IV Simpósio Nacional
da Formação do Professor de Matemática

MATEMÁTICA RECREATIVA: UMA PROPOSTA PARA SALA DE AULA

Carmen Rosa Giraldo Vergara
Fabio Enrique Brochero Martínez

ANPMat
Associação Nacional dos Professores
de Matemática na Educação Básica

Matemática Recreativa:
Uma proposta para sala de aula

Matemática Recreativa: Uma proposta para sala de aula
Copyright © 2020 Carmen Rosa Giraldo Vergara e Fabio Enrique Brochero Martínez

Direitos reservados pela Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte,
constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
Presidente: Raquel Bodart
Vice-Presidente: Priscilla Guez
Diretoras:
Ana Luiza de Freitas Kessler
Graziele Souza Mózer
Marcela Souza
Renata Magarinus

Comitê Científico
Antônio Cardoso do Amaral (Escola Augustinho Brandão – Cocal dos Alves/PI)
Cydara Cavedon Ripoll (UFRGS)
Etereldes Gonçalves Junior (UFES)
Fidelis Zanetti de Castro (IFES)
Hilário Alencar (UFAL)
Marcela Luciano Vilela de Souza (UFTM)
Marcelo Viana (IMPA)
Paolo Piccione (USP)
Raquel Oliveira Bodart (IFTM)
Vanderlei Horita (UNESP)
Victor Giraldo (UFRJ)

Comissão Organizadora
Ana Luiza de Freitas Kessler (CAP UFRGS)
Etereldes Gonçalves Junior (UFES)
Fábio Corrêa de Castro (UFES)
Fidelis Zanetti de Castro (IFES)
Graziele Souza Mózer (Colégio Pedro II)
Julia Schaetzle Wrobel (UFES)
Michel Guerra de Souza (IFES)
Moacir Rosado Filho (UFES)
Paulo Cezar Camargo Guedes (IFES)
Priscilla Guez Rabelo (Colégio Pedro II)
Renata Magarinus (IFSUL)
Rosa Elvira Quispe Ccoyllo (UFES)
Silvia Louzada (IFES)

Capa: Pablo Diego Regino
Projeto gráfico: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Distribuição
Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica
https://www.anpmat.org.br / email: secretaria@anpmat.org.br

ISBN 978-65-88013-07-6

IV Simpósio Nacional
da Formação do Professor de Matemática

MATEMÁTICA RECREATIVA: UMA PROPOSTA PARA SALA DE AULA

Carmen Rosa Giraldo Vergara
Fabio Enrique Brochero Martínez

1ª edição
2020
Rio de Janeiro

ANPMat

Dedicado àquelas e àqueles que amam ensinar matemática!

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Fo

Sumário

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

Prefácio

O Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG tem atuado, por meio de diversos projetos de extensão, junto a professores e alunos dos Ensinos Fundamental e Médio com o objetivo de contribuir para a popularização do conhecimento matemático e com a melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática. Nesse contexto, em 2018, foi criado o Museu da Matemática UFMG para promover a Matemática através de atividades lúdicas que estimulem o interesse dos visitantes, especialmente dos professores, levando-os a uma reflexão sobre as propostas que passem uma visão positiva do ensino e aprendizagem da Matemática e objetivando difundir a Matemática Recreativa enquanto ferramenta didática.

O minicurso *Matemática Recreativa: uma proposta em sala de aula* é resultado de uma demanda que surgiu por parte dos professores que participam dos Festivais de Matemática oferecidos no âmbito da UFMG e que visitam o Museu. Esses professores demandaram a oferta de oficinas e cartilhas com moldes e instruções de alguns dos quebra-cabeças, jogos e/ou oficinas que fazem parte das atividades desenvolvidas no Museu e que possam ser aplicadas, em sala de aula, por professores dos ensinos Fundamental e Médio.

Consideramos que atividades a partir de uma perspectiva lúdica contribuem eficientemente para a disseminação do conhecimento matemático. Nesse sentido, neste trabalho, apresentamos o Museu da Matemática UFMG, para explorar algumas das atividades de Matemática Recreativa ali apresentadas e que podem ser usadas para desenvolver diversos conceitos matemáticos em diferentes níveis escolares, e damos orientações para sua confeição e utilização.

IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

Capítulo 1

Matemática Recreativa

> *"Afinal de contas, o que é a matemática senão a solução de quebra-cabeças? E o que é a ciência senão um esforço sistemático para obter respostas cada vez melhores para os quebra-cabeças impostos pela natureza?"*
>
> – Martin Gardner, *Divertimentos Matemáticos.* 5^a *edição. Ibrasa*

1.1 Breve histórico da Matemática Recreativa

A Matemática Recreativa pode ser definida como uma *Matemática Divertida* que trata problemas simples com soluções surpreendentes, paradoxos, quebra-cabeças engenhosos, mágicas, curiosidades topológicas, enfim, problemas com um toque de diversão. Agora, diversos estudiosos dessa área, entre eles, David Singmaster, consideram que essa definição abrangeria toda a Matemática, uma vez que quase todo matemático gosta de seu trabalho; e, nesse sentido, ele apresenta duas definições que cobrem o que seria a Matemática Recreativa:

- A Matemática Recreativa é uma matemática divertida e popular, isto é, os problemas devem ser compreendidos por leigos interessados, embora a sua resolução não seja elementar.
- A Matemática Recreativa é uma matemática divertida e usada pedagogicamente como um desvio da matemática formal ou como uma maneira de tornar a matemática formal compreensível e prazerosa.

Ao longo da história, grande parte das culturas do mundo inventaram problemas de caráter lúdico que chamaram a atenção do público em geral, pela forma simples com que foram apresentados, e de matemáticos, pela forte conexão com noções de lógica, topologia, geometria, teoria de números e álgebra, entre outros. Mas as ideias de um problema simples pode levar a considerar muitos outros problemas mudando o viés recreativo para um assunto formal; nesse sentido podemos

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

dizer que a matemática recreativa é uma rica fonte de modelos matemáticos. Um exemplo disso é o Problema das Sete Pontes de Königsberg, que consiste na possibilidade de cruzar sete pontes determinadas sem passar duas vezes por qualquer uma delas. Esse problema foi resolvido pelo matemático Leonhard Euler e deu origem à Teoria de Grafos. Cabe destacar também que a matemática envolvida nos jogos de azar praticados durante a Idade Média levou Blaise Pascal e Pierre de Fermat a desenvolverem a Teoria da Probabilidade, que foi a base para a criação de companhias de seguros na metade do século 18.

Enigmas e problemas divertidos cujas soluções dependem inteiramente de operações aritméticas elementares existem desde a antiguidade. Problemas atualmente conhecidos como "pensa um número", aparecem no Papiro de Rhind, datado de 1600 a.C. Em 1202 aparece também, no manuscrito Líber Abacci, a sequência de Fibonacci introduzida em conexão com um modelo fantasioso da reprodução de coelhos. O problema clássico de um homem, um lobo, uma cabra e uma couve para serem transportados através de um rio apareceu pela primeira vez, no século 8, em uma coleção atribuída a Alquino de Iorque.

Existe uma diversidade de fontes relacionadas com Matemática Recreativa, como é relatado pelo matemático David Singmaster em [15], onde apresenta uma cronologia dessa área, e nela aparecem grandes matemáticos e autores que apresentaram, com clareza e entusiasmo, teoremas, construções matemáticas, jogos e diversos elementos curiosos e criativos da Matemática. Entre os representantes da Matemática Recreativa destacamos Sam Loyd, Henry Dudeney, Martin Gardner, Edourd Lucas, Walter Ball, Joseph Madachy, Raymond Smullyan, Malba Tahan, Ian Stewart, Boris Kordemsky e Yacok Perelman.

Henry Dudeney e Sam Loyd criaram uma vasta gama de quebra-cabeças envolvendo ideias sofisticadas e Matemática. Famosos pela suas prolíferas produções de quebra-cabeças encantaram ao público em geral com suas ideias. Das obras de Dudeney destacamos *Amusements in Mathematics,* livro que contém uma das mais variadas coleções de recreações matemáticas. Sam Loyd publicou grande parte de seus desafios em jornais e revistas da época, que mais tarde foram recopilados no livro *Sam Loyd's Cyclopedia of 5000 Puzzles tricks and Conundrums with Answers,* publicado em 1914. O quebra-cabeça mais famoso de Loyd foi o "15 Puzzle", onde em uma caixa deslizam-se livremente quinze quadrados numerados de 1 a 15 com o objetivo de ordená-los em ordem crescente. Com base nesse jogo, Sam Loyd criou a *Charada de Boss,* onde ele deixou os números de 1 a 13 em ordem, e o 14 e o 15 invertidos, e ofereceu um prêmio de 1.000 dólares para quem ordenasse o quebra-cabeça. Mais tarde, descobriu-se que tal desafio não tinha solução.

Martin Gardner é considerado um dos principais divulgadores da Matemática Recreativa. Ele apresentou, durante 25 anos, em uma coluna da revista *Scientific American*, artigos que continham diversões matemáticas, truques de magia e desafios que inspiraram a seus leitores. Além disso escreveu diversos livros como *Divertimentos Matemáticos, My Best Mathematical and Logic Puzzles* e *Mathematics, Magic and Mystery*, que contêm problemas atraentes e variados, deixando assim um legado de passatempos matemáticos fascinantes para matemáticos e para

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

o público em geral.

Raymond Smullyan é um conhecido lógico e matemático que explorou de forma brilhante a lógica formal. Ele criou enigmas ao longo de décadas e os viu como uma ferramenta para divulgar "o evangelho da Matemática". Muitos desses enigmas são baseados em paradoxos da linguagem, como é mostrado em livros como *A Dama ou o Tigre* ou *O Enigma de Sherazade*. Ele considerava que "bons livros" de enigmas são os melhores remédios na cura do célebre "pânico de matemática."

No Brasil, como representante da Matemática Recreativa, destacamos Júlio César de Melo Sousa, conhecido com o pseudônimo Malba Tahan. Seu trabalho foi direcionado para o ensino da Matemática de uma forma divertida e diferente. Ele apresentou desafios matemáticos, incentivando a criatividade e descoberta e a arte de resolver problemas. Publicou livros de divulgação científica, destacando aspectos nobres da matemática e buscando sempre tornar a matemática acessível a todos. Com suas obras, tais como: *Matemática Divertida e Diferente, Matemática Divertida e Curiosa, Matemática Divertida e Delirante, O Homem que Calculava,* entre outros, revolucionou a maneira como os professores ensinavam, criando formas cativantes de transmitir essa disciplina.

Ian Stewart é outro matemático contemporâneo que, igual que Martin Gardner, tem contribuído para a divulgação e popularização da Matemática. Ele recebeu, em 1995, a Medalha Michael Faraday da Royal Society of London pelo seu trabalho de divulgar ideias matemáticas mediante seus livros instigantes, artigos de revistas, apresentações de rádio e televisão, e palestras públicas em escolas e indústria. Autor de muitos livros, entre eles, *Deus joga dados?, Almanaque das curiosidades matemáticas, Incríveis passatempos matemáticos, Mania de Matemática* e *Aventuras matemáticas.* Na suas obras ele instiga a imaginação de seus leitores e mostra aspectos divertidos e intrigantes da Matemática.

Entre as diversas obras de Matemática Recreativa, mencionamos também o compêndio *Rècreations mathématiques*, de Eduard Lucas, no qual aparece o problema da torre de Hanoi.

Nas últimas décadas, a Matemática Recreativa tem assumido um papel importante como instrumento para a divulgação e popularização da Matemática, buscando mostrar a importância dessa área mediante a comunicação de aspectos históricos e culturais da Matemática, da exploração de sua aplicação prática e da sua relação com áreas do conhecimento como a música e a arte. Ela tem se convertido num espaço de prática de pensamentos e raciocínios próprios da Aritmética, da Geometria, da Análise Combinatória e da Matemática em geral. A Matemática Recreativa fornece uma ampla variedade de problemas e atividades lúdicas que podem ser adaptados em sala de aula, convertendo-se assim em uma ferramenta didática importante para mostrar aos alunos que a Matemática pode ser uma experiência divertida e prazerosa.

1.2 Museu da Matemática UFMG

O Museu da Matemática UFMG é um espaço de disseminação do conhecimento matemático a partir de uma perspectiva recreativa. O seu objetivo é envolver e despertar a curiosidade dos visitantes com atividades lúdicas, tais como: quebra-cabeças, jogos de tabuleiro, mágicas, dobraduras de papel e desafios focados no processo de interação. Além disso, o Museu pretende ser um centro de apoio para professores, tendo como objetivo difundir a Matemática Recreativa enquanto prática pedagógica, contribuir para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática e promover a capacitação continuada de professores.

(a) Festival de Matemática 2019 - BH

(b) Oficina de Jogos Matemáticos para Professores

O Museu da Matemática UFMG está localizado no Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, no 4º Andar, sala 4010, e recebe visitas de grupos de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental ao Ensino Superior. O agendamento para as visitas é realizada através do *site* do Museu:
http://www.mat.ufmg.br/museu/visite-nos/

(a) Museu da Matemática UFMG

(b) Museu da Matemática UFMG

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Fo

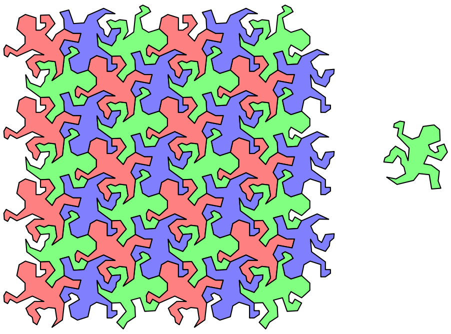
1.2.1 A Matemática de Escher

Maurits Cornelis Escher foi um famoso artista gráfico holandês, conhecido por representar estruturas impossíveis e pela pavimentação do plano com figuras concretas existentes na natureza, como pássaros, peixes, pessoas e répteis.

Escher explorou, extraordinariamente, elementos da geometria plana e espacial tornando-os mais simples aos nossos olhos. Ele combinou figuras geométricas, considerou simetrias, usou translações, rotações e reflexões, fez tesselações, tratou de paradoxos de escadas que sobem e descem, enfim, recriou-nos com sua arte.

As obras de Escher são um exemplo de como a Matemática caminha ao lado da Arte. Nesse contexto, o Museu conta com uma exposição, disponibilizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática, onde se destacam a criatividade, a beleza e o dinamismo dos trabalhos de M. C. Escher. Além disso, inspirado na obra do artista, o Museu possui uma coleção de lagartos impressos em 3D, com os quais é possível criar diversos mosaicos.

