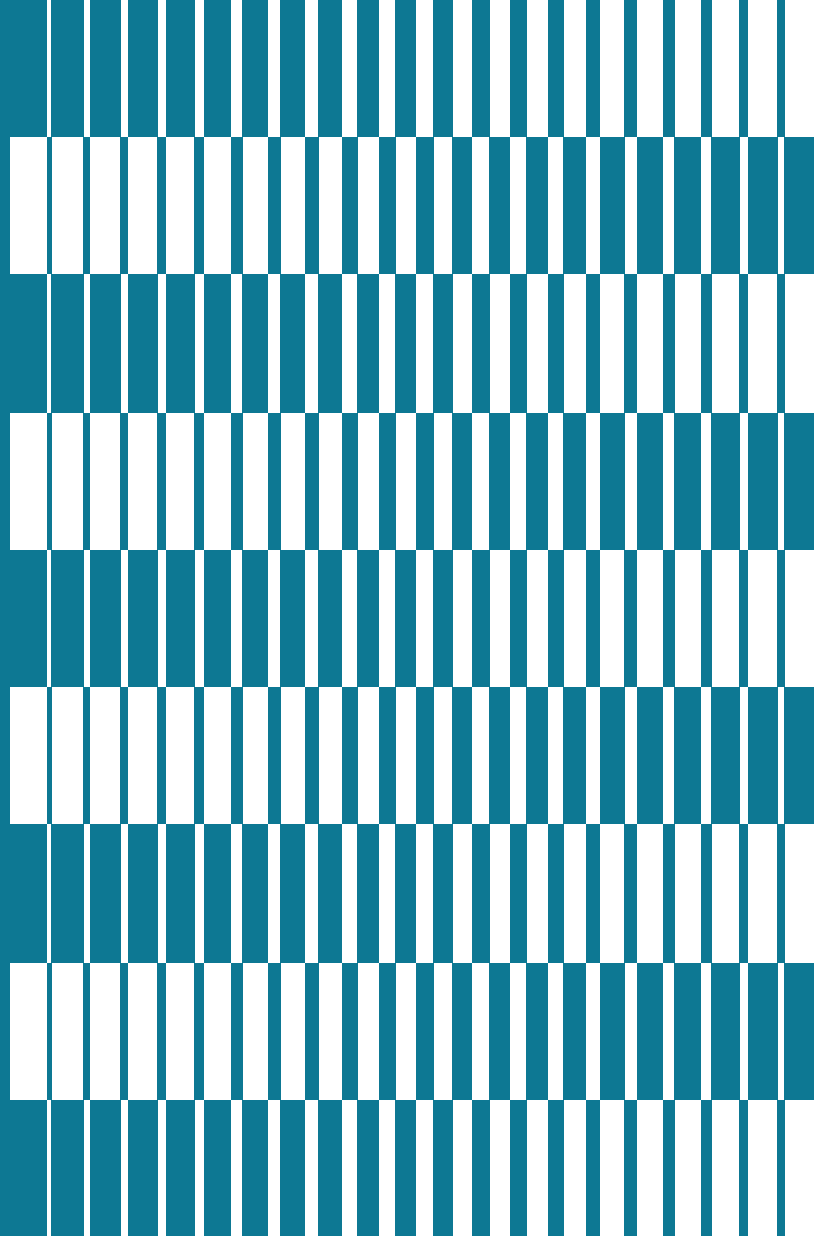


Revista Pé na Aula

Vol. **1**



Fevereiro 2026



Sumário

Abertura Volume 1 Revista Pé na Aula	3
Vários jeitos de somar Saberes docentes	4
Utilizando dados para detectar fraudes com lei de Benford Do Papel para a Aula	5
Youcubed Achei na Internet	8
Pare de planejar aulas! Do mundo para a sala de aula	10
Um caminho para introduzir equações quadráticas Aconteceu comigo	12
Somas sem fim Uma imagem vale mais do que mil números	14

Volume 1 | Revista Pé na Aula

É com alegria e profunda responsabilidade que apresento a você, professora, professor e demais educadores que constroem diariamente o ensino de Matemática no Brasil, o primeiro volume da Revista Pé na Aula. Este lançamento representa um passo importante na direção de algo que acreditamos com convicção: a valorização da prática docente como espaço legítimo de produção de conhecimento, reflexão e transformação social.

Vivemos um momento em que a sala de aula exige cada vez mais criatividade, sensibilidade e coragem. Por isso, desejamos que esta revista seja um espaço onde professores possam compartilhar vivências reais, desafios cotidianos, ideias inspiradoras, reflexões profundas e propostas de trabalho concretas. Aqui, o que importa é a experiência viva de quem ensina e medeia a construção do conhecimento cotidianamente no chão da escola.

Inspirada em modelos internacionais de revistas profissionais da área da Educação Matemática, como Educação e Matemática (Portugal), Mathematics in School (Inglaterra) e Mathematics Teaching in the Middle School (Estados Unidos), a Pé na Aula nasce com um diferencial: dar protagonismo à atuação do professor de matemática em toda a sua complexidade e humanidade.

A revista reunirá seções que buscam dialogar com diferentes dimensões do fazer docente, a saber:

- **Aconteceu comigo** - relatos de experiências que nasceram da sala de aula e merecem estar em relevo;
- **Do Papel para a Aula** - propostas práticas e planos de aula alinhados ao currículo;
- **Reflexões** - textos mais teóricos ou sensíveis, com possibilidade de submissão anônima;
- **Achei na internet** - seleções comentadas de recursos de qualidade disponíveis online;
- **Saberes docentes** - perguntas para praticar e promover o conhecimento pedagógico do conteúdo;
- **Uma imagem vale mais que mil números** - porque a matemática também é visual e estética;
- **Do mundo para a sua sala** - traduções e diálogos com experiências internacionais.

A pretensão do Comitê Editorial com este projeto é construir um espaço acolhedor, dinâmico e útil, onde professores possam compartilhar vivências, ideias, reflexões e desafios do cotidiano escolar, dispensando, para tanto, a necessidade de seguir formatos rígidos, referências ou exigências acadêmicas, que, muitas vezes, são empecilhos para a divulgação de excelentes trabalhos realizados pelos docentes em seu cotidiano escolar, constituindo-se, portanto, como uma ferramenta de apoio, inspiração e reconhecimento dos saberes de quem está com os pés na sala de aula.

Que cada página deste volume desperte novos olhares, fortaleça vínculos, renove esperanças e, sobretudo, reafirme o valor e a potência do professor de matemática brasileiro.

Seja bem-vinda, seja bem-vindo.

A casa é nossa. A revista é nossa. A palavra é sua.

Boa leitura!

Sumaia Almeida Ramos

Presidente da Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica - ANPMat

Vários jeitos de somar

Rita Santos Guimarães

O objetivo desta seção é trazer perguntas que promovam saberes e habilidades diretamente relacionados à sala de aula de Matemática, promovendo aquele tipo de conhecimento que é específico do trabalho docente do professor de Matemática.

