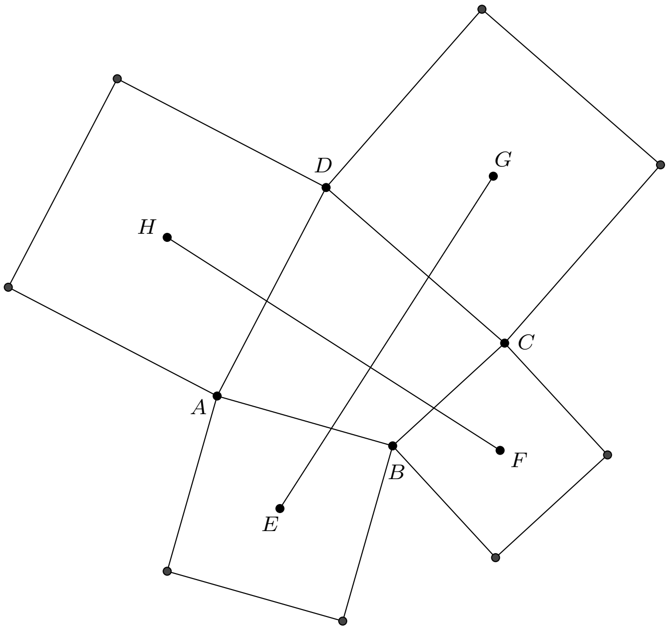


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o ângulo $\widehat{DME}$ do triângulo DEM. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

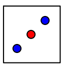
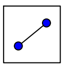
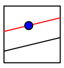
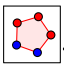
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:   .

Invariante 7

Construa um quadrilátero $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Sobre seus lados construa, para fora do quadrilátero, quatro quadrados. Marque os respectivos centros E, F, G e H desses quadrados. Por fim, trace os segmentos $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$.



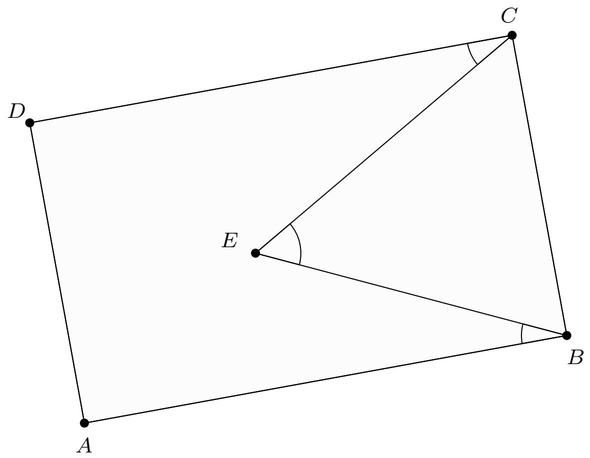
1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o ângulo formado pelos segmentos $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:    .

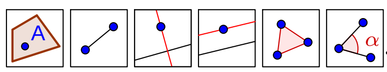
2.4 Nível 4

Invariante 1

Construa um retângulo $ABCD$ e marque um ponto E no interior do retângulo. Em seguida, trace os segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$. Por fim, construa os ângulos $\widehat{EBA}$, $\widehat{DCE}$ e $\widehat{BEC}$.

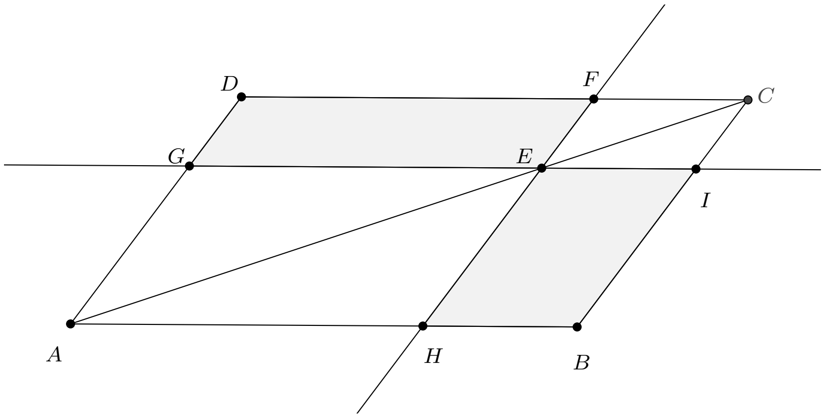


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe os ângulos $\widehat{EBA}$, $\widehat{ECD}$ e $\widehat{BEC}$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

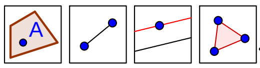
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 2

Construa o paralelogramo $ABCD$ com lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Trace a diagonal $\overline{AC}$ e marque um ponto E nessa diagonal. Construa, por E, a reta paralela ao lado $\overline{AB}$ e, então, marque os pontos de interseção G e I dessa reta com os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Analogamente, trace, por E, a reta paralela ao lado $\overline{AD}$ e, então, marque os pontos de interseção H e F dessa reta com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Por fim, desenhe os paralelogramos $GEFD$ e $HBIE$.

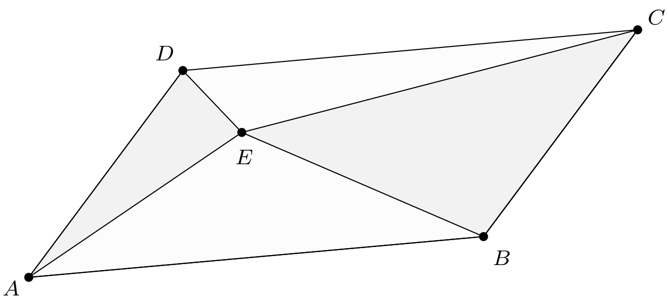


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe as áreas dos paralelogramos $GEFD$ e $HBIE$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

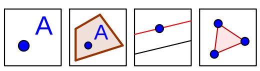
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 3

Construa um paralelogramo $ABCD$ com lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ com AD paralelo a BC. No seu interior marque um ponto E. Construa agora os triângulos ADE e BCE.

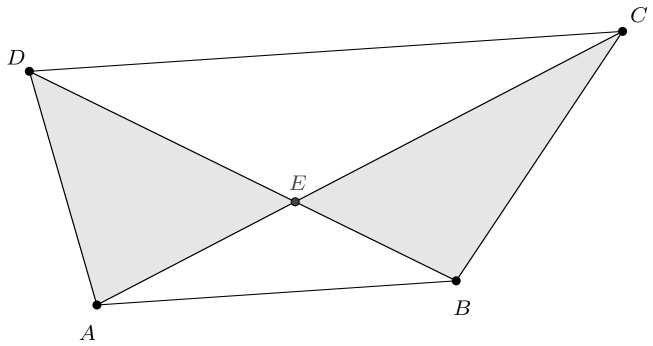


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe as áreas dos triângulos ADE e BCE. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

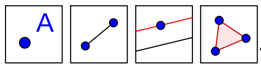
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: 

Invariante 4

Construa um trapézio $ABCD$ com lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, com $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{CD}$. Trace suas diagonais e marque o ponto E, interseção dessas diagonais. Considere agora os triângulos ADE e BCE.

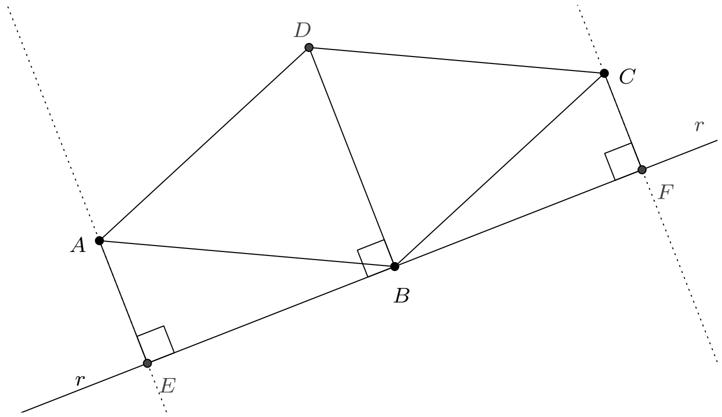


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe as áreas dos triângulos ADE e BCE. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

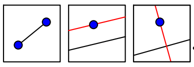
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 5

Construa um paralelogramo $ABCD$ com lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, com $\overline{AD}$ paralelo $\overline{BC}$. Trace a diagonal $\overline{BD}$. Pelo vértice B trace uma reta r perpendicular à diagonal $\overline{BD}$. Pelos vértices A e C trace retas perpendiculares a r que interseptarão essa reta, respectivamente, nos pontos E e F. Construa os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{CF}$.

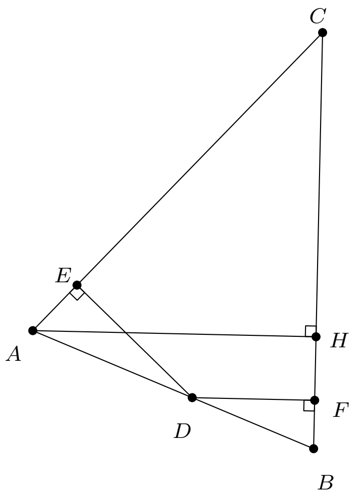


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe os comprimentos dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{CF}$ e da diagonal $\overline{BD}$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

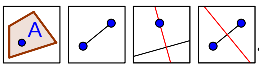
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 6

Construa um triângulo isósceles ABC de base $\overline{AB}$. Marque o ponto H, pé da altura relativa ao lado $\overline{BC}$. Em seguida, marque um ponto D na base $\overline{AB}$ e, por D, trace retas perpendiculares aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Sejam E e F os pontos de interseção dessas retas perpendiculares com as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, respectivamente.

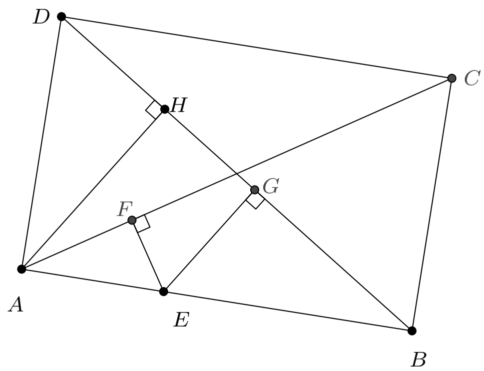


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe os comprimentos dos segmentos $\overline{AH}$, $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

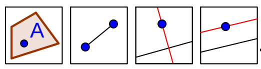
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 7

Construa um retângulo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em seguida, trace suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Seja H o pé da perpendicular baixada do vértice A até a diagonal $\overline{BD}$. Agora, no lado $\overline{AB}$, marque um ponto E. Sejam F e G os pés das perpendiculares baixadas do ponto E até as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Por fim, trace os segmentos $\overline{AH}$, $\overline{EF}$ e $\overline{EG}$.

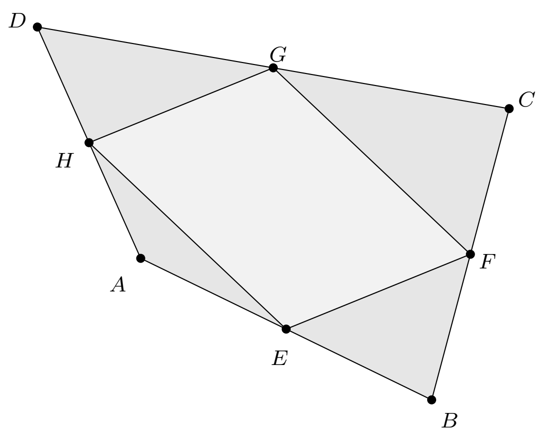


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe os comprimentos dos segmentos $\overline{EF}$, $\overline{EG}$ e $\overline{AH}$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

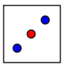
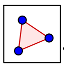
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 8

Construa um quadrilátero $ABCD$ simples (isto é, $ABCD$ é tal que os únicos pontos que pertencem a duas arestas são os seus vértices). Em seguida, marque os pontos médios E, F, G e H dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Construa então o quadrilátero $EFGH$.



1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe as áreas dos quadriláteros $ABCD$ e $EFGH$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:  .

Capítulo 3

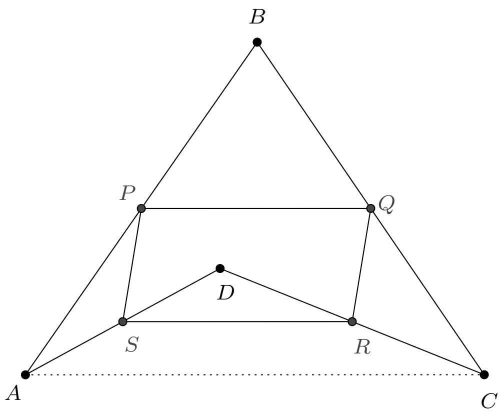
Geometria 2D: Conjecturas e Demonstrações

3.1 Nível 1

Invariante 1

Construa um quadrilátero $ABCD$. Em seguida, marque os pontos médios P, Q, R e S dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Construa então o quadrilátero $PQRS$.

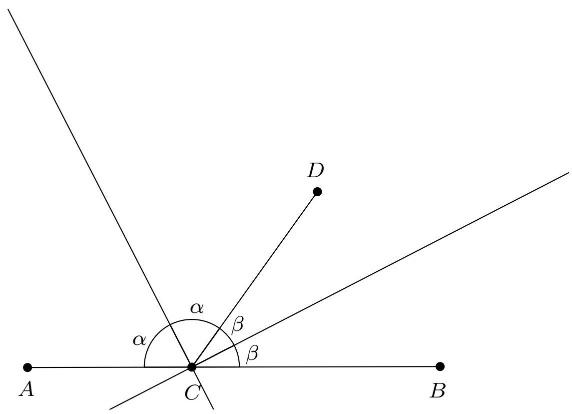
Pontos livres: os vértices do quadrilátero A, B, C e D. *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: o quadrilátero interno $PQRS$ é um paralelogramo.