(a) A Matemática de Escher - SPM



(b) Lagartos de Escher. Acervo do Museu

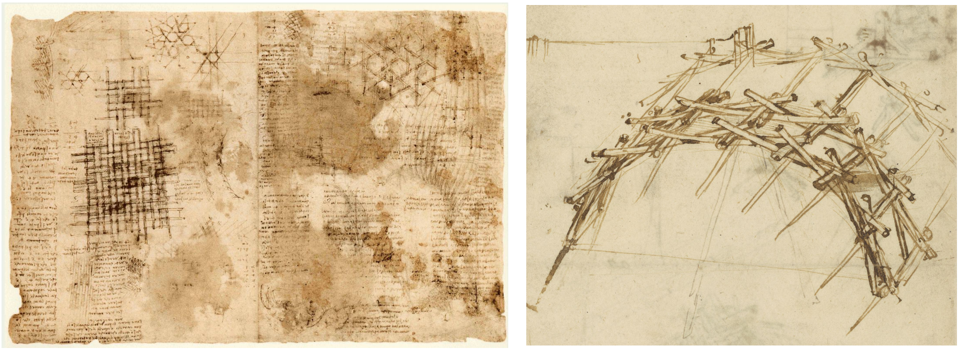
1.2.2 Estruturas Autoportantes de Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci foi um dos maiores artistas renascentistas, junto com Rafael Sanzio e Michelangelo Buonarrotti. Ele foi um autodidata e incansável observador dos fenômenos naturais e desenhou tudo o que despertou sua curiosidade. Muitas das ideias de Leonardo estão reunidas no Codex Atlanticus, coleção constituída por doze volumes que abrangem diversos assuntos de Astronomia, Química, Anatomia, Geografia, Mecânica, Matemática e estudos sobre o voo, entre outros.

De todos os projetos de pontes de Leonardo, a ponte autoportante é certamente o mais engenhoso, pela simplicidade de sua estrutura e construção. Ela é uma estrutura composta por vigas simples cilíndricas, que são montadas sem o uso de fixações ou juntas de intertravamento. Uma vez montada, o peso da ponte deve ser suficiente para exercer a pressão necessária para que as vigas longitudinais bloqueiem as vigas transversais, evitando assim que a estrutura colapse. Quanto maior a pressão na parte superior da ponte, maior será sua estabilidade.

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Fo

O mesmo princípio usado nas pontes é usado nas duas direções para cobrir o espaço, e assim construir as cúpulas de Leonardo. Tais estruturas são construídas a partir de um único tipo de peça, e sem nenhum amarre, apenas mediante o acoplamento tridimensional das peças, que se apoiam e sustentam entre si, seguindo determinados padrões geométricos. Essa atividade, nomeada de *Leonardome,* foi desenvolvida pelo Museu de Matemática de Catalunha. Na coleção de documentos de Leonardo da Vinci, Codex Atlanticus, folhas 899v e 899r, são apresentados alguns desses padrões. Essas duas atividades têm um grande valor didático, pois

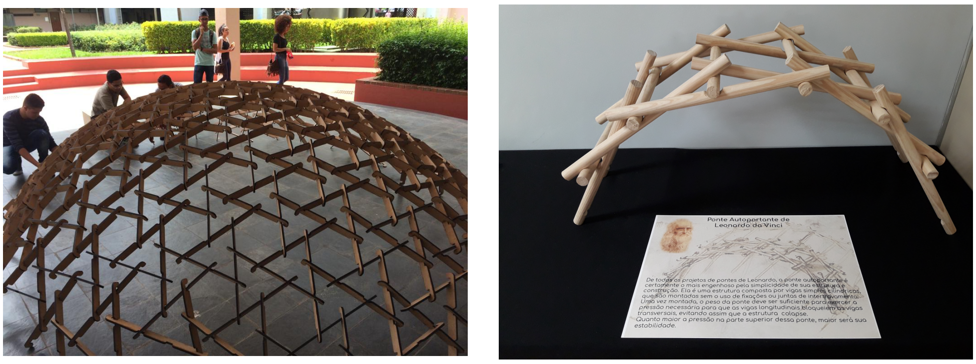


(a) Padrões Cúpula de Leonardo. Folha 71v do Codex Atlanticus

(b) Ponte de Leonardo: Folhas 899v e 899r do Codex Atlanticus

Figura 1.4: Fonte: www.leonardodigitale.com

envolvem raciocínio lógico, análise de padrões geométricos, noção espacial, capacidades manuais, trabalho em equipe, além das componentes históricas e artísticas inerentes à atividade. Uma das oficinas ofertadas pelo Museu é a construção de



(a) Oficina Cúpula de Leonardo. Museu da Matemática UFMG

(b) Ponte de Leonardo. Acervo do Museu da Matemática UFMG

Figura 1.5: Fonte: www.leonardodigitale.com

cúpulas a partir de padrões criados por Leonardo da Vinci.

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

1.2.3 Quebra-cabeças

Os quebra-cabeças disponíveis no Museu constam de peças com as quais, sem sobrepô-las, é possível construir figuras geométricas. Eles podem ser classificados em dois tipos:

- De encaixe: as peças são usadas para preencher uma área ou um volume;
- De dissecação: as peças podem ser usadas para formar diversas figuras.

Como exemplo de quebra-cabeças de encaixe, temos o *Cubo Soma*, projetado pelo matemático e escritor dinamarquês Piet Hein, em 1936. O desafio ficou popular em 1969, quando a companhia Parker Bros classificou-o como "A versão tridimensional do Tangram". Esse quebra-cabeça possui 7 peças, que são exata-

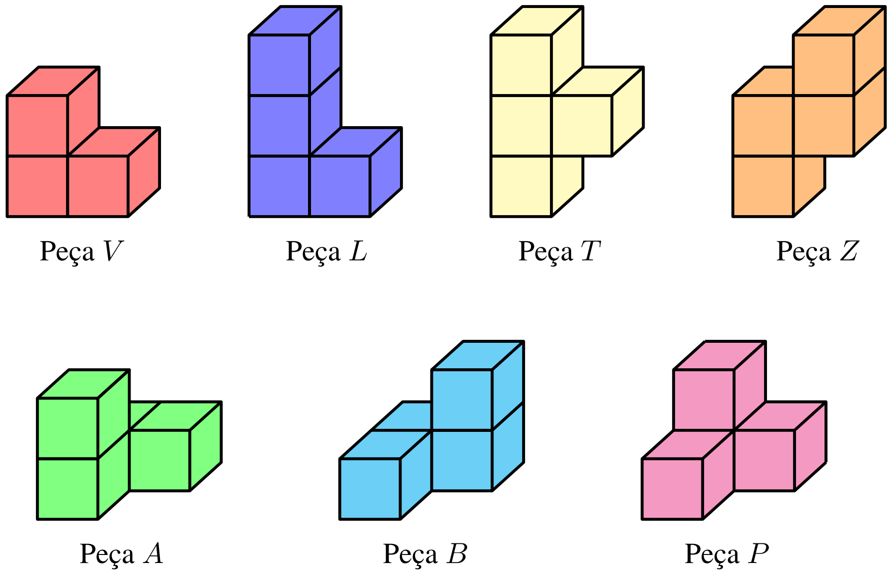


Figura 1.6: Peças do Cubo Soma

mente todas as figuras côncavas formadas por 3 ou 4 cubos unitários, colados por uma de suas faces. Dessas peças, 6 são formadas por 4 cubos e uma formada por 3 cubos, como mostrado na Figura 1.6. O desafio base do quebra-cabeça é formar um cubo de lado três unidades. O Cubo Soma é um quebra-cabeça bem interessante pela grande quantidade de figuras que podem ser formadas a partir dessas sete peças. Martin Gardner afirmou que *o número de figuras bonitas que podem ser construídas usando as 7 peças do Cubo Soma parece ser ilimitado. Quando escrevi meu artigo na revista* Scientific American*, imaginei que alguns leitores se dariam ao trabalho de criar seu próprio conjunto de formas de Cubo Soma. Mas eu estava errado. Milhares de leitores me enviaram desenhos de novos modelos, e muitos alegaram que não tinham mais tempo livre, depois de serem pegos pelo Cubo Soma.*

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

Em [1, p.18] pode-se encontrar uma atividade do Cubo Soma que pode ser aplicada em sala de aula.

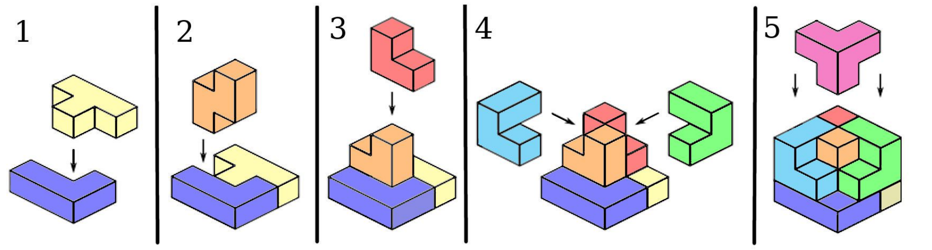


Figura 1.7: Uma das soluções do Cubo Soma

Em 1.7 ilustramos uma das 240 soluções distintas que se pode construir o cubo $3 \times 3 \times 3$ a partir das sete peças.

Entre os quebra-cabeças de disseção do Museu, encontra-se o quebra-cabeça *Do Quadrado à Cruz de Sam Loyd*, que resultou da disseção de um quadrado em 5 peças. A história desse desafio é um mistério, mas acredita-se que Loyd inventou esse enigma como anúncio publicitário para uma empresa.

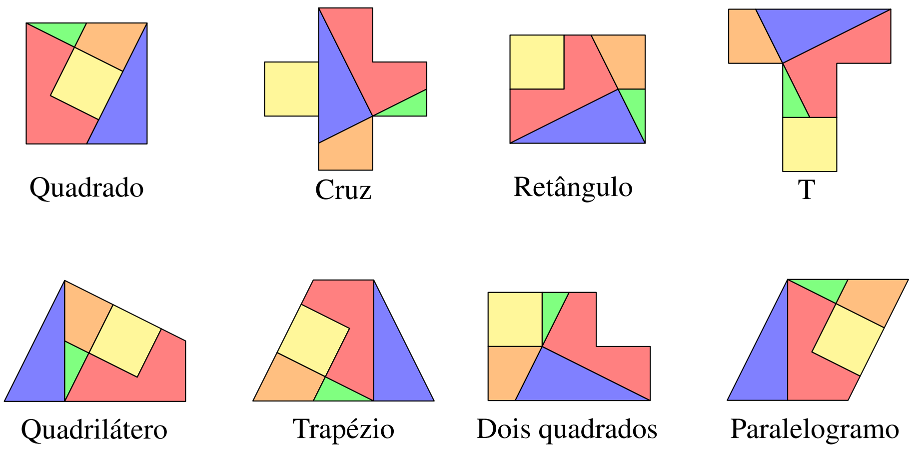
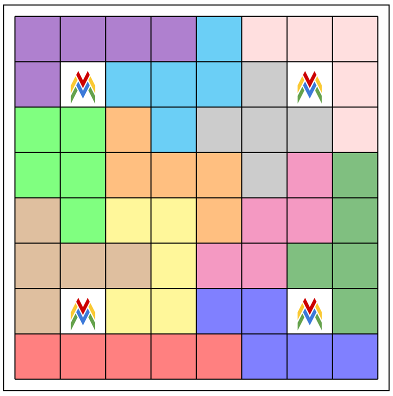
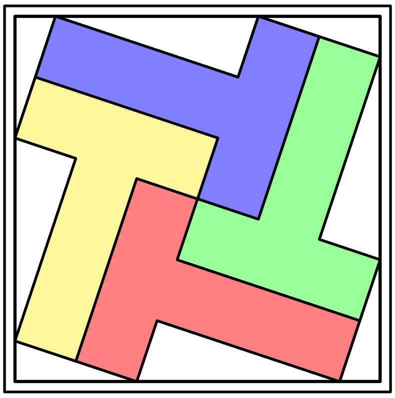


Figura 1.8: Do Quadrado à Cruz

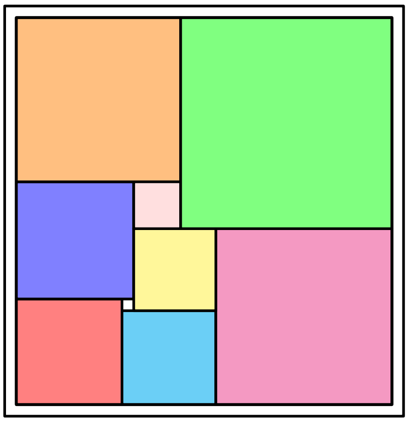
O quebra-cabeça *Do Quadrado à Cruz de Sam Loyd* consiste em formar um quadrado utilizando todas as 5 peças. Com ele pode-se formar outras figuras como uma cruz, um retângulo, um triângulo retângulo, um trapézio ou um losango [6, p.104]. Assim, esse quebra-cabeça é um material muito rico enquanto recurso didático, pois, com ele, o professor pode explorar tópicos diversos como classificação de algumas figuras geométricas, medidas de comprimento, pontos médios de segmentos, ângulos, comparação de área, construções geométricas, entre outros. Em [1, p.10] damos algumas sugestões para trabalhar esse quebra-cabeça em sala de aula.



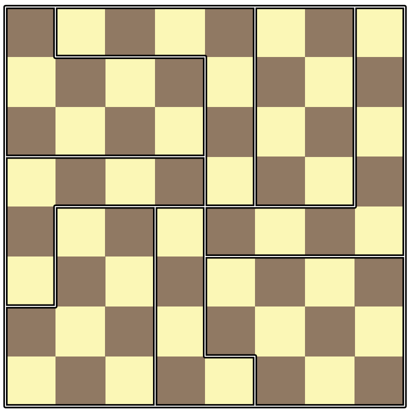
(a) Pentaminós



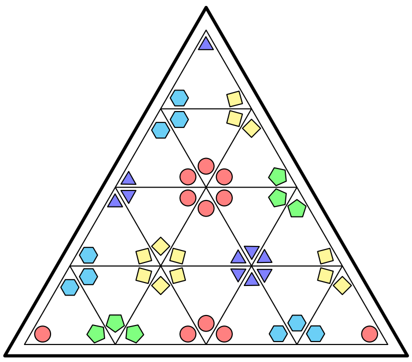
(b) 4T’s



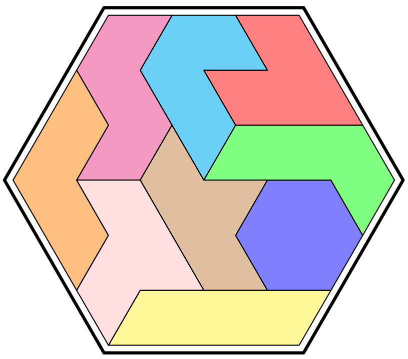
(c) Disseção de Moroń



(d) Xadrez de Sam Loyd



(e) Triângulos Amigos



(f) Tri-Diamonds

Figura 1.9: Alguns quebra-cabeças do acervo do Museu da Matemática UFMG

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

O acervo de quebra-cabeças do Museu é bem diversificado: Tantrix, Pentaminós, Dominós, Tri-Diamonds, Cubo Soma, Tangram, Xadrez Quebrado de Sam Loyd, Quadrado Duplo, Disseções de Sam Loyd, Dudeney e Moroń, Quebra-cabeça 4T's, Triângulos Amigos, Quadrados Mágicos, entre outros.