Em cada edição lançaremos uma pergunta, e você pode enviar a sua resposta para conteudos.anpmat@gmail.com. Na próxima edição, o responsável por essa pergunta vai comentar as respostas recebidas.

Resolva de várias formas diferentes a adição $54 + 28$.

Utilizando dados para detectar fraudes com lei de Benford

Vitor Amorim

1. O Tema

Você já ouviu falar da lei de Benford? Este é um tema que, embora seja pouco conhecido entre os professores de Matemática, tem potencial para gerar uma sequência didática contextualizada repleta de conceitos matemáticos, elementos de modelagem matemática, história, tecnologia e discussão de temas relevantes para a sociedade.

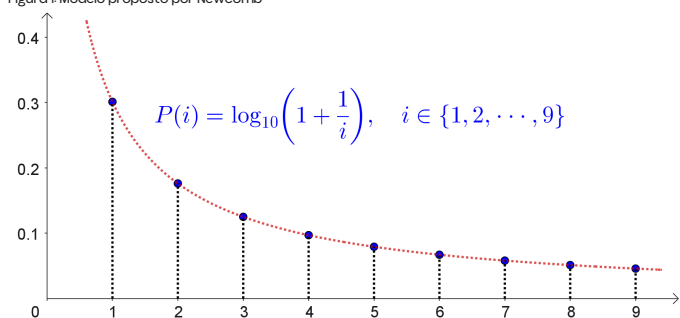
Apesar de levar o nome do físico Frank Benford (1883-1948), o primeiro registro deste achado foi feito pelo astrônomo Simon Newcomb (1835-1909). A descoberta envolve uma característica bastante surpreendente e contraintuitiva presente em conjuntos grandes de números oriundos de diversas naturezas.

Suponha que você tenha em mãos uma lista grande de dados, como os comprimentos dos principais rios do planeta, os números contidos no balancete de uma grande empresa ou os boletins de urna das seções eleitorais na última eleição. Ao extrair o primeiro algarismo significativo de cada um desses números, com qual frequência podemos esperar que cada um dos algarismos de 1 a 9 vai aparecer nesta posição?

Em geral, a resposta intuitiva para esta pergunta é $1/9$, aproximadamente 11,11%, pois, a princípio, não haveria motivos para supor que algum dos nove algarismos teria maior predisposição para ser o primeiro. Entretanto, em uma história curiosa envolvendo o desgaste das páginas de tábuas de logaritmos (veja as referências [3] e [5]), Newcomb descobriu que, em grandes conjuntos de números das mais variadas naturezas, o algarismo 1 aparece na primeira posição significativa com maior frequência que o 2, que por sua vez é mais frequente que o 3 e assim sucessivamente.

Dessa forma, Newcomb concluiu que, para alguns conjuntos de dados, a distribuição de frequências do primeiro algarismo não era uniforme. Assim, propôs o modelo matemático apresentado na figura abaixo, com o objetivo de descrever a frequência de ocorrência de cada algarismo na primeira posição, o que se mostrou uma aproximação bastante satisfatória dos fenômenos observados.

Figura 1: Modelo proposto por Newcomb



Fonte: Elaborada pelo autor

Décadas mais tarde, Benford trouxe de volta à tona a descoberta de Newcomb, que não havia ganhado muita atenção à época. Além de desenvolver generalizações, Benford testou enormes conjuntos de dados de múltiplas origens e promoveu com maior sucesso a divulgação do modelo.

Ao longo dos séculos XX e XXI, novas propriedades da lei de Benford foram descobertas, seu domínio de validade e os motivos de seu funcionamento foram objetos de pesquisa e o tema segue sendo academicamente relevante até hoje. Nas referências [3] e [5] podemos encontrar mais informações sobre esse processo.

Contudo, considerando o escopo da proposta de sequência didática que apresentaremos a seguir, o aspecto mais importante da descoberta e desenvolvimento da lei de Benford foi a ideia de utilizá-la no auxílio à detecção de fraudes, como veremos mais à frente.

2. A Proposta Didática

A proposta de sequência didática aqui apresentada é flexível em vários aspectos: público-alvo, pré-requisitos, objetivos, conteúdos abordados, metodologia, recursos, duração e avaliação. Essa ideia é sustentada no entendimento de que o tema "Lei de Benford" permite diferentes formas de abordagens e níveis de aprofundamento.

Assim, o caráter da proposta é geral, com variações de abordagem explícitas no texto e implícitas no contexto em que o docente atua, permitindo que este defina os elementos específicos do planejamento de acordo com seu conhecimento pedagógico e de sua realidade.

Para aquecer o tema, a ideia inicial é obter algumas tabelas grandes de números, sendo cada uma com dados oriundos da mesma natureza. Algumas sugestões são: as extensões territoriais e os PIBs de todos os países do mundo, as populações de todos os municípios do Brasil, os números contidos em um relatório trimestral de demonstrações financeiras da Petrobrás, as 100 primeiras potências de 2 e os 100 primeiros números de Fibonacci.

Essas tabelas de números podem ser obtidas com pesquisas na internet, com o auxílio de planilhas eletrônicas, utilizando ferramentas de inteligência artificial entre outras possibilidades. Dependendo do planejamento de tempo e recursos disponíveis, os dados podem ser levantados e tabulados pelos alunos em aula (uma atividade computacional), como atividade extraclasse ou, ainda, podem ser organizados e disponibilizados pelo próprio professor.

Do Papel para a Aula

Figura 2: Frequências dos primeiros algarismos no Excel

Extensões Territoriais dos Países	Primeiro Algarismo	Populações das Cidades do Brasil	Primeiro Algarismo	Cem Primeiras Potências de 2	Primeiro Algarismo	Algarismo	Frequência Extensões Territoriais	Frequência Populações Cidades	Frequência Potências de 2
9.388.211	9	11 451 999	1	2	2	1	28,63%	29,91%	30,00%
2.973.190	2	6 211 223	6	4	4	2	19,23%	18,24%	17,00%
9.147.420	9	2 817 381	2	8	8	3	13,25%	13,43%	13,00%
1.811.570	1	2 428 708	2	16	1	4	8,97%	10,81%	10,00%
770.880	7	2 417 678	2	32	3	5	7,26%	7,50%	7,00%
8.358.140	8	2 315 560	2	64	6	6	5,56%	6,64%	7,00%
910.770	9	2 063 689	2	128	1	7	5,98%	5,78%	6,00%
130.170	1	1 773 718	1	256	2	8	5,13%	4,27%	5,00%
16.376.870	1	1 488 920	1	512	5	9	5,98%	3,41%	5,00%
1.943.950	1	1 437 366	1	1024	1	Total	100,00%	100,00%	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor

Com os dados tabulados, a pergunta do início deste texto pode ser replicada: em cada tabela, que porcentagem devemos esperar para a frequência relativa de ocorrência de cada algarismo na primeira posição dos números? Em geral, a discussão dessa pergunta leva a uma resposta majoritária de que todos os algarismos devem aparecer aproximadamente a mesma quantidade de vezes na primeira posição, ou seja, devem ter uma distribuição uniforme.