Demonstração. No triângulo ADC, como os pontos R e S são pontos médios, respectivamente, dos lados $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, segue-se pelo teorema da base média do triângulo que $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{AC}$ e RS=$\frac{AC}{2}$. Do mesmo modo, como os pontos P e Q são pontos médios, respectivamente, dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do triângulo ABC, concluímos que $\overline{PQ}$ é paralelo a $\overline{AC}$ e PQ=$\frac{AC}{2}$. Logo $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{PQ}$ e RS=PQ. Aplicando argumentos análogos aos triângulos ABD e CBD, podemos também concluir que $\overline{PS}$ é paralelo a $\overline{QR}$ e PS=QR. Logo, o quadrilátero $PQRS$ é um paralelogramo. ■

Invariante 2

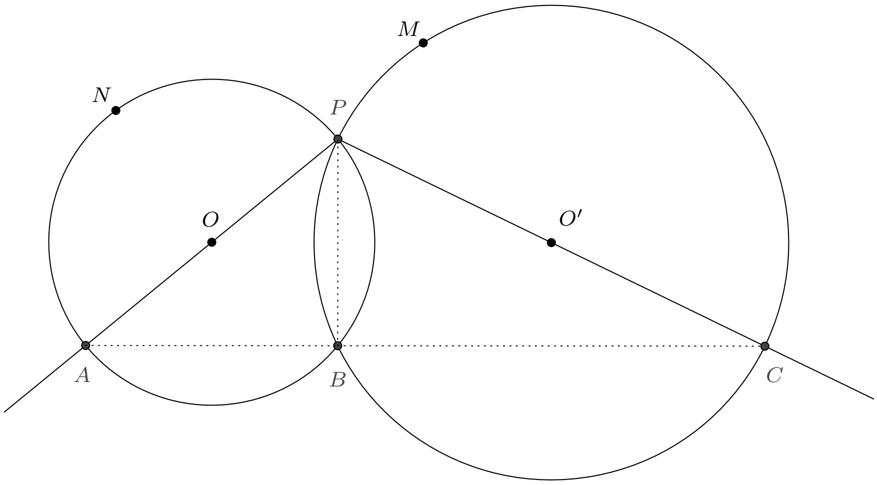
Trace um segmento $\overline{AB}$. Nesse segmento marque um ponto C. Marque então um ponto D diferente de C e, em seguida, trace o segmento $\overline{CD}$. Construa as bissetrizes dos ângulos $\widehat{ACD}$ e $\widehat{BCD}$.
Pontos livres: os pontos A, B e D. *Ponto semilivre*: o ponto C. *Invariante geométrico*: as bissetrizes dos ângulos $\widehat{ACD}$ e $\widehat{BCD}$ são perpendiculares.



Demonstração. Sejam α o ângulo formado pela bissetriz de $\widehat{ACD}$ com o segmento $\overline{AC}$ e β o ângulo formado pela bissetriz de $\widehat{BCD}$ com o segmento $\overline{CB}$. Temos então que $2\alpha + 2\beta = 180°$ e, sendo assim, a medida do ângulo entre as bissetrizes dos ângulos $\widehat{ACD}$ e $\widehat{BCD}$ é igual $\alpha + \beta = 90°$, o que demonstra que elas são perpendiculares. ■

Invariante 3

Construa dois círculos com centros nos pontos O e O' e que passam pelos pontos N e M, respectivamente. Suponha que os dois círculos intersectam-se em dois pontos distintos, digamos, P e B. Por P, trace a semirreta $\overrightarrow{PO}$ e marque o ponto A de interseção dessa semirreta com o primeiro círculo. Do mesmo modo, por P, trace a semirreta $\overrightarrow{PO'}$ e marque o ponto C de interseção dessa semirreta com o segundo círculo.
Pontos livres: O, O', M e N. *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: os pontos A, B e C são colineares.



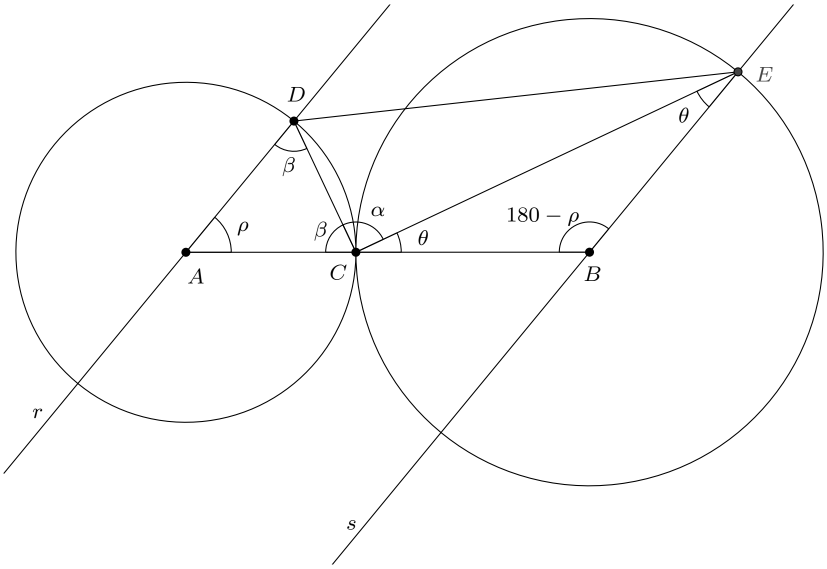
Demonstração. Os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PC}$ são diâmetros dos círculos, logo, os triângulos PBA e PBC são retângulos em B. Assim, $\widehat{CBA} = \widehat{CBP} + \widehat{PBA} = 90° + 90° = 180°$. Os pontos A, B e C são, dessa maneira, colineares. ■

Invariante 4

Trace um segmento $\overline{AB}$ e, nesse segmento, marque um ponto C. Com centro em A, trace o círculo passando por C e marque um ponto D nesse círculo. Agora construa um segundo círculo com centro em B passando também por C. Em seguida, construa a reta r passando por A e D. Trace, então, por B, à reta s paralela à reta r. Marque o ponto E de intersecção dessa reta s com o segundo círculo (esse ponto E deverá ser aquele que está no mesmo semiplano que o ponto D com relação a reta que contém o segmento $\overline{AB}$). Por fim, construa o triângulo DCE.

Pontos livres: A e B. *Pontos semilivres*: C e D. *Invariante geométrico*: DCE é um triângulo retângulo.

Demonstração. O triângulo ACD é isósceles de base $\overline{CD}$ (pois $AC = AD =$ raio do círculo de centro em A) e o triângulo BCE também é isósceles de base $\overline{CE}$ (pois $BC = BE =$ raio do círculo de centro em B). Considere, então, $\beta = \widehat{ACD} = \widehat{ADC}$; $\theta = \widehat{BCE} = \widehat{BEC}$; $\rho = \widehat{DAC}$, de modo que $\widehat{CBE} = 180^0 - \rho$ (os ângulos $\widehat{CBE}$ e $\widehat{CAD}$ são suplementares, pois as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ são paralelas) e, por fim, $\alpha = \widehat{DCE}$. Pelo teorema do ângulo externo de um triângulo aplicado aos triângulos ADC e CBE, respectivamente, segue-se que $\theta + \alpha = \beta + \rho$ e $\beta + \alpha = \theta + 180° - \rho$. Somando-se membro a membro essas duas equações,

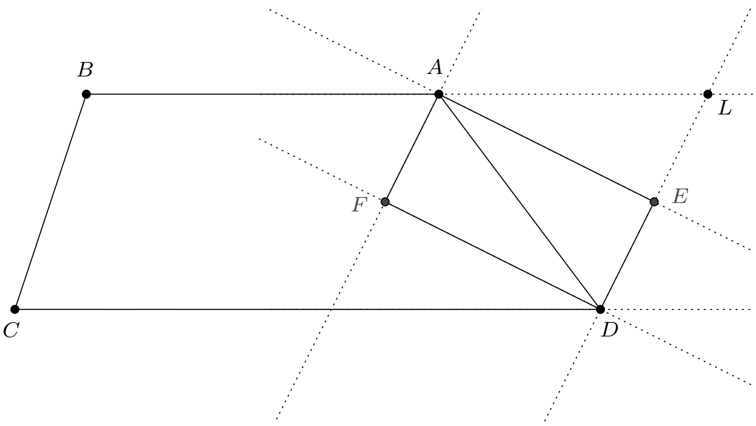


temos que $\beta + \theta + 2\,\alpha = \beta + \theta + \rho + 180° - \rho$, isto é, $2\,\alpha = 180°$ e, sendo assim, $\alpha = 90°$. Consequentemente, DCE é um triângulo retângulo. ∎

Invariante 5

Construa um trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$. Trace, então, as bissetrizes interna e externa correspondentes ao ângulo $\widehat{BAD}$ e, também, as bissetrizes interna e externa correspondentes ao ângulo $\widehat{CDA}$ do trapézio $ABCD$. Seja E o ponto de interseção das bissetrizes externas e seja F o ponto de interseção das bissetrizes internas. Construa o quadrilátero $AFDE$.

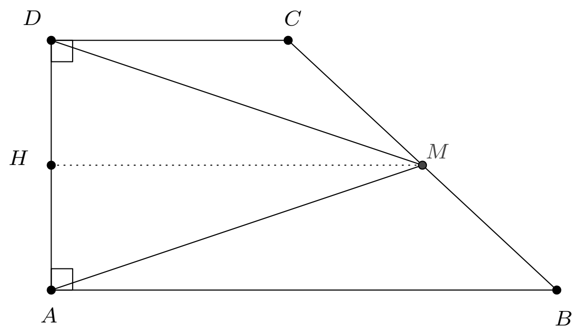
Pontos livres e semilivres: três dos quatro vértices do trapézio $ABCD$ são livres, o vértice restante é semilivre. *Invariante geométrico*: o quadrilátero $AFDE$ é um retângulo.



Demonstração. Pelo resultado do Invariante 2, temos que $\widehat{FAE}$ é um ângulo reto. O mesmo acontece com o ângulo $\widehat{EDF}$. Seja L o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$. Como o quadrilátero $ABCD$ é um trapézio, segue-se que $\widehat{CDA} = \widehat{DAL}$ (pois as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas e os ângulos $\widehat{CDA}$ e $\widehat{DAL}$ são alternos internos). Consequentemente, $\widehat{FDA} = \widehat{CDA}/2 = \widehat{DAL}/2 = \widehat{EAD}$. Sendo assim, os segmentos $\overline{DF}$ e $\overline{EA}$ são paralelos. Como $\overline{DF}$ é perpendicular a $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$ é paralelo a $\overline{DF}$, concluímos que $\overline{EA}$ também é perpendicular a $\overline{DE}$. Logo, o ângulo $\widehat{AED}$ também é reto. Como o quadrilátero $AFDE$ tem três angulos internos retos ($\widehat{FAE}$, $\widehat{EDF}$ e $\widehat{AED}$), segue-se que ele é um retângulo. ■

Invariante 6

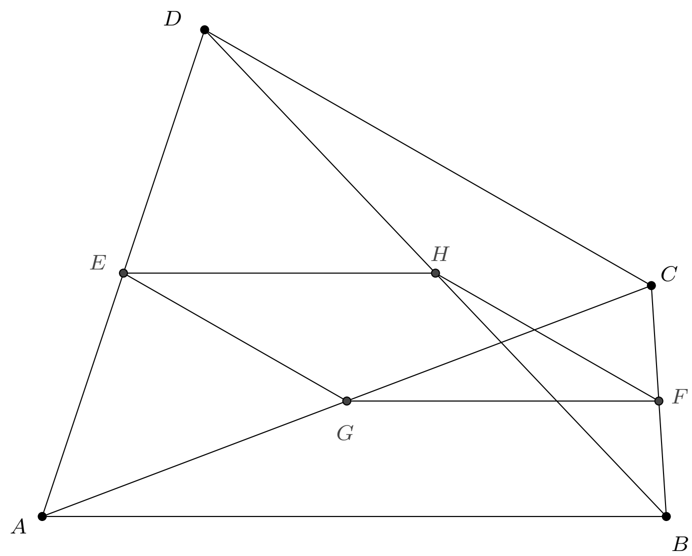
Construa um trapézio retângulo $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e lado oblíquo $\overline{BC}$. Marque, então, o ponto médio M de $\overline{BC}$. Por fim, construa o triângulo AMD. *Pontos semilivres* e *pontos livres*: dois vértices adjacentes do trapézio $ABCD$ são livres, os outros dois vértices são semilivres. *Invariante geométrico*: o triângulo AMD é isósceles.



Demonstração. Trace por M uma reta paralela às bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ do trapézio e seja H o ponto de interseção dessa reta com o lado $\overline{AD}$. Como os ângulos $\widehat{BAD}$ e $\widehat{ADC}$ são retos, o segmento $\overline{HM}$ é perpendicular a $\overline{AD}$ e, portanto, ele é a altura do triângulo AMD com relação ao lado $\overline{AD}$. Por outro lado, como M é ponto médio de $\overline{BC}$ e $\overline{HM}$ é paralelo às bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, segue-se que H é ponto médio de $\overline{AD}$, de modo que $\overline{HM}$ é a mediana do triângulo AMD com relação ao lado $\overline{AD}$. Logo, no triângulo AMD, $\overline{MH}$ é simultaneamente altura e mediana com relação ao lado $\overline{AD}$. Sendo assim, o triângulo AMD é isósceles de base $\overline{AD}$. ■

Invariante 7

Construa um quadrilátero $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Trace as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Marque os pontos médios E e F dos lados não adjacentes



$\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, e os pontos médios G e H das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Construa o quadrilátero $EGFH$.

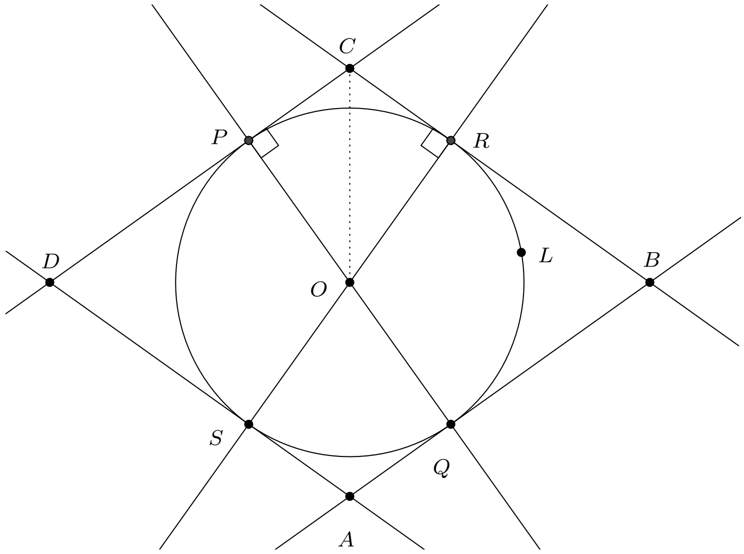
Pontos livres: A, B, C e D. *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: o quadrilátero $EGFH$ é um paralelogramo.