1.2.4 Jogos de Tabuleiro

Desde a antiguidade, grande parte das culturas do mundo criaram e praticaram jogos de tabuleiro. Muitos deles, tradicionais e modernos, contêm noções de lógica e Matemática Recreativa, convertendo-se em uma excelente ferramenta de ensino para diversos conteúdos matemáticos. Esses jogos, além de serem usados como atividades de lazer, também serviam como treinamento de estratégias de guerra, exercício da mente, desenvolvimento de destrezas ou como atividades de cunho religioso.

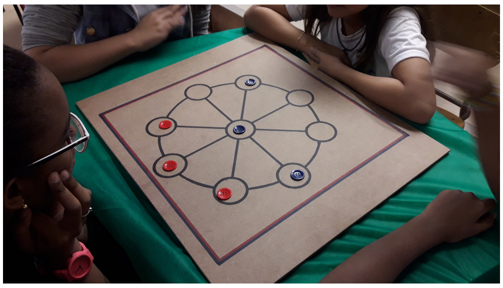
(a) Jogos de Tabuleiro do Museu da Matemática UFMG

(b) Jogos de Tabuleiro do Museu da Matemática UFMG

O jogo de tabuleiro mais antigo do qual se conhecem regras, chamado *Real de Ur,* nasceu na Mesopotâmia e foi descoberto nos anos 20 do século passado pelo arqueólogo Sir Leonard Wooley em escavações realizadas na antiga cidade de Ur. Nesse jogo cada um dos dois jogadores deve percorrer, com suas peças, um caminho determinado e, o primeiro a terminar o percurso será o vencedor. As civilizações de Egito e Babilônia foram as primeiras a registrar a existência de jogos de tabuleiro, e delas conhecem-se ilustrações de jogos como o *Senet* e o *Mehen.* Na África há numerosos jogos de tabuleiro tradicionais de diversas categorias, os mais populares pertencem à família dos Mancalas, chamados também de "jogos de semeadura". O termo Mancala é usado para um grupo de jogos que têm semelhanças entre si, e que são praticados geralmente sobre tabuleiros de madeira, de duas ou mais fileiras de concavidades alinhadas (casas). O número de fileiras e casas depende do tipo de mancala e as peças são geralmente sementes secas. Os jogos de mancalas mais conhecidos são *Oware, Kalah, Onnweso* e *Bao.*

Os jogos de tabuleiro que fazem parte do acervo do Museu da Matemática podem ser explorados tanto pelas relações aritméticas e geométricas do tabuleiro em

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For



(a) Jogos de Tabuleiro do Museu da Matemática UFMG

(b) Jogos de Tabuleiro do Museu da Matemática UFMG

si, quanto pelo conceito de estratégia vencedora. Além disso, é possível explorá-los também por meio de estratégias similares àquelas utilizadas na resolução de problemas matemáticos.

Com a construção e/ou análise do tabuleiro pode-se, por exemplo:

- Reconhecer figuras geométricas como triângulos, quadrados, retângulos, hexágonos, círculos e identificar seus elementos;
- Estudar conceitos como ponto, reta, segmento de reta, plano, raio, diâmetro e ângulos;
- Determinar ponto médio, mediatriz e bissetriz.

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

Capítulo 2

Atividades para sala de aula

> *"Não há homens mais inteligentes do que aqueles que são capazes de inventar jogos. É aí que o seu espírito manifesta-se mais livremente. Seria desejável que existisse um curso inteiro de jogos tratados matematicamente."*
>
> – Gottfried Wilhelm Leibniz, *em carta a Pascal*

A seguir apresentamos um conjunto de quebra-cabeças e jogos que podem ser explorados em sala de aula. Trata-se de atividades com materiais didáticos concretos com os quais é possível trabalhar diversos conceitos matemáticos. Cada uma dessas atividades possui suas características e trabalha com habilidades específicas. Isso permite ao professor selecionar, adaptar e explorar os recursos que melhor atendem às demandas envolvidas no processo de ensino-aprendizagem.

O uso de quebra-cabeças geométricos e jogos em sala de aula é justificado não somente pela curiosidade natural que eles despertam, como também pelo fato de proporcionarem o desenvolvimento de habilidades geométricas (plano-espaciais) tais como visualização e reconhecimento de figuras, percepção de posição, comparação de distância, áreas e volumes, organização de estratégias, capacidade de análise, enriquecimento do vocabulário geométrico, raciocínio lógico, entre outras habilidades.

Nesse contexto, o uso dos quebra-cabeças no ambiente escolar deve ir além da simples "montagem de peças" ou da participação em um jogo; esse recurso deve proporcionar o aprimoramento das técnicas de resolução de problemas, induzir à busca de estratégias e a explorar, naturalmente, conceitos matemáticos envolvidos na atividade.

2.1 Teorema de Pitágoras: Disseção de Perigal

Henry Perigal forneceu uma prova do Teorema de Pitágoras a partir da ideia de dissecar um quadrado e remontar, com as peças obtidas, dois quadrados menores [4, p.31].

A dissecação em cinco partes pode ser gerada pela sobreposição de dois ladrilhamentos: um, obtido a partir do quadrado maior; outro, obtido a partir dos dois quadrados menores como mostra a Figura 2.1

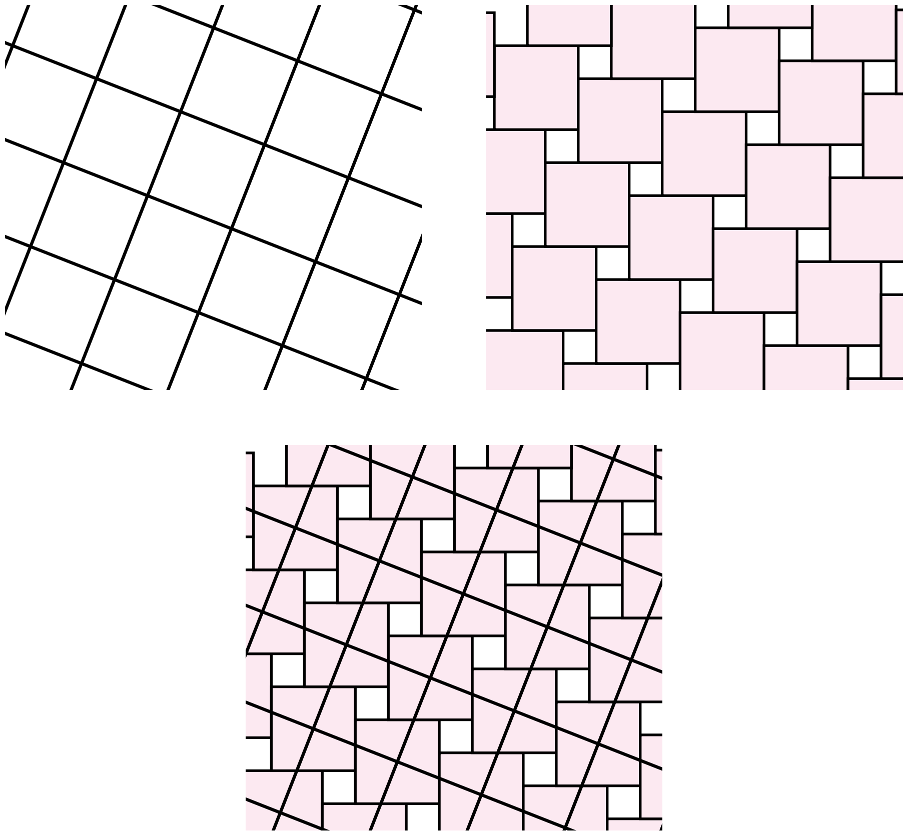


Figura 2.1: Ladrilhamento

Dessa sobreposição de ladrilhamentos, é possível exibir uma “prova sem palavras” do Teorema de Pitágoras. Martin Gardner, em [9] mostra uma prova dada por Henry Perigal onde se constroem quadrados sobre os catetos de um triângulo retângulo conforme a Figura 2.2, e divide-se o quadrado maior (ou um deles, se forem iguais) em quatro partes iguais. Essa divisão é realizada mediante dois segmentos de retas perpendiculares que se cortam no centro do quadrado, e um deles é paralelo à hipotenusa do triângulo. Depois, são recortadas as quatro partes e então deslocam-se elas e o quadrado menor, sem rotacionar, de forma a montar um quadrado sobre a hipotenusa do triângulo retângulo.

Na disseção descrita acima, os dois segmentos de retas perpendiculares não necessariamente devem se cortar no centro do quadrado, basta que os dois segmentos de reta usados para a disseção sejam perpendiculares, um deles paralelo à hipotenusa do triângulo retângulo, e dividam o quadrado em 4 quadriláteros.

A Disseção de Perigal é um ótimo recurso pedagógico para promover, em um

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

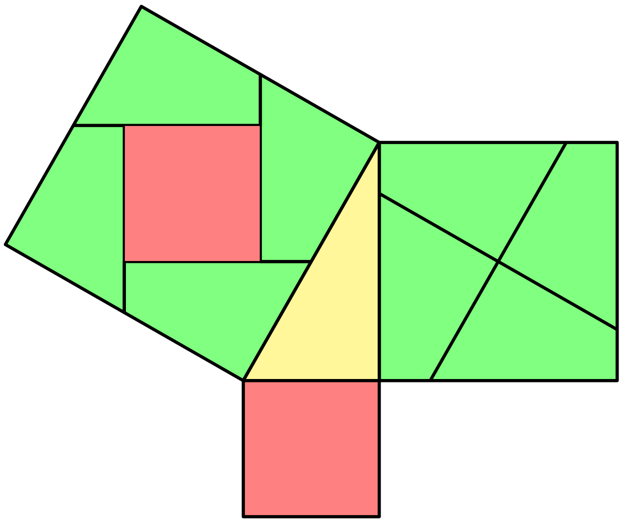


Figura 2.2: Disseção de Perigal

primeiro momento, a aprendizagem intuitiva do Teorema de Pitágoras. Para isso:

- Reproduza o molde do Anexo da página 38 (Figura 2.23), em folha de papel ou cartolina (uma cópia por aluno ou dupla de alunos);
- Peça aos alunos que recortem os quadrados de cor cinza e depois o resto da figura (sem separar os quadrados do triângulo);
- Em seguida, os alunos devem escolher, entre as linhas do quadrado de cor cinza, UMA linha tracejada e UMA linha pontilhada, e desenhar um segmento sobre as linhas escolhidas;
- A próxima fase requer que eles recortem o quadrado cinza de maior tamanho pelos segmentos desenhados;
- Feito isso, com as quatro partes cinza recortadas e com o quadrado de cor cinza, é o momento de os alunos formarem um quadrado e sobrepô-lo ao quadrado marcado com c^2.

  No final desse processo, eles poderão perceber que a soma do quadrado dos catetos do triângulo retângulo é igual ao quadrado da hipotenusa.

Após essa etapa da atividade, o professor ainda tem a possibilidade de formalizá-la. Para isso sugerimos assistir os vídeos "Teorema de Áreas e Aplicações - Aula 3 – Demonstração de Perigal", partes 1 e 2, disponíveis em

https://www.youtube.com/watch?v=fEb_8ECRE4I

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

e

https://www.youtube.com/watch?v=j45rH9kujNo

Leonardo da Vinci também deu uma demonstração do Teorema de Pitágoras, baseada na Figura 2.3.

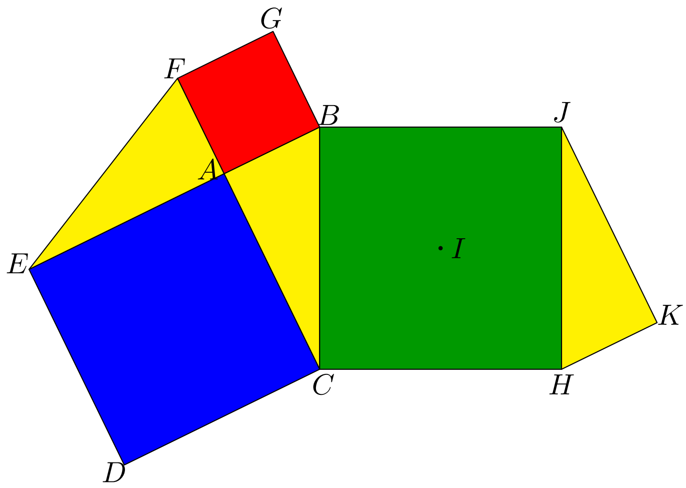


Figura 2.3

Leonardo partiu do princípio de comparação de áreas e mostrou que os quadriláteros $BCDG$ e $HCAK$ da Figura 2.4 são congruentes; com isso determinou que os hexágonos $BCDEFG$ e $ABJKHC$ têm a mesma área. Consequentemente, a área do quadrado $BCHJ$ é a soma das áreas dos quadrados $ABGF$ e $ACDE$.

De fato, consideremos o triângulo ABC, e, sobre seus lados, os quadrados $ACDE$, $ABGF$ e $BCHJ$. Seja K um ponto tal que o triângulo KHJ seja congruente ao triângulo ABC

Observemos algumas propriedades da Figura 2.4

1. O hexágono $BCDEFG$ é formado pelos quadrados $ACDE$, $ABGF$ e pelos triângulos congruentes ABC e AFE.

2. O hexágono $ABJKHC$ é formado pelo quadrado $BCHJ$ e pelos triângulos congruentes ABC e KHJ.

3. O hexágono $BCDEFG$ é simétrico com respeito ao segmento DG, pois divide cada quadrado pela metade.

4. O segmento AK divide a figura $ABJKJC$ em duas partes iguais, pois essa figura é simétrica com respeito ao ponto I, que é o centro do quadrado $BCHJ$.

