

precisamos falar sobre o ensino de probabilidade

Laura Rifo, Unicamp
Circuito de Lives da ANPMat – 2021

perguntas norteadoras

O que é aleatoriedade? O que é incerteza?

Devemos trabalhar esse conceito na sala de aula? Como?

Quais conexões podemos fazer com outros conteúdos: aritmética, representações gráficas, pensamento inferencial (previsões, conjecturas), tomada de decisões?

Para temperar a conversa, responda à **enquete** desta live.

aleatoriedade

- Dê um exemplo de alguma coisa aleatória.
 - lançamento de dados ou moedas equilibrados
 - sorteios sem olhar
 - extração de cartas de um baralho
 - previsão do tempo**
- Dê um exemplo de alguma coisa não aleatória.
 - lançamento de uma moeda viesada
 - pressão sanguínea de uma pessoa
 - temperatura em determinado lugar e hora**
 - amanhã será sábado
 - movimento dos planetas
 - sequências com um padrão (PA e PG)

incerteza

- Você tem certeza de quê?
- Do quê você não tem certeza?

observar as concepções sobre incerteza, e como se relacionam com aleatoriedade

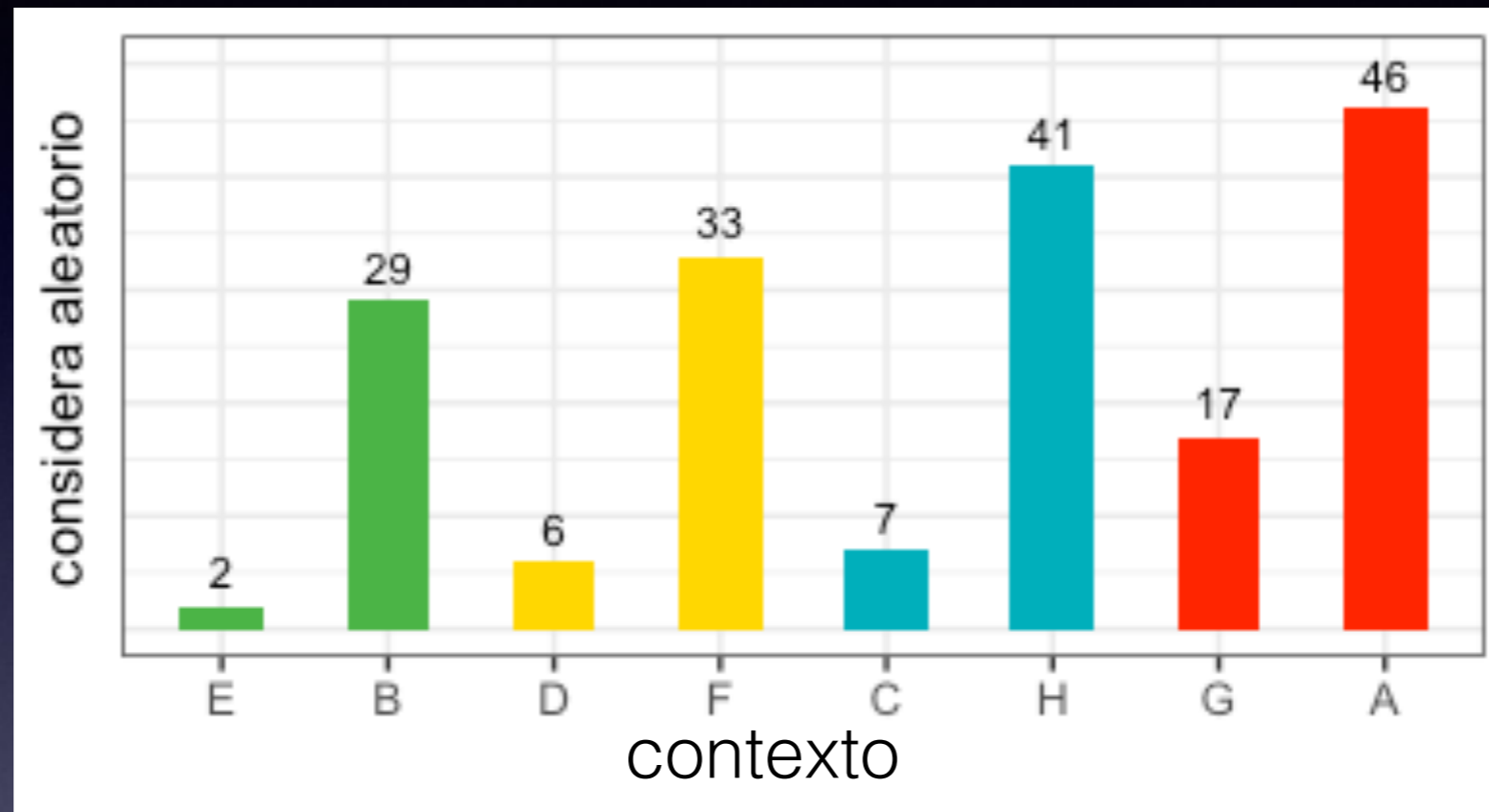
incerteza

- Você tem certeza de quê?
 - da morte
 - eu estou aqui agora
 - a terra é redonda
 - eu gosto de matemática
- Do quê você não tem certeza?
 - de muita coisa

Você acha que é aleatório?

- A. Resultado do 1º prêmio da Loteria Federal da semana que vem.
- B. Resultado do 1º prêmio da Loteria Federal da semana passada.
- C. Lugar de nascimento de Alexandre, o Grande.
- D. Temperatura em Campinas amanhã ao meio-dia.
- E. Índice Bovespa na hora de fechamento ontem.
- F. Proporção de alunos de Ensino Fundamental diagnosticados com déficit de atenção em 2019, no Estado de São Paulo.

Você acha que é aleatório?



contexto	passado	futuro
dados climáticos	E	B
índice social	D	F
localização geográfica de evento no tempo	C	H
resultado de mecanismo de sorteio	G	A

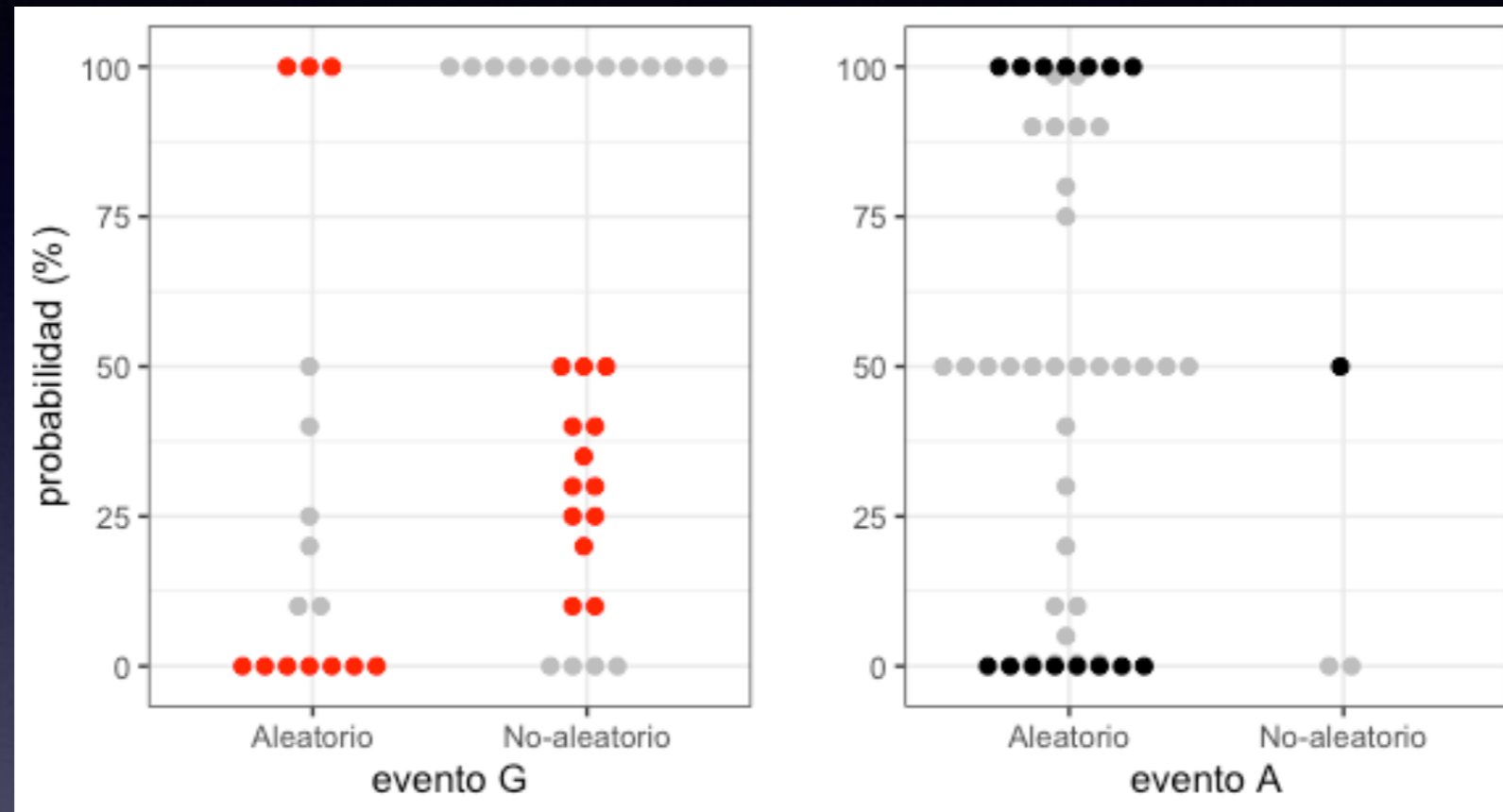
Que probabilidade você atribui?