Demonstração. No triângulo BCD, temos que os pontos H e F são pontos médios, respectivamente, dos lados $\overline{BD}$ e $\overline{BC}$. Portanto, pelo teorema da base média do triângulo, segue-se que $\overline{HF}$ é paralelo a $\overline{CD}$ e HF=$\frac{CD}{2}$. Analogamente, temos que no triângulo ACD, $\overline{EG}$ é paralelo a $\overline{CD}$ e EG=$\frac{CD}{2}$. Logo, $\overline{HF}$ é paralelo a $\overline{EG}$ e HF=EG. Aplicando-se argumentos análogos aos triângulos ADB e ACB podemos concluir que $\overline{EH}$ é paralelo a $\overline{FG}$ e EH=FG. Logo, o quadrilátero $EFGH$ é um paralelogramo. ■

Invariante 8

Construa um círculo $\mathcal{C}$ de centro O passando por um ponto L. Sobre o círculo $\mathcal{C}$, marque dois pontos P e R. Construa então as retas $\overleftrightarrow{OP}$ e $\overleftrightarrow{OR}$. Seja $Q \neq P$ o ponto de interseção entre $\mathcal{C}$ e $\overleftrightarrow{OP}$ e seja $S \neq R$ o ponto de interseção entre $\mathcal{C}$ e $\overleftrightarrow{OR}$. Em seguida, construa as retas tangentes t_P, t_Q, t_R e t_S ao círculo nos pontos P, Q, R e S, respectivamente. Marque os pontos de interseção A entre t_S e t_Q, B entre t_Q e t_R, C entre t_R e t_P, D entre t_P e t_S. Por fim, construa o quadrilátero $ABCD$.

Pontos livres: O e L. *Pontos semilivres*: P e R. *Invariante geométrico*: o quadrilátero $ABCD$ é um losango.

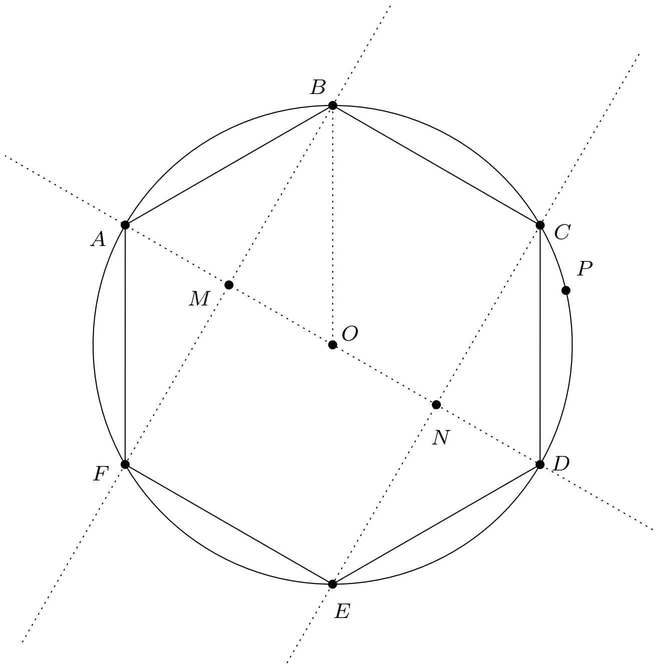


Demonstração. Vamos aplicar o caso especial de congruência de triângulos retângulos: $OR = OP$ e $\overline{OC}$ é hipotenusa comum, então, $CP = CR$. O mesmo ocorre com os outros segmentos tangentes, isto é, $DP = DS$, $AQ = AS$ e $BQ = BR$. Somando-se membro a membro as quatro últimas igualdades temos que $CP + PD + AQ + QB = CR + RB + AS + SD \Rightarrow CD + AB = CB + AD$. As retas tangentes t_P e t_Q são paralelas, pois são perpendiculares ao diâmetro $\overline{PQ}$ e, por motivo análogo, as retas tangentes t_R e t_S também são paralelas. Assim, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo. Agora, $x = CD = AB$ e $y = AD = BC \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$, ou seja, os lados do paralelogramo são congruentes, implicando que $ABCD$ é um losango. ■

Invariante 9

Construa um círculo $\mathcal{C}$ de centro O passando por um ponto P. Marque um ponto A sobre $\mathcal{C}$ e, então, trace a reta $\overleftrightarrow{OA}$. Seja $D \neq A$ o ponto de interseção entre $\mathcal{C}$ e $\overleftrightarrow{OA}$. Determine os pontos médios M e N de $\overline{AO}$ e $\overline{OD}$, respectivamente. Construa, por M, uma reta perpendicular a $\overline{AD}$ e marque os pontos B e F de interseção dessa reta com o círculo $\mathcal{C}$. Agora, trace, por N, uma reta perpendicular a $\overline{AD}$ e marque os pontos C e E de interseção dessa reta com o círculo $\mathcal{C}$ (o ponto C deve estar no mesmo semiplano que o ponto B com relação à reta $\overleftrightarrow{OA}$). Desenhe o hexágono $ABCDEF$.

Pontos livres: O e P. *Pontos semilivres*: A. *Invariante geométrico*: o hexágono $ABCDEF$ é regular.



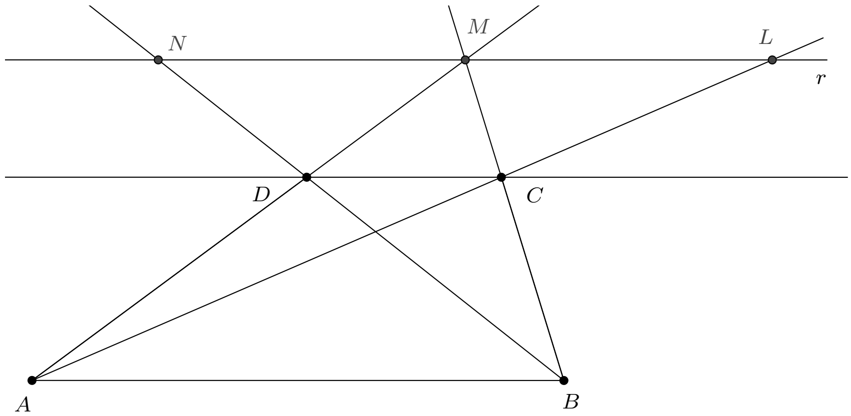
Demonstração. Considere o triângulo ABO. Como o segmento $\overline{BM}$ é mediana e altura desse triângulo, concluímos que ele é isósceles de base $\overline{AO}$. Mas $AO = OB$ ($\overline{AO}$ e $\overline{OB}$ são raios do círculo $\mathcal{C}$), logo o triângulo ABO é equilátero. De forma análoga, podemos afirmar que os triângulos AFO, DCO, DEO são também equiláteros, implicando que também serão equiláteros os triângulos BOC e EFO. Essa justaposição de seis triângulos equiláteros mostra que $ABCDEF$ é um hexágono regular. ∎

3.2 Nível 2

Invariante 1

Construa um trapézio $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, com lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Em seguida, trace as semirretas $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$. Marque o ponto M de interseção das semirretas $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$. Depois, trace, por M, a reta paralela r aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Construa, então, as semirretas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$. Por fim, marque os pontos L e N de interseção dessas semirretas com a reta r.

Pontos livres: três vértices do trapézio $ABCD$. *Pontos semilivres*: o quarto vértice do trapézio. *Invariante geométrico*: o ponto M é o ponto médio do segmento $\overline{LN}$.



Demonstração. Pelo Teorema de Tales, temos que $BC/BM = AD/AM$. Como os triângulos ACD e ALM são semelhantes, concluímos que vale a igualdade $AD/AM = CD/LM$. Agora, segue-se da semelhança dos triângulos BCD e BMN que $BC/BM = CD/NM$. Assim,

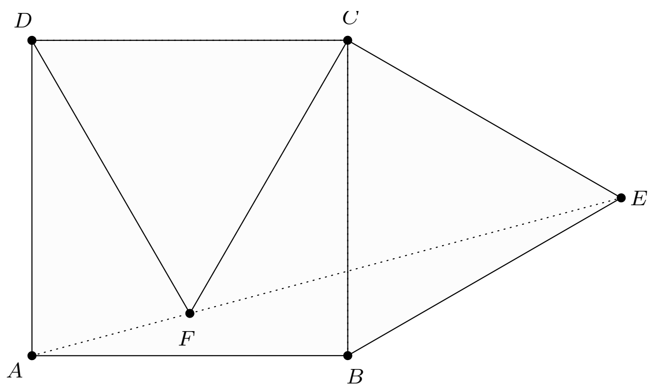
$$BC/BM = AD/AM \Rightarrow CD/NM = CD/LM \Rightarrow MN = LM,$$

isto é, M é o ponto médio do segmento $\overline{LN}$. ■

Invariante 2

Construa um quadrado $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em seguida, construa sobre o lado $\overline{BC}$ um triângulo equilátero BCE para fora e sobre o lado $\overline{CD}$ um triângulo equilátero CDF para dentro do quadrado.

Pontos livres: dois vértices consecutivos do quadrado (os outros dois são fixos). *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: os pontos A, F e E são colineares.

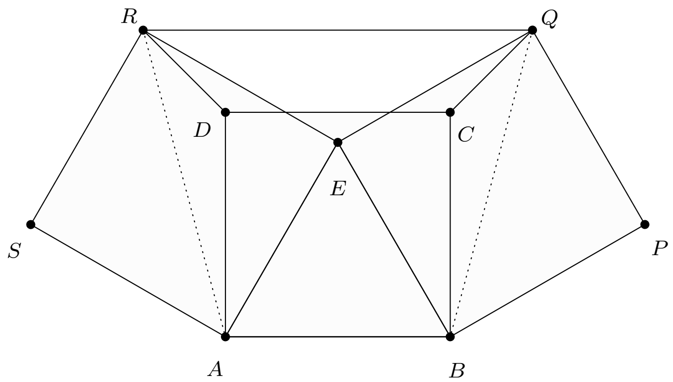


Demonstração. Temos que $\widehat{FCE} = 30° + 60° = 90°$ e $CF = CE$ e, assim, $\widehat{CFE} = 45°$. Observando o triângulo isósceles ADF, onde $DA = DF$, temos que $\widehat{ADF} = 30°$. Portanto, $\widehat{DFA} = 75°$. Dessa maneira,, $\widehat{AFD} + \widehat{DFC} + \widehat{CFE} = 75° + 60° + 45° = 180°$, ou seja, os pontos A, F e E são colineares. ■

Invariante 3

Construa o quadrado $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Agora, desenhe um triângulo equilátero ABE para dentro do quadrado. Em seguida, construa, para fora do triângulo ABE, dois quadrados: o primeiro, $AERS$, de lados $\overline{AE}$, $\overline{ER}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SA}$, e o segundo, $EBPQ$, de lados $\overline{BE}$, $\overline{EQ}$, $\overline{QP}$ e $\overline{PB}$. Por fim, trace o quadrilátero $CQRD$.

Pontos livres: dois vértices consecutivos do primeiro quadrado $ABCD$ (os outros dois são fixos). *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: o quadrilátero $CQRD$ é um trapézio isósceles.



Demonstração. Para demonstrar que o polígono $CQRD$ é um trapézio isósceles, devemos mostrar que os segmentos $\overline{DR}$ e $\overline{CQ}$ são congruentes e que os segmentos $\overline{RQ}$ e $\overline{DC}$ são paralelos.

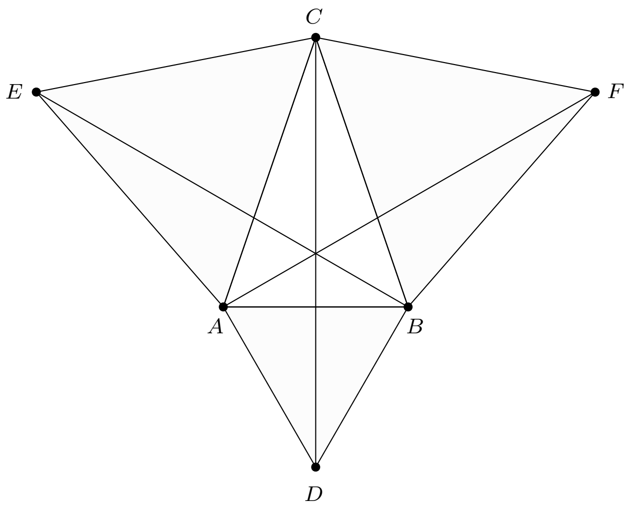
Primeiro demonstraremos que os segmentos $\overline{DR}$ e $\overline{CQ}$ são congruentes. Para isso, mostraremos que os triângulos ADR e BCQ são congruentes. De fato: temos que $AD = BC$ (lados do quadrado $ABCD$), $AR = BQ$ (diagonais dos quadrados congruentes $AERS$ e $EBPQ$) e $\widehat{RAD} = \widehat{QBC} = 15°$. Assim, pelo caso LAL, os triângulos ADR e BCQ são congruentes e, em particular, $DR = CQ$.

Agora, demonstraremos que os segmentos $\overline{RQ}$ e $\overline{DC}$ são paralelos. Note, inicialmente, que $ER = EQ$ (lados dos quadrados congruentes $AERS$ e $EBPQ$). Como $\widehat{REQ} = 360° - (90° + 90° + 60°) = 120°$, segue-se que $\widehat{ERQ} = 30°$ (ângulo da base do triângulo isósceles ERQ) e, portanto, $\widehat{ARQ} = 45° + 30° = 75°$. Como $\widehat{RAB} = 45° + 60° = 105°$, temos que $\widehat{ARQ} + \widehat{RAB} = 75° + 105° = 180°$, o que implica no paralelismo dos segmentos $\overline{RQ}$ e $\overline{AB}$. Como $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos (lados opostos do quadrado $ABCD$), segue-se que os segmentos $\overline{RQ}$ e $\overline{CD}$ são também paralelos. ■

Invariante 4

Construa um triângulo isósceles ABC de base $\overline{AB}$. Em seguida, construa três triângulos equiláteros BCF, ACE e ABD para fora desse triângulo. Por fim, construa os segmentos $\overline{BE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{CD}$.

Pontos livres: A e B. *Ponto semilivre*: C. *Invariante geométrico*: os segmentos $\overline{AF}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ são congruentes.



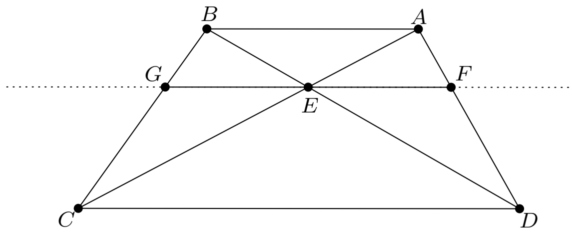
Demonstração. Os triângulos AFB e ABE são congruentes pelo caso LAL, pois $BF = BC = AC = AE$, $\overline{AB}$ é comum e $\widehat{ABF} = \widehat{CBA} + \widehat{FBC} = \widehat{CBA} + 60° = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = \widehat{EAB}$. Em particular, $AF = BE$. Considere agora os triângulos DBC e ABF. Temos que $DB = AB$ (lados do triângulo equilátero ABD), $BC = BF$ (lados do triângulo equilátero BCF) e $\widehat{DBC} = \widehat{DBA} + \widehat{ABC} = 60° + \widehat{ABC} = \widehat{CBF} + \widehat{ABC} = \widehat{ABF}$. Portanto, pelo caso LAL, os triângulos DBC e ABF são congruentes. Em particular, $CD = AF$. Dessa maneira, os segmentos $\overline{AF}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ são congruentes. ■

3.3 Nível 3

Invariante 1

Construa um trapézio $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ e lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Trace as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e marque o ponto $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}$. Por E, trace a reta paralela ao lado $\overline{AB}$. Essa reta intersectará o lado $\overline{AD}$ em F e o lado $\overline{BC}$ em G. Considere os segmentos $\overline{FE}$ e $\overline{GE}$.