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

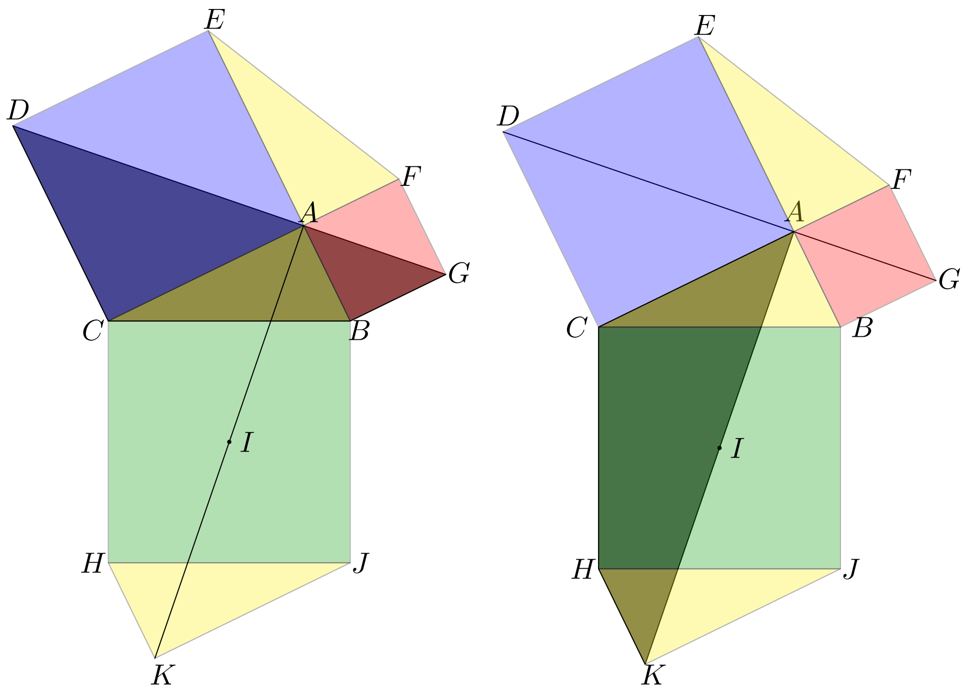


Figura 2.4

5. Observemos que se tomarmos o quadrilátero $BCDG$ e o rotacionarmos $90°$ em sentido horário e com centro em C, temos que:

   (a) O ponto D "cai" sobre o ponto A, pois $CD = CA$ e $\measuredangle ACD = 90°$.

   (b) O ponto B "cai" sobre o ponto H, pois $BC = CH$ e $\measuredangle BCH = 90°$.

   (c) O ponto G "cai" sobre o ponto K, pois $BG = KH$ e

$$\measuredangle GBC = 90° + \measuredangle ABC = 90° + \measuredangle KHJ = \measuredangle KHC.$$

6. Do item anterior concluímos que os quadriláteros $BCDG$ e $HCAK$ são congruentes

7. Dos itens 3 e 4. segue que os hexágonos $BCDEFG$ e $ABJKHC$ têm a mesma área.

8. Dos itens 3, 4 e 7 segue que a área do quadrado $BCHJ$ é a soma das áreas dos quadrados $ABGF$ e $GCDE$.

Na Figura 2.5 é mostrada uma peça do Museu da Matemática UFMG, usada para "comprovar" interativamente a prova dada por Leonardo da Vinci ao Teorema de Pitágoras.

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

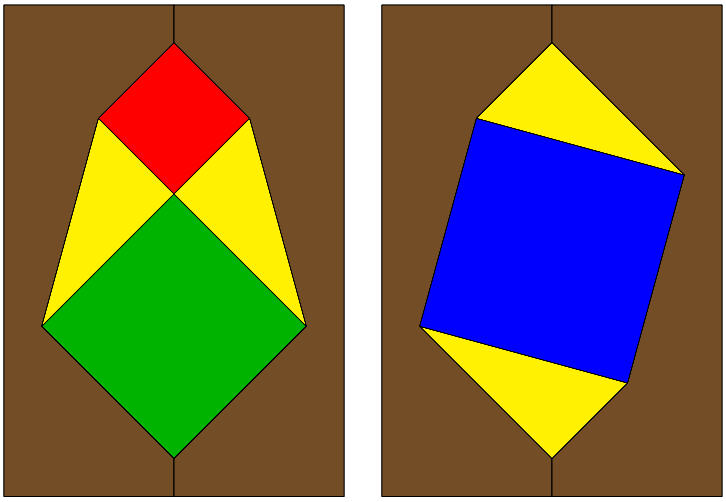


Figura 2.5: Janela de Leonardo da Vinci - Acervo do Museu da Matemática UFMG

2.2 Geometria Fractal: explorando o Triângulo de Sierpiński

Elementos da Geometria Fractal podem ser explorados para introduzir ou trabalhar conceitos matemáticos como: contagem, perímetros, áreas, volumes, relações entre figuras geométricas, sequências, figuras tridimensionais, funções, limites, progressões aritméticas e geométricas, entre outros.

O termo fractal foi introduzido por Benoît Mandelbrot originado do adjetivo *fractus*, que provém do verbo *frangere*, que significa quebrar, produzir pedaços. Os fractais têm forma extremadamente fragmentada e caracterizam-se por ter a mesma estrutura em todas as escalas, isto é, ele é composto por partes reduzidas com forma semelhante a si próprio.

Os fractais podem ser classificados em três categorias, determinadas pela forma como o fractal é formado ou gerado:

- Fractais geométricos: gerados por transformações geométricas simples do próprio objeto nele mesmo. Como exemplo desse tipo de fractais temos a curva de Peano, o floco de neve de Koch, a esponja de Menger e o triângulo de Sierpiński entre outros.

- Fractais gerados por computadores, conhecidos também como fractais de fuga. Um exemplo típico deste tipo é o conjunto de Mandelbrot.

- Fractais aleatórios, também conhecidos como fractais naturais, caracterizados pelo fato de que o todo é semelhante a uma ampliação de uma de suas partes.

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

Figura 2.6: Exemplos de tipos de Fractais

O Triângulo de Sierpiński é, possivelmente, um dos fractais mais conhecidos. Ele foi construído em 1916 pelo matemático polaco Vacław Sierpiński e foi obtido retirando pontos do interior de um triângulo mediante os seguintes passos:

1. Tome como ponto de partida um triângulo equilátero verde.

2. Para obter a primeira iteração do processo, una os pontos médios de cada lado do triângulo, obtendo, assim, 4 triângulos menores. Pinte o interior do triângulo central de branco.

3. Para a segunda iteração, repita o passo anterior em cada um dos triângulos verdes obtidos.

O triângulo de Sierpiński é o conjunto formado pelos pontos verdes após repetir o processo anterior indefinidamente.

Na Figura 2.7 apresentamos as quatro primeiras iterações desse processo de construção.

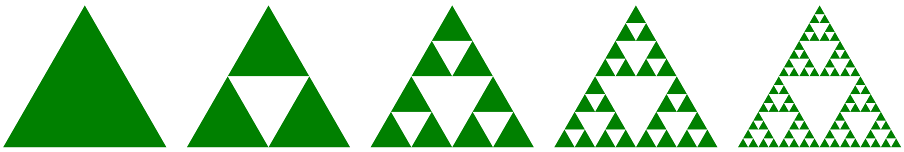


Figura 2.7: Quatro primeiras iterações da construção do Triângulo de Sierpiński

Essa atividade pode ser desenvolvida em sala de aula, iniciando-a com a construção das primeiras interações do Triângulo de Sierpiński. Logo pode-se associar a essas iterações várias sequências: a sequência do número de triângulos, a sequência das áreas de cada triângulo retirado, a sequência da área total dos triângulos de cada triângulo e, a sequência do perímetro total dos triângulos.

Para isso, peça aos alunos que, à medida que realizem o processo de construção das primeiras interações, respondam as seguintes perguntas:

- Quantos triângulos verdes há em cada uma das figuras obtidas no processo de construção do Triângulo de Sierpiński? Vocês poderiam continuar a sequência? Resposta: 1, 3, 9, 27 e 81.

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

- Supondo agora que a área do triângulo inicial é A, qual é a área de cada um dos triângulos verdes em cada interação realizada? Resposta: A, $\frac{1}{4}A$, $\frac{1}{16}A$, $\frac{1}{64}A$ e $\frac{1}{256}A$.
- Qual é área da região verde em cada iteração? Resposta: A, $\frac{3}{4}A$, $\frac{9}{16}A$, $\frac{27}{64}A$, e $\frac{81}{256}A$.
- Vocês conseguem continuar a sequência do item anterior? Resposta: O termo n-ésimo da sequência é $(\frac{3}{4})^n$. Isso implica que a área verde decresce para 0 quando n aumenta.

Essa atividade pode ser aproveitada no estudos de sequências numéricas.

A seguir, apresentamos a atividade "*Dobra Fractal*" para aplicar a ideia da construção do Triângulo de Sierpiński. Reproduza o molde conforme o anexo da página 39, Figura 2.24, nele as linhas azuis serão linhas de dobras, e as linhas vermelhas, linhas de corte.

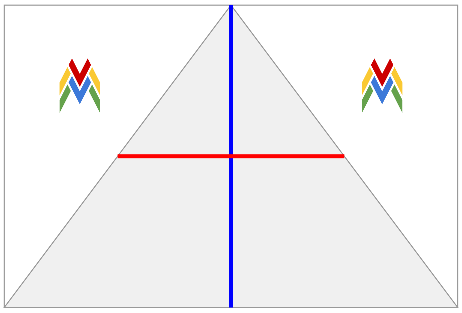


Figura 2.8

A partir da Figura 2.8, onde destacamos uma linha azul e uma vermelha, os alunos deverão:

1. Dobrar a folha na linha vertical azul de maior tamanho e fazer um corte na linha vermelha horizontal de maior tamanho, obtendo a Figura 2.9, onde são mostrados a frente e o verso da folha após a dobra.

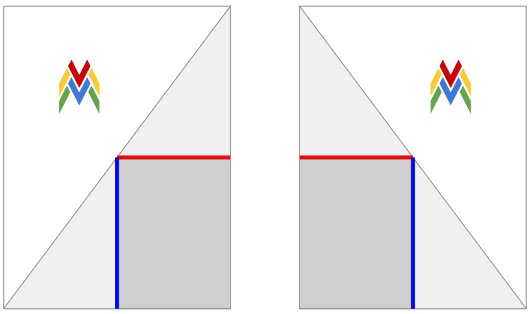


Figura 2.9

máticaa - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

2. Dobrar pelos 2 segmentos verticais azuis da Figura 2.9, de tal forma que o retângulo cinza-escuro fique "escondido", obtendo assim a Figura 2.10, onde novamente são mostrados a frente e o verso da folha após a dobra. Nessa etapa são obtidos 3 triângulos semelhantes aos triângulos que aparecem na Figura 2.9, mas com tamanho reduzido à metade.

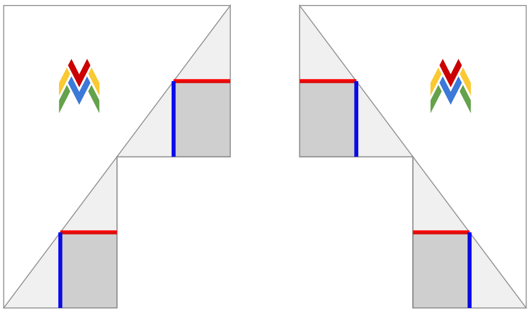


Figura 2.10

3. Repetir o processo em cada um dos 3 triângulos obtidos no passo anterior; isto é, fazer 3 cortes pelos segmentos vermelhos e dobrar pelos 6 segmentos azuis, obtendo a Figura 2.11. Nessa etapa são obtidos 9 triângulos.

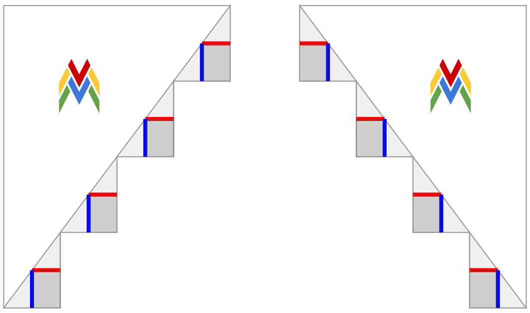


Figura 2.11

4. O processo continua de forma similar e em cada etapa o número de triângulos vai triplicando.

O professor pode pedir aos alunos para que, a cada passo, registrem a quantidade de triângulos que foram construídos de acordo com os cortes realizados no papel. Na Figura 2.12 mostra-se uma foto do resultado das dobras após a quinta iteração. Observemos que na última iteração foi necessário fazer 81 cortes. Caso for feita a seguinte iteração, precisaríamos de realizar 243 cortes a mais.

Figura 2.12: Dobra fractal: Oficina do Museu da Matemática UFMG

2.3 Pentaminós

Os Pentaminós pertencem à família de **Poliminós,** termo introduzido pelo matemático americano Solomon Golomb, que os definiu como sendo figuras formadas por n quadrados em "ligação simples", isto é, conjunto de n quadrados unidos pelas arestas. Assim, para valores de n igual a 2, 3, 4, 5 e 6 temos respectivamente os dominós, triminós, tetraminós, pentaminós e hexaminós. Pode-se verificar que existe um único dominó, 2 triminós e 5 tetraminós. O número de pentaminós que é possível formar a partir de 5 quadrados do mesmo tamanho é 12. As peças assimétricas, que são diferentes quando vistas de outro lado, são consideradas a mesma.

A ideia de poliminós existe na Matemática Recreativa desde o início do século 20, mas só ficaram conhecidos popularmente em 1957 quando Martin Gardner escreveu sobre eles na revista *Scientific American*. Até hoje os poliminós representam uma fonte de recriação.

Segundo Golomb, *chamam-se pentaminós as configurações que recobrem cinco quadrados adjacentes de um tabuleiro de xadrez.* Ele também apresentou ideias para a criação de quebra-cabeças com essas peças.

O primeiro quebra-cabeças com pentaminós apareceu em 1907, no livro *The Canterbury Puzzles* de Henry Dudeney, onde é apresentado um tabuleiro de xadrez sendo coberto pelos 12 pentaminós e um tetraminó.