- A. O resultado do 1º prêmio da LF da semana que vem será 89342.
- B. O resultado do 1º prêmio da LF da semana passada foi 89342.
- C. Alexandre, o Grande, nasceu na Grécia.
- D. A temperatura em Campinas amanhã ao meio-dia estará entre 18°C e 20°C.
- E. O índice Bovespa fechou em baixa ontem.
- F. A proporção de alunos de Ensino Fundamental diagnosticados com déficit de atenção 2019, no Estado de São Paulo é maior do que 5%.

algumas respostas observadas

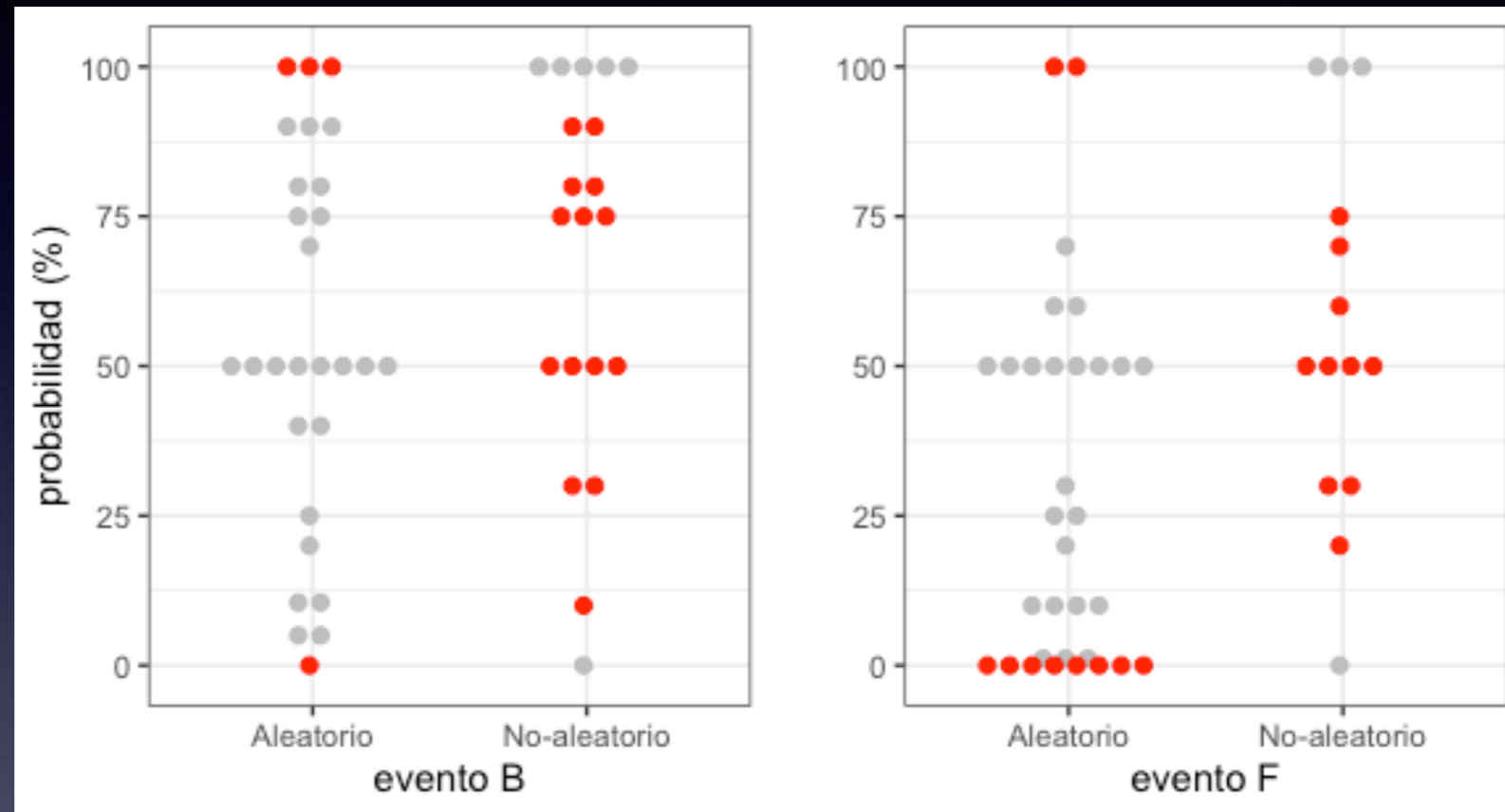
- responder à 1a pergunta é mais simples do que à 2a
- não é possível atribuir probabilidade para um assunto que desconheço
- quantos são os casos possíveis, e quantos são favoráveis?
- se o evento já ocorreu, não tem probabilidade: é sim ou não