Pontos livres e semilivres: três vértices do trapézio $ABCD$, o quarto vértice é semilivre. *Invariante geométrico*: $FE = GE$.

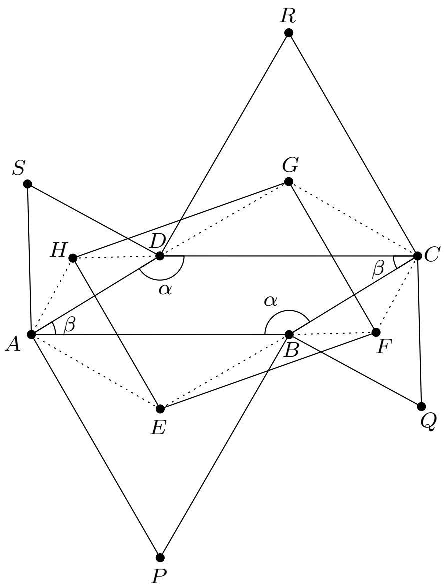


Demonstração. Pelo critério LAL, os triângulos ABD e FED são semelhantes. Dessa maneira, $AB/FE = AD/FD = DB/DE = (DE + EB)/DE$. Do mesmo modo, os triângulos ABC e EGC são semelhantes e, portanto, $AB/GE = BC/CG = CA/CE = (AE + CE)/CE$. Analogamente, os triângulos ECD e EAB também são semelhantes e, sendo assim, $AB/CD = AE/CE = EB/DE$. Consequentemente, $(AE + CE)/CE = (DE + EB)/DE$. Logo, $AB/FE = (DE+EB)/DE = (AE+CE)/CE = AB/GE$. Mas, se $AB/FE = AB/GE$, então $FE = GE$. ■

Invariante 2

Construa um paralelogramo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em seguida, sobre cada um de seus lados, construa para fora do paralelogramo os triângulos equiláteros ABP, BCQ, CDR e DAS. Marque então os baricentros E, F, G e H dos triângulos ABP, BCQ, CDR e DAS, respectivamente. Por fim, construa o quadrilátero $EFGH$.

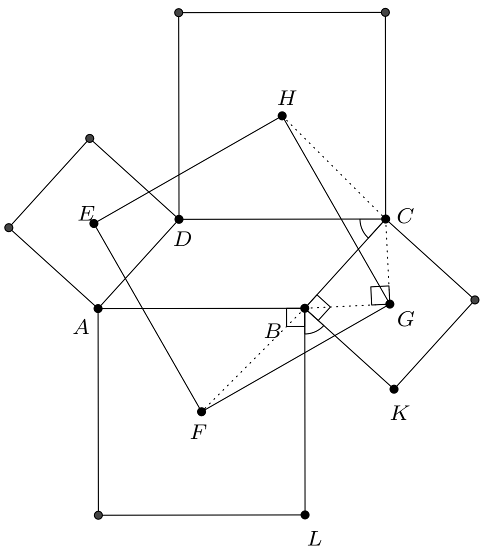
Pontos livres: três vértices do paralelogramo $ABCD$ (o quarto vértice é fixo). *Pontos semilivres*: não existe. *Invariante geométrico*: o quadrilátero $EFGH$ é um paralelogramo.



Demonstração. Como os triângulos equiláteros construídos sobre os lados opostos do paralelogramo $ABCD$ são congruentes, temos que $DH = FB$, $GD = EB$ e $\widehat{HDG} = 360° - \alpha - \widehat{GDC} - \widehat{ADH} = 360° - \alpha - \widehat{EBA} - \widehat{FBC} = \widehat{EBF}$; $AH = FC$, $AE = CG$ e $\widehat{HAE} = \widehat{HAD} + \beta + \widehat{BAE} = \widehat{BCF} + \beta + \widehat{DCG} = \widehat{FCG}$. Dessa maneira, pelo caso LAL, HDG é congruente a EBF e EAH é congruente a FCG. Em particular, $GH = EF$ e $EH = FG$. Assim, como os lados opostos do quadrilátero $EFGH$ são congruentes, ele é um paralelogramo. ∎

Invariante 3

Construa um paralelogramo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em cada um de seus lados, construa quadrados para fora do paralelogramo. Marque, então, os centros E, F, G e H desses quadrados e, por fim, desenhe o quadrilátero $EFGH$. *Pontos livres*: três vértices do paralelogramo $ABCD$ (o quarto vértice é fixo). *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: o quadrilátero $EFGH$ é um quadrado.



Demonstração. Sejam K e L pontos como na figura. Temos que $\widehat{KBL} + \widehat{ABC} = 360° - \widehat{LBA} - \widehat{KBC} = 360° - 90° - 90° = 180° = \widehat{BCD} + \widehat{ABC}$. Assim, $\widehat{KBL} = \widehat{BCD}$. Além disso, como $BG = CG$ e $BF = CH$, segue-se que os triângulos BFG e CGH são congruentes (caso LAL). Em particular, $FG = GH$ e $\widehat{BGF} = \widehat{CGH}$. Dessa maneira,

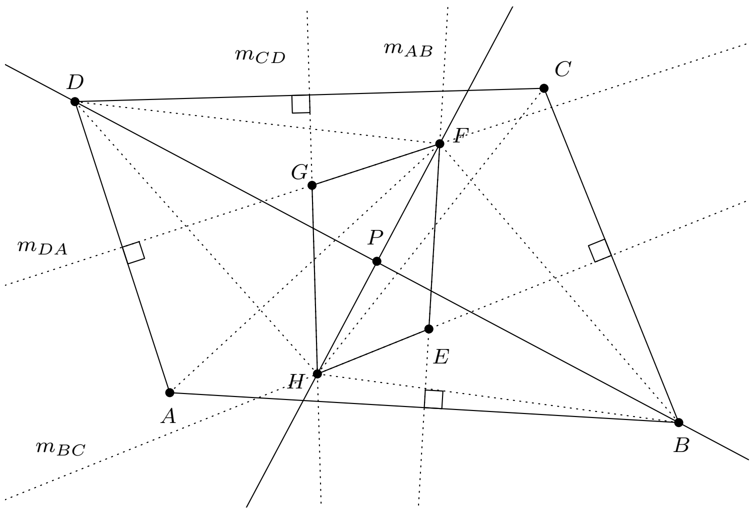
$$\widehat{HGF} = \widehat{BGF} + \widehat{HGB} = \widehat{CGH} + \widehat{HGB} = \widehat{CGB} = 90°.$$

Resumindo: $FG = GH$ e $\widehat{HGF} = 90°$. Analogamente, podemos mostrar que $GH = HE$ e $\widehat{GHE} = 90°$; $HE = EF$ e $\widehat{HEF} = 90°$ e $EF = FG$ e $\widehat{EFG} = 90°$. Sendo assim, o quadrilátero $EFGH$ é um quadrado. ∎

Invariante 4

Construa o quadrilátero $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Trace suas respectivas mediatrizes m_{AB}, m_{BC}, m_{CD} e m_{DA}. Suponha que: $m_{AB} \cap m_{BC} = \{E\}$; $m_{AB} \cap m_{AD} = \{F\}$; $m_{CD} \cap m_{AD} = \{G\}$ e $m_{CD} \cap m_{BC} = \{H\}$. Construa o quadrilátero $EFGH$ e trace sua diagonal $\overleftrightarrow{FH}$. Por fim, trace a diagonal $\overleftrightarrow{BD}$ do quadrilátero $ABCD$.

Pontos livres: os vértices do quadrilátero $ABCD$. *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: as retas $\overleftrightarrow{FH}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são perpendiculares.

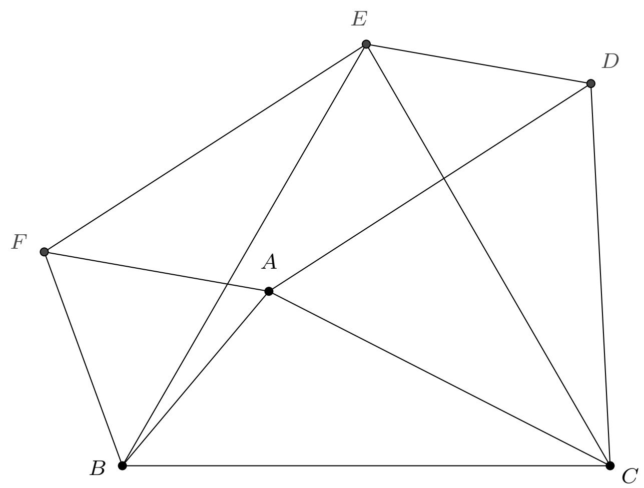


Demonstração. Seja $\overleftrightarrow{FH} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{P\}$. Os triângulos HDF e HBF são congruentes, pois $FD = FA = FB$, $HB = HC = HD$ e $\overline{FH}$ é um lado comum. Em particular, o triângulo DFB é isósceles e $\widehat{DFP} = \widehat{PFB}$. Agora, pelo critério LAL, os triângulos PFB e PFD são congruentes. Consequentemente, $DP = BP$, isto é, $\overline{FP}$ é mediana e, portanto, também altura do triângulo isósceles DFB. Dessa maneira, $\overleftrightarrow{FP}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{BD}$. ∎

Invariante 5

Construa um triângulo ABC. Sobre os lado $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, construa triângulos equiláteros ABF e ACD para fora do triângulo ABC. Sobre o lado $\overline{BC}$, por sua vez, construa o triângulo equilátero BCE para dentro do triângulo ABC. Por fim, trace o quadrilátero $ADEF$.

Pontos livres: os vértices do triângulo ABC. *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: o quadrilátero $ADEF$ é um paralelogramo.



Demonstração. Os triângulos ABC e FBE são congruentes. De fato: $BC = BE$, pois o triângulo EBC é equilátero. Ocorre também que $AB = FB$, pois o triângulo FBA é equilátero. Agora

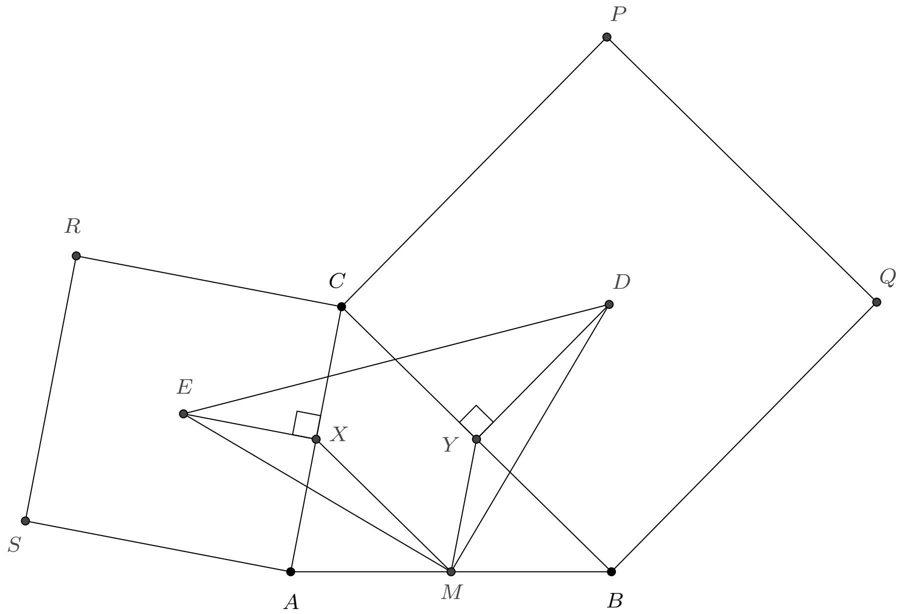
$$\widehat{EBF} = 60^\circ - \widehat{ABE} = \widehat{CBA}.$$

Pelo critério LAL, os triângulos ABC e FBE são congruentes. De maneira análoga, demonstra-se que os triângulos ABC e DEC também são congruentes. Como FBE é congruente a ABC e ABC é congruente a DEC, segue-se que FBE é congruente a DEC. Portanto, $FB = ED$ e $FE = DC$. Mas os triângulos FBA e DAC são equiláteros, logo $FA = FB$ e $AD = DC$. Concluímos assim que $FA = ED$ e $FE = AD$. Portanto, o quadrilátero $AFED$ é um paralelogramo. ∎

Invariante 6

Construa um triângulo ABC. Sobre o lado $\overline{BC}$, construa para fora do triângulo desse triângulo o quadrado $BCPQ$ com lados $\overline{BC}$, $\overline{CP}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{QB}$. Agora, sobre o lado $\overline{AC}$ desse triângulo, construa para fora do triângulo o quadrado $ACRS$ com lados $\overline{AC}$, $\overline{CR}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SA}$. Determine os centros D e E dos quadrados $BCPQ$ e $ACRS$, respectivamente, e, então, marque o ponto médio M do lado $\overline{AB}$. Por fim, construa o triângulo DEM.

Pontos livres: os vértices do triângulo ABC. *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: o triângulo DEM é retângulo e isósceles, isto é, $\widehat{EMD} = 90^\circ$ e $EM = DM$.