A seguir damos algumas sugestões com pentaminós e que podem ser desenvolvidas com os alunos em sala de aula:

- Inicialmente o professor pode pedir que os alunos construam todas as possíveis figuras planas que podem ser formadas com 5 quadrados de igual tamanho, unidos por pelo menos uma aresta. Nesse momento é importante frisar que

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

duas formas são diferentes se uma não pode ser obtida a partir da outra mediante rotações ou reflexões.

- Em seguida, pede-se a eles reproduzir as peças em um papel de maior gramatura ou em cartão. Esse momento pode ser aproveitado para explorar conceitos como semelhanças, simetrias, perímetros e áreas.

- Depois de construídas as peças, e para facilitar a sua utilização, elas poderão ser nomeadas mediante uma letra de acordo com a sua maior semelhança, conforme se mostra em 2.13

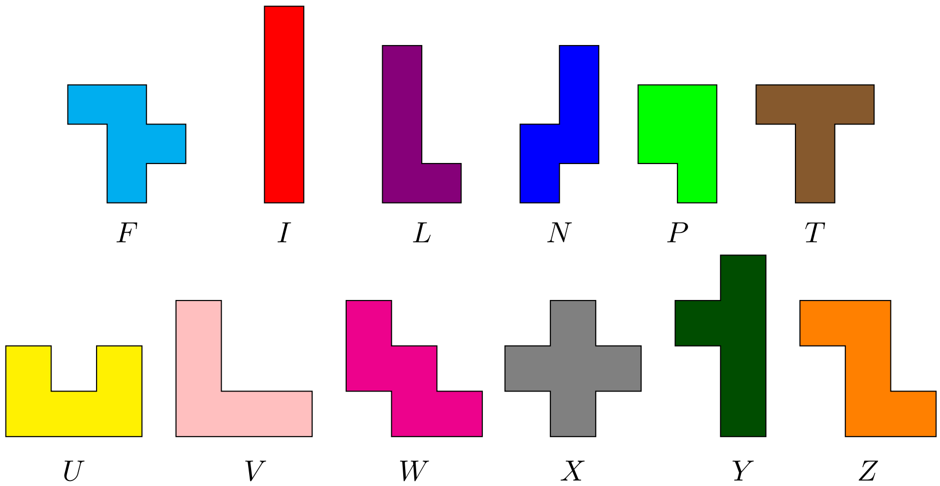


Figura 2.13: Pentaminós

Após a confecção do quebra-cabeça consideramos enriquecedor:

- Analisar cada uma das peças obtidas.

- Procurar simetrias nelas.

- Encontrar o perímetro e a área de cada uma delas.

O professor pode criar uma configuração e pedir para que os alunos preencham com um número determinado de peças de pentaminós. Em particular, pode pedir aos alunos para resolver os seguintes desafios, que foram selecionados dos livros de Solomon Golomb [16] e George Martin [13].

1. Escolha quatro casas de um tabuleiro de xadrez 8×8, e preencha o tabuleiro com os doze pentaminós, deixando sem cobrir as casas selecionadas. Na página 43, Figura 2.28, disponibilizamos os moldes para as peças dos pentaminós, e na página 42, Figura 2.27, um tabuleiro que deverá ser preenchido com os 12 pentaminós deixando sem cobrir as casas com a logo do Museu da Matemática UFMG.

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Fo

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

2. Escolher um pentaminó qualquer e formar uma figura semelhante a ele com nove dos onze pentaminós restantes. Observemos que para o pentaminó escolhido se está construindo um modelo três vezes maior. Esse desafio pode ser aproveitado para explorar o conceito de semelhança e fazer comparação de áreas de figuras semelhantes.

3. Com os doze pentaminós construa:

   - Um retângulo de tamanho 3×20;
   - Um retângulo de tamanho 5×12
   - Dois retângulos de tamanho 5×6.
   - Três figuras iguais à Figura 2.14.

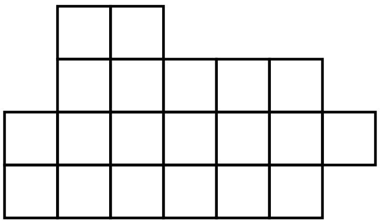


Figura 2.14

O pentaminó é um recurso didático interessante para ser usado em sala de aula, podendo se adaptar a diversos níveis escolares. Sua utilização pode favorecer a compreensão de conceitos geométricos, trabalhar conteúdos como formas poligonais, perímetro, área, semelhança, pavimentação do plano e simetrias, entre outros. Além disso com essa atividade é possível trabalhar competências básicas de resolução de problemas e promover o trabalho em equipe.

2.4 Explorando o jogo Dominó

Os primeiros indícios do jogo Dominó datam do século 18, quando começou a ser jogado na França e Itália e de onde se estendeu para o resto do continente europeu e América. Mas, acredita-se que esse jogo tenha sido inventado na China vários séculos antes de começar a ser jogado na Europa.

O jogo de dominó usualmente consta de 28 retângulos formados por dois quadrados adjacentes que contêm pontos representando todos os possíveis pares de dígitos de 0 a 6.

A atividade dominó pode ser explorada de diversas formas em sala de aula, podendo ser adaptada a alunos de diversas idades e diferentes anos escolares. Além de ser um recurso pedagógico que sai da rotina focada apenas no conteúdo, essa atividade possibilita a análise e o uso de estratégias, além de explorar conteúdos como: problemas de lógica, cálculo combinatório, operações, frações, quadrados mágicos, sequências, entre outros. Mostramos a seguir alguns desafios que podem ser trabalhados em sala de aula.

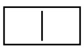
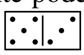
2.4.1 Tabuleiro de Dominó

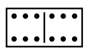
O tabuleiro deste jogo está formado por 7×8 casas quadradas, e cada uma delas contém um número entre 0 e 6. O desafio consiste em colocar as 28 peças do dominó, cada uma delas ocupando duas casas do tabuleiro de tal forma que os números das casas ocupadas coincidam com o número de pontos nos quadrados de cada dominó. As peças do dominó não podem ser sobrepostas, e portanto todas as casas do tabuleiro devem ser preenchidas. Essa atividade foi apresentada por Martin Gardner em [8].

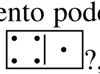
Para desenvolver tal atividade em sala de aula,

- Os alunos deverão reproduzir o tabuleiro e as peças do dominó numa folha de papel A4, ou o professor pode levar o tabuleiro já impresso, disponível na página 44, Figura 2.29 (uma cópia por aluno ou dupla de alunos).
- Os alunos deverão reproduzir as peças do jogo do dominó em cartão, disponíveis na página 45, Figura 2.30 (se preferir podem usar as peças já prontas).
- Com o tabuleiro e as peças confeccionadas, os alunos deverão posicionar as 28 peças no tabuleiro de tal forma que os números das casas ocupadas coincidam com o número de pontos nos quadrados de cada dominó.

Nesse primeiro instante, é recomendável motivar os alunos a buscar alguma estratégia para a execução da tarefa. Depois disso, o professor pode propiciar uma discussão das possíveis estratégias encontradas pelos alunos, tais como:

a) Busca ordenada de peças que somente podem-se encaixar em um único lugar, como por exemplo as peças  e 

b) Preenchimento obrigatório de espaços: por exemplo, após ser realizado o item a), o canto inferior esquerdo do tabuleiro deve ser preenchido com a peça 

c) Nesse momento pode-se perguntar para os alunos em que lugar deve ser colocada a peça ?, ou como podemos garantir que essa peça tenha que ser posicionada no canto inferior direito do tabuleiro?

2.4.2 Frações com o Dominó

Em [11] é apresentado um desafio que pode ser explorado em sala aula como motivação para o estudo de frações, frações impróprias e soma de frações.

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Fo

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

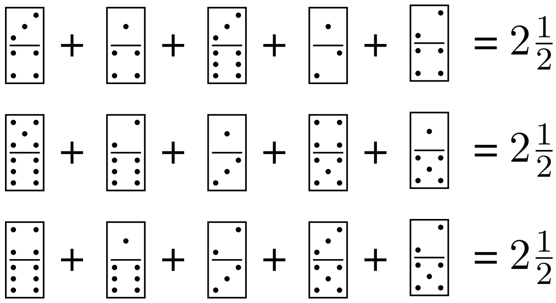


Figura 2.15: Soma de frações

Do jogo completo de Dominó peça aos alunos para retirar todas as peças duplas, isto é, aquelas formadas por quadrados contendo o mesmo número de pontos, e aquelas que têm quadrados sem pontos. As 15 peças restantes, vistas como frações, são colocadas em 3 fileiras, de tal forma que a soma das frações representadas por cada peça seja $2\frac{1}{2}$, como se mostra na Figura 2.15.

Organize as 15 peças em 3 fileiras de 5 peças de tal forma que a soma das frações que representam as peças seja 10. (Podem ser usadas frações impróprias, tais como $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{4}$)

2.4.3 Quantos pontos

Com as 28 peças do dominó, formar uma fileira de tal forma que cinco pontos estejam numa das extremidades da fileira e que o número de pontos nas extremidades adjacentes de peças vizinhas coincidam. Para aplicar esse desafio, pergunte aos alunos que determinem (mentalmente) quantos pontos deverá ter o último quadrado da peça onde termina a fileira, e, após a resposta, peça a eles para fazerem o desafio com os dominós. Verifique com os alunos que a solução a tal desafio não é única.

Martin Gardner apresentou em [8] um problema de combinatória que consiste em determinar de quantas formas é possível colocar em fila todas as peças de um jogo de dominó de tal forma que os extremos das peças adjacentes tenham o mesmo valor. Esse problema pode ser traduzido à linguagem de *grafos*: os vértices do grafo são numerados de 0 até 6, representando os números que aparecem em cada peça do dominó, e as arestas representam cada uma das peças do dominó, como mostrado na Figura 2.16.

Dessa forma, o grafo obtido é um grafo completo com 7 vértices, e adicionalmente em cada vértice temos um laço, que representa as peças com números repetidos. Nesse caso, o desafio consiste em encontrar um caminho que passe por todos as arestas uma única vez. Na literatura esse tipo de caminho é conhecido como *circuito eulaeriano*.

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

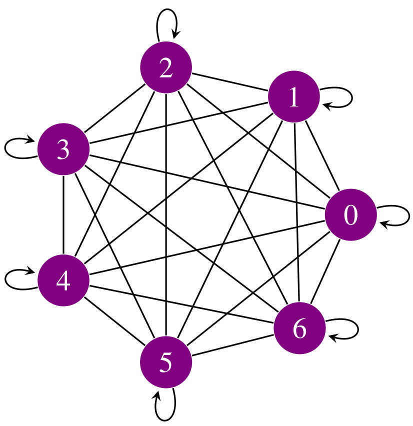


Figura 2.16: Grafo associado às peças de dominó

2.5 Explorando Jogos de Conexão

Os jogos do Hex e Y pertencem à categoria de jogos de *conexão*, jogos de tabuleiro cujo objetivo é desenvolver ou completar algum tipo de conexão com peças: formar um caminho entre duas ou mais bordas, construir um *loop* fechado ou a junção de peças em um único grupo conectado. Em geral, os jogos de conexão podem ser analisados a partir de seu "grafo dual", detalhes sobre isso podem ser encontrados em [2].

Os jogos de conexão foram introduzidos ao público geral por Martin Gardner na sua coluna de *Scientific American* em 1957.

2.5.1 Hex

O Hex é um jogo de estratégia inventado na década de 40 de forma independente por dois matemáticos: em 1942 por Piet Hein do Instituto Niels Bohr (Dinamarca) e em 1947 por John Nash da Universidade de Princeton. Esse jogo possui muitas variantes, com tamanhos e formas diferentes para o tabuleiro, mas, tradicionalmente é usado um tabuleiro em formato de losango e com 11 casas hexagonais na vertical e na horizontal (11×11).

Ele é disputado por dois jogadores que dispõem de peças de cores diferentes, convencionalmente vermelhas e azuis ou brancas e pretas. Alternadamente, os participantes da disputa colocam uma peça de sua cor num hexágono livre. Nesse jogo não há capturas; o objetivo de cada jogador é formar uma cadeia ininterrupta com suas peças, unindo os seus lados do tabuleiro (duas margens paralelas). O jogo termina quando um dos jogadores realiza tal objetivo. A cadeia que se forma pode dobrar e torcer livremente, como é mostrado na Figura 2.17.

O Hex aparenta ser um jogo fácil, mas, como em muitas outras situações, as aparências enganam. Embora as suas regras sejam simples, ele apresenta uma na-

Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

tureza complexa. E é nessa complexidade que reside o interesse dos matemáticos.

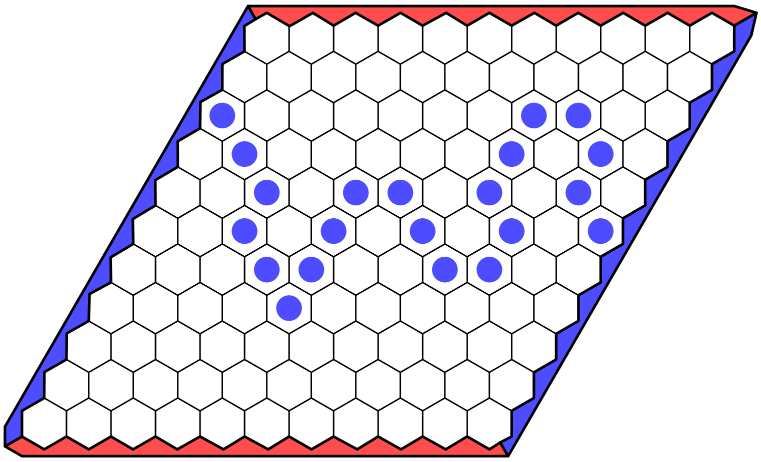


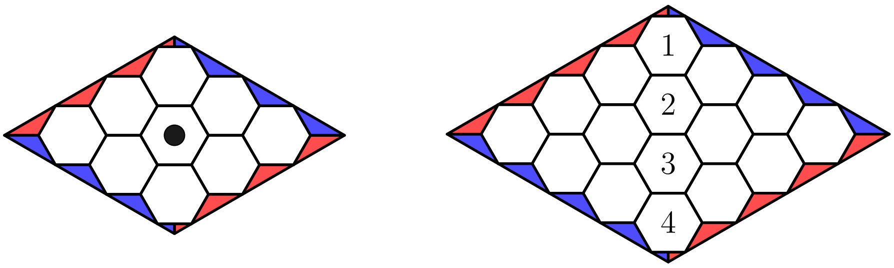
Figura 2.17: Exemplo de cadeia vitoriosa para o jogador que ficou com as peças azuis.