Qual é a sua probabilidade?



- G. O resultado de um sorteio no passado.
- A. O resultado de um sorteio no futuro.

Qual é a sua probabilidade?



- B. Temperatura amanhã, em um certo horário, em um local determinado.
- F. Um índice social no futuro.

algumas conclusões

- separação entre aleatoriedade e atribuição de probabilidade
- aleatoriedade associada a mecanismos de sorteio
- aleatoriedade associada a eventos futuros / dissociada de eventos passados
- aleatoriedade dissociada de eventos dependentes (clima)

conjecturas

O que acontece se ampliamos o conceito de aleatoriedade e, conseqüentemente, o dos fenômenos que podemos modelar com probabilidade?

verdadeiro ou falso?

Com a sua informação atual (sem procurar na internet), indique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

verdadeiro ou falso?

1. O perigeu é o ponto mais afastado (próximo) da Terra na órbita de um satélite artificial.
2. O primeiro romance de Jorge Amado foi *O país do carnaval* (*Capitães da areia*).
3. A temperatura média da superfície de Vênus é em torno de 450°C (250°C).
4. O diprotodonte foi extinto há aproximadamente 25 (45) mil anos.
5. O hino nacional mais antigo é o da Grã-Bretanha (França).

verdadeiro ou falso?



probabilidade como medida de incerteza

Atribuição de probabilidade como valor verdade de uma afirmação:

0 - certeza da falsidade da afirmação

1 - certeza da veracidade da afirmação

entre 0 e 1 - incerteza

verdadeiro ou falso ou algo no meio disso?

1. O perigeu é o ponto mais afastado (próximo) da Terra na órbita de um satélite artificial.
2. O primeiro romance de Jorge Amado foi *O país do carnaval* (*Capitães da areia*).
3. A temperatura média da superfície de Vênus é em torno de 450°C (250°C).
4. O diprotodonte foi extinto há aproximadamente 25 (45) mil anos.
5. O hino nacional mais antigo é o da Grã-Bretanha (França).

experimento aleatório

Definição

Um experimento aleatório é **qualquer** experimento ou observação cujo resultado desconhecemos.

experimento aleatório

Exemplos

1. As afirmações anteriores que você desconhecia.
2. Outros fatos que você desconhece, e que podem ser conhecidos para outra pessoa: o 17º algarismo de π .
3. Veracidade da afirmação: qualquer número par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois primos.