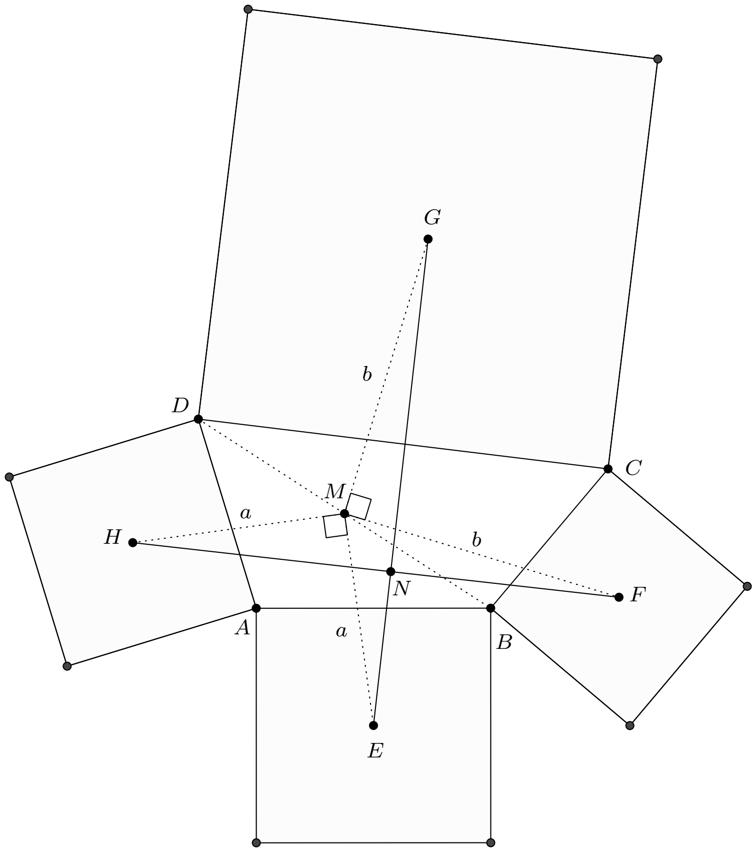


Demonstração. Sejam X o ponto médio do segmento $\overline{AC}$ e Y o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Note que $\overline{YM}$ e $\overline{MX}$ são bases médias do triângulo BCA com relação aos lados $\overline{CA}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Assim, $YM = CA/2$ e $MX = BC/2$. Como $CX = CA/2$ e $YC = BC/2$, concluímos que $CX = YM$ e $MX = YC$. Em particular, o quadrilátero $CXMY$ é um paralelogramo, $EX = YM$ e $MX = DY$. Agora, $\widehat{EXM} = \widehat{EXA} + \widehat{AXM} = 90° + \widehat{XCY} = 90° + \widehat{MYB} = \widehat{BYD} + \widehat{MYB} = \widehat{MYD}$. Dessa maneira, pelo critério LAL, os triângulos XEM e YMD são congruentes. Em particular, $EM = DM$. Resta mostrar que $\widehat{DME} = 90°$. Sejam $\alpha = \widehat{XME}$, $\beta = \widehat{YMX}$ e $\gamma = \widehat{DMY}$. Observe que $\widehat{DME} = \alpha+\beta+\gamma$. Agora, $\widehat{EXM}+\widehat{MXC}+\widehat{CXE} = 360°$, $\widehat{EXM} = 180° - \widehat{MEX} - \widehat{XME} = 180° - \alpha - \gamma$, $\widehat{MXC} = 180° - \widehat{YMX} = 180° - \beta$ e $\widehat{CXE} = 90°$. Assim, $(180° - \alpha - \gamma) + (180° - \beta) + 90° = 360°$. Logo, $\widehat{DME} = \alpha + \beta + \gamma = 90°$. ■

Invariante 7

Construa um quadrilátero $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Sobre seus lados construa, para fora do quadrilátero, quatro quadrados. Marque os respectivos centros E, F, G e H desses quadrados. Por fim, trace os segmentos $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$.

Pontos livres: os vértices do quadrilátero $ABCD$. *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: As retas $\overleftrightarrow{EG}$ e $\overleftrightarrow{FH}$ são perpendiculares e, também, $EG = FH$.



Demonstração. Seja M o ponto médio da diagonal BD do quadrilátero. Pelo Invariante Geométrico anterior, temos que $\overline{GM}$ e $\overline{FM}$ são congruentes e perpendiculares. O mesmo acontece com $\overline{HM}$ e $\overline{EM}$. Sendo assim, os triângulos FMH e EMG são congruentes e , em particular, $EG = FH$. Seja $\overleftrightarrow{FH} \cap \overleftrightarrow{EG} = \{N\}$. Para o quadrilátero $NGMH$, temos que $\widehat{HNG} + \widehat{NGM} + 90° + \widehat{FME} + 90° + \widehat{MHF} = 360°$ e, para o triângulo FMH, vale que $\widehat{NFM} + \widehat{FME} + 90° + \widehat{MHF} = 180°$. Subtraindo-se essas igualdades e levando-se em conta que $\widehat{NGM} = \widehat{NFM}$, concluímos que $\widehat{HNG} = 90°$. ■

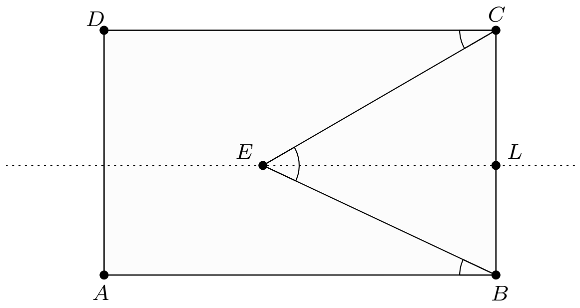
3.4 Nível 4

Invariante 1

Construa um retângulo $ABCD$ e marque um ponto E no interior do retângulo. Em seguida, trace os segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$. Por fim, construa os ângulos $\widehat{EBA}$, $\widehat{DCE}$ e $\widehat{BEC}$.

Pontos semilivres e *pontos livres*: dois vértices adjacentes do retângulo $ABCD$ são livres, um vértice restante é semilivre e o outro é fixo; o ponto E é semilivre.

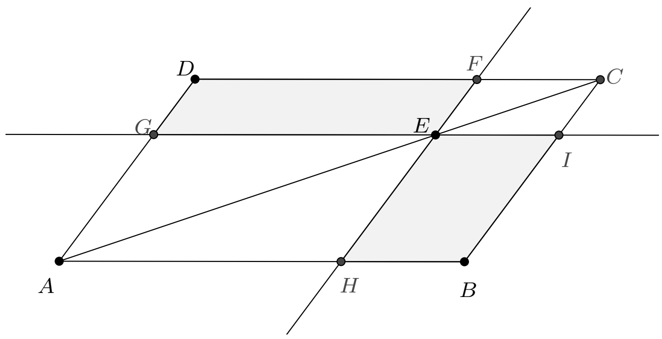
Invariante geométrico: $\widehat{BEC}$=$\widehat{EBA}$+ $\widehat{ECD}$.



Demonstração. Trace por E uma reta paralela ao lado $\overline{AB}$. Seja L o ponto de interseção dessa reta com o lado $\overline{BC}$. O ângulos $\widehat{DCE}$ e $\widehat{CEL}$ são congruentes, pois são ângulos alternos internos com relação às retas paralelas $\overleftrightarrow{EL}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. Os ângulos $\widehat{ABE}$ e $\widehat{BEL}$, por sua vez, também são congruentes, pois são ângulos alternos internos com relação às retas paralelas $\overleftrightarrow{EL}$ e $\overleftrightarrow{AB}$. Logo: $\widehat{BEC} = \widehat{CEL} + \widehat{BEL} = \widehat{DCE} + \widehat{ABE}$. ■

Invariante 2

Construa o paralelogramo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Trace a diagonal $\overline{AC}$ e marque um ponto E nessa diagonal. Construa, por E, a reta paralela ao lado $\overline{AB}$ e, então, marque os pontos de interseção G e I dessa reta com os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Analogamente, trace, por E, a reta paralela ao lado $\overline{AD}$ e, então, marque os pontos de interseção H e F dessa reta com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Por fim, desenhe os paralelogramos $GEFD$ e $HBIE$.
Pontos semilivres e *pontos livres*: dois vértices adjacentes do paralelogramo $ABCD$ são livres, um é semilivre e o que restou é fixo. *Invariante geométrico*: os paralelogramos $GEFD$ e $HBIE$ possuem a mesma área.



Demonstração. Como $ABCD$ é um paralelogramo, temos que os triângulos ACD e ACB são congruentes (LLL) e, sendo assim, suas áreas são iguais: $(ACD) = (ACB)$[a]. Do mesmo modo, como $AHEG$ é um paralelogramo, segue-se que os triângulos AEG e AEH são congruentes (LLL) e, dessa maneira, $(AEG) = (AEH)$. Analogamente, como $EICF$ é um paralelogramo, $(ECF) = (ECI)$. Agora,

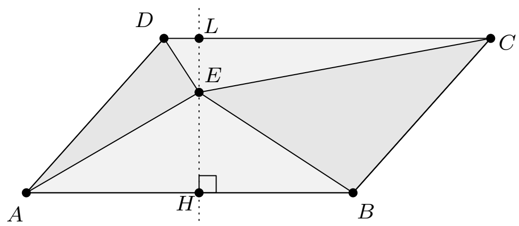
$$(ACD) = (ACB) \Rightarrow \\ (AEG) + (ECF) + (GEFD) = (AEH) + (ECI) + (HBIE).$$

Mas $(AEG) = (AEH)$ e $(ECF) = (ECI)$. Portanto, concluímos que $(GEFD)$ é igual a $(HBIE)$, isto é, os paralelogramos $GEFD$ e $HBIE$ possuem a mesma área. ∎

Invariante 3

Construa um paralelogramo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. No seu interior, marque um ponto E. Considere agora os triângulos ADE e BCE.

Pontos semilivres e *pontos livres*: dois vértices adjacentes do paralelogramo $ABCD$ são livres, um é semilivre e o que restou é fixo; o ponto E é semilivre. *Invariante geométrico*: a área do triângulo ADE somada com a área do triângulo BCE é igual à metade da área do paralelogramo $ABCD$.



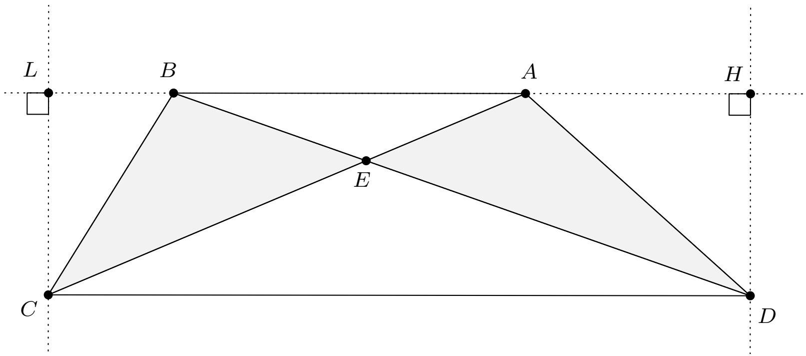
Demonstração. Trace uma reta por E perpendicular aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ do paralelogramo. Sejam H e L os pontos de interseção dessa reta perpendicular com as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. Temos então que $(ABE) + (CDE) = \frac{AB \cdot HE}{2} + \frac{CD \cdot EL}{2} = \frac{AB \cdot HE}{2} + \frac{AB \cdot EL}{2} = \frac{AB \cdot (HE+EL)}{2} = \frac{AB \cdot HL}{2} = \frac{(ABCD)}{2}$ Note também que, em particular, a área do triângulo ADE somada com a área do triângulo BCE também é igual à metade da área do paralelogramo $ABCD$. ∎

[a]Seguindo Coxeter & Greitzer (1967), a notação $(V_1 V_2 \cdots V_n)$ indicará a área do polígono $V_1 V_2 \cdots V_n$. Assim, por exemplo, (ABC) representará a área do triângulo ABC.

Invariante 4

Construa um trapézio $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, com $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{CD}$. Trace as diagonais desse trapézio e marque o ponto E de interseção dessas diagonais. Construa agora os triângulos ADE e BCE.

Pontos livres e semilivres: três dos quatro vértices do trapézio $ABCD$ são livres, o vértice restante é semilivre. *Invariante geométrico*: os triângulos ADE e BCE possuem a mesma área.

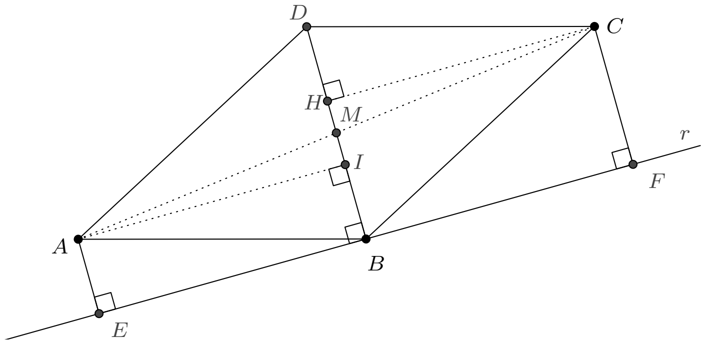


Demonstração. Temos que $(ADB) = (ADE) + (ABE)$ e, também, $(ACB) = (BCE) + (ABE)$. Mas os triângulos ADB e ACB possuem a mesma área, pois possuem uma mesma base ($\overline{AB}$) e uma mesma altura ($LC = HD$). Assim, $(ADB) = (ACB) \Rightarrow (ADE)+(ABE) = (BCE)+(ABE) \Rightarrow (ADE) = (BCE)$. ■

Invariante 5

Construa um paralelogramo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, com $\overline{AD}$ paralelo a $\overline{BC}$. Trace a diagonal $\overline{BD}$. Pelo vértice B, desenhe uma reta r perpendicular à diagonal $\overline{BD}$. Pelos vértices A e C, trace retas perpendiculares à reta r que intersectarão essa reta, respectivamente, nos pontos E e F. Construa os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{CF}$.

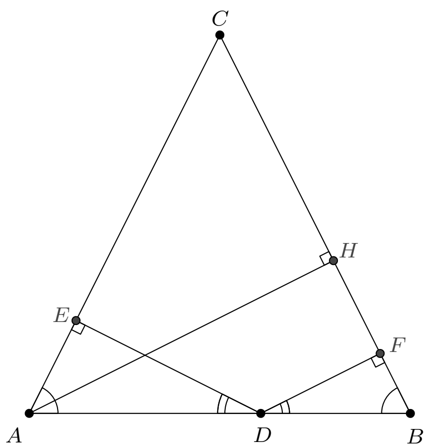
Pontos semilivres e *pontos livres*: dois vértices adjacentes do paralelogramo $ABCD$ são livres, um é semilivre e o que restou é fixo; o ponto E é semilivre. *Invariante geométrico*: $AE + CF = BD$.



Demonstração. Considere os segmentos $\overline{CH}$ e $\overline{AI}$ perpendiculares a $\overline{BD}$. Seja M a interseção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Os triângulos EBA e IAB são congruentes. Os triângulos retângulos AMI e CMH também são congruentes, pois $AM = MC$, $\widehat{MAI} = \widehat{MCH}$ e $\widehat{AMI} = \widehat{CMH}$, logo, $EB = AI = CH$. Os triângulos retângulos AEB e DHC possuem hipotenusas e um dos catetos congruentes, logo são também congruentes, portanto, $HD = AE$, $CF = HB$ e $AE + CF = HD + HB = BD$. ■

Invariante 6

Construa um triângulo isósceles ABC de base $\overline{AB}$. Marque o ponto H, pé da altura relativa ao lado $\overline{BC}$. Em seguida, marque um ponto D na base $\overline{AB}$ e, por D, trace retas perpendiculares aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Sejam E e F os pontos de interseção dessas retas perpendiculares com as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, respectivamente.
Pontos livres: A e B. *Pontos semilivres*: C e D. *Invariante geométrico*: $DF + DE = AH$.