O Hex nunca termina em empate, em [14] e [5] podem-se encontrar diversas demonstrações deste fato. Outra particularidade desse jogo e que foi mostrada por John Nash é que o Hex pode ser sempre ganho pelo jogador que inicia o jogo, desde que ele conheça a estratégia apropriada, mas só se conhece tal estratégia para tabuleiros de tamanho inferior a 8×8. Para reduzir a vantagem que tem o primeiro jogador é implementada uma regra adicional, chamada de regra de equilíbrio: o jogador que faz a segunda jogada tem a possibilidade de, em lugar de colocar uma de suas peças no tabuleiro, trocar de cor com seu adversário. Nesse sentido quem fizer a primeira jogada deve levar em consideração que sua peça poderá ser substituída por uma de seu adversário, e assim deverá analisar em qual posição deverá colocar a primeira peça.

Martin Gardner, em seu livro *Divertimentos Matemáticos* [7, p.87], afirma que umas das melhores técnicas para aprender as sutilezas desse jogo é começar usando um tabuleiro com poucas casas. Assim, se o tabuleiro tiver, por exemplo, 2 casas em cada margem (2×2), o primeiro a jogar sempre será o vencedor. Já em um tabuleiro composto por 3 casas de margem (3×3), desde que se inicie o jogo na casa do centro, o primeiro a jogar será o vencedor, uma vez que haverá duas jogadas vitoriosas na terceira rodada e o adversário só poderá bloquear uma. Para um tabuleiro com 4×4 casas, o jogador que colocar sua primeira peça em algumas das casas mostradas na figura abaixo será o vencedor. Já em um tabuleiro com 5×5 casas ou com mais casas, a análise das combinações das jogadas fica mais complexa.

O jogo Hex desenvolve o raciocínio lógico e estimula o pensamento estratégico, pois desenvolve a capacidade de antecipação, baseada na relação causa-efeito.

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For



(a) Tabuleiro Hex 3×3 (b) Tabuleiro Hex 4×4

Figura 2.18

Nesse sentido, ele é uma excelente ferramenta de ensino para ser explorada em sala de aula. Para aplicar o Hex em sala de aula, basta reproduzir o tabuleiro da página 40, Figura 2.25, ou desenhá-lo num pedaço de cartolina ou papelão, e confeccionar, em cartolina, as peças de duas cores diferentes e na mesma quantidade, suficientes para preencher o tabuleiro.

2.5.2 Y

O Jogo Y foi inventado em 1953 por Charles Titus e Craige Schensted. Seu tabuleiro tem formato triangular com 11 casas hexagonais de lado. Ele é disputado por dois jogadores que dispõem de peças de cores diferentes; em nosso exemplo, amarelas e pretas. Alternadamente, os jogadores colocam uma peça de sua cor

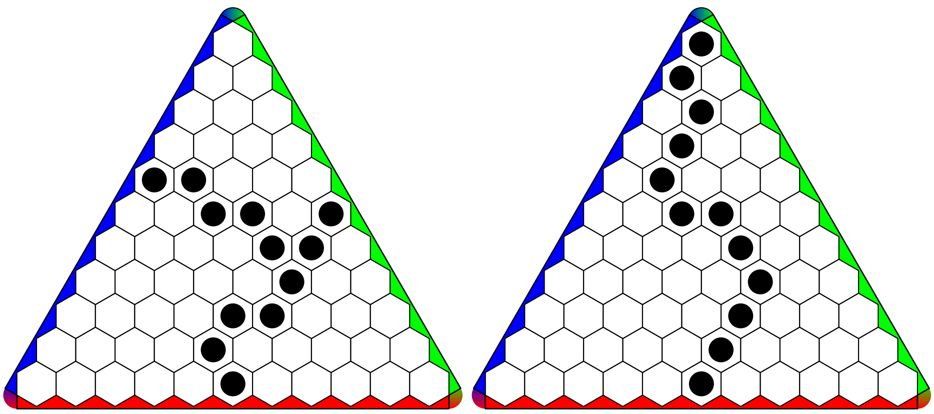


Figura 2.19

num hexágono livre. O objetivo de cada jogador é formar uma cadeia de peças que conete as três arestas do tabuleiro. Na Figura 2.19 as arestas do tabuleiro são coloridas de azul, verde e vermelho e são mostrados dois possíveis caminhos vencedores para as peças pretas. Os hexágonos nos vértices do triângulo são comuns

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

a lados adjacentes. O jogo termina quando um dos jogadores forma uma cadeia contínua unindo as três arestas do tabuleiro..

No exemplo da Figura 2.20, cada um dos jogadores fez 7 jogadas e encontram-se numa situação em que o jogador que tem a vez de jogar - seja o de peças amarelas ou o de peças pretas - terá estratégia vencedora desde que coloque sua peça na casa marcada com $*$. Nesse caso o adversário não terá como bloquear as seguintes jogadas do jogador que colocou uma de suas peças na posição do $*$. Você saberia explicar por quê?

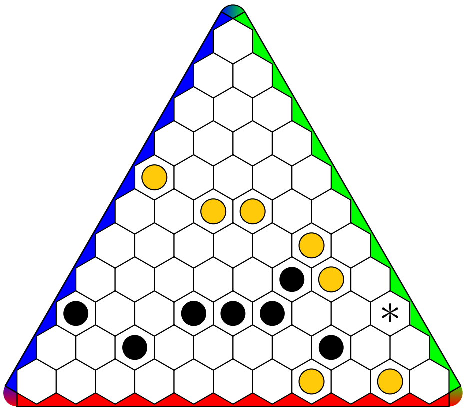


Figura 2.20

Da mesma forma que acontece com o jogo Hex, o jogo Y nunca termina empatado. Uma prova desse fato foi dada por Robert Hochberg usando o Lema de Sperner (ver [10]).

2.6 O Salto dos Sapos

O Salto dos Sapos é um jogo solitário da família de jogos de intercâmbio de posições. Nesse jogo, sapos de duas cores diferentes (podendo ser quaisquer dois tipo de peças), estão posicionados sobre um tabuleiro e devem intercambiar entre si as suas posições seguindo determinadas regras. A seguir são apresentadas duas versões desse jogo.

2.6.1 Versão clássica do Salto dos Sapos

As regras, na versão mais popular, são as seguintes:

1. Inicialmente os sapos escuros estão à direita, os claros à esquerda, e a casa "central" do tabuleiro permanece vazia (o número de sapos de cada cor não necessariamente tem que ser o mesmo).

2. Um sapo pode *avançar* para uma casa vazia adjacente.

3. Um sapo pode *pular* sobre um sapo de cor diferente se a seguinte casa estiver vazia.

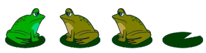
4. Os sapos de cor escura só podem avançar de direita para esquerda e os claros na direção oposta; nunca recuam.

Não se sabe a origem certa dessa versão do jogo, mas, no século 19, Édouard Lucas mostra em [12, p.141] soluções detalhadas para casos de $2, 3$ e 4 sapos de cada cor, e apresenta a fórmula que permite encontrar o número mínimo de movimentos que é preciso realizar para intercambiar as posições das sapos quando se tem a mesma quantidade de cada cor.

Na Figura 2.21 mostram-se as 8 jogadas necessárias para mudar a posição de 2 sapos claros e 2 sapos escuros.

Esse jogo resulta ser uma atividade interessante que pode ser trabalhada em sala de aula, e para sua aplicação sugerimos que o professor explique as regras, definindo o número de peças no jogo inicial, e a seguir dê um tempo para que os alunos familiarizem-se com o jogo, permitindo que realizem várias tentativas para cumprir o desafio. Após isso, o professor pode propiciar uma discussão com toda a turma abordando aspectos como:

- que posições devem ser evitadas, isto é, posições que levaram a que o jogo fique bloqueado;

- por que as posições  e  são de bloqueio?

- estratégias recursivas encontradas.

- número mínimo de jogadas para cumprir o desafio.

Seguidamente pode-se realizar o mesmo desafio mudando o número de peças. Nesse momento é importante que os alunos registrem os resultados para, posteriormente, junto com toda a turma comparar os resultados e preencher a tabela 2.1

Para generalizar o problema apresentado na tabela 2.1, suponhamos que temos m sapos escuros e n claros, e queremos saber quantas jogadas, no mínimo, são necessárias para trocar os sapos de posição. Para realizar tal contagem, observemos que cada sapo escuro tem que avançar $n + 1$ casas para esquerda, e os sapos claros têm que avançar $m + 1$ casas para direita. Assim, o número total de casas que deverão ser percorridas é

$$n(m + 1) + m(n + 1) = 2mn + m + n.$$

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES

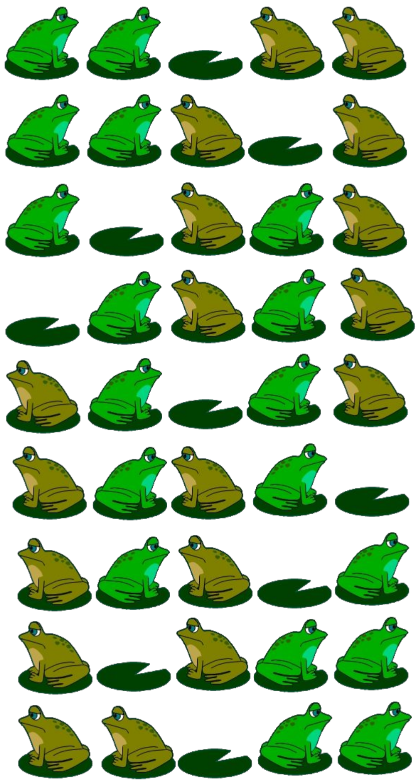


Figura 2.21: Desafio dos Sapos

Sapos Claros	2	2	3					
Sapos Escuros	2	3	3					
Total de Jogadas	8	11	15					

Tabela 2.1: Número mínimo de jogadas em função do número de peças

Agora, o número de saltos está totalmente determinado, pois acontece um salto por cada par de sapos de cor diferente, logo o número de saltos é mn, e em cada salto o sapo respectivo avança duas casas. Dessa forma o número de casas percorridas em todos os *saltos* é $2mn$, e, portanto, o número de *avanços* é

$$(2mn + m + n) - 2mn = m + n.$$

Concluímos que o número mínimo de jogadas nessa versão do Salto dos Sapos é mn saltos mais $m + n$ avanços $= mn + m + n$ jogadas. Assim, por exemplo, no caso da Figura 2.21, onde temos 2 sapos escuros e 2 sapos claros, o número mínimo de jogadas para cumprir o desafio é $2 \times 2 + 2 + 2 = 8$. Se, por exemplo, temos 3 sapos escuros e 4 sapos claros, o número mínimo de jogadas é $3 \times 4 + 3 + 4 = 19$.

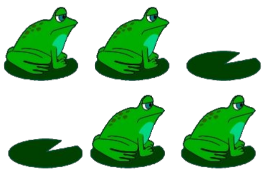
IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES

2.6.2 Segunda versão do Salto do Sapos

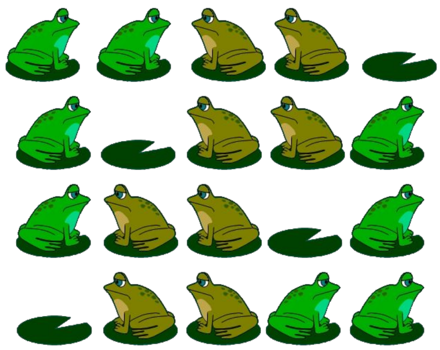
Nesta versão as regras são as seguintes:

1. Inicialmente os sapos escuros estão à direita, os claros à esquerda e a casa central do tabuleiro permanece vazia.
2. Um sapo pode *saltar* um ou dois sapos sem importar a cor, sempre que a próxima casa estiver vazia.
3. Os sapos não podem avançar, somente saltar.
4. Os sapos podem saltar para frente ou para trás.

Anthony S. Fiipiak apresenta em [3] uma solução desse problema quando o número de sapos de cada cor é 3. Nesse caso, o número mínimo de jogadas para alcançar o objetivo é 16. Uma solução interessante, no caso quando se tem um número par de sapos de cada cor, foi construída por Rafael Salles Moreira, aluno do ensino médio e frequentador do Museu da Matemática UFMG. Ele encontrou uma equivalência entre a solução da primeira versão e uma solução para a segunda versão. Na solução, ele considerou os sapos como "casais": um casal pode avançar uma posição em uma única jogada, como mostrado na Figura 2.22a, enquanto que, para um casal saltar outro casal, serão necessárias 3 jogadas, como mostrado na Figura 2.22b. Dessa forma, uma solução para a versão dos casais, onde se avança uma casa ou se realiza um salto sobre um casal de sapos, leva a uma solução da segunda versão.



(a) Avanço



(b) Salto

Figura 2.22: Jogadas com casais de sapos

Com esse processo, se temos $2n$ sapos claros e $2m$ sapos escuros, teremos n casais claros e m casais escuros que podem trocar de posição com mn saltos de casal de sapos e $m+n$ avanços de casal de sapos. Assim, com essa estratégia será possível trocar os sapos de posição com $3mn+m+n$ jogadas. Não sabemos se,

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

em geral, esse valor é o mínimo necessário para poder realizar a troca de posições. Também não conhecemos uma estratégia geral para o caso em que o número de sapos de alguma das cores seja ímpar.

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

Anexos

Nesta seção são disponibilizados os moldes das atividades apresentadas no Capítulo 2. Recomendamos que eles sejam reproduzidos para a realização das atividades em sala de aula.