experimento aleatório

Exemplos

3. Problemas abertos na ciência, cuja veracidade não podemos verificar (ainda) e dos quais só podemos nos aproximar por tentativas, evidências ou especulações teóricas: há ou houve vida em Marte?
4. Problemas abertos em história: o que a Vênus de Milo estava fazendo com as mãos?

espaço amostral associado a um experimento aleatório

Definição

O espaço amostral de um experimento aleatório é o **conjunto de todos os resultados possíveis ou considerados pelo observador** do experimento.

espaço amostral associado a um experimento aleatório

Exemplos

1. O primeiro romance de Jorge Amado foi *O país do carnaval* (*Capitães da areia*). Espaço amostral: {V, F}.
2. O 17o algarismo de pi. Espaço amostral:
3. O que a Vênus de Milo estava fazendo com as mãos?
Espaço amostral:

o que significa atribuir probabilidades?

Exemplos

1. O primeiro romance de Jorge Amado foi *O país do carnaval* (*Capitães da areia*). Espaço amostral: {V, F} ← **medida de incerteza**
2. O 17o algarismo de pi. Espaço amostral: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} ← **falta de informação**
3. O que a Vênus de Milo estava fazendo com as mãos?
Espaço amostral: {tricotando, dando banho, descaroçando azeitonas}
informação parcial

quanto custa atribuir probabilidades?

Exemplo

O primeiro romance de Jorge Amado foi *O país do carnaval* (*Capitães da areia*). Espaço amostral: {V, F}

$P(V)$ - 0 ou 1, distribuídos ao acaso

$P(V) = 0.5$, porque só tem duas opções e não sabe

$P(V) = 0.8$, porque lembra de algo assim, mas não tem certeza

quanto custa atribuir probabilidades?

Exemplo

O primeiro romance de Jorge Amado foi *O país do carnaval* (*Capitães da areia*). Espaço amostral: {V, F}

$P(V)$ - 0 ou 1, distribuídos ao acaso

$P(V) = 0.5$, porque só tem duas opções e não sabe

$P(V) = 0.8$, porque lembra de algo assim, mas não tem certeza

Qual destes três observadores decidiu melhor de acordo com a sua informação?

calibrando o seu palpite

Uma forma de atribuir probabilidades é considerar que você:

- deverá pagar uma penalidade, se seu palpite estiver errado, e
- não perderá nada, se estiver correto.

calibrando o seu palpite

Uma forma de atribuir probabilidades é considerar que você:

- deverá pagar uma penalidade, se seu palpite estiver errado, e
- não perderá nada, se estiver correto.

O que significa um palpite errado?

calibrando o seu palpite

Em um problema real, a penalidade deve representar como são suas perdas no erro cometido:

- erros pequenos são muito ou pouco graves?
- erros grandes são menores, maiores ou tão grandes quanto sua magnitude?
- cometer um erro para mais (superestimar) é tão grave quanto cometer um erro para menos (subestimar)?

calibrando o seu palpite

No caso de uma probabilidade as perdas dizem respeito às consequências das decisões tomadas a partir de tal atribuição.

calibrando o seu palpite

No caso de uma probabilidade as perdas dizem respeito às consequências das decisões tomadas a partir de tal atribuição.

conceitos de teoria da decisão:
utilidade, perdas, preferências,
percepção do risco

quanto custou a sua atribuição?

1. O perigeu é o ponto mais afastado (próximo) da Terra na órbita de um satélite artificial.
2. O primeiro romance de Jorge Amado foi *O país do carnaval* (*Capitães da areia*).
3. A temperatura média da superfície de Vênus é em torno de 450°C (250°C).
4. O diprotodonte foi extinto há aproximadamente 25 (45) mil anos.
5. O hino nacional mais antigo é o da Grã-Bretanha (França).

considere a seguinte penalidade:

palpite p	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
A verdadeira	100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	0
A falsa	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

quanto custou a sua atribuição?