Demonstração. Como o triângulo ABC é, por hipótese, isósceles de base $\overline{AB}$, segue-se que $\widehat{BAC} = \widehat{ABC}$. Agora, por construção, os ângulos $\widehat{AED}$, $\widehat{DFB}$

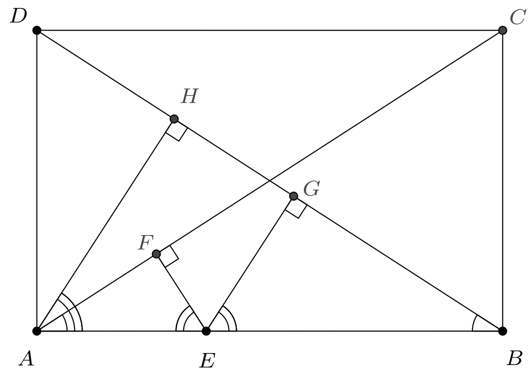
e $\widehat{AHB}$ são retos e, dessa maneira, os triângulos BDF, ADE e ABH são semelhantes (AA). Sendo assim, $DF/AH = BD/BA$ e $DE/AH = AD/BA$. Portanto,

$$\frac{DF + DE}{AH} = \frac{DF}{AH} + \frac{DE}{AH} = \frac{BD}{BA} + \frac{AD}{BA} = \frac{BD + AD}{BA} = \frac{BA}{BA} = 1,$$

e, consequentemente, $DF + DE = AH$. ■

Invariante 7

Construa um retângulo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em seguida, trace suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Seja H o pé da perpendicular baixada do vértice A até a diagonal $\overline{BD}$. Agora, no lado $\overline{AB}$, marque um ponto E. Sejam F e G os pés das perpendiculares baixadas do ponto E até as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Por fim, trace os segmentos $\overline{AH}$, $\overline{EF}$ e $\overline{EG}$.
Pontos livres e semilivres: dois vértices adjacentes do retângulo $ABCD$ são livres, um vértice restante é semilivre e o outro é fixo; o ponto E é semilivre. *Invariante geométrico*: $EF + EG = AH$.



Demonstração. Como o polígono $ABCD$ é um retângulo, temos que $\widehat{EAF} = \widehat{EBG} = \widehat{HBA}$. Segue-se daí que os triângulos AEF, EBG e AHB são semelhantes, pois eles são retângulos. Logo, $AE/AB = EF/AH$ e $BE/AB = EG/AH$. Portanto,

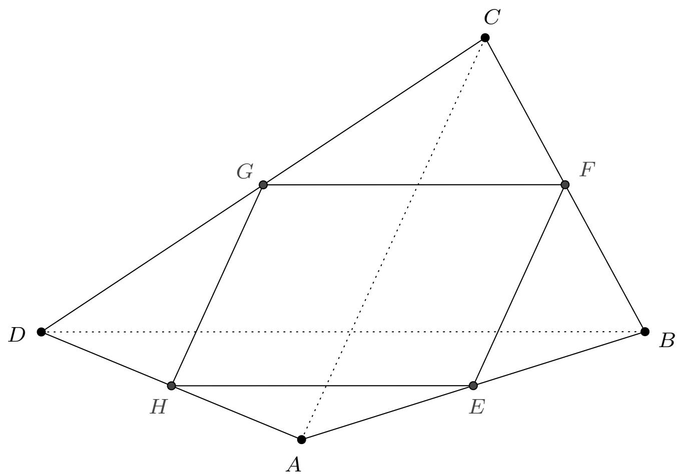
$$\frac{EF + EG}{AH} = \frac{EF}{AH} + \frac{EG}{AH} = \frac{AE}{AB} + \frac{BE}{AB} = \frac{AE + BE}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1,$$

e, consequentemente, $EF + EG = AH$. ■

Invariante 8

Construa um quadrilátero $ABCD$ simples (isto é, $ABCD$ é tal que os únicos pontos que pertencem a duas arestas são os seus vértices). Em seguida, marque os pontos médios E, F, G e H dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Construa então o quadrilátero $EFGH$.

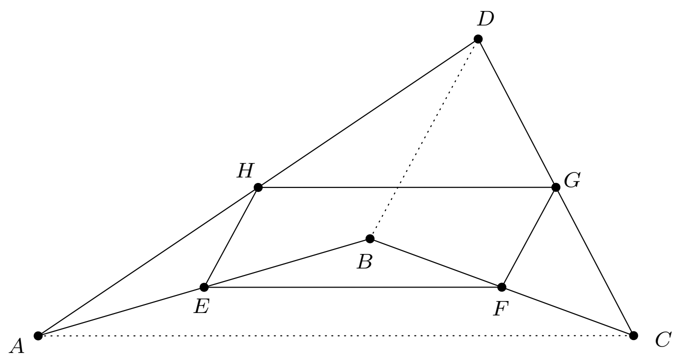
Pontos livres: os pontos A, B, C e D. *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: a área do quadrilátero $EFGH$ é igual à metade da área do quadrilátero $ABCD$.



Demonstração. Já sabemos pelo Invariante 1 do Nível 1 que o quadrilátero $EFGH$ é um paralelogramo. Suponha que o quadrilátero $ABCD$ seja convexo. Quando construímos a base média de um triângulo, ele fica decomposto em um trapézio e um triângulo que possui área igual à quarta parte da área do triângulo original. Aplicando essa propriedade a nossa construção, temos que

$$\begin{aligned}(EFGH) &= (ABCD) - (AEH) - (BEF) - (CFG) - (DGH)\\ &= (ABCD) - \frac{(ABD)}{4} - \frac{(ABC)}{4} - \frac{(CBD)}{4} - \frac{(ACD)}{4}\\ &= (ABCD) - \frac{(ABD)+(CBD)}{4} - \frac{(ABC)+(ACD)}{4}\\ &= (ABCD) - \frac{(ABCD)}{4} - \frac{(ABCD)}{4} \quad = \quad \frac{(ABCD)}{2}.\end{aligned}$$

Isso encerra o caso em que o quadrilátero $ABCD$ é convexo. Suponha agora que $ABCD$ seja um quadrilátero não convexo simples.



Para esse caso, temos que

$$(EFGH) = (ABCD) - (AEH) - (FCG) - (DGH) + (EBF).$$

Mas $(AEH) = (ABD)/4$, $(FCG) = (BCD)/4$, $(DGH) = (ACD)/4$ e $(EBF) = (ABC)/4$. Logo,

$$\begin{aligned}
(EFGH) &= (ABCD) - \frac{(ABD)}{4} - \frac{(BCD)}{4} - \frac{(ACD)}{4} + \frac{(ABC)}{4} \\
&= (ABCD) - \frac{(ABD)+(BCD)}{4} - \left(\frac{(ACD)-(ABC)}{4}\right) \\
&= (ABCD) - \frac{(ABCD)}{4} - \frac{(ABCD)}{4} \quad = \quad \frac{(ABCD)}{2},
\end{aligned}$$

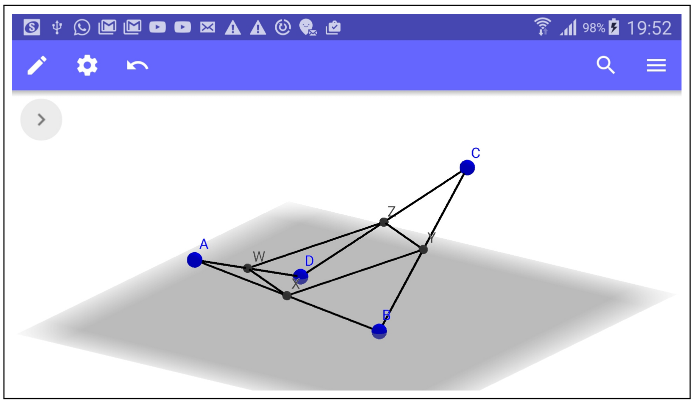
o que estabelece o resultado para o caso de polígonos não convexos simples. ■

Capítulo 4

Geometria 3D: Atividades

Atividade 1

Em Geometria Plana, o Teorema de Varignon afirma que os pontos médios de um quadrilátero qualquer *sempre* formam um paralelogramo. O Teorema de Varignon continua valendo se os vértices do "quadrilátero" não estiverem em um mesmo plano? Implemente a construção no GeoGebra 3D e investigue!



Mais especificamente:

(1) No GeoGebra 3D, construa quatro pontos A, B, C e D (certifique-se que, ao fazê-lo, os pontos não estejam todos em um mesmo plano).

(2) Construa os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

(3) Construa os pontos médios X, Y, Z e W dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente.

(4) Construa os segmentos $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$, $\overline{ZW}$ e $\overline{WX}$.

Mova então os pontos livres A, B, C e D e estude se, de fato, o quadrilátero $XYZW$ é um paralelogramo ou não, independentemente das posições dos pontos

A, B, C e D. Caso não seja, especifique um contraexemplo. Caso seja, apresente uma demonstração.

Atividade 2

Dados dois pontos distintos no espaço, construa um **tetraedro regular** de modo que uma de suas arestas tenha, como extremidades, esses dois pontos.

Atividade 3

Dados dois pontos distintos no espaço, construa um **cubo** de modo que uma de suas arestas tenha, como extremidades, esses dois pontos.

Atividade 4

(Problema das Retas Reversas 1) Dadas duas retas no plano, ou elas se interceptam ou elas são paralelas. Já, no espaço, elas podem ser paralelas, se interceptarem ou ainda serem reversas, isto é, elas não estão contidas em um mesmo plano. Dadas duas retas reversas r_1 e r_2, construa no GeoGebra 3D dois planos π_1 e π_2 tais que π_1 é paralelo a π_2, π_1 contém a reta r_1 e π_2 contém a reta r_2.

Atividade 5

(Problema das Retas Reversas 2) Considere 3 retas quaisquer duas a duas reversas. Será que existe uma quarta reta r_4 que intercepte simultaneamente as retas r_1, r_2 e r_3? Faça uma investigação com o GeoGebra 3D. Os passos seguintes podem lhe ajudar.

Passo 1. No GeoGebra 3D, construa três retas reversas r_1, r_2 e r_3.

Passo 2. Construa um plano π_1 que contenha r_1 e que intercepte a reta r_2 em um ponto P.

Passo 3. Construa o plano π_2 determinado pelo ponto P e a reta r_3.

Passo 4. Construa o ponto Q de interseção de π_2 e r_1 no ponto Q.

Passo 5. Por fim, construa a reta PQ.

Atividade 6

(Problemas de Inscrição)

(a) Dado um cubo (você pode usar a ferramenta para construí-lo rapidamente), construa um octaedro regular que lhe seja inscrito.

(b) Dado um cubo (você pode usar a ferramenta  para construí-lo rapidamente), construa um tetraedro regular que lhe seja inscrito.

(c) Dado um tetraedro regular (você pode usar a ferramenta  para construí-lo rapidamente), construa um octaedro regular que lhe seja inscrito.

Atividade 7

(Lugares Geométricos) Implemente cada um dos lugares geométricos descrito a seguir no GeoGebra 3D! Observação: para o Item (d), o comando que habilita/desabilita o rastro de um ponto pode ser útil:

SetTrace[<Nome do Ponto>, < true | false >].

(a) No plano, qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a dois pontos distintos dados? E no espaço?

(b) No plano, qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a três pontos não colineares dados? E no espaço?

(c) Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a quatro pontos não coplanares dados?

(d) Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um plano e a um ponto fora do plano?

Atividade 8

(Commandino) Em Geometria Plana, as medianas (as retas que ligam os vértices aos pontos médios dos lados opostos) de um triângulo são sempre concorrentes. Será que o resultado pode ser generalizado para tetraedros no espaço? Mais precisamente, dado um tetraedro qualquer, será que as retas que ligam seus vértices aos baricentros das faces opostas são sempre concorrentes? Implemente a construção no GeoGebra 3D e investigue!

Dica: para construir, por exemplo, o centro da face ABC do tetraedro, use o comando CentroDoTriângulo(A, B, C, 2) na Janela de Álgebra.

Atividade 9

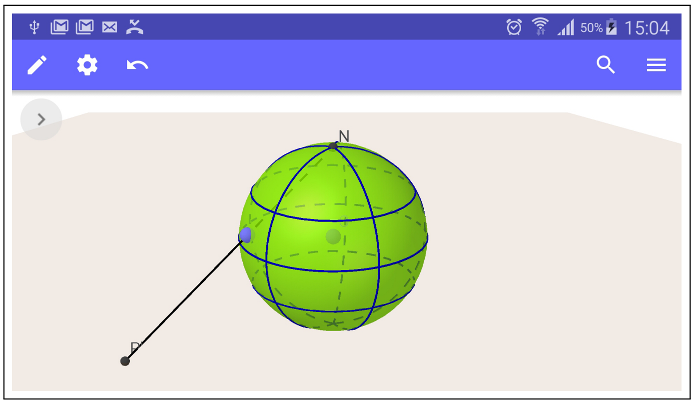
Em Geometria Plana, as alturas de um triângulo *sempre* são concorrentes em um ponto (o ortocentro do triângulo). E as alturas de um tetraedro? Sempre se encontram em um mesmo ponto? Investigue com o GeoGebra 3D!

Atividade 10

Dado um tetraedro qualquer, construa no GeoGebra 3D sua esfera circunscrita.

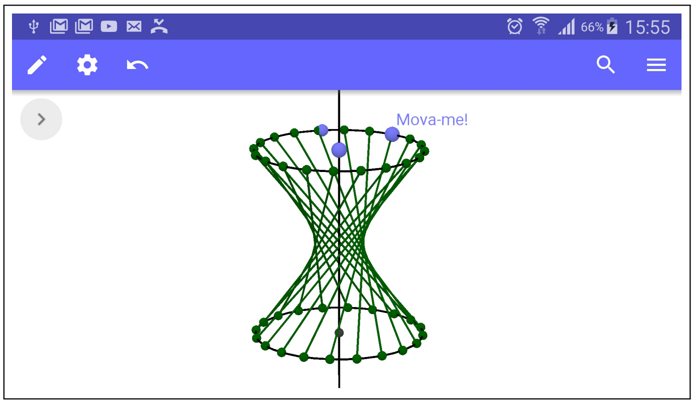
Atividade 11

(Projeção Estereográfica) Use o GeoGebra 3D para ilustrar a projeção estereográfica. Qual é a imagem, pela projeção estereográfica, de círculos desenhados sobre a esfera?



Atividade 12

(Hiperboloide Elíptico de Revolução de Uma Folha) Implemente no GeoGebra 3D uma construção que ilustra o fato de o hiperboloide de uma folha ser uma superfície regrada.