A obtenção da verdadeira resposta para os conjuntos de dados levantados pode se transformar em uma nova atividade computacional. Por exemplo, utilizando uma planilha eletrônica (Excel ou software semelhante), podemos utilizar a função “=ESQUERDA” para obter o primeiro algarismo de cada um dos números de cada conjunto. Em seguida, com a função “=CONT.SE”, podemos contar quantas vezes cada algarismo aparece e, dividindo pelo total, obter a frequência relativa de cada um. Na figura abaixo, trazemos como exemplo o resultado parcial (primeiras linhas) de três das seis variáveis mencionadas acima.

Dependendo do contexto de planejamento, a atividade computacional proposta acima pode utilizar outras ferramentas computacionais – como o GeoGebra, uma linguagem de programação ou inteligências artificiais –, ou o professor pode trazer o resultado pronto, com o objetivo de apenas discuti-los.

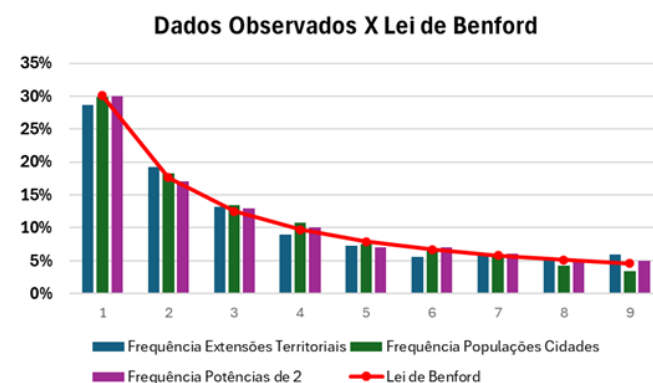
Com o resultado em mãos, é hora de trazer o contexto histórico e o modelo que Newcomb propôs para aproximar as distribuições de frequências obtidas:

$$P(i) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{i} \right), \quad i \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

Note que este momento traz oportunidades para introdução, contextualização, revisão e aprofundamento de vários conceitos matemáticos, como funções, logaritmos, distribuições de frequências e de probabilidade, distribuições uniformes e não uniformes, representações gráficas, modelagem matemática entre outros. As possibilidades para a exploração didática deste leque de conceitos matemáticos, no contexto da lei de Benford, são ilimitadas.

Voltando aos dados, a próxima figura apresenta uma representação gráfica das distribuições de frequências do primeiro algarismo das três variáveis observadas, vistas na figura anterior, em comparação com o modelo da lei de Benford. Voltando aos dados, a próxima figura apresenta uma representação gráfica das distribuições de frequências do primeiro algarismo das três variáveis observadas, vistas na figura anterior, em comparação com o modelo da lei de Benford.

Figura 3: Distribuições de frequência do primeiro algarismo



Fonte: Elaborada pelo autor

Outro questionamento importante a ser feito é se qualquer conjunto de dados segue o padrão da lei de Benford. Uma discussão direcionada com os alunos revelaria rapidamente que não. Alternativamente, os alunos podem descobrir esse fato por si só, ao propor que eles examinem desde o início mais dois conjuntos de dados: as alturas de todos os alunos da turma e os últimos 200 números sorteados na Mega-Sena. Por que esses conjuntos jamais vão apresentar o padrão em questão?

Muitas outras possibilidades para exploração didática deste tema podem ser pensadas. Indicamos a referência [1] para novas ideias e encorajamos o leitor a buscar seus próprios caminhos.

Para encerrar, será apresentada uma proposta de projeto que tem potencial para gerar engajamento, contextualização da Matemática, desenvolvimento de habilidades computacionais, discussão de temas relevantes e projetos interdisciplinares.

3. A Lei de Benford na Detecção de Fraudes

A lei de Benford, para além de uma propriedade matemática curiosa de conjuntos de dados, tem sido frequentemente utilizada por empresas e órgãos de auditoria (como o TCU) na detecção de fraudes em documentos contábeis, especialmente aqueles envolvendo recursos públicos, como mostram as referências [4] e [6]. Além disso, suas propriedades já foram utilizadas para analisar boletins de urnas das eleições, divulgados pelo TSE (veja em [2]).

Afinal, sabendo que este padrão de distribuição dos primeiros algarismos dá as caras em uma vasta classe de conjuntos arbitrários de dados, quando encontrarmos um conjunto que não o contém, devemos pelo menos observá-lo com mais cuidado, pois pode se tratar de números artificialmente distribuídos sem considerar esta lei "universal".

Neste contexto, um projeto que pode ser desenvolvido pelos alunos é o de análise de dados numéricos em documentos públicos, tabulando-os e verificando a adesão ao padrão da lei de Benford. Pode-se, inclusive, utilizar testes estatísticos de adequação (como qui-quadrado), pois, ainda que não sejam um tópico presente no ensino básico, são de fácil compreensão e aplicação.

Uma escolha cuidadosa dos documentos a serem analisados, considerando o contexto em que a escola está inserida, tornará a atividade ainda mais significativa para os alunos. Como sugestões, citamos documentos contábeis de obras públicas e utilização de verbas por integrantes dos três poderes (principalmente locais), demonstrativos financeiros de empresas (públicas e privadas), boletins de urnas de todas as seções de um município, entre outras ideias neste sentido. Utilizando uma divisão em grupos, vários temas podem ser abordados simultaneamente.

Em geral, os dados mencionados acima são públicos, sendo sua tabulação o maior desafio. Mas, com as ferramentas de inteligência artificial, esse problema tem se tornado mais fácil de resolver, restando as tarefas principais de extrair o primeiro algarismo dos dados, realizar cálculo das frequências de suas ocorrências e os testes de adequação à lei de Benford, para então analisar os resultados.

Por fim, é muito importante chamar a atenção para um fato que às vezes passa despercebido na divulgação deste tema: se um conjunto de dados não aderir à lei de Benford, isso não é uma prova de que houve fraude, mas apenas um primeiro filtro, um sinal de alerta para que aqueles dados sejam alvo de um escrutínio. Por outro lado, a adesão de um conjunto de dados ao padrão também não é uma prova de que não houve fraude, visto que o fraudador pode conhecer a lei e criar dados artificiais que a satisfaçam.

Tomando essas informações como ponto de partida, uma análise crítica dos dados permitirá que os alunos desenvolvam reflexões sobre os temas sugeridos, além de diversas competências desejáveis para o tratamento e análise de dados, com o auxílio desta ferramenta matemática tão surpreendente.

Referências

[1] AMORIM, Vitor; RODRIGUES, Aroldo. A surpreendente Lei de Benford. 2024. Disponível em: <https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2024/06/Lei-de-Benford.pdf> Acesso em: 03/09/2025.