- F** 1. O perigeu é o ponto mais afastado (próximo) da Terra na órbita de um satélite artificial.
- V** 2. O primeiro romance de Jorge Amado foi *O país do carnaval* (*Capitães da areia*).
- V** 3. A temperatura média da superfície de Vênus é em torno de 450°C (250°C).
- F** 4. O diprotodonte foi extinto há aproximadamente 25 (45) mil anos.
- V** 5. O hino nacional mais antigo é o da Grã-Bretanha (França).

lição de casa

$P(V)$ - 0 ou 1, distribuídos ao acaso

$P(V) = 0.5$, porque só tem duas opções e não sabe

$P(V) = 0.8$, porque lembra de algo assim, mas não tem certeza

Qual destes três observadores decidiu melhor de acordo com a sua informação?

proposta de atividade

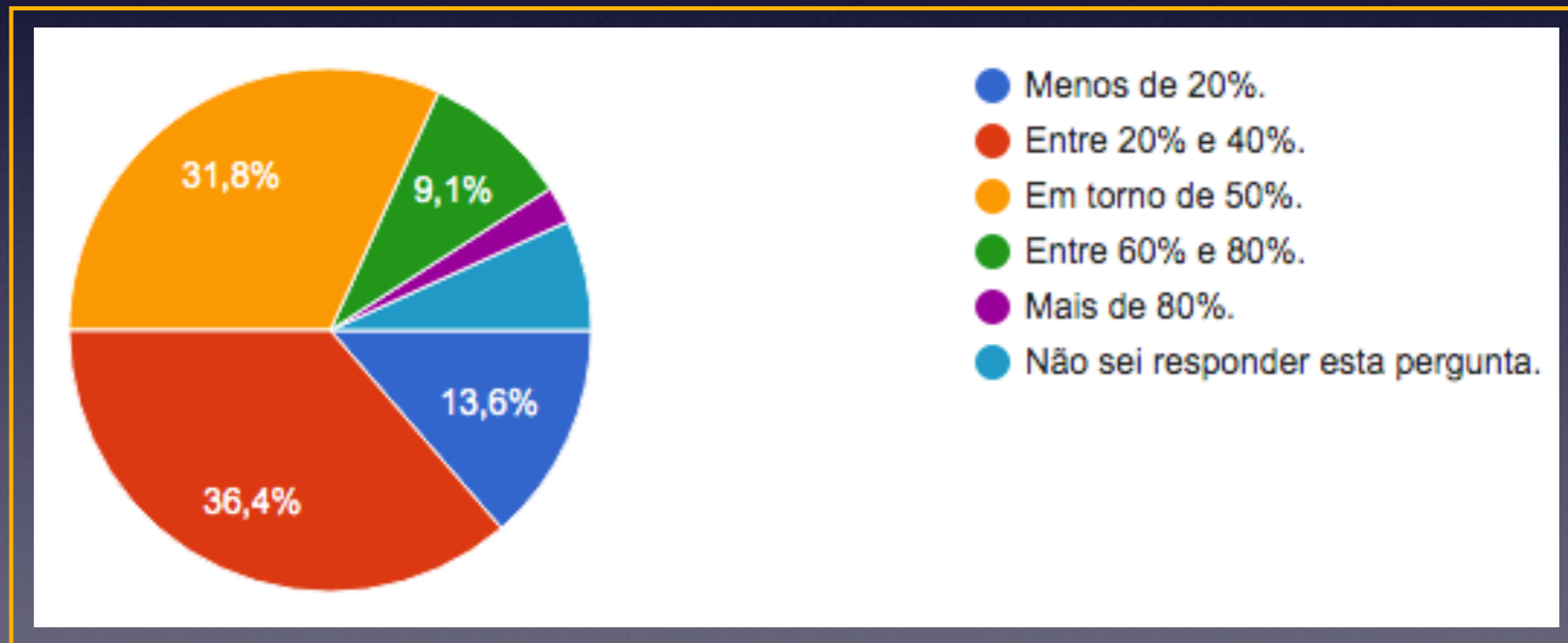
estudo de uma proporção desconhecida	elementos
cálculo de probabilidades	flutuações esperadas em um processo não determinista, previsões
pensamento inferencial	amostra (flutuações), estimativas (incerteza), atualização da informação (probabilidade condicional)
aplicação das inferências obtidas em um problema de decisão	utilidade, perda, valor esperado
obtenção de uma amostra em um contexto real	planejamento de amostragem, análise exploratória
aplicação da inferência obtida em um problema de decisão em contexto real	