Além desses, outros moldes de atividades desenvolvidas pelo Museu da Matemática UFMG também se encontram no *site*:

http://www.mat.umg.br/museu

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

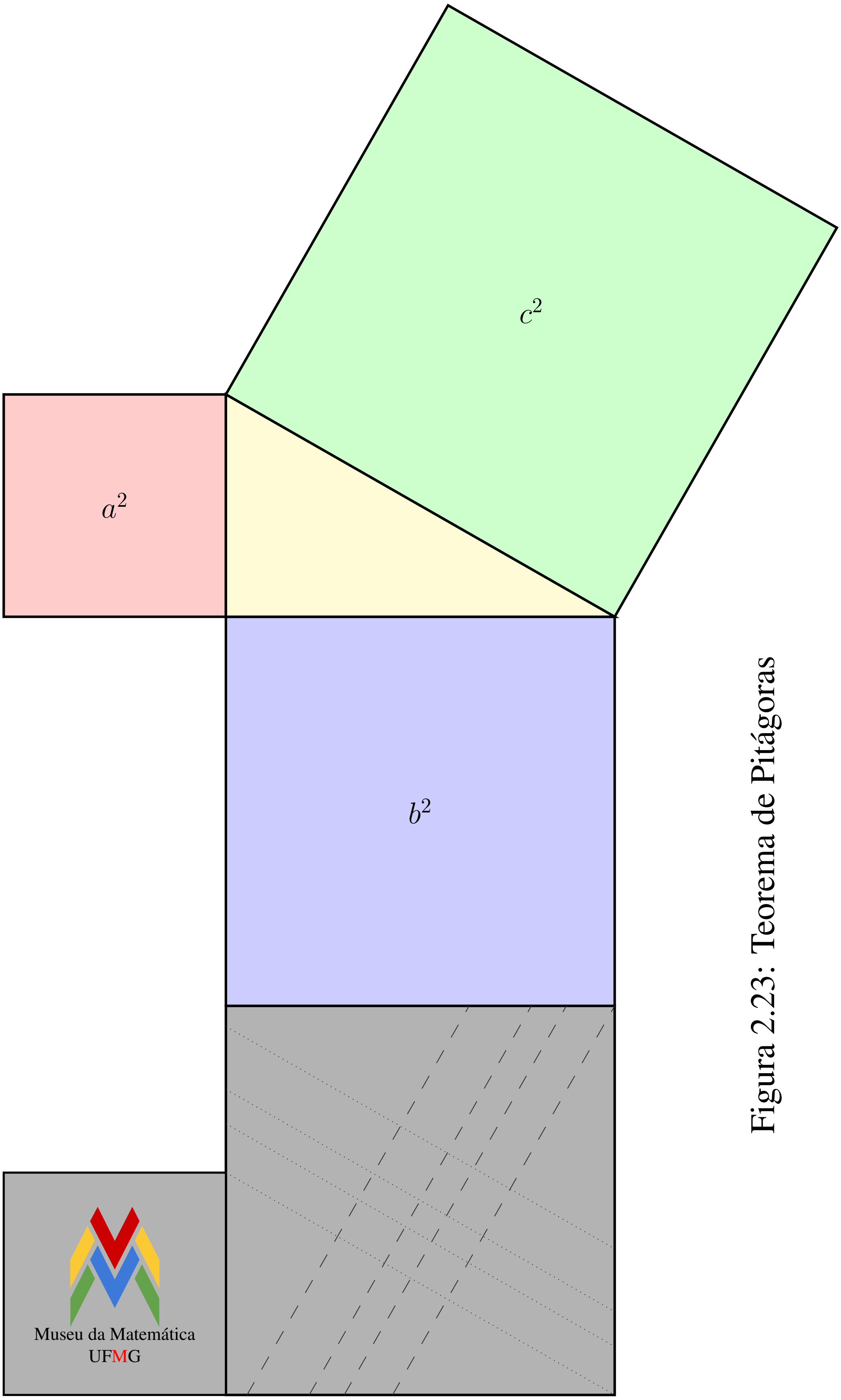
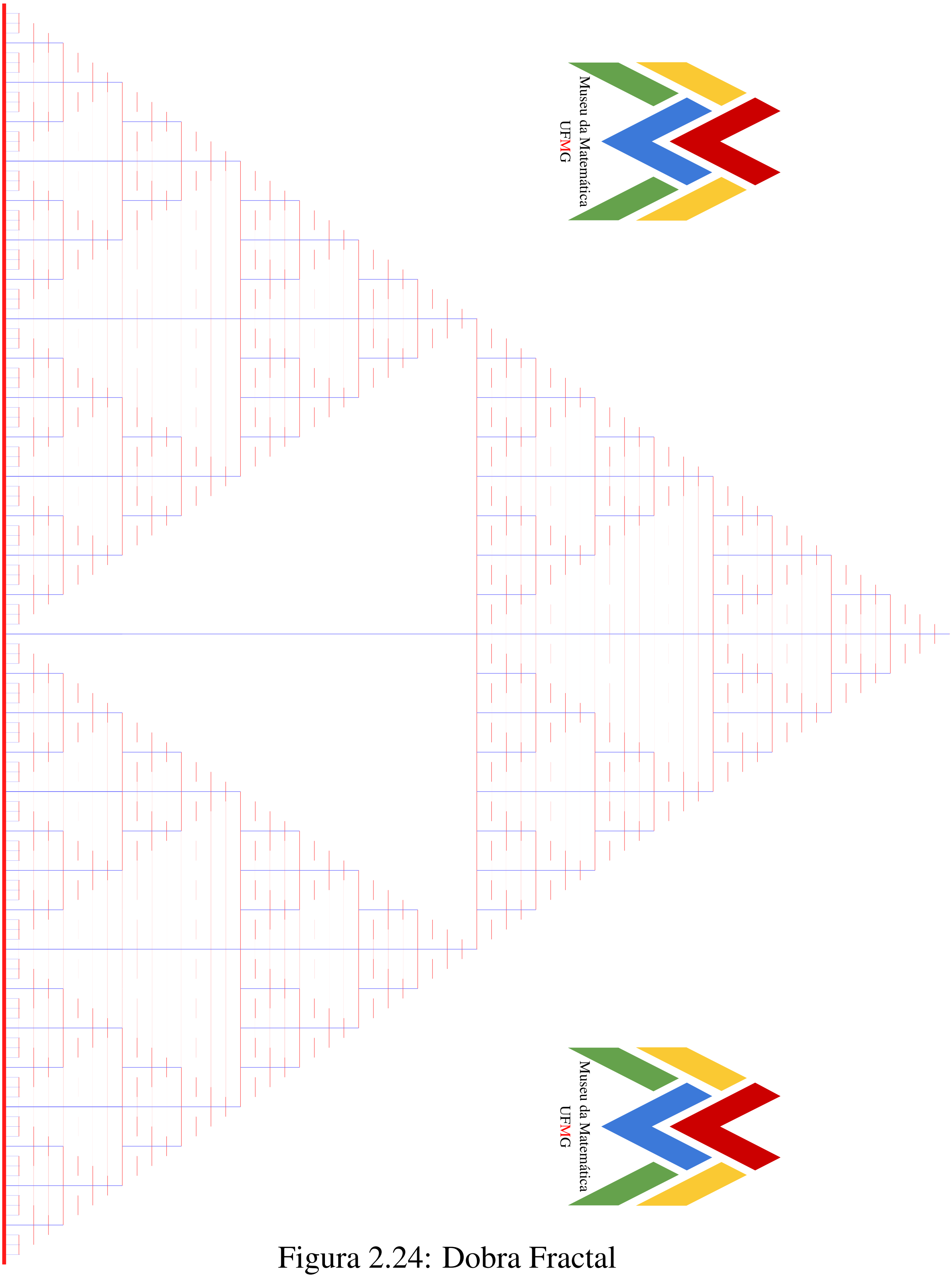