[2] EIRADO, Cláudia Raquel da Rocha; SILVA, Gustavo Pompeu da; CORDEIRO, Gauss Moutinho. Análise da lei de Benford de 2º dígito: eleições gerais para presidente no Brasil e a votação em urnas eletrônicas - 2002 a 2018. Revista Brasileira de Estatística, Rio de Janeiro, v. 78, n. 243, p. 7-34, 2020.

[3] JAMAIN, Adrien. Benford's Law. 2001. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Matemática, Imperial College of London e ENSIMAG, Londres, 2001.

[4] RODRIGUES, Leandro Menezes; MIRANDA, Crislaine de Fátima Gonçalves de; MUSIAL, Nayane Thais Krespi; BARRO, Claudio Marcelo Edwards. A Lei de Newcomb-Benford como ferramenta de auditoria: uma análise das despesas orçamentárias nos municípios paranaenses. Revista do Tribunal de Contas da União, Brasília, v. 56, n. 162, p. 50-71, jan./abr. 2023.

[5] ROUSSEAU, C.; SAINT-AUBIN, Y. Matemática e Atualidade. v. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[6] SILVA, Ângelo Henrique Lopes da. O uso da Lei Newcomb-Benford na contabilidade e auditoria. Revista do Tribunal de Contas da União, Brasília, v. 41, n. 116, p. 45-60, jan. abr. 2009

Youcubed

Mateus Gianni Fonseca



É tal a enxurrada de stories, dancinhas e memes que a internet nos entrega diariamente nas redes sociais, que por momentos esquecemos de procurar sites (isso mesmo, sites e não redes sociais) que colaboram com nossa formação e atuação profissional. Nessa toada, encontrei há alguns anos o espaço virtual youcubed, em sua versão brasileira: <https://www.youcubed.org/pt-br/>.

Trata-se de um espaço mantido pelo Instituto Sidarta e pelo Centro de Pesquisas Youcubed, da Universidade de Stanford, que centraliza uma série de atividades alinhadas à perspectiva das Mentalidades Matemáticas - uma abordagem de ensino de matemática fundamentada nos campos da neurociência, da psicologia da educação e da educação matemática, que defende uma proposta mais aberta, visual e criativa.

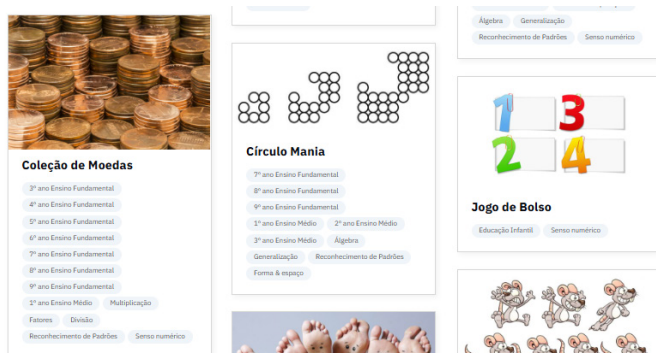
De maneira geral, o site possui 7 abas: (a) ideias e impacto; (b) ciência de dados; (c) atividades; (d) vídeos; (e) evidências; (f) mente sem barreiras; e (g) livros.

Falando de cada uma dessas abas, a primeira - ideias e impacto - apresenta uma série de materiais que contribuem para a organização do trabalho pedagógico do professor, como rubricas de avaliação de práticas de Mentalidades Matemáticas e uma série de vídeos e demais textos formativos. A seção (b), por sua vez, reúne um olhar especial para a temática ciência de dados, assunto relativamente novo e que tem se feito presente nas discussões escolares, dada a demanda atual de compreender e gerir grandes volumes de dados; enquanto que as seções (d) e (e) trazem outros materiais nessa mesma linha. Alguns desses materiais contribuem para refletirmos sobre as práticas matemáticas de nossos estudantes e como podemos oportunizar formas mais amplas da ação matemática. As seções (f) e (g) são compostas por divulgação de livros relacionados à abordagem das Mentalidades Matemáticas.

É na seção (c) - Atividades - que foco minha atenção neste primeiro texto de "Achei na Internet", pois é nessa aba do site que temos um conglomerado de atividades matemáticas de cunho prático para a sala de aula. Atividades que podem ser replicadas em sala de aula pelo professor ou servir de material estimulador para a criação de novos materiais, reduzindo a dependência excessiva de livros didáticos que, por vezes, engessam a ação matemática na escola.

No site, o usuário pode configurar filtros para selecionar as atividades a partir dos diferentes anos escolares e tópicos da matemática; e são sempre apresentadas no formato: ilustração, título, anos escolares e tópicos matemáticos, como a imagem a seguir:

Figura 1: Atividades do site



Fonte: Disponível em: <<https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/>>. Acesso em: 25 ago. 2025.

Adiante, na exploração do site, basta um clique sob o título e a atividade é apresentada na íntegra:

Figura 2: Atividades do site - coleção de moedas

Colecção de Moedas

Tópicos: Multiplicação, Fatores, Divisão, Reconhecimento de Padrões, Senso numérico

Séries: 3º ano Ensino Fundamental, 4º ano Ensino Fundamental, 5º ano Ensino Fundamental, 6º ano Ensino Fundamental, 7º ano Ensino Fundamental, 8º ano Ensino Fundamental, 9º ano Ensino Fundamental, 1º ano Ensino Médio

Atividade >

Esta atividade permite aos alunos explorar como os números são compostos, levando-os a analisar variadas maneiras de agrupá-los. Muitas estratégias e métodos diferentes podem ser utilizados para encontrar uma solução. Os alunos podem usar moedas de verdade, desenhar diagramas e usar gráficos para acompanhar suas descobertas. Ao longo do trabalho, eles perceberão muitos padrões diferentes nos números que estão explorando.



Instruções

Considere um conjunto de moedas com as seguintes características: Quando as moedas são colocadas em grupos de 2, sobra uma moeda. Quando são colocadas em grupos de três, cinco e seis, também sobra uma moeda. Mas quando são colocadas em grupos de sete, não sobra nenhuma. Qual seria o número possível de moedas?

Fonte: Disponível em: <<https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/colecao-de-moedas/>>. Acesso em: 25 ago. 2025.