algumas referências

- Berry, D. (1995) *Statistics, a Bayesian perspective*. Duxbury Press.
- Blackwell, D. (1969) *Basic Statistics*. McGraw-Hill.
- Gates, P. (1989) *Preparing to teach probability*. Project Maths Update, The Open University. <https://www.open.edu/openlearncreate/mod/oucontent/view.php?id=19072&printable=1>
- Kadane, J.B. (2011) *Principles of Uncertainty*. <http://www.stat.cmu.edu/~kadane/principles-2.pdf>.
- Lindley, D.V. (1985) *Making decisions*. John Wiley and Sons.
- Rifo, L. (2020) *Probabilidade e Estatística – Aspectos da tomada de decisões e incerteza para o Ensino Fundamental e Médio*. Profmat, Sociedade Brasileira de Matemática. Editora SBM, Rio de Janeiro.
- *What is random?* (Vsouce, 11') <https://www.youtube.com/watch?v=9rly0xY99a0>
- softwares: GeoGebra 5, RStudio (ver. 1.1.463), ggplot2 (ver. 3.3.0).

enquete - resultados

Qual é, em sua opinião, a proporção de pessoas que gostam de coentro?



n=43

enquete - resultados

O coentro divide opiniões: alguns amam, outros detestam.
Qual é a sua opinião?



n=43

enquete - resultados

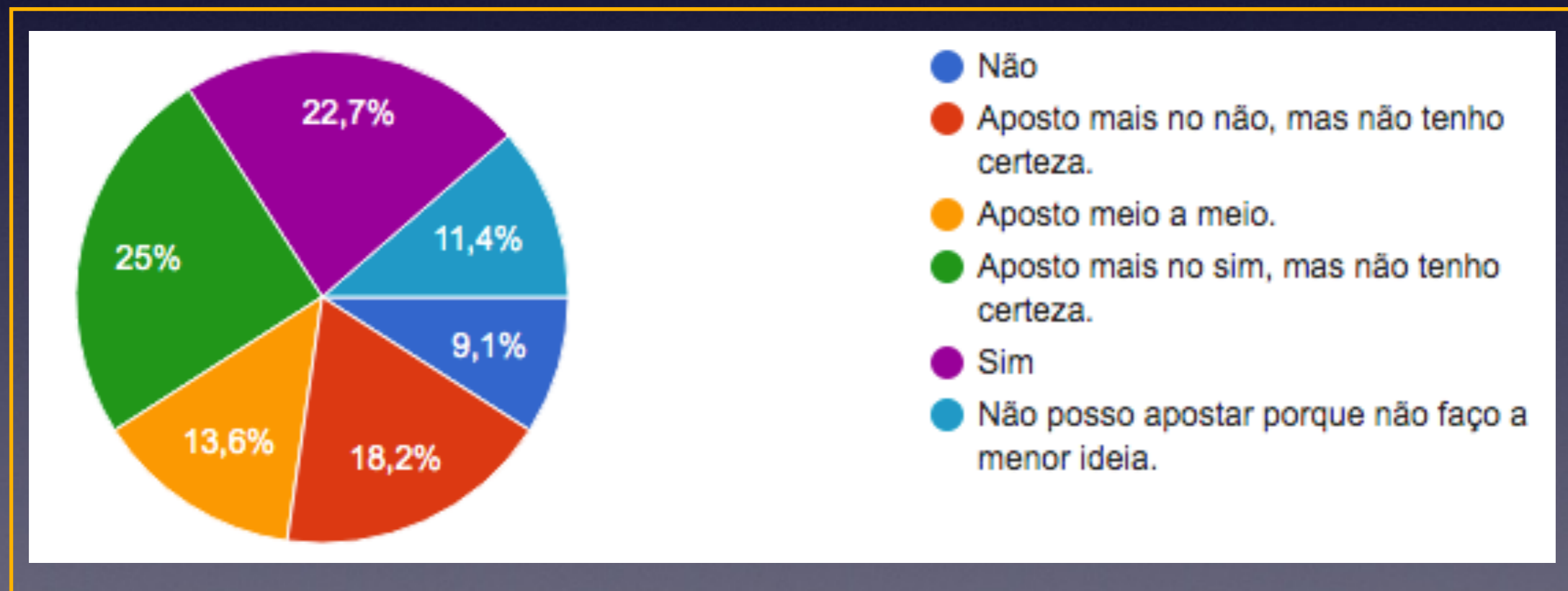
Associação: eu x outros



n=43

enquete - resultados

Imagine que você ganha um prêmio se acertar a resposta:
a palestrante gosta de coentro?



n=43

Resposta: a palestrante gosta de coentro :)