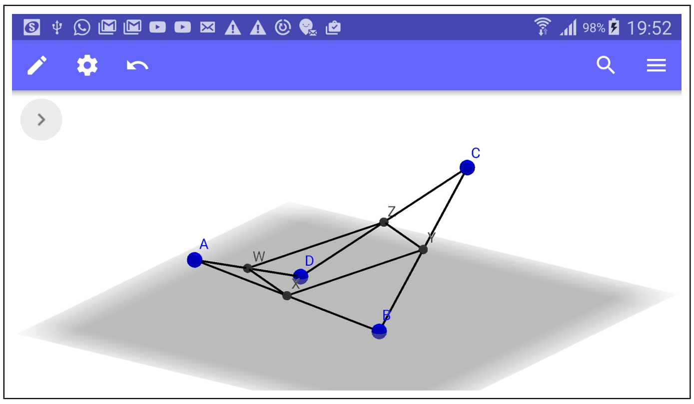


Capítulo 5

Geometria 3D: Soluções

Atividade 1

Em Geometria Plana, o Teorema de Varignon afirma que os pontos médios de um quadrilátero qualquer *sempre* formam um paralelogramo. O Teorema de Varignon continua valendo se os vértices do "quadrilátero" não estiverem em um mesmo plano? Implemente a construção no GeoGebra 3D e investigue!



Mais especificamente:

(1) No GeoGebra 3D, construa quatro pontos A, B, C e D (certifique-se de que, ao fazê-lo, os pontos não estejam todos em um mesmo plano).

(2) Construa os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

(3) Construa os pontos médios X, Y, Z e W dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente.

(4) Construa os segmentos $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$, $\overline{ZW}$ e $\overline{WX}$.

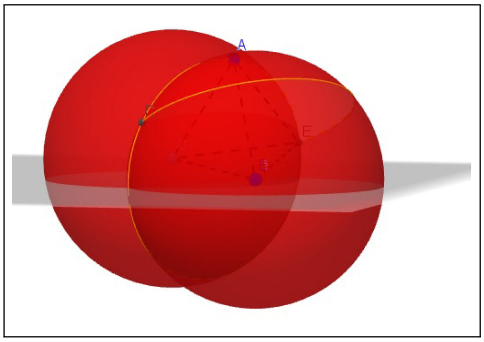
Mova então os pontos livres A, B, C e D e estude se, de fato, o quadrilátero $XYZW$ é um paralelogramo ou não, independentemente das posições dos pontos

A, B, C e D. Caso não seja, especifique um contraexemplo. Caso seja, apresente uma demonstração.
Solução. Note que o segmento $\overline{XY}$ é base média do triângulo ABC e, sendo assim, $\overline{XY}$ é paralelo a $\overline{AC}$. Uma vez que $\overline{WZ}$ é base média do triângulo ADC, segue-se que $\overline{WZ}$ é paralelo a $\overline{AC}$. Consequentemente, $\overline{XY}$ é paralelo a $\overline{WZ}$. Com o mesmo raciocínio, temos que $\overline{XW}$ é paralelo a $\overline{ZY}$. Um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos é um paralelogramo. Portanto, $XYZW$ é, de fato, um paralelogramo.

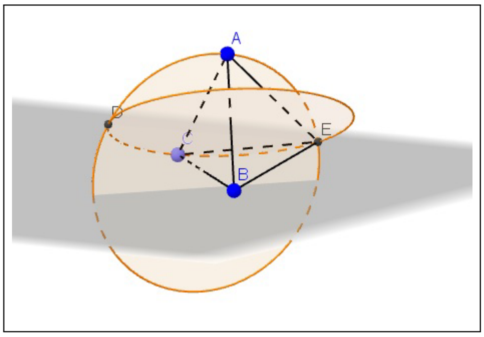
Atividade 2

Dados dois pontos distintos no espaço, construa um **tetraedro regular** de modo que uma de suas arestas tenha, como extremidades, esses dois pontos.
Solução. A construção é análoga à construção no plano de um triângulo equilátero dados dois de seus vértices.

Passo 1. Construa dois pontos livres A e B e, em seguida, trace o segmento de reta $\overline{AB}$.
Passo 2. Construir a esfera $\mathcal{A}$ com centro em B e raio AB e, em seguida, construa a esfera $\mathcal{B}$ com centro em A e raio AB.
Passo 3. Com a ferramenta de interseção de duas superfícies, construa o círculo $\mathcal{C}$ de interseção entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

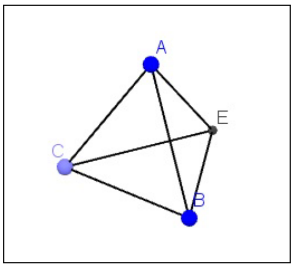


Passo 4. Marque um ponto semilivre C sobre o círculo $\mathcal{C}$.
Passo 5. Construa então uma esfera $\mathcal{D}$ com centro em C e raio CB e, em seguida, construa uma esfera $\mathcal{E}$ com centro em B e raio CB.



Passo 6. Construa o círculo $\mathcal{G}$ de interseção das esferas $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ e, em seguida, marque os pontos fixos D e E, interseções dos círculos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{G}$.

Passo 7. Por fim, construa os segmentos $\overline{EB}$, $\overline{CB}$, $\overline{AE}$, $\overline{EC}$ e $\overline{AC}$.



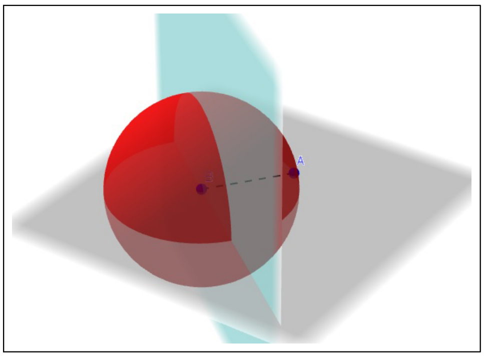
Atividade 3

Dados dois pontos distintos no espaço, construa um **cubo** de modo que uma de suas arestas tenha, como extremidades, esses dois pontos.

Solução. Os passos da construção dos demais vértices do cubo estão descritos a seguir. Basta, depois, construir suas arestas e faces.

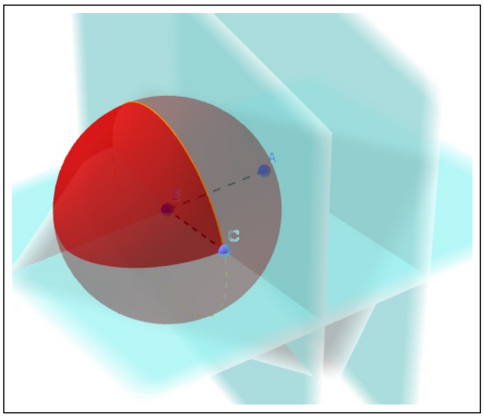
Passo 1. Marque dois pontos livres A e B e, em seguida, trace o segmento de reta $\overline{AB}$.

Passo 2. Construa então o plano $\mathcal{A}$ passando por B perpendicular a $\overline{AB}$ e, na sequência, construa a esfera $\mathcal{B}$ passando por A e com centro em B.

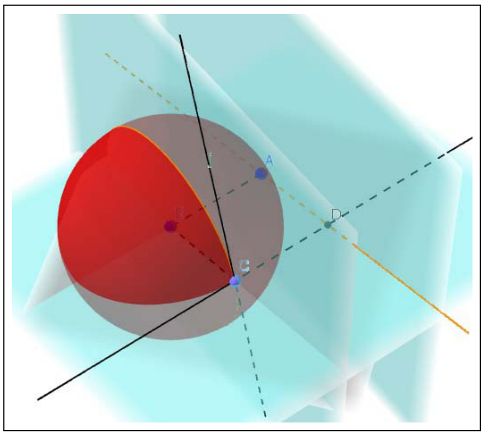


Passo 3. Construa o círculo $\mathcal{C}$, interseção do plano $\mathcal{A}$ com a esfera $\mathcal{B}$ e, em seguida, marque um ponto C sobre o círculo $\mathcal{C}$ e construa o segmento $\overline{BC}$.

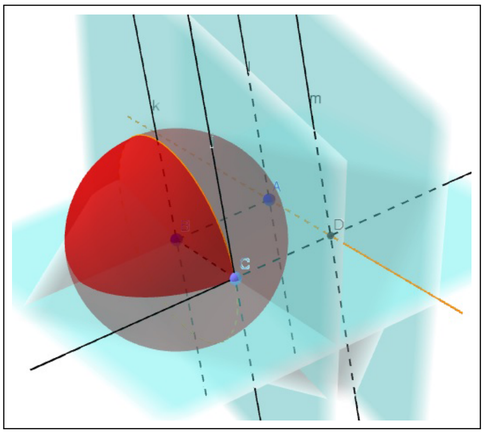
Passo 4. Construa o plano $\mathcal{D}$ passando por A e perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e, então, construa o plano $\mathcal{E}$ passando pelos pontos A, B e C.



Passo 5. Construa a reta h que é a interseção dos planos $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$, e construa a reta i, que passa pelo ponto C e é paralela ao segmento $\overline{AB}$. Marque então o ponto D de interseção das retas i e h.



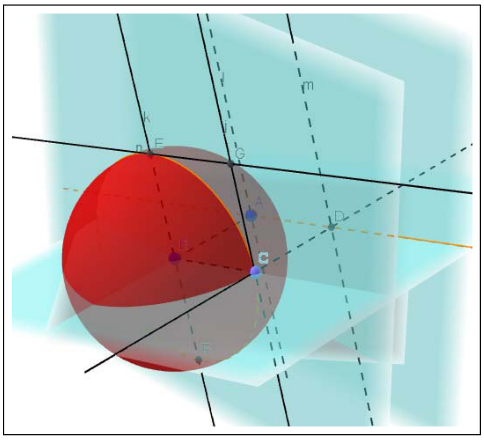
Passo 6. Construa as retas j, k, l e m perpendiculares ao plano $\mathcal{E}$ e passando, respectivamente, pelos pontos C, B, A e D.



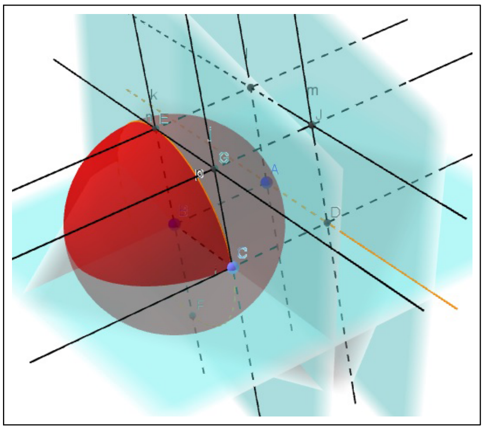
Passo 7. Marque os pontos de interseção E e F do círculo $\mathcal{C}$ com a reta k e, em

seguida, construa a reta n passando por E e paralela ao segmento $\overline{BC}$. Marque então o ponto G de interseção de n e j.

Passo 8. Construa as retas p e q paralaleas à reta i e passando, respectivamente, pelos pontos G e E.



Passo 9. Marque o ponto de interseção I das retas q e l e o ponto de interseção J da reta p com o plano $\mathcal{D}$.

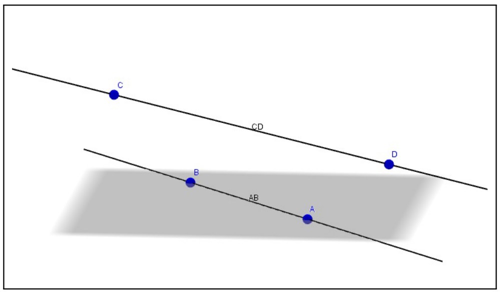


Atividade 4

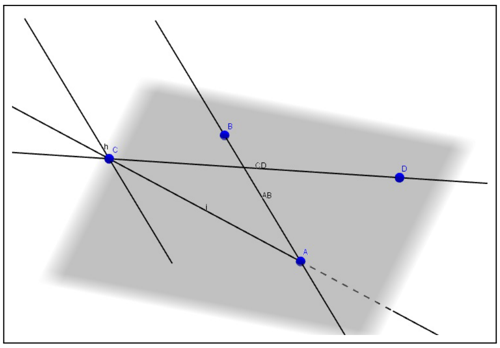
(Problema das Retas Reversas 1) Dadas duas retas no plano, ou elas se interceptam ou elas são paralelas. Já, no espaço, elas podem ser paralelas, se interceptarem ou ainda serem reversas, isto é, elas não estão contidas em um mesmo plano. Dadas duas retas reversas r_1 e r_2, construa no GeoGebra 3D dois planos π_1 e π_2 tais que π_1 é paralelo a π_2, π_1 contém a reta r_1 e π_2 contém a reta r_2.

Solução. Os passos da construção estão descritos a seguir.

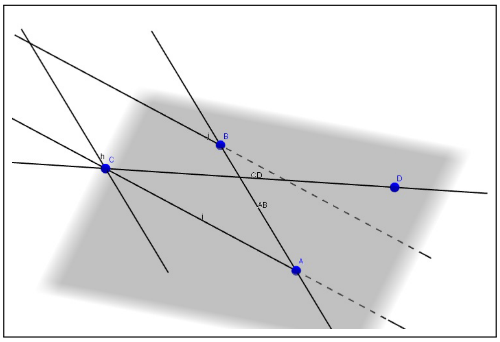
Passo 1. Construa duas retas reversas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.



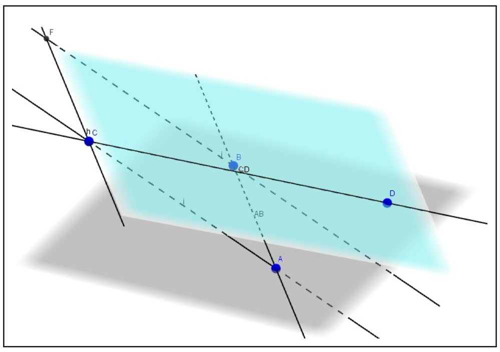
Passo 2. Construa, então, a reta h passando por C e paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e, em seguida, trace a reta $i = \overleftrightarrow{AC}$.



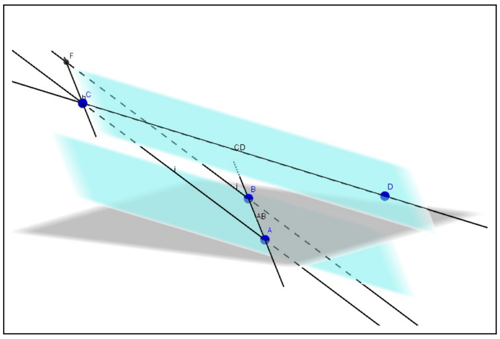
Passo 3. Construa a reta j passando por B e paralela à reta i.