E, explorando ainda mais o material disponível no site, o usuário ainda pode clicar no botão "Atividade". Nesta hora, a atividade ganha estrutura - ela se faz presente em meio a um roteiro de aula que contempla diferentes momentos próprios da abordagem Mentalidades Matemáticas, constando desde instruções/orientações para o professor, a itens adicionais ligados à atividade e cronograma com distinção dos tempos e ações idealizadas:

Achei na Internet

Figura 3: Roteiro de atividades do site - coleção de moedas

Atividade	Tempo	Descrição/Pontos	Materiais
Mensagem de Mentalidade Matemática	10 min	Exiba o vídeo de mentalidade: Estratégias para Aprender Matemática , [https://www.youcubed.org/pt-br/recursos/estrategias-para-aprender-matematica-video/]	Vídeo de Mentalidade Matemática, Estratégias para Aprender Matemática
Exploração	25 min	<ul style="list-style-type: none">• Apresente o problema.• Conceda tempo para que os alunos explorem o conjunto de moedas.	<ul style="list-style-type: none">• Fichinhas ou moedas• Tabela de Cem• Cadernos de anotações de matemática• Lápis• Lápis ou canetas de cor• Calculadoras (opcional)
Discussão	10 min	Convide os alunos a mostrar suas descobertas: Que padrões eles perceberam? Que estratégias usaram?	
Mensagem de Mentalidade Matemática pós-atividade	5 min	Peça que reflitam sobre todas as Estratégias para Aprender Matemática do vídeo: 1) Fazer um desenho, 2) Trabalhar em Grupo, 3) Experimentar, 4) Buscar recursos diferentes, 5) Começar com um caso menor. Destaque alguns momentos em que você viu indivíduos ou grupos usando essas estratégias ou peça aos alunos que digam quando usaram a estratégia ou viram outra pessoa usá-la.	

Fonte: Disponível em: <<https://www.youcubed.org/wp-content/...%A3o-de-Moedas.pdf>>.
Acesso em: 25 ago. 2025.

Esta seção Achei na Internet traz atividades que contribuem para o enriquecimento da ação matemática dos estudantes, sobretudo, por terem sido elaboradas por uma concepção de matemática que não a restringe a mera replicação algorítmica, mas sim, a compreende como área que nutre ação reflexiva, criadora e crítica; e que demanda, portanto, a participação ativa do estudante.

O site Youcubed é a recomendação da vez. Acessem, explorem, consumam as atividades disponibilizadas no site. E que usemos o material fornecido para ampliarmos as experiências matemáticas de nossos estudantes!

Pare de planejar aulas!

Colin Foster

Tenho uma proposta radical: pare de planejar aulas! Não quero dizer que você deva abandonar completamente o planejamento, mas que você deve parar de planejar aulas individuais como unidades independentes de aprendizagem. Em vez disso, sugiro planejar uma longa série de atividades destinadas a apoiar os alunos na aprendizagem do que quer que você queira ensinar, sem se preocupar com onde serão os intervalos entre as aulas.

Fazer isso tornará o planejamento muito mais fácil, removendo a restrição rígida de que tudo deve se encaixar em unidades do tamanho de uma aula. O resultado serão atividades apropriadas que levarão o tempo que o professor julgar necessário, em vez do tempo que "há disponível".

Na forma convencional de planejar aulas, o tempo de aula é frequentemente desperdiçado quando o professor tem, digamos, uma atividade de cinco minutos para fazer no final da aula, mas ainda faltam cinco minutos para começar a referida atividade.

Os alunos ficam fazendo uma atividade por mais tempo do que o professor gostaria, ou outra atividade escolhida menos por ser pedagogicamente apropriada e mais por preencher a lacuna.

Tentar dividir o aprendizado em partes do tamanho de uma aula também é um grande desperdício do tempo de planejamento dos professores. Os professores muitas vezes procuram atividades que durem um tempo específico, mas só encontram atividades muito longas ou muito curtas.

Eventualmente, chega-se a um acordo e algo é encontrado; mas, então, uma vez que a aula esteja em andamento, as outras atividades que a antecedem acabam demorando mais do que o esperado. Essa lacuna de dez minutos reduz-se a cinco minutos ou desaparece completamente, de modo que a atividade não pode ser mais usada. E se as aulas subsequentes já tiverem sido planejadas como unidades individuais, elas terão que ser redesenhadas.

Mais uma vez, um uso muito ruim do precioso tempo de planejamento dos professores.

1. Um processo confuso

Em vez disso, vamos aceitar o fato de que aprender é inevitavelmente um processo confuso e difícil de prever, mesmo para um professor experiente que trabalha com alunos que conhece muito bem.

Coisas imprevistas acontecem. Os alunos passam rapidamente por coisas que você esperava que fossem difíceis para eles e depois ficam presos em pontos que você considerava triviais.

Os professores precisam de flexibilidade para responder a qualquer situação e desacelerar ou acelerar conforme necessário, e aulas individuais rigidamente planejadas não permitem isso.

Não faz sentido, por exemplo, "fazer uma avaliação formativa" se, depois de identificar uma dificuldade do aluno, o planejamento da aula impede você de abordá-la. Tentar transformar uma aula em uma peça organizada e arrumada, com início, meio e fim (ou introdução, parte principal e plenária) pode parecer bom no papel e transmitir uma impressão de boa organização para qualquer observador que veja apenas essa aula, mas não se adequa à realidade do aprendizado. Essa abordagem dá muito peso à aula individual, em detrimento da visão mais ampla do aprendizado dos alunos ao longo de uma sequência mais longa de aulas.

Em vez disso, a aula deve simplesmente terminar quando terminar. Seja o que for que você esteja fazendo, um minuto antes de o sinal tocar, simplesmente pare e guarde suas coisas. Não adianta se apressar para terminar algo antes de o sinal tocar. Se você pudesse ter terminado mais rápido, você teria terminado. Apressar-se significa apenas que os alunos não compreenderão as ideias, ficarão confusos e ansiosos. É provável que você tenha que refazer tudo.

Isso significa que nunca há um momento ruim para a aula terminar. Suponha, por exemplo, que você acabou de explicar um novo conceito, mas os alunos não tiveram tempo de aplicá-lo e, então, o sinal toca. Tudo bem. Você pode começar a próxima aula com uma prática de recuperação: "Qual foi a ideia que apresentei no final da última aula?". Agora podemos fazer algo com isso.

Ou suponha que os alunos estejam no meio de uma discussão e ainda não tenham chegado a uma conclusão - e então o sinal toca. Tudo bem. Os alunos podem ser convidados a pensar mais sobre o assunto antes da próxima aula e vir preparados com suas ideias. Então, no início da aula seguinte, você pode receber comentários antes de recapitular e continuar.

5 PASSOS PARA PLANEJAR MENOS E FAZER MAIS

1. Pare de planejar aulas individuais.
2. Planeje uma sequência contínua de atividades que abordem exatamente o que você quer que seus alunos aprendam.
3. Sequencie sua série de atividades da melhor maneira para o aprendizado.
4. Não se preocupe com onde serão as pausas nas aulas.
5. Monitore seu progresso em relação ao seu currículo todas as semanas e ajuste o seu ritmo conforme necessário.