Figura 2.23: Teorema de Pitágoras

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For



Museu da Matemática UFMG
Museu da Matemática UFMG

Figura 2.24: Dobra Fractal

IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

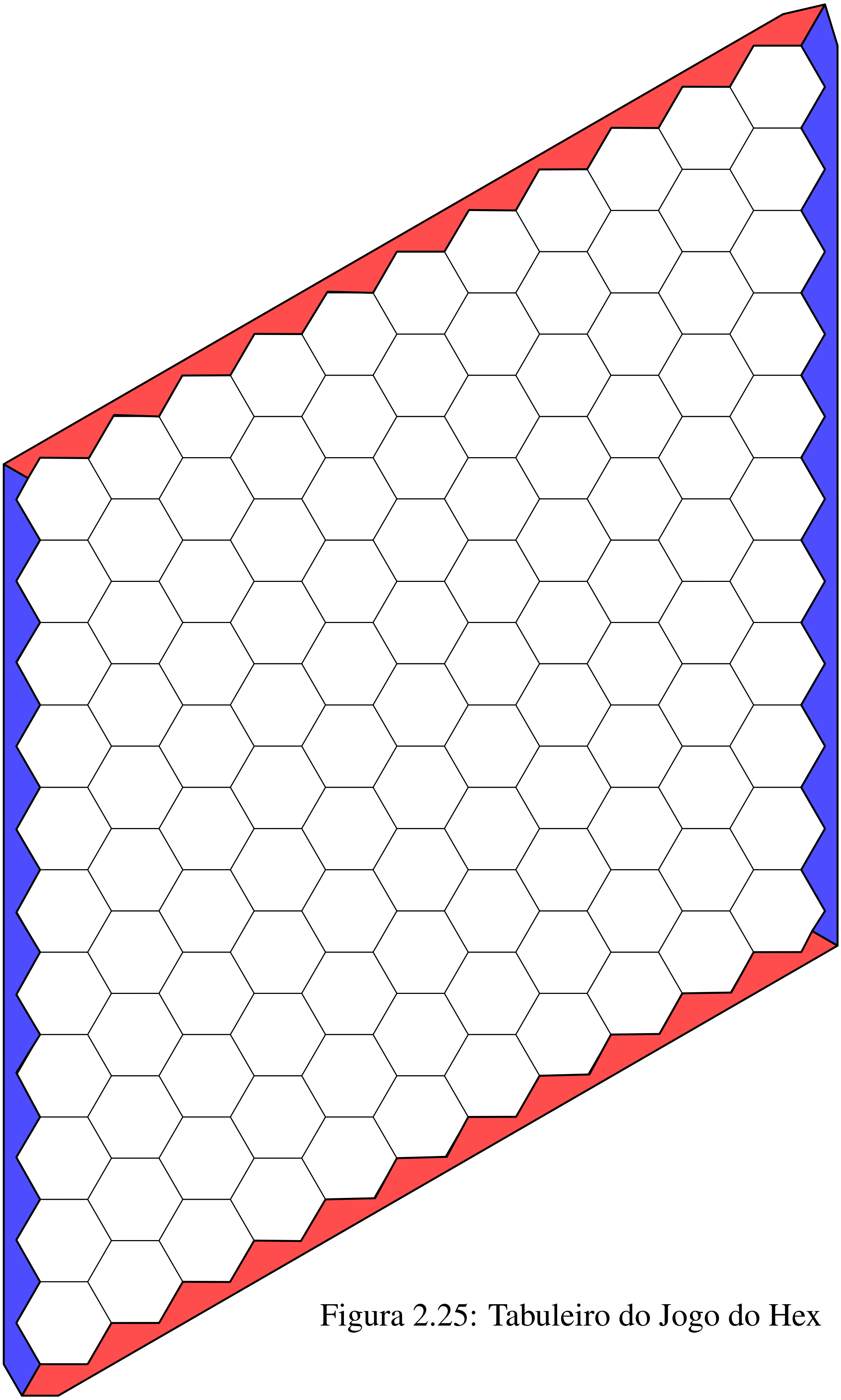


Figura 2.25: Tabuleiro do Jogo do Hex

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

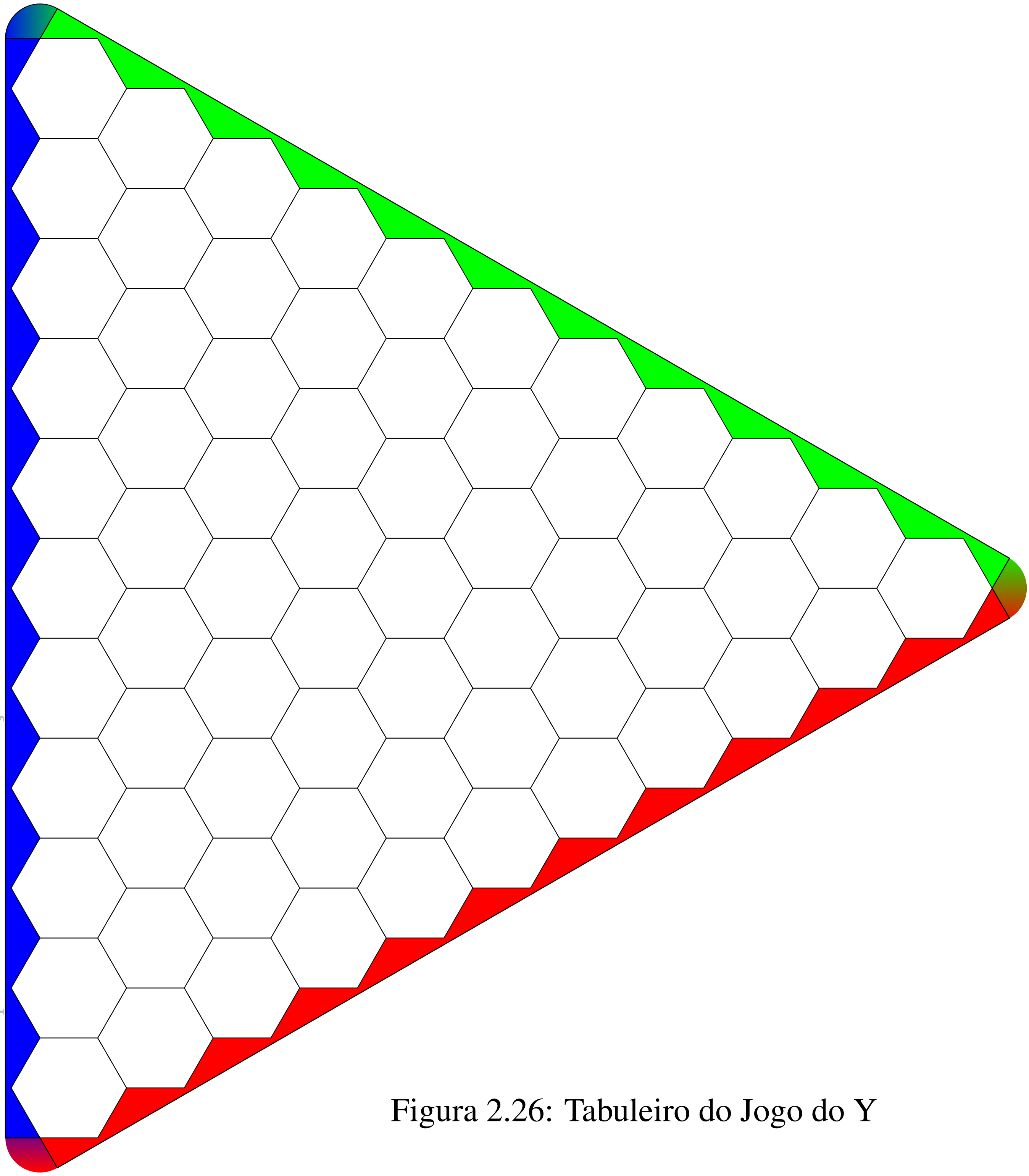


Figura 2.26: Tabuleiro do Jogo do Y

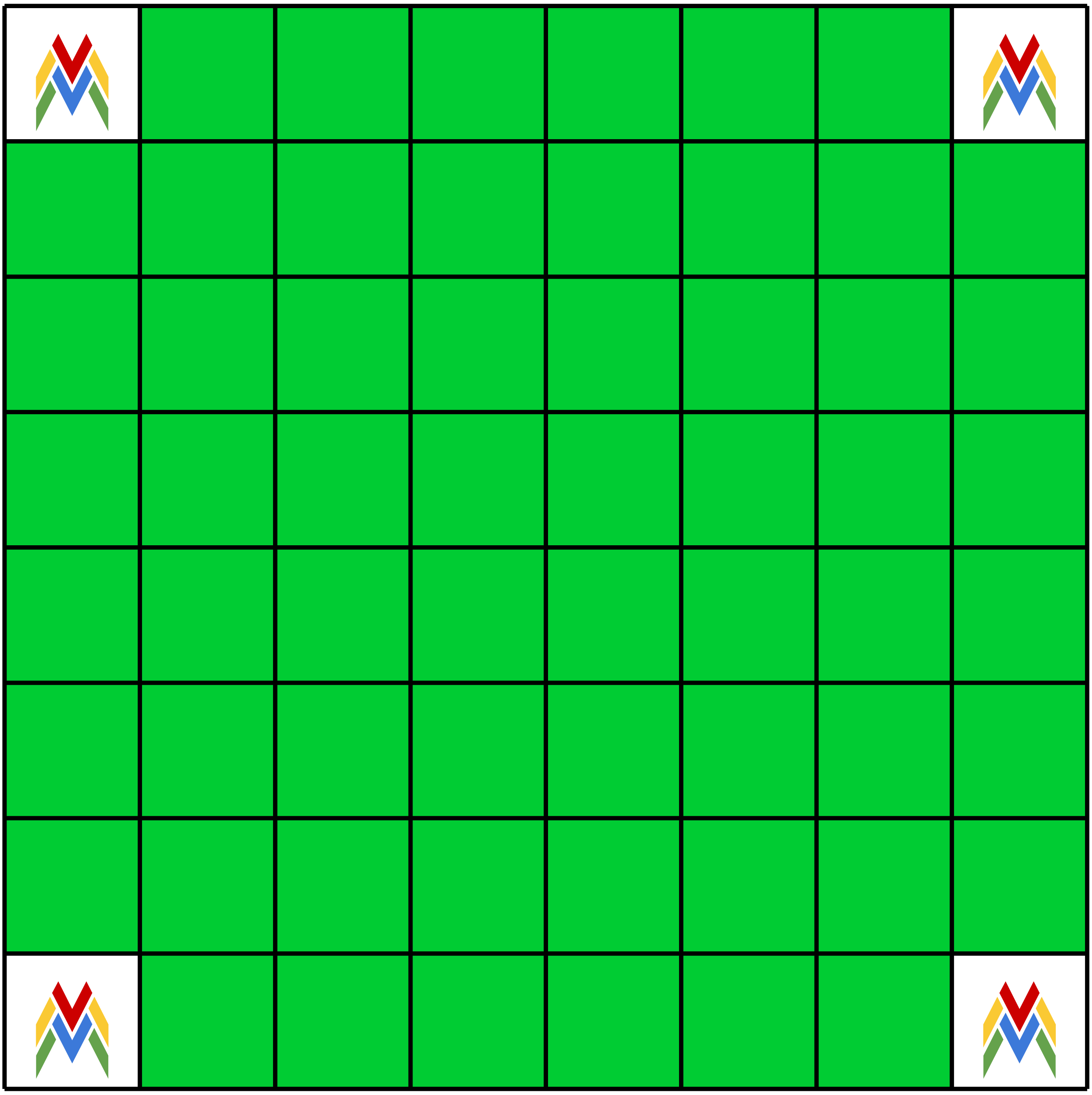


Figura 2.27: Tabuleiro 8×8 Pentaminós

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

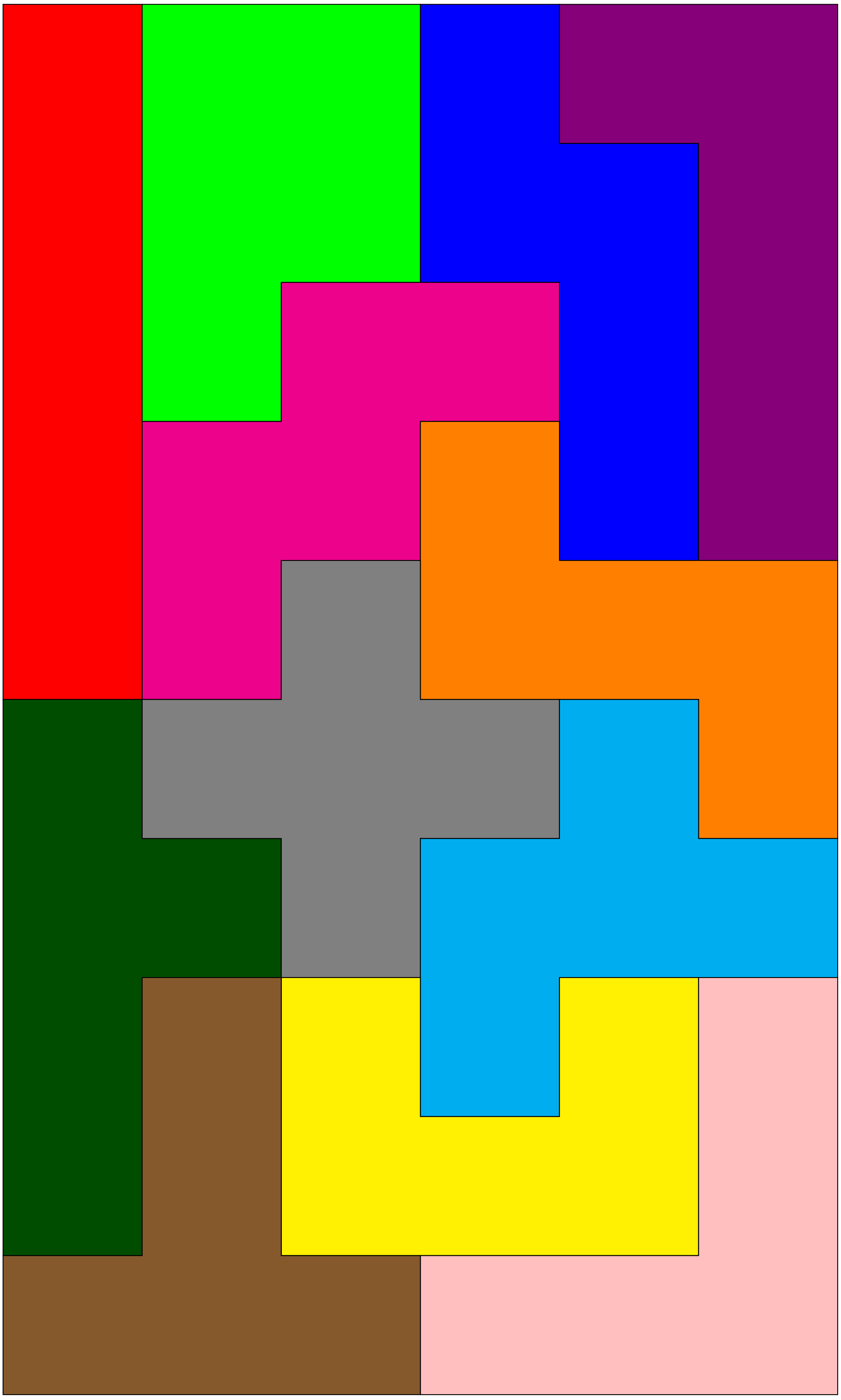


Figura 2.28: Peças do Pentaminós

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

Museu da Matemática UFMG

4	5	5	1	1	5	2
4	5	5	0	4	2	3
4	1	2	2	6	3	3
0	3	0	5	1	0	1
2	2	5	6	3	4	6
2	0	4	6	3	6	6
6	0	4	3	0	1	0
6	3	5	2	1	1	4

Posicione os 28 dominós no tabuleiro de tal forma que os números no tabuleiro coincidam com os números de pontos de cada dominó.

Figura 2.29: Tabuleiro encaixe Dominós

Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

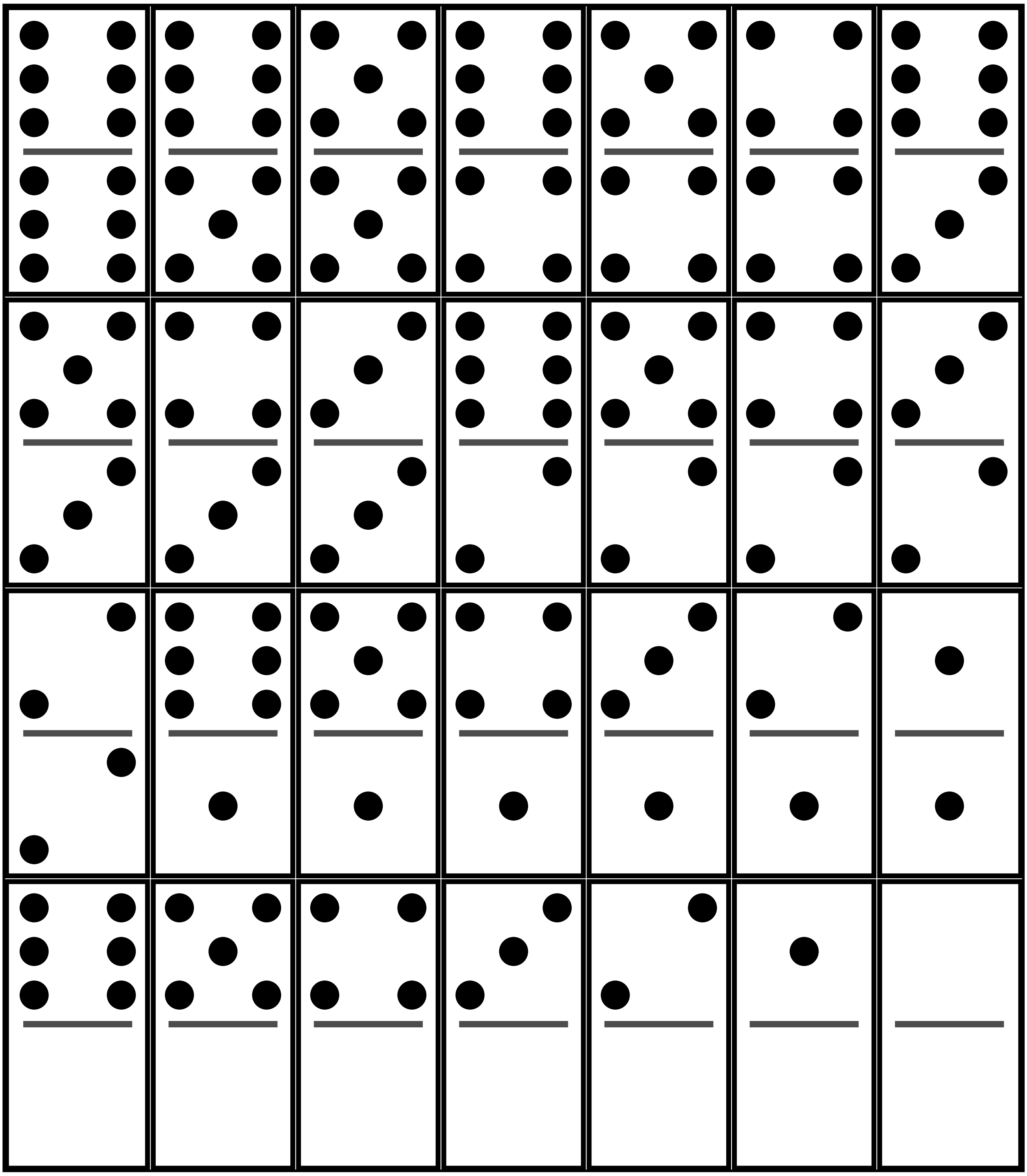


Figura 2.30: Dominós

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

mática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

Referências Bibliográficas

[1] BROCHERO, F.; GIRALDO, C. *Manual de Atividades do Museu da Matemática UFMG,* http://www.mat.ufmg.br/museu/wp-content/uploads/2019/08/ManualEBook.pdf, 2019.

[2] BROWNE, C. *Connection Games: Variations on a Theme*. CRC Press, 2018.

[3] FIIPIAK, A. *Mathematical Puzzles and Other Brain Twisters*, Bell Publishing Company, 1978.

[4] FREDERICKSON, G. *Dissections: Plane & Fancy*, Cambridge University Press, 1997.

[5] GALE, D. The Game of Hex and Brouwer Fixed-Point Theorem. *The American Mathematical Monthly*. v. 86, pp.818-827, 1979.

[6] GARDNER, M. *More Mathematical Puzzles of Sam Loyd,* New York: Dover Publications, 1960.

[7] GARDNER, M. *Divertimentos Matemáticos*, Ibrasa, 1967.

[8] GARDNER, M. *Mathematical Circus*, Penguin Books, 1979.

[9] GARDNER, M. *Nuevos pasatiempos matemáticos*, Alianza Editorial, 2018.

[10] HOCHBERG, R.; MCDIARMID, C.; SAKS, M. On the bandwidth of triangulated triangles. *Discrete Math,* v. 138, pp.261–265, 1995.

[11] KORDEMSKY, B. *The Moscow Puzzles* New York: Dover Publications, 1972.

[12] LUCAS, É. *Récréations Mathématiques Vol II*, Gauther-Villars et Fills, 1896.

[13] MARTIN, G. *Polyominoes: A Guide to Puzzles and Problems in Tiling*, The Mathematical Association of America, 1996.

[14] NASH, J. Rand Corp. technical report D-1164: Some Games and Machines for Playing Them. https://www.rand.org/content/dam/rand/pubs/documents/2015/D1164.pdf

Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática - Vitória - ES / UFES - IV Simpósio Nacional da For

[15] SINGMASTER, D. The Utility of Recreational Mathematics. *The UMAP Journal*. v. 37, $n°$ 4, pp.339-380, 2016.

[16] SOLOMON, G. *Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems, and Patterns*, Princeton University Press, 1994.

REALIZAÇÃO

ANPMat
Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

ORGANIZAÇÃO

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

ISBN 978-65-88013-07-6

9 786588 013076 >