Passo 4. Marcar o ponto de interseção F da reta h com a reta j e, em seguida, construa o plano $\mathcal{A}$ passando por C, D e F.



Passo 5. Por fim, construa o plano $\mathcal{B}$ passando por A e paralelo ao plano $\mathcal{A}$.



Atividade 5

(Problema das Retas Reversas 2) Considere 3 retas quaisquer duas a duas reversas. Será que existe uma quarta reta r_4 que intercepte simultaneamente as retas r_1, r_2 e r_3? Faça uma investigação com o GeoGebra 3D. Os passos seguintes podem lhe ajudar.

Passo 1. No GeoGebra 3D, construa três retas reversas r_1, r_2 e r_3.

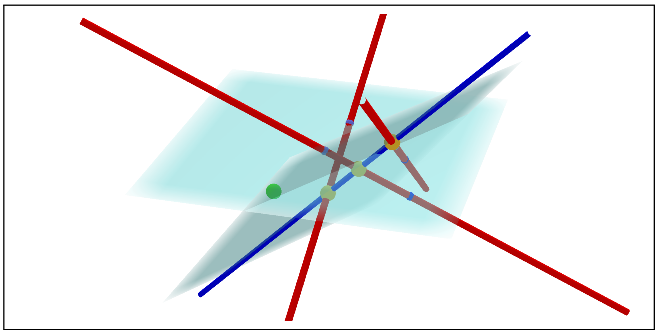
Passo 2. Construa um plano π_1 que contenha r_1 e que intercepte a reta r_2 em um ponto P.

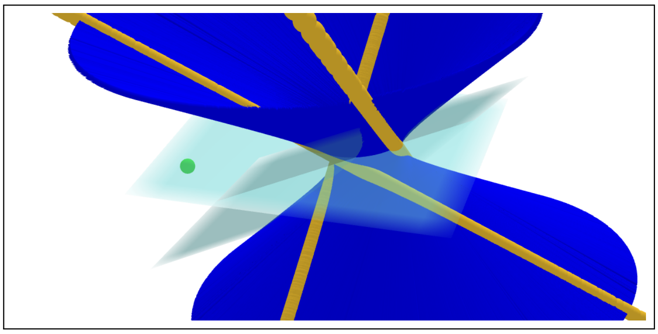
Passo 3. Construa o plano π_2 determinado pelo ponto P e a reta r_3.

Passo 4. Construa o ponto Q de interseção de π_2 e r_1 no ponto Q.

Passo 5. Por fim, construa a reta PQ.

Observação. De fato, a construção apresentada permite construir infinitas retas r_4 que interceptam simultaneamente as retas r_1, r_2 e r_3. O lugar geométrico dessas retas é um hiperboloide elíptico de uma folha se as três retas não são todas paralelas a um mesmo plano, e um hiperboloide parabólico caso contrário (conforme Hilbert & Cohn-Vossen (1990) e Viro & Viro (2006)).





Atividade 6

(Problemas de Inscrição)

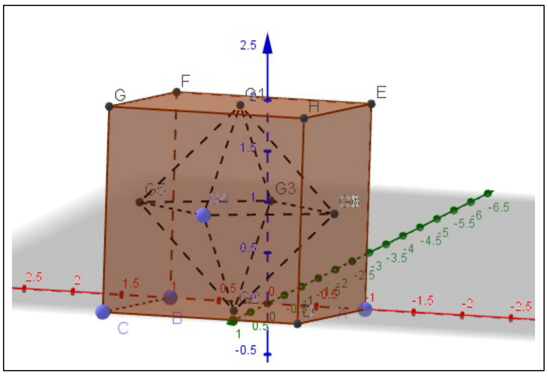
(a) Dado um cubo (você pode usar a ferramenta para construí-lo rapidamente), construa um octaedro regular que lhe seja inscrito.

(b) Dado um cubo (você pode usar a ferramenta para construí-lo rapidamente), construa um tetraedro regular que lhe seja inscrito.

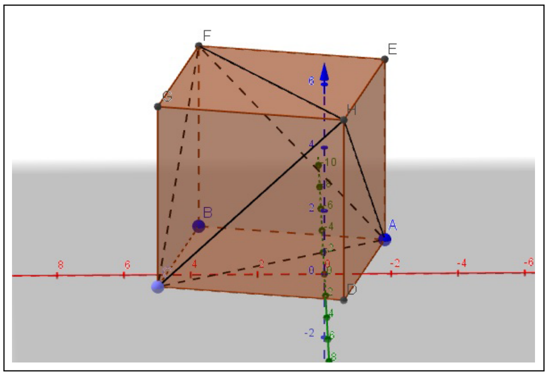
(c) Dado um tetraedro regular (você pode usar a ferramenta para construí-lo rapidamente), construa um octaedro regular que lhe seja inscrito.

Solução.

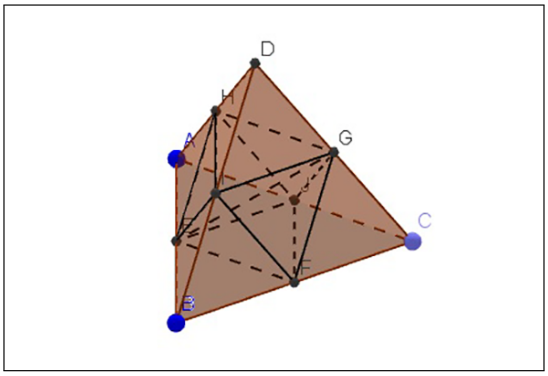
(a) Para construir um octaedro regular inscrito em um cubo, basta tomar os centros das faces do cubo como vértices do octaedro regular, conforme na figura a seguir.



(b) Para construir um tetraedro regular inscrito em um cubo, basta tomar as diagonais das faces do cubo como arestas do tetraedro regular, conforme figura a seguir.



(c) Para construir um octaedro regular inscrito em um tetraedro regular, basta tomar os pontos médios das arestas do tetraedro regular como vértices do octaedro regular, conforme figura a seguir.



Atividade 7

(Lugares Geométricos) Implemente cada um dos lugares geométricos descrito a seguir no GeoGebra 3D! Observação: para o Item (d), o comando que habilita/desabilita o rastro de um ponto pode ser útil:

SetTrace[<Nome do Ponto>, < true | false >].

(a) No plano, qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a dois pontos distintos dados? E no espaço?

(b) No plano, qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a três pontos não colineares dados? E no espaço?

(c) Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a quatro pontos não coplanares dados?

(d) Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um plano e a um ponto fora do plano?

Solução.

(a) Dados dois pontos distintos A e B no plano, o lugar geométrico dos pontos equidistantes a A e B é o segmento de reta que é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e passa pelo ponto médio de $\overline{AB}$ (a mediatriz do segmento $\overline{AB}$). No espaço, esse lugar geométrico é o plano que é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e passa pelo ponto médio de $\overline{AB}$ (o plano mediador do segmento $\overline{AB}$).

(b) Dados três pontos não colineares A, B e C no plano, o lugar geométrico dos pontos equidistantes a A, B e C é o circuncentro do triângulo ABC. No espaço, esse lugar geométrico é a reta perpendicular ao plano que contém o triângulo ABC e que passa pelo circuncentro desse triângulo.

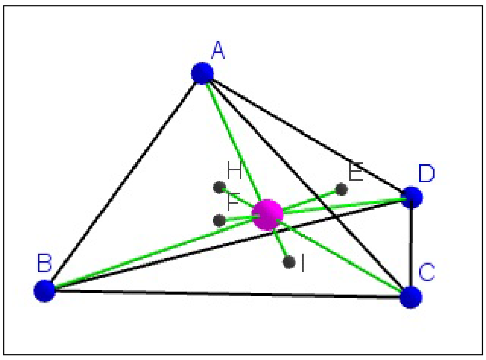
(c) No espaço, dados quatro pontos não colineares A, B, C e D não coplanares, o lugar geométrico dos pontos equidistantes a A, B, C e D é o circuncentro do tetraedro $ABCD$.

(d) O lugar geométrico dos pontos equidistantes a um plano e a um ponto fora do plano é um paraboloide.

Atividade 8

(Commandino) Em Geometria Plana, as medianas (as retas que ligam os vértices aos pontos médios dos lados opostos) de um triângulo são sempre concorrentes. Será que o resultado pode ser generalizado para tetraedros no espaço? Mais precisamente, dado um tetraedro qualquer, será que as retas que ligam seus vértices aos baricentros das faces opostas são sempre concorrentes? Implemente a construção no GeoGebra 3D e investigue!

Dica: para construir, por exemplo, o centro da face ABC do tetraedro, use o comando CentroDoTriângulo[A, B, C, 2] na Janela de Álgebra.
Observação. Sim, as retas que ligam os vértices de um tetraedro aos baricentros das faces opostas são sempre concorrentes. Esse resultado é conhecido como Teorema de Comandino em homenagem ao matemático italiano Federico Commandino (1509-1575), que o publicou na sua obra *De Centro Gravitates Solidorum* (O Centro de Gravidade dos Sólidos). Uma demonstração do Teorema de Comandino pode ser encontrada em Sharygin (1986).



Atividade 9

Em Geometria Plana, as alturas de um triângulo *sempre* são concorrentes em um ponto (o ortocentro do triângulo). E as alturas de um tetraedro? Sempre se encontram em um mesmo ponto? Investigue com o GeoGebra 3D!

Solução. As alturas de um tetraedro *nem sempre* são concorrentes. Tente determinar um exemplo onde isso ocorre a partir da sua construção no GeoGebra 3D.

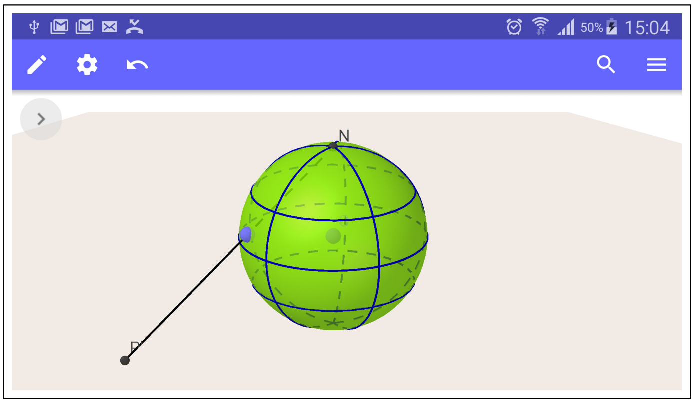
Atividade 10

Dado um tetraedro qualquer, construa no GeoGebra 3D sua esfera circunscrita.

Observação. Basta seguir os passos apresentados na Solução da Atividade 7.

Atividade 11

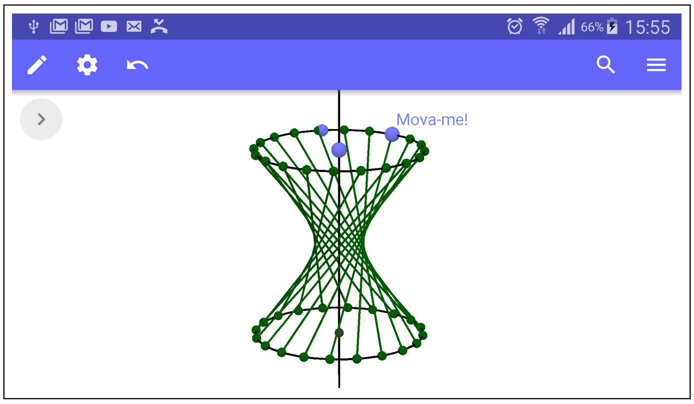
(Projeção Estereográfica) Use o GeoGebra 3D para ilustrar a projeção estereográfica. Qual é a imagem, pela projeção estereográfica, de círculos desenhados sobre a esfera?



Observação. Você poderá encontrar a construção neste endereço:
<https://www.geogebra.org/m/YJbKGGwj>.

Atividade 12

(Hiperboloide Elíptico de Revolução de Uma Folha) Implemente no GeoGebra 3D uma construção que ilustra o fato de o hiperboloide de uma folha ser uma superfície regrada.



Observação. Você poderá encontrar a construção neste endereço:
<https://www.geogebra.org/m/PAeVJA7q>.

Referências Bibliográficas

Alencar Filho, Edgard de. *Exercícios de Geometria Plana*. Décima sexta edição. São Paulo: Nobel, 1983.

Alsina, Claudi; Nelsen, Roger B. *A Mathematical Space Odyssey: Solid Geometry in the 21st Century*. The Mathematical Association of America, 2015.

Asociación Fondo de Investigadores y Editores (Perú). *Geometría: Una Visión de La Planimetría*. Segunda edición. Lima: Lumbreras, 2012.

Bastos, Claudia Santos. *Atividades de Geometria Espacial com Calques 3D*. Monografia do Curso de Especialização em Ensino de Matemática, Universidade Federal Fluminense, 2009.

Coxeter, Harold Scott MacDonald; Greitzer, Samuel L. *Geometry Revisited*. United States of America: The Mathematical Association of America, 1967.

Dolce, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana*. Sétima edição. São Paulo: Atual, 1993.

Gravina, Maria Alice. *Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para O Aprendizado da Geometria*. Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, 1996. Disponível em: <https://goo.gl/djQ7YJ>. Acessado em: 08 de maio de 2015.

Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan. *Geometry and The Imagination*. Second Edition. Chelsea Publishing Company, 1990.

Huffman, David A. *Realizable Configurations of Lines in Pictures of Polyhedra*. Em: Elcock, E. W.; Michie, D. (Eds.). Machine Intelligence 8, Ellis Horwood, England, p. 493-509, 1977.

Kallef, Ana Maria Martensen Roland. *Vendo e Entendendo Poliedros: do Desenho ao Cálculo do Volume Através de Quebra-Cabeças Geométricos e Outros Materiais Concretos*. Segunda Edição. Editora da Universidade Federal Fluminense, 2003.

King, James; Schattschneider, Doris. *Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research*. The Mathematical Association of America, 1997.

Morgado, Augusto César; Wagner, Eduardo; Jorge, Miguel. *Geometria II*. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1973.

Muniz Neto, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana*. Segunda edição. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 2013.

Posamentier, Alfred S.; Salkind, Charles T. *Challenging Problems in Geometry*. New York: Dover Publications, Inc., 1970.

Sharygin, I. F. *Problems in Solid Geometry*. Editora MIR, 1986.

Viro, Julia; Viro, Oleg. *Configurations of Skew Lines*. Instituto de Matemática, Academia Russa de Ciências, 2006. Disponível em: <http://www.pdmi.ras.ru/~olegviro/skewlines.pdf>.

Volkert, Klaus. *The Problem of Solid Geometry*. Universität Wuppertal, 2008.

Zeeman, Christopher. *Three-Dimensional Theorems for Schools*. The Mathematical Association, 2005.

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

ISBN 978-85-8337-156-4

9 788583 371564 >