Do mundo para a sala de aula

2. Dificuldade desejável

Há muitas evidências da ciência cognitiva sobre os benefícios da prática de recuperação, especialmente após um intervalo de tempo (espaçamento) e outras coisas terem acontecido (intercalação). Portanto, não há vantagens poderosas em dividir o aprendizado em aulas segmentadas, como observam Yana Weinstein, Megan Sumeracki e Oliver Caviglioli em seu livro de 2018, *Understanding How We Learn*. Isso pode, inicialmente, tornar o processo de aprendizagem mais difícil e menos tranquilo, mas produz uma “dificuldade desejável” que tende a levar a melhores resultados de aprendizagem a longo prazo.

Os limites das aulas são artificiais. A aprendizagem não ocorre em unidades do tamanho de uma aula. Planejar uma longa série de atividades é mais realista.

É claro que o professor vai querer colocar tempos aproximados ao lado de suas séries de atividades, mas esses são apenas um guia. Eles devem ser verificados, digamos, semanalmente, com vistas ao que precisa ser concluído até o próximo ponto de avaliação, como o meio do semestre. Dessa forma, é a adequação de cada atividade à jornada de aprendizagem, e não o tempo que se espera que ela leve, que é o mais importante. Isso é muito melhor para a aprendizagem dos alunos. As aulas não precisam ser perfeitamente concluídas no início e no final. Os alunos não precisam sempre sair da sala de aula com uma sensação de conclusão. Sair com algumas ideias não resolvidas e coisas para refletir mais profundamente pode ser muito mais benéfico.

Este texto foi publicado originalmente na revista *Secondary*, uma publicação britânica voltada para professores de todas as áreas. Parte do seu conteúdo pode ser acessado gratuitamente pelo site www.teachwire.net/secondary.

O autor, Colin Foster, professor da Universidade de Loughborough, na Inglaterra, foi também professor de matemática na Educação Básica e hoje é pesquisador em Educação Matemática. Parte da sua produção pode ser acessada gratuitamente em www.foster77.co.uk.

O texto foi escolhido e traduzido por Leonardo Barichello.

Um caminho para introduzir equações quadráticas

Leonardo Barichello

Em 2024, assumi duas turmas de 9º ano na Escola de Aplicação da FEUSP, e um dos tópicos previstos no Plano de Ensino era equações quadráticas.

Como busco fazer sempre com os conteúdos que vou ensinar, no começo do ano procuro selecionar dois problemas para cada um dos grandes blocos de conteúdo previstos para as minhas turmas: um para ser usado no início de cada bloco, motivando o estudo daquele conteúdo, e um para ser usado no final, como uma aplicação do que foi aprendido.

Ao fazer esse exercício para o tópico equações quadráticas tive muita dificuldade para encontrar uma questão que motivasse esse estudo. Vale dizer que não sou grande entusiasta desse tópico, uma vez que tenho a sensação de que a sua dificuldade é grande e as grandes ideias que ele transmite não são suficientemente poderosas nem seu uso corrente realmente interessante.

De todo modo, como estava previsto no plano de ensino, busquei e, depois de quebrar um pouco a cabeça, encontrei a saída que relato a seguir.

1. Preparando o terreno para equações quadráticas

Comecei por inverter a ordem de dois grandes blocos de conteúdo previstos para aquelas turmas: em vez de começar com equações quadráticas e seguir para o teorema de Pitágoras, fiz o caminho oposto.

Tomei essa decisão porque acho relativamente fácil motivar o estudo do teorema de Pitágoras (é simples identificar cenários em que triângulos retângulos estão presentes e, portanto, vale o esforço conseguir determinar a medida do terceiro lado de um deles a partir dos outros dois), e, quando eu quisesse fazer a transição para equações quadráticas, bastaria propor um problema, como o que mostro a seguir, que resulte em uma equação quadrática que não possa ser resolvida por técnicas similares às usadas em equações lineares.

Uma consequência dessa proposta é que eu teria que tomar cuidado com questões que resultem em equações quadráticas completas, por exemplo, já que os estudantes não teriam ferramentas para resolvê-las. Isso, porém, não foi tão difícil, já que é possível algumas equações quadráticas incompletas serem resolvidas com técnicas que podem ser derivadas de forma direta das técnicas aplicadas para resolver equações lineares.

Inclusive, acredito que essa separação entre a resolução de equações quadráticas incompletas das completas foi um efeito benéfico dessa abordagem, já que os estudantes não ficaram tão aficionados em utilizar a fórmula resolvente para resolver qualquer equação quadrática.

2. A primeira quadrática “de verdade”

Quando o tema teorema de Pitágoras já havia sido estudado o suficiente, propus o problema abaixo. Note que ele leva a uma equação quadrática completa, cujas soluções não podem ser obtidas de forma imediata, isolando a incógnita.

Um triângulo retângulo tem hipotenusa medindo 10 centímetros e um de seus catetos é dois centímetros maior do que o outro. Qual é a medida dos três lados desse triângulo?

Note que a questão tem uma contextualização bastante artificial, porém, os estudantes já estavam convencidos da relevância do estudo do teorema de Pitágoras, portanto, a relevância da questão específica estava, de certa forma, já estabelecida.

Uma vez equacionado o problema, dediquei o restante da aula a incentivar os estudantes a resolverem a equação obtida. Foram várias as tentativas de isolar a incógnita e, como era de se esperar, todas resultaram em nada. Em dado momento, alguns estudantes identificaram, por inspeção, que 6 era uma solução da equação e chegamos até mesmo a discutir que -8 também era uma solução, embora o contexto não admitisse tal solução como resposta.

Neste momento, meu objetivo era convencê-los de que aquela equação não poderia ser resolvida com as ferramentas que eles já conheciam e que, portanto, precisaríamos estudar alguma nova ferramenta. A proposta foi bem sucedida nesse sentido e, no final da aula, propus a próxima etapa: vamos ao laboratório de informática e vocês pesquisarão como resolver essa equação onde desejarem. Além disso, vocês devem entender como a resolução foi feita para que, na aula seguinte, resolvam uma nova equação similar.

3. Pesquisando a resolução

Na aula seguinte, fomos ao laboratório de informática para que eles fizessem a pesquisa solicitada.

Foram muitas as fontes utilizadas, mas destaco quatro bastante frequentes: buscas no Google, buscas em portais de conteúdo matemático como Brainly, uso direto de softwares com funcionalidades matemáticas como o PhotoMath e uso de ferramentas de inteligência artificial generativa.

Uma vez que as primeiras soluções começaram a aparecer, pedi que todos identificassem qual foi o método utilizado para que eu agrupasse, pensando na próxima aula, estudantes que usaram o mesmo método.

Aconteceu Comigo

Os métodos que apareceram foram os esperados: fórmula resolutive, fatoração, soma e produto e completamento de quadrados. Alguns deles, porém, apareceram mais de uma vez com nomes diferentes.

Ao final dessa aula, todos os estudantes tinham anotações sobre a resolução da equação advinda do problema anterior e a classe estava dividida em 6 grupos, dentro dos quais todos os estudantes teriam utilizado o mesmo método.

4. Explicação da sua técnica

Na aula seguinte, trabalhando em grupos, os estudantes criaram um cartaz em que explicavam como resolver uma nova equação quadrática dada.

Nessa aula, em particular, contei com a ajuda de bolsistas que realizam estágio com as minhas turmas. Eles foram bastante importantes para auxiliar na provocação dos grupos no sentido de eles compreenderem o método de maneira mais geral possível.

O objetivo dessa aula era que exercitassem a abstração, buscando enxergar a generalidade dos métodos que estudaram na aula anterior. Não acho que todos tenham conseguido abstrair totalmente os seus métodos, mas acredito que o esforço para isso, combinado com a discussão que fizemos na aula seguinte, foi bastante produtivo.

5. Escolha do método

Nesta última etapa, eu expus os métodos de todos os grupos, explicando como cada um deles funciona (de um ponto de vista mais procedimental) e quais são os aspectos mais desafiadores de cada um deles (o que permitiu vislumbres mais conceituais).

Desde o início, minha intenção era focar no uso da fórmula resolutive (a tradicional fórmula de Bhaskara) e, ao longo desta minha exposição, eu conduzi a conversa de modo que eles notassem as vantagens do seu uso em relação aos outros métodos.

A partir desse ponto, as aulas seguiram um caminho mais convencional envolvendo a prática do uso da fórmula resolutive e, posteriormente, a aplicação em problemas mais contextualizados.

6. Comentários finais

Pessoalmente, fiquei muito satisfeito com essa escolha de caminho para iniciar o tema de equações quadráticas, por dois motivos. Primeiro, a introdução do novo objeto matemático ficou justificada a partir de um conteúdo imediatamente anterior que a turma estava convencida de ser relevante. Segundo, os estudantes tiveram a chance de se confrontar com a limitação das ferramentas existentes frente a esse novo objeto, o que justificou a introdução da fórmula resolutive que é, venhamos e convenhamos, substancialmente diferente e mais complexa do que tudo que foi estudado até o momento.

Acho importante salientar que estudar matemática é difícil, portanto, considero fundamental motivar a introdução de todo e qualquer novo conceito ou ferramenta. A minha impressão é de que muitos professores falham nesse aspecto por optarem por dois tipos de introduções que considero bastante inadequadas.

A primeira é aquela típica de livros técnicos de matemática e que começa com definições. Esse tipo de introdução pode até estar correta do ponto de vista lógico e axiomático, mas falha por não construir a necessidade para aquele novo objeto.

A segunda são as introduções que prometem demais, como os textos iniciais de vários capítulos de livros didáticos que sugerem, por exemplo, que o conteúdo que será estudado no capítulo sobre poliedros terá relação com a criação de personagens de filmes de animação. A relação existe, mas os estudantes não chegarão nem perto dela com o conteúdo que está previsto no currículo da Educação Básica.

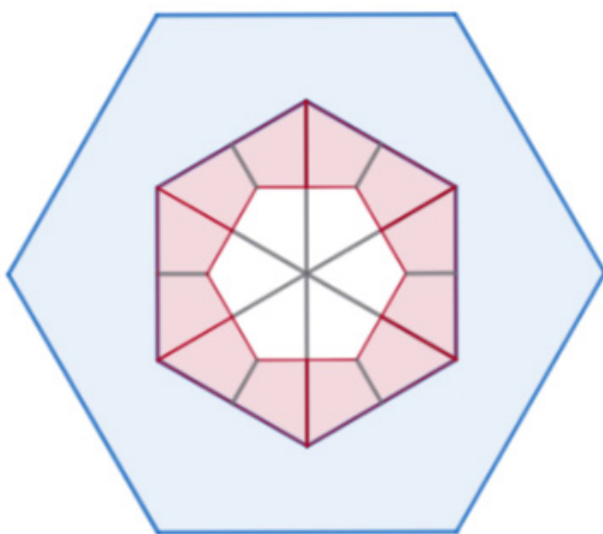
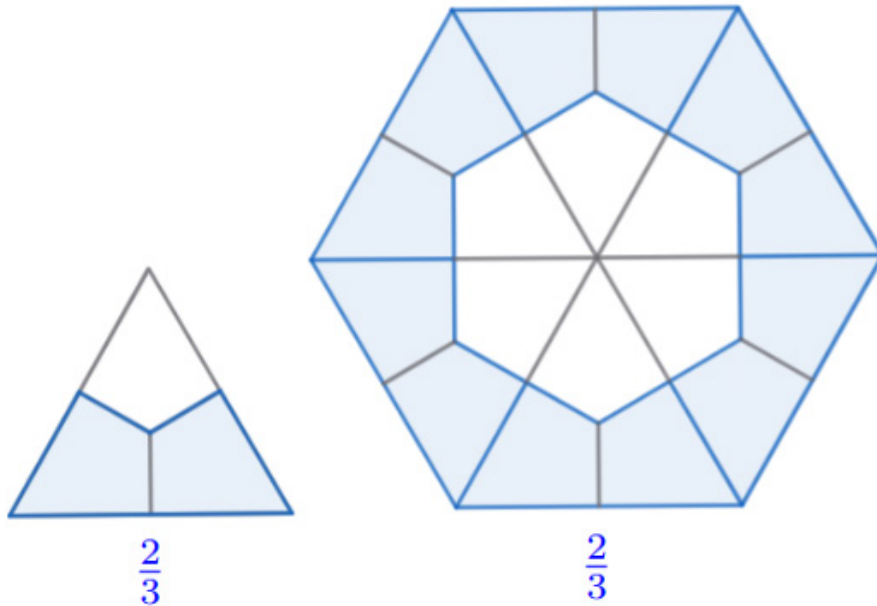
O objetivo desse relato foi mostrar um caminho simples, que não exigiu nenhum recurso extraordinário, e que parece ter sido efetivo na motivação do estudo tanto das equações quadráticas quanto dos seus métodos de resolução para uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental.

Uma imagem vale mais
do que mil números

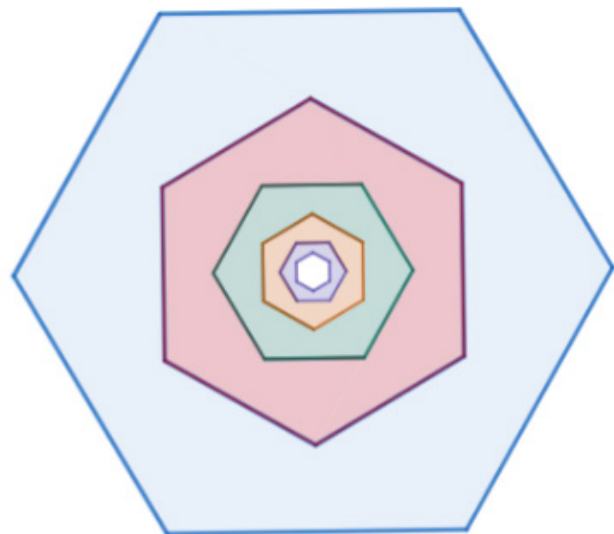
Somas sem fim

Murilo Falcirolli Amorim

Figura 1: Hexágonos com buracos hexagonais



$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}$$



$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \dots = 1$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Uma imagem vale mais do que mil números

As formas geométricas na figura anterior estão nos explicando por que a soma infinita $\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots$ é igual a 1, o que equivale a dizer que $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots = \frac{1}{2}$. Na composição, são construídos "hexágonos com buracos hexagonais", isto é, polígonos côncavos que contêm uma borda externa e uma borda interna, ambas com o formato de hexágono regular. A imagem mais à direita, que conclui essa prova visual, representa uma sequência de polígonos semelhantes, de tamanhos cada vez menores, encaixando-se perfeitamente e, no limite, cobrindo por completo o espaço interno em branco. A região em azul cobre $\frac{2}{3}$ do hexágono total; a região em vermelho cobre $\frac{2}{3}$ do "buraco" deixado pela região azul, e portanto cobre $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3}$ do hexágono, ou seja $\frac{2}{3^2}$; e assim por diante, cada região subsequente cobre um terço do que a região anterior cobriu, e o espaço vazio no centro do hexágono diminui em dois terços a cada iteração, e por isso tende a zero.

Dessa forma, as parcelas da soma infinita referida formam uma progressão geométrica (PG) de termo inicial $\frac{2}{3}$ e razão $\frac{1}{3}$. Para qualquer PG de razão r , com $0 < r < 1$, podemos calcular o valor de sua soma infinita aplicando a conhecida fórmula $s = \frac{a_1}{1-r}$, onde a_1 é o primeiro termo da soma. Mas então, se já sabemos como calcular algebricamente qualquer soma infinita de PG com razão entre 0 e 1, o que essa prova visual nos acrescenta?

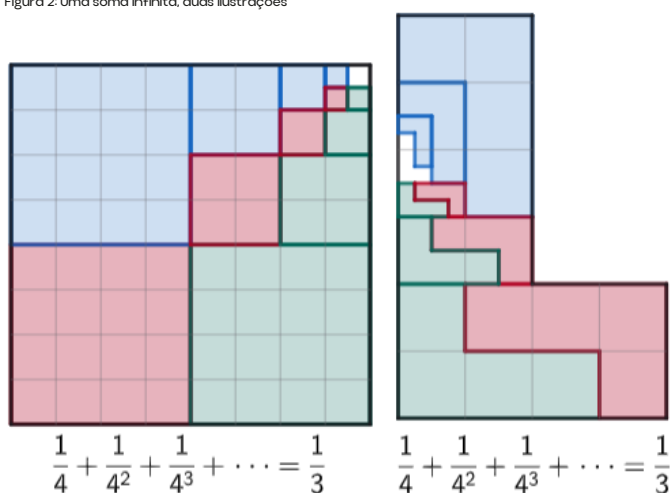
Se estivéssemos preocupados apenas com algoritmos de cálculo de somas de progressões geométricas infinitas, de fato, a abordagem geométrica da prova apresentada seria plenamente descartável, porque, além de ser trabalhosa, verifica apenas o caso específico da PG de razão $\frac{1}{3}$. O método algébrico, para esses fins, é muito mais eficiente.

Contudo, nossa preocupação, como professoras e professores de matemática, não se limita à análise da eficiência dos algoritmos, assim como garantir a validade de uma proposição não é o único objetivo de uma prova matemática na Educação Básica. Conteúdos e habilidades mobilizados no ambiente de aprendizagem desencadeado pelo ato de produzir, compreender ou analisar uma prova matemática costumam ser muito mais interessantes, do ponto de vista educacional, do que a mera validação de um resultado, de uma fórmula ou de um procedimento operacional.

Sendo assim, apesar de conhecermos fórmulas que generalizam o cálculo da soma infinita de uma PG, é inegável que a prova visual em questão mobiliza conhecimentos singulares que não são contemplados pelo algoritmo convencional. A ideia dos "hexágonos com buracos hexagonais" não pode e nem pretende ser estendida para demonstrar o caso geral. Ela "serve" apenas para o caso específico para o qual foi construída, e, para nós, nessa limitação reside o seu valor estético e didático.

Por exemplo: como calcular geometricamente o valor da soma infinita $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$? Veja a seguir duas composições possíveis para mostrar que essa soma é igual a $\frac{1}{3}$.

Figura 2: Uma soma infinita, duas ilustrações



Fonte: Elaborada pelo autor

Ambas as imagens indicam que a região do interior do polígono (o quadrado ou o "L") pode ser dividida em três partes de mesma área, cada parte colorida de uma cor (azul, vermelho ou verde). Por outro lado, cada uma dessas partes é composta por uma sequência de polígonos, na qual o maior polígono cobre $\frac{1}{4}$ da região total, o segundo maior cobre $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$ da região total (ou seja, cobre $\frac{1}{4^2}$), o terceiro maior cobre $\frac{1}{4^3}$, e assim sucessivamente.

Nessa brincadeira criativa, podemos lançar mão de diversas formas geométricas, regulares ou não, poligonais ou não, e até mesmo tridimensionais (como exercício de visualização espacial, tente calcular geometricamente a soma de uma PG infinita com razão $\frac{1}{8}$).

Para leitores e leitoras que se interessarem pela proposta de investigar e redescobrir, geometricamente, o conceito de soma de PG infinita, especialmente com o objetivo de desenvolver esse tipo de abordagem visual, intuitiva e exploratória em sala de aula, alertamos que o exercício de escolher uma PG infinita e buscar uma maneira de construí-la geometricamente pode ser muito difícil, dependendo da razão da PG (até hoje não consegui fazer uma construção elegante para a PG infinita de razão $\frac{2}{3}$). Já o caminho contrário, de construir um diagrama como os que apresentamos neste texto, e enxergar nele uma soma de PG infinita, pode ser uma introdução mais suave a esse tipo de investigação.



Associação Nacional dos Professores
de Matemática na Educação Básica

Editor:

Roberto César Cucharero Peregrina - SEEDUC
e SME do Rio de Janeiro (RJ)

Comitê Editorial

Aroldo Eduardo Athias Rodrigues - Universidade
Federal do Oeste do Pará

Leonardo Barichello - Universidade de São Paulo

Mateus Gianni Fonseca - Instituto Federal de Brasília

Romis de Sousa Moraes - SEDUC e SEMED
de Ourilândia do Norte (PA)

Rubens Lopes Netto - SEDUC e SEMED de
Mata Roma (MA)

Silmara Louise da Silva - Instituto Federal
do Triângulo Mineiro

Vitor Gustavo de Amorim - Instituto Federal
de São Paulo

Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica

✉ secretaria@anpmat.org.br

🌐 <https://anpmat.org.br/>

📞 Whatsapp ANPMat

📷 @anpmatoficial

